



e-Lecture Notes

ISSN 1970-4429

NOTE DI SISTEMI DINAMICI

Mauro Lo Schiavo

Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria

Sezione Matematica

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

Via A. Scarpa, 16 00161 Roma

mauro.loschiavo@sbai.uniroma1.it

Vol. 12 - 2013

ISBN-A: 10.978.88905708/58

Licensed under  **creative commons**

Attribution-Non-Commercial-No Derivative Works

Published by:

SIMAI - Società Italiana di Matematica Applicata e Industriale
Via dei Taurini, 19 c/o IAC/CNR
00185, ROMA (ITALY)

SIMAI e-Lecture Notes

ISSN: 1970-4429

Volume 12, 2013

ISBN-13: 978-88-905708-5-8

ISBN-A: 10.978.88905708/58

Indice

Prefazione	V
Notazione	VII
1 Equazioni Differenziali Ordinarie	
Metodi Analitici	1
1.1 I termini del problema	1
1.2 Equazioni scalari autonome	12
1.3 I teoremi fondamentali	17
1.4 Esempi e casi notevoli	27
1.5 Equazioni lineari scalari del secondo ordine	43
1.6 Ricerca di soluzioni per serie di potenze	54
2 Sistemi differenziali lineari	75
2.1 Il procedimento di linearizzazione	75
2.2 Sistemi differenziali lineari a coefficienti costanti, in $\mathbb{R}^2$	92
2.3 Sistemi differenziali lineari a coefficienti costanti, in $\mathbb{R}^n$	120
2.4 Sistemi differenziali lineari a coefficienti variabili, in $\mathbb{R}^n$	125
2.5 La teoria di Floquet	132
3 Equazioni Differenziali Ordinarie:	
Metodi Qualitativi	147
3.1 Il piano delle fasi	147
3.2 Gli integrali primi	161
3.3 Il Teorema di Poincaré - Bendixon	168
3.4 La discussione sul piano delle fasi	173
4 Cenni di stabilità	189
4.1 La stabilità lineare	189
4.2 Il metodo diretto di Liapunov	208
5 Comportamento caotico dei Sistemi	227
5.1 La mappa quadratica	227
5.2 Cenni di teoria delle biforcazioni	259
5.3 “Classici” esempi di mappe caotiche	277
5.4 “Classici” esempi di flussi caotici	288
6 Alcuni Metodi Perturbativi	303
6.1 Gli sviluppi asintotici	303
6.2 Metodi di Stiramento delle Coordinate	326
6.3 Il pendolo fisico e l’equazione di Duffing	358
6.4 Ancora sull’equazione di Duffing	373
A	379
A.1 Richiami di Analisi Funzionale. (I)	379
A.2 Richiami di Analisi Funzionale. (II)	394
A.3 Richiami di Analisi Funzionale. (III)	422
A.4 Richiami di Geometria Differenziale	434
A.5 Richiami di Algebra Lineare. (I)	443
A.6 Richiami di Algebra Lineare. (II)	459
A.7 Richiami di Analisi Reale	465
A.8 Richiami di Analisi Complessa	471
A.9 Disuguaglianza generalizzata di Gronwall	481

Prefazione

Queste Note hanno avuto origine dall'esperienza fatta impartendo lezioni di matematica applicata, ed in particolare il corso di Sistemi Dinamici, presso la facoltà di Ingegneria della "Sapienza" ormai fin dall'A.A. 1987/88.

Un'esperienza che, per il tipo ed il livello degli argomenti trattati, ha costituito una rara fortuna. *Rara*, perché è opinione di molti che le attuali discipline scientifiche "standard", ed in particolare quelle specificatamente rivolte alla formazione matematica dell'ingegnere, siano ben più che sufficienti; *fortuna*, perché il dover presentare, e far gradire, argomenti di matematica avanzata a giovani ben convinti della superiorità del fare rispetto al dire, mi ha costantemente stimolato a svilupparne l'aspetto concreto a scapito di quello puramente speculativo.

I miei pochi ma fortemente motivati studenti mi hanno fatto chiaramente sentire che il loro interesse e perfino la loro presenza in aula erano un premio, e che questo era rivolto non già alla materia, certo interessante soprattutto se nelle mani dei suoi cultori, ma a quello che la materia avrebbe potuto in futuro rendere loro.

In tal modo mi sono trovato costretto ad un particolare impegno per mettere in luce gli aspetti essenziali, e formativi, che potessero far loro rapidamente acquisire quella sensibilità matematica che non dovrebbe mancare a chi, dal difficile mondo della matematica applicata vuole acquisire, o vorrà in seguito, i metodi talvolta avanzati che sono indispensabili a risolvere problemi concreti.

Con questo spirito ho impartito il mio corso per tutti questi anni, anche in risposta alle richieste a me fatte dai colleghi ingegneri.

Non trovando alcun testo adeguato a tale scopo, ed anche a causa della mia scarsa memoria che mi costringe a preparare ogni argomento riscrivendolo quasi integralmente, iniziai a suo tempo a riempire pagine e pagine di fitti appunti che si sono via via arricchiti ed ampliati. Di nuovo i miei studenti, dopo aver vanamente tentato di interpretare il manoscritto, e disperati del dovere non solo decodificare il linguaggio matematico ma anche il mio personale, mi convinsero della necessità di "ricopiare in bella" questa raccolta, e di trasformarla in qualcosa che fosse di facile interpretazione e, possibilmente, di ancor più facile manipolazione.

L'esistenza dell'onnipresente computer, qui usato principalmente come compositore di stampa e per produrre accettabili grafici, ed il piacere di rimaneggiare con poche battute tutto un argomento, hanno fatto il resto.

Di conseguenza, anno dopo anno, ed alla luce delle considerazioni fatte l'anno prima, mi sono scoperto rimaneggiare, ampliare e rifinire un qualcosa che da disomogenea raccolta di lezioni è in definitiva diventato uno (spero) comodo promemoria. Esso si rivolge, oltre che agli allievi del corso di Sistemi Dinamici, anche a chi voglia iniziare a sopravvivere nella vasta ed intricata foresta delle metodologie proprie della matematica applicata; ed in particolare a quelli che, senza farsi scoraggiare da qualche termine tecnico e "per soli introdotti", vogliono raggiungere una visione sintetica di alcuni dei principali argomenti della matematica (deterministica) applicata ai sistemi in evoluzione.

Non mi è facile, dopo tanto rimaneggiare, rendermi conto dell'effettiva bontà del prodotto: alcuni argomenti sono rimasti molto simili a quelli originari trovati sui vari libri in circolazione, altri invece sono stati rielaborati più volte; e non tanto per partito preso, quanto perché a posteriori mi rendevo conto, dall'occhio triste e depresso della mia platea, che l'approccio adottato, seppur squisito ed ineccepibile dal punto di vista teorico e formale, era stato in realtà poco assaporato ed ancor meno digerito.

Va detto che a mia volta non mi sono facilmente arreso, e non credo di aver fatto illecite concessioni né al rigore matematico né allo spessore della presentazione. Inoltre sapendo che, per molti dei miei studenti, alcuni degli argomenti qui trattati lo sarebbero stati solo in questo corso, per favorirne la lettura ho talvolta indugiato inserendo brevi e sintetici richiami a vasti e doviziosi aspetti delle corrispondenti teorie, dall'enorme profondità concettuale ma dall'impossibile inserimento in piani di studio applicativi.

È evidente pertanto che queste note non hanno pretese di completezza o di dettaglio, viceversa cercano in generale solo di rendere l'idea nel modo più semplice possibile pur rimanendo corretto. Gli argomenti trattati sono stati solo rielaborati ed opportunamente tradotti, e non è stata mia intenzione apportare sostanziali modifiche ad una materia già largamente codificata. Essi sono tutti presenti in monografie di ben altra ampiezza alle quali si rimanda il lettore interessato. Tuttavia, la mole di esse e l'impegno necessario ad una loro anche solo iniziale lettura, sono generalmente spaventevoli. Per avvicinarsi a queste note, invece, i prerequisiti sono assai modesti: un buon corso di analisi matematica e le nozioni fondamentali di geometria sono sufficienti ad iniziarne la lettura, e permettono di procedere con quelle ulteriori idee di analisi funzionale, algebra, e geometria, necessarie nel corso di esse.

Roma 29 Maggio 2009

Notazione

Caratteri filettati spazi (con strutture); eventualmente spazi vettoriali

$\mathbb{A}$	cap. 1,2,5	spazio di funzioni
$\mathbb{B}$	cap. 1,2,4,a	base di uno spazio
$\mathbb{C}$	cap. a	spazio complesso
$\mathbb{E}$	cap. 3,5,a	spazio vettoriale (euclideo)
$\mathbb{G}$	cap. 2,a	varietà
$\mathbb{H}$	cap. 5,a	spazio di Hilbert
$\mathbb{K}$	cap. 1,a	campo numerico
$\mathbb{L}$	cap. 1,2,3,4,5,a	spazio (vettoriale) di operatori lineari
$\mathbb{M}$	cap. 1,2,3,4,5,6	varietà (differenziabile)
$\mathbb{P}$	cap. 2,4,5,6	spazio prodotto
$\mathbb{T}$	cap. 2,3,5	toro
$\mathbb{V}$	cap. 1,2,3,4,5	spazio vettoriale
$\mathbb{W}$	cap. 2,4,5	spazio vettoriale o varietà
$\mathbb{X}$	cap. 1,3,5,6	spazio di punti o di funzioni
$\mathbb{Y}$	cap. 3,5	spazio di punti o di funzioni
$\mathbb{N}$	cap. 5	insieme dei numeri interi positivi
$\mathbb{R}$	cap. 1,2,3,4,5	insieme dei numeri reali
$\mathbb{C}$	cap. 1,2,3,4,5	insieme dei numeri complessi
$\mathbb{Q}$	cap. 1,2,3,5	insieme dei numeri razionali
$\mathbb{Z}$	cap. 1,2,4,5	insieme dei numeri interi

Caratteri normali

$a, b, c, d, f, \dots$	costanti reali (o funzioni)
x, y, z, v, w	punti su varietà (eventualmente vettori)
$\psi, \phi, \chi, \dots$	funzioni reali di variabile reale, o funzioni su varietà;
i, j, k, n, ν	indici interi
A, B, C, D, J, V, Γ	insiemi (senza struttura) di punti o di funzioni
$N(x)$	intorno del punto x
$B_r(x)$	sfera di centro x e raggio r
$\mathfrak{B}$	Cap. a base di intorni
$C(\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2)$	insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}_1$ in $\mathbb{R}_2$
$L_1(\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2)$	insieme delle funzioni $\mathbb{R}_1 \rightarrow \mathbb{R}_2$ con modulo Lebesgue-integrabile
$L_2(\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2)$	spazio di Hilbert delle funzioni con modulo quadro integrabile
$\Gamma_{\mathcal{F}_0} := \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}_0)$	insieme di livello $\mathcal{F}_0$ della funzione $\mathcal{F}$
ε	costante reale piccola
ϵ	vettore (di base)
$j(x)$	funzioni di Bessel
$h_n(x)$	polinomi di Hermite
$p(x)$	polinomio
$\Gamma(x)$	funzione speciale Γ
$\Phi(t)$	sistema fondamentale
$\Psi(t)$	sistema delle evoluzioni dei vettori di base
$T_x\mathbb{M}$	spazio tangente la $\mathbb{M}$ in x

Altri caratteri

∂	operatore di derivata
τ	Cap. 1,2,3,4,5,6 periodo (durata) di tempo
$[D]$	chiusura dell'insieme D
∂D	frontiera dell'insieme D
$\{x\}$	insieme costituito dal solo elemento x
$\langle a, b \rangle$	prodotto scalare fra a e b
π^i	i -ma proiezione: $\pi^i(\mathbf{x}) = x^i$

Caratteri calligrafici

- A, B, C, D, T, P operatori su varietà; (op. lineari se su spazi vettoriali)
 $\mathcal{G}$ Cap. 1,2,3,a applicazione di avanzamento
 $\mathcal{I}$ Cap. 3 applicazione di avanzamento

Caratteri maiuscolo punti di uno spazio (affine o) fisico

- A cap. 5
 B cap. 5
 C cap. 1,2,5
 D cap. 5
 O cap. 1,2,4,5,a
 P cap. 1,2,5,a
 Q cap. 1
 Ω cap. 1,5

Caratteri gotici e corsivo

- $\mathcal{A}$ Cap. 5 attrattore
 $\mathcal{B}$ Cap. 2,a forma bilineare
 $\mathcal{D}$ Cap. 2,4 determinante, o divario
 $\mathcal{E}$ Cap. 1,3,4,6 funzione energia meccanica
 $\mathcal{F}$ Cap. 3,4,a funzione di Liapunov, o integrale primo
 $\mathcal{H}$ Cap. 2,3,4,6 funzione hamiltoniana
 $\mathcal{G}$ Cap. 5 Omomorfismo
 $\mathcal{I}$ Cap. 5 Isomorfismo
 $\mathcal{L}$ Cap. 2,3 funzione lagrangiana
 $\mathcal{K}$ Cap. 2,4 tensore della metrica
 χ Cap. 2,4 tensore della metrica
 $\mathcal{O}$ Cap. 4 funzione omogenea
 $\mathcal{Q}$ Cap. 1,4 forma quadratica
 $\mathcal{T}$ Cap. 2,3,4,a energia cinetica
 $\mathcal{W}$ Cap. 2,4 funzione wronskiano
 $\mathcal{V}$ Cap. 1,2,3,6 energia potenziale

Caratteri math grossi

- π Cap. 2,4 operatore parte quadratica dell'energia potenziale
 φ Cap. 1,2,3,4 trasformazione di rettificazione, o di coordinate
 $\mathcal{G}$ Cap. 5 generatore
 $\mathcal{S}$ Cap. 5 ricoprimento
 $\mathcal{T}$ Cap. 5,a topologia
 α Cap. 5 algebra
 β Cap. 5 algebra
 ℓ Cap. 5 linea
 γ Cap. 3,5,a linea, cammino, bordo di superficie
 ϕ Cap. a immagine di una curva
 ψ Cap. a immagine di una curva, cammino
 ω Cap. 3,4,5 insieme omega-limite

Caratteri grassetto

- a, b, c, e, f, g n -ple di numeri reali: coordinate di vettori
 α Cap. 2 n -pla di numeri reali
 γ Cap. 2,a n -pla di numeri reali
 ϵ Cap. 2,a n -pla di numeri reali
 ζ Cap. 2,a n -pla di numeri reali
 η Cap. 1,2,a n -pla di numeri reali
 θ Cap. 2,5 n -pla di numeri reali
 κ Cap. 2 n -pla di numeri reali
 ν Cap. 1,2,3,5,a n -pla di numeri reali

ξ	Cap. 2,3,5,a	n -pla di numeri reali
π	Cap. 4	n -pla di numeri reali
σ	Cap. 2,4,5	n -pla di simboli
τ	Cap. 1,2,a	n -pla di numeri reali
ϕ	Cap. 1,2,3,5,a	n -pla di numeri reali
χ	Cap. 1,2	n -pla di numeri reali
ψ	Cap. 1,2,3,5,a	n -pla di numeri reali
ω	Cap. 1,4,5,a	n -pla di numeri reali
ρ	Cap. 2,a	n -pla di numeri reali
ϱ	Cap. 2	n -pla di numeri reali
φ	Cap. 1,2,3,5	n -pla di numeri reali
ℓ	Cap. 3,a	n -pla di numeri reali

Caratteri grassetto grossi

A, B, C, D, E	n^2 -ple di numeri reali: matrici $n \times n$
T	Cap. 1,2,.. matrice dell'operatore $\mathcal{T}$
$\mathcal{T}$	Cap. 2,4 altra matrice dell'operatore $\mathcal{T}$
G	Cap. 1 matrice dell'applicazione d'avanzamento
I	Cap. altra matrice dell'applicazione d'avanzamento
Ω	Cap. 2 matrice
Λ	Cap. 2 matrice
Ξ	Cap. 2,3 matrice
Π	Cap. a matrice
Υ	Cap. 2 matrice
Φ	Cap. 1,2,a matrice di un sistema fondamentale
Ψ	Cap. 1,2,5 matrice principale
b	Cap. a matrice
c	Cap. a matrice
f	Cap. a matrice
q	Cap. a matrice
$\hat{a}$	2,4,a matrice della forma quadratica dell'energia cinetica
A	2,4,a matrice dell'operatore dell'energia cinetica
α	Cap. 2 altra matrice dell'operatore dell'energia cinetica
β	Cap. 2 altra matrice dell'operatore dell'energia potenziale
κ	Cap. 2,4,a matrice della metrica
χ	Cap. 2,4,a altra matrice della metrica
Σ	Cap. a
φ	Cap. a

Capitolo 1

Equazioni Differenziali Ordinarie Metodi Analitici

1.1 I termini del problema

Nel seguito verranno usate le seguenti locuzioni con i significati (forse talvolta riduttivi) vicino espressi:

Sistema := l'oggetto in esame, che si assume caratterizzato mediante un insieme di grandezze che si possono individuare tramite valori numerici e convenienti unità di misura.

Stato del sistema := una particolare scelta dei valori delle grandezze che descrivono il sistema.

Spazio delle fasi := collezione di tutti i possibili stati.

N.B. 1.1.1 Stato non significa necessariamente posizione o configurazione, e cioè un insieme di coordinate spaziali o generalizzate, ma piuttosto l'insieme di tutte le variabili dalle quali il sistema risulta totalmente e *definitivamente* caratterizzato (cfr. oltre). $\diamond$

Sistema dinamico := la famiglia delle trasformazioni dello spazio delle fasi in sé che fanno passare da un certo stato "attuale" ad un altro, "passato" o "futuro", e che ha come indice il parametro "tempo". Questo ha valori reali $t \in \mathbb{R}$ per sistemi continui ed ha valori interi $t \in \mathbb{Z}$ per sistemi discreti, ed entrambi sono minori o maggiori di zero, rispettivamente, per passato e futuro.

Sistema, o processo, deterministico := un sistema per il quale è *possibile individuare*, ed *univocamente*, il passato ed il futuro a partire dal suo stato attuale. Si pretende cioè che il modello matematico che ne regola l'evoluzione ammetta Esistenza ed Unicità della soluzione uscente da ogni possibile dato iniziale.

Di natura diversa sono, per esempio, i seguenti due processi.

Processo stocastico := una famiglia di funzioni definite sullo spazio delle fasi (con struttura di spazio di misura), dette *variabili casuali*, integrabili su comodi insiemi, detti *eventi*, indicata dal parametro temporale t . Le transizioni fra due istanti, così come il valore degli integrali, possono essere regolati da convenienti misure di probabilità (stabilite apriori o dedotte da osservazioni di esperimenti quali, per esempio, il lancio di un dado, la lunghezza di un messaggio, l'applicazione di una qualche matrice di transizione, etc.). Tuttavia, tali transizioni possono anche essere deterministiche, e solo le variabili non esserlo.

Processo ereditario := l'intero passato del sistema determina (o influisce) sul suo futuro.

Un esempio di sistema deterministico di evidente importanza è quello di un

Sistema meccanico a dimensione finita := lo stato è assegnato mediante la coppia $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$, $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, dove le $\mathbf{x}$ (o anche $\mathbf{q}$) sono un insieme di coordinate spaziali (o generalizzate) che individuano la configurazione del sistema; la sola $\mathbf{x}$ non lo renderebbe deterministico.

Sistemi evolutivi deterministici nella loro descrizione matematica (anche se possono non esserlo i modelli dei sistemi fisici che essi interpretano) e di "dimensione infinita" sono per esempio i sistemi continui, i sistemi quantistici, i sistemi cinetici, etc. Per essi lo spazio delle fasi è un conveniente spazio funzionale, magari discreto.

Nel seguito ci si occuperà solo di sistemi con spazio delle fasi a dimensione finita. In particolare, si tratteranno principalmente sistemi definiti su spazi (a dimensione finita e) convenientemente regolari: $\mathbb{M}$ aventi struttura di varietà differenziabili, (e cioè localmente $\mathbb{R}^n$, vedi oltre). I punti di questi, rappresentanti i possibili stati del sistema, verranno indicati con lettere minuscole in caratteri normali; le loro rappresentazioni in un qualche fissato sistema coordinate, e quindi formate da n -ple ordinate di numeri reali, dalle stesse lettere in caratteri grassetto. Quando invece si vorrà rimarcare il carattere puntuale dello spazio, in particolare dello spazio fisico tridimensionale, e distinguere (fissata la carta) un certo punto dello spazio dal vettore di posizione che gli corrisponde, quest'ultimo verrà indicato con il sopra-simbolo di vettore, o anche con la coppia di punti che ne individuano gli estremi: per esempio $\overrightarrow{OP}$ invece di quell'elemento $p \in \mathbb{M}$ le cui coordinate (fissata la carta) sono assegnate dalla n -pla $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ delle componenti del vettore di estremi (fissato il riferimento) il punto P e l'origine O .

Processo differenziabile := un sistema deterministico con spazio delle fasi avente la struttura di Varietà differenziabile, o “Manifold”: $\mathbb{M}$, (si veda: Appendice A.4), e la cui evoluzione è in esso descritta da funzioni: $g : (t, x_0) \in \mathbb{R} \mapsto g(t, x_0) \in \mathbb{M}$ differenziabili.

Più spesso con questo aggettivo si intende la prima di queste proprietà, e la seconda solo rispetto al dato: $x_0 \in \mathbb{M}$.

Verranno ora introdotte, con maggiori dettagli, le proprietà essenziali di un possibile *modello* per un processo differenziabile a dimensione finita che sia *stazionario*, e cioè tale da non contenere un *transitorio* dipendente dal particolare istante iniziale.

Si considera innanzi tutto una varietà $\mathbb{M}$ come spazio delle fasi, ed un punto $x \in \mathbb{M}$ che rappresenti lo stato del sistema in un certo istante t_0 .

Come si è detto, l'evoluzione fra t_0 e t è modellata da una trasformazione dello spazio delle fasi in sé, detta

Applicazione d'avanzamento o Operatore d'evoluzione $\mathcal{G}_{t_0}^t : \mathbb{M} \xrightarrow{ont_0} \mathbb{M}$:=

una mappa univocamente definita su tutto $\mathbb{M}$ ed a valori su tutto $\mathbb{M}$, che fa corrispondere a ciascun $x \in \mathbb{M}$ il suo evoluto $\mathcal{G}_{t_0}^t x$ dopo l'intervallo di tempo $[t_0, t]$.

Affinché una famiglia $\{\mathcal{G}_{t_0}^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ di tali applicazioni d'avanzamento possa rappresentare una evoluzione del sistema con le proprietà richieste, è necessario che *su tutto* $\mathbb{M}$

per il determinismo, sussista la: $\mathcal{G}_{t_0}^{t_1} = \mathcal{G}_t^{t_1} \mathcal{G}_{t_0}^t, \quad \forall t_0, t_1, t \in \mathbb{R};$

per la stazionarietà, sussista la: $\mathcal{G}_t^{t+\tau} = \mathcal{G}_0^\tau =: \mathcal{G}^\tau, \quad \forall \tau, t \in \mathbb{R}.$

Queste proprietà insieme forniscono:

$$\mathcal{G}^{t+\tau} = \mathcal{G}^t \mathcal{G}^\tau = \mathcal{G}^\tau \mathcal{G}^t, \quad \forall \tau, t \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Gruppo ad un parametro di evolutori := $\{\mathcal{G}^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ una famiglia di applicazioni d'avanzamento $\mathcal{G}^t : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ tali che

$$\mathcal{G}^{t+\tau} = \mathcal{G}^t \mathcal{G}^\tau \quad \forall \tau, t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{G}^0 = \mathbb{I}.$$

A volte ci si dovrà limitare a

Gruppi locali, ad un parametro := famiglie di trasformazioni che verificano la legge di composizione gruppale per valori del parametro t solo in convenienti sottoinsiemi (connessi) di $\mathbb{R}$;

o addirittura (vedi oltre) a famiglie di applicazioni d'avanzamento che *non* verificano la composizione gruppale, e cioè per le quali $\mathcal{G}_{t_1}^{t_2} \neq \mathcal{G}_0^{t_2-t_1}$. In tali casi il sistema non è stazionario e la composizione $\mathcal{G}_{t_3}^{t_4} \mathcal{G}_{t_1}^{t_2}$ è sicuramente definita solo se $t_3 = t_2$ e se, ovviamente, sono definiti i fattori.

N.B. 1.1.2 In generale, infatti, non è detto che la $\mathcal{G}_{t_3}^{t_4} \mathcal{G}_{t_1}^{t_2}$ sia un'ammissibile applicazione d'avanzamento, e cioè che per una certa evoluzione $\mathcal{G}$ esistano t_5, t_6 tali che l'assegnato sistema evolva fra t_5 e t_6 secondo la $\mathcal{G}_{t_5}^{t_6} = \mathcal{G}_{t_3}^{t_4} \mathcal{G}_{t_1}^{t_2}$. Ma se $t_3 = t_2$ il determinismo assicura che ciò accade, almeno con $t_5 = t_1$ e $t_6 = t_4$ (e sempre che il secondo membro sia definito: cioè sempre che esistano $\mathcal{G}_{t_1}^{t_2}$ e $\mathcal{G}_{t_3}^{t_4}$). Quando il sistema è stazionario, invece, per ogni $\tau \in \mathbb{R}$ ed arbitrari t, t_0 si ha che

$$\mathcal{G}_{t_0+\tau}^{t+\tau} = \mathcal{G}_{t_0}^t \quad \text{o anche} \quad \mathcal{G}_{t_0-\tau}^t = \mathcal{G}_{t_0}^{t+\tau}$$

e l'esistenza dei due fattori $\mathcal{G}^\tau$ e $\mathcal{G}^\tau$ è sufficiente a garantire quella di $\mathcal{G}^t \mathcal{G}^\tau = \mathcal{G}^{t+\tau}$.

Le due proprietà, tuttavia, sono indipendenti fra loro; ad esempio l'evoluzione $\mathcal{G}_{t_0}^t x_0 := x_0 t / t_0$ è deterministica ma non stazionaria, mentre la $\mathcal{G}_{t_0}^t x_0 := x_0$ se $t \leq t_0$ e $\mathcal{G}_{t_0}^t x_0 := x_0(1 + t - t_0)$ se $t > t_0$ è stazionaria ma non deterministica. Per ulteriori esempi si veda oltre. $\diamond$

Un buon modello per un sistema differenziabile deterministico stazionario a dimensione finita è allora dato da un:

Flusso di fase differenziabile := una funzione $g : \mathbb{R} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ definita per ogni $t \in \mathbb{R}$ ed $x \in \mathbb{M}$ dalla $g : (t, x) \mapsto \mathcal{G}^t x$, con le ipotesi che g sia differenziabile *ovunque* in $\mathbb{R} \times \mathbb{M}$ e che $\{\mathcal{G}^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ sia un gruppo ad un parametro di trasformazioni dello spazio delle fasi in sé.

Ne segue che $\mathcal{G}^t$ è, per ogni t , un

Diffeomorfismo := una corrispondenza biunivoca differenziabile con inversa differenziabile.

Per esempio $\mathcal{G}^t x := x^t$, con $x \in \mathbb{R}$ e $t = 3$, non lo è perché $(x^{1/3})'(0)$ non esiste.

Spazio delle fasi ampliato := lo spazio $\mathbb{R} \times \mathbb{M}$ delle coppie (t, x) .

Moto uscente da $x \in \mathbb{M}$ in $t = 0$:= la funzione $\hat{x} : t \in \mathbb{R} \rightarrow \hat{x}(t) \in \mathbb{M}$ definita da $\hat{x}(t) = \mathcal{G}^t x$, ove $g : (t, x) \mapsto \mathcal{G}^t x \in \mathbb{M}$ è un flusso di fase differenziabile.

Osservazione sulla notazione

- Ci si ricorda della scelta fatta del particolare $x \in \mathbb{M}$ relativo all'istante $t = 0$ con la locuzione: *moto di un "elemento" rappresentativo che all'istante $t = 0$ si trovi nel punto x dello spazio delle fasi $\mathbb{M}$* , o più brevemente con *moto di x* . È però evidente che questo moto non corrisponde generalmente ad alcun tipo di moto effettivo di alcun elemento materiale in alcuno spazio fisico.
- Inoltre è generalmente conveniente ricordare che il punto x è quello scelto all'istante t_0 indicandolo con la notazione x_0 , ma si badi bene che tale punto è del tutto generale e deve poter essere scelto arbitrariamente in tutto lo spazio delle fasi $\mathbb{M}$.
- Accade poi spesso che il superscritto: “ $\wedge$ ” della funzione $\hat{x} : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}$ scompaia e che si confonda, *nella notazione*, il punto $x \in \mathbb{M}$ con il valore assunto in t dalla funzione $\hat{x}$ e che coincide con il punto x stesso, scrivendo cioè $x = x(t)$ invece di $x = \hat{x}(t)$. Tale notazione, impropria, è comune quando si voglia ricordare esplicitamente e brevemente gli argomenti di una funzione, ed allora la locuzione “funzione $\phi(t, t_0, x_0)$ ” può perfino essere usata al posto di: funzione $\phi : (t, t_0, x_0) \mapsto \phi(t, t_0, x_0) \in \mathbb{M}$.

In particolare ciò avverrà nel seguito quando un'equazione nell'incognita funzione $\hat{x}$ contenga, per esempio in qualità di coefficienti, anche altre funzioni assegnate e generalmente non costanti: quando ciò non leda la chiarezza, queste ultime potranno essere indicate con il simbolo riservato al loro valore in un punto. Per un sistema su $\mathbb{R}^n$, per esempio, si scriverà

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{c}_1(t)\mathbf{x} + \mathbf{c}_2(t), \quad \text{con } (t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

piuttosto che

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{c}}_1 \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{c}}_2, \quad \text{con } \begin{cases} \hat{\mathbf{x}} : t \in J \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^n; \\ \hat{\mathbf{c}}_1 : t \in I \subseteq \mathbb{R} \mapsto \hat{\mathbf{c}}_1(t), \\ \mathbf{c}_1(t) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbf{c}_1(t)\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \\ \hat{\mathbf{c}}_2 : t \in I \subseteq \mathbb{R} \mapsto \hat{\mathbf{c}}_2(t) \in \mathbb{R}^n; \\ (t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \text{ con } \hat{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

Nell'Appendice A.4 vengono poi date una motivazione ed una notazione anche più generali di queste.

Curva integrale := il *Grafico del moto*, e cioè la curva nello spazio delle fasi ampliato $(\mathbb{R} \times \mathbb{M})$ costituita dalla famiglia di coppie $\{(t, \mathcal{G}_{t_0}^t x_0)\}_{t \in J \subseteq \mathbb{R}}$.

N.B. 1.1.3 Il determinismo fa sì che due curve integrali non si intersechino, e che ciascuna abbia una e una sola intersezione con i piani $t = \text{cost}$. $\diamond$

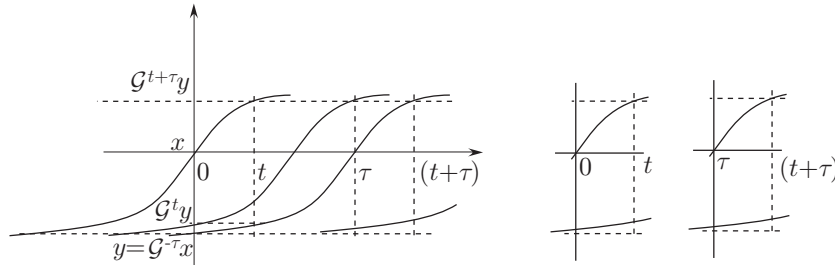
Nel caso in cui $\mathbb{M} \equiv \mathbb{R}$ è lo spazio delle configurazioni, la curva integrale è il ben noto *diagramma orario*.

Se, ma non solo se (si veda: §III.1), $\{\mathcal{G}^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ è un gruppo, le curve integrali sono invarianti per traslazioni: $t \rightarrow t + \tau$, (si veda: [Arnold I]):

Proposizione 1.1.1 Sia $\mathcal{H}_\tau : (t, x) \mapsto (t + \tau, x)$ l'operatore di traslazione lungo l'asse dei tempi nello spazio delle fasi ampliato e $\{(t, \mathcal{G}^t x)\}_{t \in \mathbb{R}}$ una curva integrale, con $\mathcal{G}^t$ verificante la proprietà di gruppo: $\mathcal{G}^{t+\tau} = \mathcal{G}^t \mathcal{G}^\tau$. Allora

$$\{\mathcal{H}_\tau(t, \mathcal{G}^t x)\}_{t \in \mathbb{R}} = \{(t + \tau, \mathcal{G}^t x)\}_{t \in \mathbb{R}} \quad \text{è anch'essa una curva integrale.}$$

Dimostrazione Dato che $\{\mathcal{G}^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ è un gruppo, esiste unico $y = \mathcal{G}^{-\tau} x$, e quindi $x = \mathcal{G}^\tau y$. Inoltre la stessa composizione $\mathcal{G}^{t+\tau} = \mathcal{G}^t \mathcal{G}^\tau$ assicura l'esistenza di: $\mathcal{G}^t x = \mathcal{G}^{t+\tau} y$. Quindi $\{(t + \tau, \mathcal{G}^t x)\}_{t \in \mathbb{R}} \equiv \{(\sigma, \mathcal{G}^\sigma y)\}_{\sigma \in \mathbb{R}}$ con $\sigma := t + \tau$.



■

Curva di fase, o Orbita, uscente da x , o Traiettorie per x := l'*Immagine del moto*, e cioè il sottoinsieme di $\mathbb{M}$ dato da $\gamma := \{\mathcal{G}_{t_0}^t x\}_{t \in J} \subset \mathbb{M}$.

N.B. 1.1.4 Se $\{\mathcal{G}^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ è un gruppo, le curve di fase non si intersecano (perché in caso contrario si potrebbero sempre trovare due curve integrali che ad esse corrispondono e che si intersecano). $\diamond$

Le seguenti definizioni (si veda anche: [Arnold I]) riassumono le varie possibilità.

Sistema dinamico (deterministico stazionario differenziabile a dimensione finita) := la coppia $(\mathbb{M}, g)$ con $\mathbb{M}$ una varietà differenziabile e g un flusso differenziabile.

Tuttavia, perfino nei casi di stazionarietà, ci si deve spesso limitare a:

Sistemi dinamici locali := $(\mathbb{M}, J_0, V_0, g)$ dove: $\mathbb{M}$ è una varietà differenziabile, J_0 un intorno dell'origine in $\mathbb{R}$, $V_0 \subseteq \mathbb{M}$ un conveniente intorno di un arbitrario punto x_0 dello spazio delle fasi $\mathbb{M}$, e g una funzione da $J_0 \times V_0$ in $\mathbb{M}$ tale che:

- (i) per ciascun fissato $t \in J_0$, l'applicazione d'avanzamento $\mathcal{G}^t : V_0 \rightarrow \mathbb{M}$ definita da $x \mapsto \mathcal{G}^t x := g(t, x)$ è un diffeomorfismo;
- (ii) per ciascun $x \in V_0$, il moto $\hat{x} : J_0 \rightarrow \mathbb{M}$ definito dalla $t \mapsto \hat{x}(t) := g(t, x)$ è una funzione differenziabile su J_0 e tale che $\hat{x}(0) = x$;
- (iii) per ogni $x \in V_0$ si ha $\mathcal{G}^{t+\tau} x = \mathcal{G}^t \mathcal{G}^\tau x$ per quei $t, \tau \in J_0$ per i quali il secondo membro è definito. Inoltre, per ogni $x \in V_0$ esistono $N(x) \subset V_0$ e $\delta > 0$ tali che $\mathcal{G}^t \mathcal{G}^\tau x'$ è definito per ogni $x' \in N(x)$ e $|\tau|, |t| < \delta$.

Nel caso non stazionario, il flusso di fase non è più invariante per traslazioni temporali: le curve integrali non è detto siano più le traslate rigide l'una dell'altra secondo l'asse delle t (e le funzioni $\phi(t+c, t_0, x_0)$ siano soluzioni della stessa equazione della quale è soluzione la $\phi(t, t_0, x_0)$). Per ogni applicazione d'avanzamento occorre allora fissare l'esplicita coppia degli istanti di riferimento, e specificare il particolare intorno $J \times V_0 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{M}$ del punto (t_0, x_0) vicino al quale si studia il sistema.

Un buon modello per l'evoluzione di un sistema deterministico non stazionario, nell'intorno di un punto $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{M}$, consiste allora in una

Famiglia locale di applicazioni d'avanzamento su $\mathbb{R} \times \mathbb{M}$:= $(\mathbb{M}, J, V_0, \tilde{g})$

dove: $\mathbb{M}$ è una varietà differenziabile, $J \times V_0 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{M}$ è un intorno del punto (t_0, x_0) e $\tilde{g}$, che verrà chiamato Avanzamento locale, una funzione $\tilde{g} : J \times J \times V_0 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{M}$ tale che, indicando con $\{t_1\}$ il singleton $\{t' \in \mathbb{R} \mid t' = t_1\}$, si abbia:

- (i) per ciascun $(t, t_1) \in J \times J$ l'applicazione $\tilde{\mathcal{G}}_{t_1}^t : (\{t_1\} \times V_0) \rightarrow J \times \mathbb{M}$ definita da $\tilde{\mathcal{G}}_{t_1}^t(t_1, x) := \tilde{g}(t, t_1, x)$ è un diffeomorfismo da $\{t_1\} \times V_0$ in $\{t\} \times \mathbb{M}$;
- (ii) per ciascun $(t_1, x) \in J \times V_0$, il Moto uscente da $x \in \mathbb{M}$ in t_1 , e cioè la mappa $\hat{x} : t \in J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \hat{x}(t) \in \mathbb{M}$ definita nella $(t, \hat{x}(t)) := \tilde{g}(t, t_1, x)$, è una funzione differenziabile su J e tale che $\hat{x}(t_1) = x$;
- (iii) sussiste la: $\tilde{\mathcal{G}}_{t_1}^{t_3}(t_1, x) = \tilde{\mathcal{G}}_{t_2}^{t_3} \tilde{\mathcal{G}}_{t_1}^{t_2}(t_1, x)$ se $t_1, t_2, t_3 \in J$ ed $x \in V_0$ sono tali che il secondo membro è definito. In tal caso, per ciascun $(t_1, x) \in J \times V_0$ esiste un intorno $N(t_1) \times N(x)$ tale che il secondo membro continua ad essere definito per ogni $x' \in N(x)$ e $t_2, t_3 \in N(t_1)$.

Identificando con un'unica $\mathbb{M}$ ogni "copia" dello spazio delle fasi, data per ogni $t \in J$ da $\{t\} \times \mathbb{M}$, si ha che la mappa $\tilde{\mathcal{G}}_{t_1}^{t_2} : \{t_1\} \times V_0 \rightarrow \{t_2\} \times \mathbb{M}$ individua la mappa $\mathcal{G}_{t_1}^{t_2} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ di cui si è parlato precedentemente, e che si riduce a $\mathcal{G}^{t_2-t_1}$ quando il sistema è stazionario.

Tale identificazione permette anche di introdurre la

Componente spaziale dell'Avanzamento locale := la funzione $\phi : J \times J \times V_0 \rightarrow \mathbb{M}$ definita dalla $(t, \phi(t, t_1, x)) := \tilde{g}(t, t_1, x)$. La sua restrizione a t e t_1 fissati arbitrari in J è un diffeomorfismo $\mathcal{G}_{t_1}^t$ da V_0 in $\mathbb{M}$, e la sua restrizione a (t_1, x) fissati arbitrari in $J \times \mathbb{M}$ è il moto $\hat{x} : J \rightarrow \mathbb{M}$ uscente da x in t_1 e quindi definito da $t \mapsto \hat{x}(t) := \phi(t, t_1, x) \equiv \mathcal{G}_{t_1}^t x$ con $\hat{x}(t_1) = \phi(t_1, t_1, x) = x$, ed analoga proprietà per il suo valore a (t, x) fissati.

Posizione di equilibrio := punto unito di una famiglia di applicazioni di avanzamento, ovvero un punto che sia esso stesso una traiettoria.

Qualora la varietà sia ad un numero infinito di dimensioni tale punto viene spesso chiamato "soluzione stazionaria", da non confondere però con un sistema stazionario.

Dato un moto $\hat{x} : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}$ definito, come si è detto, da $\hat{x}(t) := \phi(t, t_0, x_0)$, ed indicata con $x = \hat{x}(t) = \mathcal{G}_{t_0}^t x_0$ la posizione occupata all'istante t dall'elemento rappresentativo che per $t = t_0$ occupava il punto x_0 , si definisce

Velocità di fase, nel punto x , individuata dal moto $:=$ la velocità $\dot{x}$ che tale elemento rappresentativo possiede nel punto x ed all'istante t ; e cioè il valore della derivata

$$\dot{x} = \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \hat{x}(t+\tau) = \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \mathcal{G}_t^{t+\tau} x$$

essa dipende, come si vede, da x e da t e quindi, per ogni $(t, x) \in J \times V_0$, durante una certa evoluzione individuata da $\{\mathcal{G}_{t_0}^t\}_{t \in J}$ sussiste la

$$\dot{x} = v(t, x), \quad x \in \mathbb{M}, \quad v \in T_x \mathbb{M} \quad (1.2)$$

da interpretarsi come un legame (eventualmente dipendente dal tempo) che durante quella evoluzione sussiste fra la posizione all'istante t e la velocità che in quello stesso istante compete ad un elemento in quella posizione. Quando queste si intendano quali valori di funzioni del tempo, la (1.2) può essere interpretata come un'equazione funzionale avente come incognita la funzione moto, ed infatti in tutti gli istanti t di definizione il moto risulta verificare l'identità,

$$\frac{d}{dt} \hat{x}(t) \equiv \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \mathcal{G}_t^{t+\tau} x = \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \mathcal{G}_t^{t+\tau} \mathcal{G}_{t_0}^t x_0 \equiv v(t, \hat{x}(t)). \quad (1.3)$$

In particolare, se la famiglia di trasformazioni forma un *gruppo* locale, e cioè se il sistema è stazionario, questa velocità dipende solo dal punto e non dipende esplicitamente dal tempo; si ha infatti

$$\frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \mathcal{G}_t^{t+\tau} x \equiv \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \mathcal{G}^\tau x = v(x) .$$

N.B. 1.1.5 Per il momento, la funzione $v : x \mapsto v(x)$ è individuata per componenti: $v^i(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} x^i(\mathcal{G}^t x)$; e quando nel seguito si vorrà distinguere il caso scalare: $\dim \mathbb{M} = 1$ dal caso: $\dim \mathbb{M} > 1$, lo si farà con la (usuale) notazione: $\dot{x} = v(x)$ nel primo caso e $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ nel secondo. Come già accennato tuttavia, (si veda: Appendice A.4 ed [Arnold 1]) questa differente notazione avrà anche il compito di distinguere l'equazione sul tangente alla varietà dalla sua rappresentazione in coordinate. $\diamond$

Si riassume tutto ciò nel seguente modo:

La terna $(J, V_0, \mathcal{G})$ individua una famiglia di applicazioni d'avanzamento $\{\mathcal{G}_{t_0}^t\}_{t \in J}$, e questa definisce su $J \times V_0 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{M}$ un campo vettoriale $v = v(t, x) \in T_x \mathbb{M}$. Il moto $\hat{x}(\cdot, t_0, x_0) : J \rightarrow \mathbb{M}$, definito dalla

$$(t, \hat{x}(t)) := (t, \phi(t, t_0, x_0)) := (t, \mathcal{G}_{t_0}^t x_0),$$

è (una) soluzione dell'equazione differenziale associata al campo (o definita dal campo):

$$\dot{x} = v(t, x) .$$

Con ciò si intende che esso è una funzione $\hat{x} : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}$, differenziabile, tale che $\hat{x}(t_0) = \phi(t_0, t_0, x_0) = x_0$, e tale che $v(t, \hat{x}(t))$ è definito per ogni $t \in J$ e vi risulta

$$\frac{d}{dt} \hat{x}(t) = v(t, \hat{x}(t)) \quad \forall t \in J .$$

Osservazione fondamentale nello studio dei sistemi dinamici:

sotto certe condizioni è vero il viceversa: certi campi vettoriali sono tali da ammettere ed individuare una famiglia $\{\mathcal{G}^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ che è un gruppo ad un parametro.

Più in generale:

se il campo $v = v(t, x)$ è differenziabile in un aperto $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{M}$ si può mostrare (si veda: §I.3) che esiste una famiglia locale di applicazioni d'avanzamento, e quindi un avanzamento locale $\tilde{g}$ relativo ad un conveniente intorno $J \times V_0 \subseteq D$ di un arbitrario punto (t_0, x_0) interno al dominio D di regolarità del campo.

Memento 1.1.1 *Dominio := aperto, connesso, non vuoto. Qui, "aperto" nella topologia indotta dalla metrica euclidea in $\mathbb{R}^{1+n}$.*

Sotto queste ipotesi infatti, la famiglia delle soluzioni $\hat{x}$ dell'equazione $\dot{x} = v(t, x)$ uscenti in t_1 dai punti x_1 di V_0 individua, al variare di (t_1, x_1) in $J \times V_0$, una funzione $\phi : J \times J \times V_0 \mapsto \mathbb{M}$ atta a definire mediante la $(t, \phi(t, t_1, x_1)) =: \tilde{g}(t, t_1, x_1)$ un avanzamento locale $\tilde{g}$ in quanto si vedrà che:

- (i) $\tilde{g}_{t_1}^t(t_1, \cdot) := \phi(t, t_1, \cdot)$ è un diffeomorfismo da $\{t_1\} \times V_0$ in $\{t\} \times \mathbb{M}$;
- (ii) per costruzione, il flusso $\tilde{g}(\cdot, t_1, x_1)$ è compatibile con un moto $\hat{x}(\cdot)$ tale che

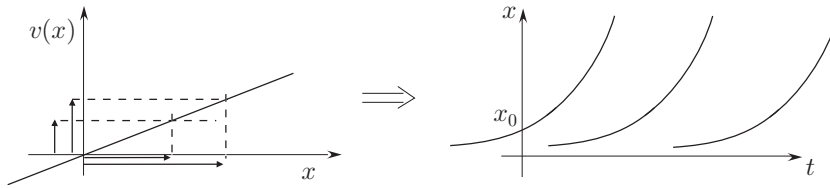
$$t \mapsto \hat{x}(t) \quad \text{è soluzione di} \quad \begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{x} = v(t, x), \end{cases} \quad \text{e verifica: } \tilde{g}(t_1, t_1, x_1) = \hat{x}(t_1) = x_1;$$

- (iii) $\tilde{g}(t_3, t_2, \tilde{g}(t_2, t_1, x)) = \tilde{g}(t_3, t_1, x)$ lì dove tali operazioni sono definite.

Nel seguito, purché ciò non dia adito a dubbi, non solo la $\hat{x}$ ma anche la funzione ϕ verrà chiamata *soluzione dell'equazione* $\dot{x} = v(t, x)$. Ciò per motivi di brevità, e vuole ricordare non solo che per (t_0, x_0) fissati in $J \times \mathbb{M}$ la $\hat{x}$ il cui valore in t è $\hat{x}(t) := \phi(t, t_0, x_0) = \mathcal{G}_{t_0}^t x_0 \in \mathbb{M}$ verifica su J la (1.2) e la condizione $\hat{x}(t_0) = x_0 \in \mathbb{M}$, ma anche che al variare di $(t_0, x_0) \in J \times V_0$ e per t fissato, il punto $x = \hat{x}(t)$ varia in modo (almeno) continuo in $\mathbb{M}$.

Inoltre, come si è già accennato, la notazione con il superscritto “ $\hat{}$ ” verrà abbandonata a meno che essa sia strettamente indispensabile. Per esempio, quando non vi siano dubbi sul punto (t_0, x_0) , si preferirà indicare la $\hat{x}(t)$ con $x(t)$.

Esempio 1.1.6 $\dot{x} = kx, \quad k, t_0, x_0 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{k(t-t_0)} x_0.$



□

Esempio 1.1.7 Si consideri l'equazione

$$\ddot{x} = k, \quad \text{con } k \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

La sua soluzione generale si può trovare integrando direttamente due volte l'equazione stessa. Scelti $t_0, x_0, \dot{x}_0$ arbitrari in $\mathbb{R}$ si ha

$$\dot{x}(t) = k(t - t_0) + \dot{x}_0, \quad \text{e} \quad x(t) = \frac{1}{2} k(t - t_0)^2 + \dot{x}_0(t - t_0) + x_0. \quad (1.5)$$

La (1.4) può essere trasformata nella seguente equivalente equazione, con $\dot{x}_0 \equiv y_0 \in \mathbb{R}$,

$$\dot{\mathbf{x}} \equiv \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \equiv \begin{pmatrix} v^x(x, y) \\ v^y(x, y) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

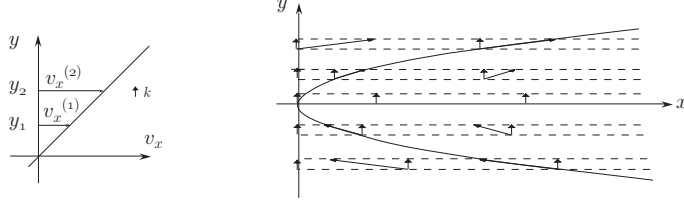
che mostra chiaramente la non linearità della (1.4).

Per brevità si ponga $\tau := (t - t_0)$; la (particolare) funzione $\eta(\tau) := k\tau^2/2$ non dipende dai dati iniziali (x_0, y_0) , si annulla con la sua derivata in $\tau = 0$, ed ha derivata seconda pari a k . La soluzione della (1.6), equivalente alla (1.4), è esprimibile come segue

$$\begin{pmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k\tau^2/2 \\ k\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\tau^2/2 + \tau y_0 + x_0 \\ k\tau + y_0 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

La curva di fase che in $t_0 = 0$ passa, per esempio, per $(0, 0)$ è il luogo

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kt^2/2 \\ kt \end{pmatrix} \quad \text{e cioè} \quad x = \frac{1}{2k} y^2. \quad (1.8)$$



Tale curva *non è la traiettoria in uno spazio fisico*, nel quale sia fissato un riferimento $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, di un elemento che si muova a partire da velocità iniziale nulla secondo l'equazione $\ddot{\vec{O}P} = k\vec{e}_1$; infatti la parabola di volo, che in questo caso degenera in una retta, e la parabola sul piano delle fasi sono curve in spazi diversi.

Si noti che con l'aggettivo *generale* qui sopra ricorda il fatto che le costanti $(t_0, x_0, \dot{x}_0)$ si riferiscono ai dati iniziali del cosiddetto “problema di Cauchy” relativo all'equazione data, e per un flusso devono poter essere scelte arbitrariamente in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

È facile verificare che la soluzione (1.7) della (1.4) non solo è compositiva in modo deterministico:

$$\phi(t_2, t_0; x_0) = \phi(t_2, t_1; \phi(t_1, t_0, x_0)) , \quad \forall (\{t_0, t_1, t_2\}, x) \in D \quad (1.9)$$

ma è anche *stazionaria*:

$$\phi(t_1, t_0; x_0) \equiv \phi(t_1 - t_0, 0; x_0) . \quad (\{t_0, t_1, t_2\}, x) \in D \quad (1.10)$$

Infatti, indicata con $\Phi(t)$ la matrice: $\Phi(t) := \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e riconosciuto che sussistono l'identità:

$$\Phi(t) \Phi(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t + \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Phi(t + \tau)$$

insieme con l'identità

$$\Phi(t)\eta(\tau) + \eta(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k\tau^2/2 \\ k\tau \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kt^2/2 \\ kt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(t + \tau)^2/2 \\ k(t + \tau) \end{pmatrix} = \eta(t + \tau),$$

si prova direttamente che il flusso $\Phi(t) x + \eta(t)$ è compositivo e stazionario:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & t - t_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k(t - t_0)^2/2 \\ k(t - t_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t - t_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & t_1 - t_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k(t_1 - t_0)^2/2 \\ k(t_1 - t_0) \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} k(t - t_1)^2/2 \\ k(t - t_1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alternativamente, la validità della (1.9) è facilmente provata se ci si serve della

$$\phi(t, t_0, x_0) \equiv \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s) \mathbf{b}(s) ds$$

con la quale è possibile esprimere la soluzione (1.7) con $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Phi^{-1}(s) \equiv \Phi(-s)$, $\mathbf{b}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$, che danno: $\eta(t) = \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s) \mathbf{b}(s) ds$ insieme con:

$$\begin{aligned} &\phi(t_2, t_1, \phi(t_1, t_0, x_0)) \\ &= \Phi(t_2)\Phi^{-1}(t_1)\phi(t_1, t_0, x_0) + \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_2)\Phi^{-1}(s) \mathbf{b}(s) ds \\ &= \Phi(t_2)\Phi^{-1}(t_1) \left(\Phi(t_1)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1)\Phi^{-1}(s) \mathbf{b}(s) ds \right) + \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_2)\Phi^{-1}(s) \mathbf{b}(s) ds \\ &= \Phi(t_1)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t_2) \int_{t_0}^{t_2} \Phi^{-1}(s) \mathbf{b}(s) ds . \end{aligned}$$

□

Si ricordi comunque che il campo $\begin{pmatrix} y \\ k \end{pmatrix}$ non è lineare: $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \neq \mathbf{v}(t, \mathbf{x}_1) + \mathbf{v}(t, \mathbf{x}_2)$, ed infatti la soluzione dell'equazione (1.4) non è somma di soluzioni: $\phi(t, x_0^{(1)} + x_0^{(2)}) \neq \phi(t, x_0^{(1)}) + \phi(t, x_0^{(2)})$.

Esempio 1.1.8 Con $k \in \mathbb{R}$ e $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrari si consideri l'equazione

$$\dot{x} = k(t - t_*) + \dot{x}_*, \quad \text{per dati } t_*, \dot{x}_* \in \mathbb{R}. \quad (1.11)$$

Innanzitutto, l'equazione implica che, comunque siano stati scelti $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$, risulta costante la differenza

$$\dot{x} - k t = \dot{x}_* - k t_* =: -k \tilde{t} = \dot{x}_0 - k t_0. \quad (1.12)$$

Poi, e mediante la costante $\tilde{t}$ assegnata dalla equazione, si vede che la (1.11) assume la forma: $\dot{x} = k(t - \tilde{t})$ e quindi ha soluzione:

$$x(t) = \frac{1}{2} k(t - \tilde{t})^2 - \frac{1}{2} k(t_0 - \tilde{t})^2 + x_0 \quad (1.13)$$

o anche, introdotta nella (1.13) la costante (arbitraria) $\tilde{x} := -k(t_0 - \tilde{t})^2/2 + x_0$,

$$x(t) = \frac{1}{2} k(t - \tilde{t})^2 + \tilde{x}. \quad (1.14)$$

La soluzione della (1.11), che dipende in modo essenziale dalle (sole) due costanti (t_0, x_0) entrambe arbitrarie, è *compositiva ma non stazionaria*; infatti dalla (1.13) segue la compositività

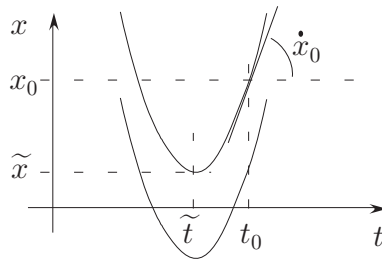
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} k(t_2 - \tilde{t})^2 - \frac{1}{2} k(t_1 - \tilde{t})^2 + \left(\frac{1}{2} k(t_1 - \tilde{t})^2 - \frac{1}{2} k(t_0 - \tilde{t})^2 \right) + x_0 \\ &= \frac{1}{2} k(t_2 - \tilde{t})^2 - \frac{1}{2} k(t_0 - \tilde{t})^2 + x_0, \end{aligned}$$

ma anche che la condizione di stazionarietà: $\phi(t + c, t_0 + c, x_0) = \phi(t, t_0, x_0)$ non è verificata, in quanto

$$\frac{1}{2} k(t + c - \tilde{t})^2 - \frac{1}{2} k(t_0 + c - \tilde{t})^2 \neq \frac{1}{2} k(t - \tilde{t})^2 - \frac{1}{2} k(t_0 - \tilde{t})^2$$

visto che $(t^2 - t_0^2) \neq (t - \tilde{t})^2 - (t_0 - \tilde{t})^2 = (t^2 - t_0^2) + 2\tilde{t}(t_0 - t)$.

In questa equazione le $(t_*, \dot{x}_*)$ non sono arbitrarie, come invece erano nella prima delle (1.5) trovata durante il procedimento di risoluzione dell'equazione (1.4), e quella, come tale, non può essere risolta da sola ma solo come seconda componente della (1.7). In primo luogo ciò comporta, tramite la (1.12), che la $\dot{x}_0$ non può essere scelta arbitrariamente, come invece accadeva nel caso della (1.5), in secondo luogo si ha che il valore della ascissa temporale non è più scelto arbitrariamente in $\mathbb{R}$, ma occorre riferirlo al valore assegnato t^* , e l'istante in cui la $\dot{x}$ si annulla esiste, unico, ed è indipendente dalle scelte arbitrarie dei dati iniziali.



□

Esempio 1.1.9 Con $k, t_0, x_0 \in \mathbb{R}$ si consideri l'equazione

$$\dot{x} = \sqrt{2k(x - \tilde{x})}, \quad \text{per un dato } \tilde{x} \in \mathbb{R}^+. \quad (1.15)$$

Questa equazione si può facilmente ricavare come conseguenza sia della (1.11) che della prima delle (1.5); a tale scopo è sufficiente riscrivere queste ultime nella forma $\dot{x} = k(t - \tilde{t})$ che dà la (1.14) dalla quale segue $k^2(t - \tilde{t})^2 = 2k(x - \tilde{x})$. Tuttavia, anche qualora la costante $\tilde{x}$ venga considerata come una costante arbitraria, la (1.15) non è equivalente né alla (1.11) né alla (1.4). Infatti

- essa contiene solo una delle due possibili determinazioni della radice quadrata;

- un qualunque valore prescelto per la $\tilde{x}$ permette come soluzione possibile della (1.15) la funzione costante $x(t) = \tilde{x}$, cosa questa non vera per le altre due citate equazioni;
- non ammette soluzione unica.
- la x_0 non è più del tutto arbitraria in $\mathbb{R}$.

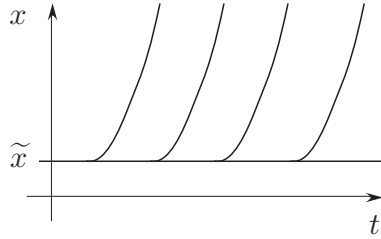
Ove possibile, la sua soluzione generale si ricava per separazione di variabili (vedi oltre) dalla

$$(t - t_0)\sqrt{2k} = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{\xi - \tilde{x}}} = 2 \left(\sqrt{x - \tilde{x}} - \sqrt{x_0 - \tilde{x}} \right).$$

Ponendo $\dot{x}_0 := \sqrt{2k(x_0 - \tilde{x})}$ e moltiplicandola per $k/\sqrt{2}$ questa fornisce (insieme con la (1.15)) la $\dot{x} = \dot{x}_0/2 + k(t - t_0)$ e cioè la prima delle (1.5), da cui segue senz'altro la seconda:

$$x(t) = x_0 + \dot{x}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}k(t - t_0)^2$$

la quale, come si è visto, è compositiva e stazionaria. Tuttavia essa, come soluzione della (1.15), *non è unica a meno di ridursi a considerare solo tempi t per i quali è $x(t) > \tilde{x}$, e quindi in particolare localmente vicino a dati per i quali $x_0 > \tilde{x}$* . Si osservi d'altra parte che per ricavare la (1.15) dalla (1.11), e cioè dalla (1.14), occorre derivare la $k(t - \tilde{t}) = \sqrt{2k(x - \tilde{x})}$ ovvero “semplificare” la $k = k\dot{x} / \sqrt{2k(x - \tilde{x})}$ proprio per il termine $\dot{x} \equiv \sqrt{2k(x - \tilde{x})}$. Se, invece, la si vuole ricavare direttamente dalla (1.4) occorre moltiplicare quest'ultima per $\dot{x}$.



□

Esempio 1.1.10 Nuovamente come conseguenza sia della (1.11) che della prima delle (1.5) e con $k, t_0, x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R}$ si può ricavare la

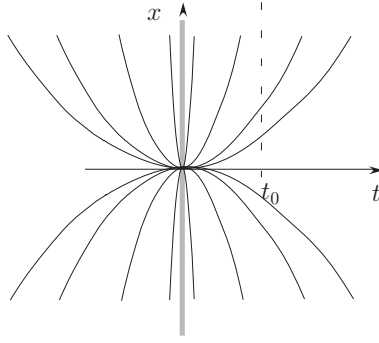
$$\ddot{x} = \frac{\dot{x} - \dot{x}_*}{t - t_*}, \quad \text{per fissati } t_*, \dot{x}_* \in \mathbb{R} \quad (1.16)$$

La sua soluzione generale si trova per separazione di variabili (vedi oltre): dalla $\ln |\dot{x} - \dot{x}_*| = \ln |t - t_*| + c$ si ottiene (localmente)

$$\dot{x} = \dot{x}_* + \frac{\dot{x}_0 - \dot{x}_*}{t_0 - t_*} (t - t_*) \quad (1.17)$$

che quindi:

- è compositiva ma non è stazionaria;
- non assegna necessariamente il valore k alla costante $c = (\dot{x} - \dot{x}_*)/(t - t_*)$ che, inoltre, dipende dai dati iniziali e muta con essi: ciascuna soluzione evolve in modo da lasciare costante il rapporto $d := (\dot{x}_0 - \dot{x}_*)/(t_0 - t_*)$;
- *impedisce* che il dato t_0 possa essere scelto uguale al valore t_* presente nell'equazione.



Infatti la (1.16), riscritta nella variabile $\xi := \dot{x}$, permette le seguenti valutazioni

$$\begin{aligned}\xi(t_0 + t, t_0, \xi_0) &= \mathcal{G}_{t_0}^{t_0+t} \xi_0 = \xi_* + \frac{\xi_0 - \xi_*}{t_0 - t_*} (t_0 + t - t_*) =: \eta_0 \\ \xi(t_0 + \tau, t_0, \eta_0) &= \mathcal{G}_{t_0}^{t_0+\tau} \eta_0 = \xi_* + \frac{\eta_0 - \xi_*}{t_0 - t_*} (t_0 + \tau - t_*) =: \tilde{\eta} \\ &= \xi_* + \frac{\xi_0 - \xi_*}{(t_0 - t_*)^2} (t_0 + t - t_*)(t_0 + \tau - t_*) \\ \xi(t_0 + t + \tau, t_0, \xi_0) &= \mathcal{G}_{t_0}^{t_0+t+\tau} \xi_0 = \xi_* + \frac{\xi_0 - \xi_*}{t_0 - t_*} (t_0 + \tau + t - t_*) =: \eta\end{aligned}$$

ed il fatto che risulti

$$\tilde{\eta} - \eta = \frac{\xi_0 - \xi_*}{(t_0 - t_*)^2} (t - \tau) \neq 0$$

mostra la non stazionarietà della soluzione. Essa è invece compositiva; si ha infatti:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{t_0+t}^{t_0+t+\tau} \eta_0 &= \xi_* + \frac{\eta_0 - \xi_*}{t_0 + t - t_*} (t_0 + t + \tau - t_*) \\ &= \xi_* + \frac{\xi_0 - \xi_*}{t_0 + t - t_*} \frac{t_0 + t - t_*}{t_0 - t_*} (t_0 + t + \tau - t_*) = \mathcal{G}_{t_0}^{t_0+t+\tau} \xi_0.\end{aligned}$$

Si osservi che fissare a priori una soluzione, e cioè fissare un (solo) dato iniziale implica il non distinguere la (1.16) dalla (1.4) (si veda l'Esempio 1.6.2 più oltre); infatti, posto per definizione $k := \xi_0 - \xi_*/(t_0 - t_*)$, le stesse relazioni qui sopra (ancora con $\xi := \dot{x}$) sarebbero state:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{t_0}^{t_0+t} \xi_0 &= \xi_* + k (t_0 + t - t_*) =: \eta_0 \equiv \xi_0 + k t \\ \mathcal{G}_{t_1}^{t_1+\tau} \eta_0 &= \xi_* + k (t_1 + \tau - t_*) =: \tilde{\eta} \equiv \eta_0 + k \tau \\ \mathcal{G}_{t_0}^{t_0+t+\tau} \xi_0 &= \xi_* + k (t_0 + t + \tau - t_*) = \eta_0 + k \tau\end{aligned}$$

Tuttavia il campo è lineare rispetto alla variabile $\tilde{\xi} := \xi - \xi_*$, e la d^2/dt^2 di ciascuna soluzione è costante. $\square$

Esempio 1.1.11 Con un procedimento analogo al precedente, dalla seconda delle (1.5) si può ricavare la

$$\ddot{x} = \frac{2(x - x_*)}{(t - t_*)^2} - \frac{2\dot{x}_*}{t - t_*}, \quad \text{con } k, t_0, x_0, \dot{x}_0, t_*, \dot{x}_* \in \mathbb{R}. \quad (1.18)$$

La soluzione di questa (siano $t_* = x_* = 0$) va trovata separando la parte omogenea (che è lineare) da quella non omogenea (vedi oltre). La prima: $\ddot{x} = 2x/t^2$ è un caso particolare dell'equazione di Eulero e si trasforma, con la posizione: $\tau := \ln|t|$ e quindi $t\partial_t = \partial_\tau$ e $t\partial_t + t^2\partial_{tt}^2 = \partial_\tau^2$, nella $x'' - x' - 2x = 0$ la cui soluzione è $x(\tau) = c_1 e^{-\tau} + c_2 e^{2\tau}$. Se ne deduce la soluzione dell'equazione omogenea (per $t > 0$):

$$\begin{pmatrix} x_{om}(t) \\ \dot{x}_{om}(t) \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \text{con } \Phi(t) := \begin{pmatrix} 1/t & t^2 \\ -1/t^2 & 2t \end{pmatrix}.$$

Analogamente a quanto visto nell'Esempio 1.1.7, e secondo quanto si vedrà più in dettaglio nel seguito, una soluzione particolare della (1.18) è allora data da

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_p(t) &= \int_0^t \Phi(t) \Phi^{-1}(\tau) \begin{pmatrix} 0 \\ -2\dot{x}_*/\tau \end{pmatrix} d\tau \\ &= \frac{1}{3} \int_0^t \begin{pmatrix} 1/t & t^2 \\ -1/t^2 & 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\tau & -\tau^2 \\ 1/\tau^2 & 1/\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2\dot{x}_*/\tau \end{pmatrix} d\tau\end{aligned}$$

e quindi

$$x_p(t) = \frac{2\dot{x}_*}{3} \int^t \left(\frac{\tau}{t} - \frac{t^2}{\tau^2} \right) d\tau = \dot{x}_* t.$$

La soluzione della (1.18) risulta quindi (indicando semplicemente t, t_0, x, x_0 invece di $t-t_*, t_0-t_*, x-x_*, x_0-x_*$)

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{x}_* t \\ \dot{x}_* \end{pmatrix} \quad \text{con}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \Phi^{-1}(t_0) \begin{pmatrix} x_0 - \dot{x}_* t_0 \\ \dot{x}_0 - \dot{x}_* \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2t_0 x_0 - t_0^2 (\dot{x}_0 + \dot{x}_*) \\ [x_0 + t_0 (\dot{x}_0 - 2\dot{x}_*)]/t_0^2 \end{pmatrix}.$$

È facile rendersi conto che questa soluzione non è certo stazionaria, dato che $\Phi(t)\Phi(\tau) \neq \Phi(t+\tau)$; essa tuttavia è compositiva, come si può facilmente controllare. Inoltre, la sua derivata seconda non è detto sia costante salvo che per quei dati iniziali per i quali la c_1 risulta nulla. Anche in tal caso, non è certo detto che la costante sia proprio k , salvo che solo per opportuni dati iniziali, infatti $c_1 = 0$ implica $x(t) = c_2 t^2 + \dot{x}_* t$ con $t_0^2 c_2 = \dot{x}_0 t_0 - x_0 \equiv x_0 - t_0 \dot{x}_*$ e quindi la residua arbitrarietà dei dati certo permette $c_2 \neq k/2$. $\square$

Nota 1.1.1 Si vede bene, dagli esempi precedenti, che il trasformare un'equazione in un'altra spesso non è una operazione semplice o gratuita. Per ottenere equazioni equivalenti a quelle dalla quale si è partiti occorre che la trasformazione sia di tipo particolare (si veda la discussione sulla equivalenza fra campi, nel Cap.3). $\triangleright$

Esempio 1.1.13 L'oscillatore armonico lineare con $t_0, x_0, y_0, \omega \in \mathbb{R}$:

$$\dot{\mathbf{x}} \equiv \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \equiv \begin{pmatrix} v^x(x, y) \\ v^y(x, y) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y \\ -\omega^2 x \end{pmatrix}.$$

Si ponga $\tau := (t - t_0)$. Una soluzione è data da

$$\tau \mapsto \begin{pmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos \omega \tau + \frac{y_0}{\omega} \sin \omega \tau \\ -\omega x_0 \sin \omega \tau + y_0 \cos \omega \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega \tau + \frac{1}{\omega} \sin \omega \tau \\ -\omega \sin \omega \tau + \cos \omega \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

infatti dalla $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ si ricava (si veda: Cap. II) $\epsilon_{(i\omega)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix}$ e quindi

$$\tau \mapsto \begin{pmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega \tau & -\sin \omega \tau \\ \sin \omega \tau & \cos \omega \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Memento 1.1.1 La velocità che compare a secondo membro della (1.2) è quella euleriana: è un campo vettoriale dipendente esplicitamente dal tempo e dalla posizione. La soluzione $t \mapsto \hat{\mathbf{x}}(t) := \phi(t, t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^3$ descrive il moto di un elemento che, avendo attraversato in t_0 il punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, all'istante t si trova nel punto $\phi(t, t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}$ con velocità $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$. $\mathbf{x}_0$ sono le coordinate identificative, secondo Lagrange.

Le Linee di flusso, o “stream lines” o “linee di campo” sono definite, istante per istante, come le linee che all'istante t passando per un punto x , hanno in x tangente parallela a $\mathbf{v}(t, x)$. Si supponga per esempio $\mathbf{x} := (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$; la loro rappresentazione, in forma cartesiana e relativa all'istante t , si trova risolvendo le equazioni (vedi oltre):

$$\frac{dx^1}{v^1(t, x^1, x^2, x^3)} = \frac{dx^2}{v^2(t, x^1, x^2, x^3)} = \frac{dx^3}{v^3(t, x^1, x^2, x^3)}, \quad x^1, x^2, x^3 \in \mathbb{R}, \quad (1.19)$$

e quindi risultano ∞^2 distinte; si noti che t rimane come parametro fissato.

Le “linee di corrente”, o “traiettorie”, o “path lines”, sono le linee descritte dagli elementi durante il loro moto. Esse pertanto sono individuate ciascuna da uno dei punti del sistema e, nel caso di un moto in $\mathbb{R}^3$, sono ∞^3 : tanti quanti sono gli x_0^1, x_0^2, x_0^3 . La loro rappresentazione cartesiana si trova eliminando t dalla loro rappresentazione parametrica: la soluzione: $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(t) := \phi(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ dell'equazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$.

Per esempio in un moto rigido traslatorio arbitrario le linee di flusso sono in ogni istante rette parallele fra loro e le linee di corrente sono curve sovrapponibili. Allo stesso modo, in un moto rigido qualunque le linee di flusso

sono in ogni istante delle eliche cilindriche. Per vederlo, si scelgano gli assi in modo che sia $\omega = (0, 0, \omega)$, e siano v_Ω la velocità di un punto Ω dello spazio mobile, e $v_\Omega^z \neq 0$. L'equazione è

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_\Omega^x \\ v_\Omega^y \\ v_\Omega^z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega(y - y_\Omega) \\ \omega(x - x_\Omega) \\ 0 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} -\omega(y - y_C) \\ \omega(x - x_C) \\ v_\Omega^z \end{pmatrix}$$

ove si è posto $\begin{cases} x_C := x_\Omega - v_\Omega^y/\omega, \\ y_C := y_\Omega + v_\Omega^x/\omega. \end{cases}$ Si osserva innanzi tutto che $v_C^x = v_C^y = 0$ e che $v_C^z = v_\Omega^z =: \mu$, e ciò per

qualsiasi z_C arbitrario. Poi, introdotte le $\begin{cases} \xi := x - x_C \\ \eta := y - y_C \end{cases}$ si vede che l'equazione diviene

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -\omega \eta \\ \dot{\eta} = \omega \xi \end{cases} \quad \text{insieme con} \quad z(t) = \mu(t - t_0) + z_C$$

ovvero

$$\frac{d(x - x_C)}{-\omega(y - y_C)} = \frac{d(y - y_C)}{\omega(x - x_C)} = \frac{d(z - z_C)}{\mu} = \frac{dt}{1} =: \frac{d\theta}{\omega}.$$

Pertanto essa può essere trasformata nella

$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + \xi = 0 \quad \text{con} \quad \theta = \frac{\omega}{\mu}(z - z_C).$$

In definitiva, tramite l'Esempio 1.1.13 si ottiene $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}$, e si osservi che $\begin{pmatrix} x_C + \xi_0 \\ y_C + \eta_0 \end{pmatrix}$ sono le coordinate dei punti intersezioni delle linee di flusso con il piano (arbitrario ma fissato) $z = z_C$. Le corrispondenti linee di flusso hanno equazioni parametriche date dalle

$$\begin{aligned} x(\theta) &= x_C + \xi_0 \cos \theta - \eta_0 \sin \theta \\ y(\theta) &= y_C + \xi_0 \sin \theta + \eta_0 \cos \theta \end{aligned} \quad \text{con} \quad \theta = \theta(z) = \frac{\omega}{\mu}(z - z_C)$$

In entrambi i casi, invece, le linee di corrente sono curve varie, almeno una delle quali arbitraria. Se il sistema è stazionario le due famiglie di linee coincidono.

In ogni caso ed in ogni istante esse risultano tangenti fra loro perché tangenti alle velocità.

È facile verificare che gli operatori di evoluzione di tutti e tre gli Esempi 1.1.6, 1.1.7, 1.1.13 verificano le proprietà di gruppo. Per esempio nel caso 1.1.7, posto $\Phi(t) := \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\eta(t) = -k \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t \end{pmatrix}$, si nota che $\Phi(t)\Phi(\tau) = \Phi(t+\tau)$ e che $\Phi(t)\eta(\tau) + \eta(t) = \eta(t+\tau)$, e quindi che $\mathcal{G}^t \mathbf{x} := \Phi(t)\mathbf{x} + \eta(t)$ verifica la proprietà.

1.2 Equazioni scalari autonome

Una campo si dice autonomo quando non dipende esplicitamente dalla variabile indipendente. In dimensione uno si ha allora il seguente problema

$$\dot{x} = v(x), \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad v \in C^{r \geq 0}(D \subset \mathbb{R}). \quad (2.20)$$

Risolvere l'equazione significa determinare il moto $\hat{x}$ dato da $\hat{x}(t) := \phi(t, t_0, x_0)$, o alternativamente tracciare la curva integrale, che per un qualunque t_0 passa per un (arbitrario) x_0 , e che, in x , è inclinata di $v(x)$.

Teorema 1.2.1 (si veda: [Arnold 1]) Sia $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita su un intervallo $V_0 := (x_1, x_2) \subseteq \mathbb{R}$, e differenziabile con derivata limitata in V_0 . Per ogni $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times V_0$, l'equazione $\dot{x} = v(x)$ ammette una soluzione $t \mapsto \hat{x}(t) := \phi(t, t_0, x_0)$ tale che $\phi(t_0, t_0, x_0) = x_0$.

Se $v(x_0) = 0$ la soluzione è $t \mapsto \phi(t, t_0, x_0) = x_0$. Se $v(x_0) \neq 0$, esiste un intorno $N(x_0) \subset V_0$ nel quale la soluzione è definita implicitamente dalla

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{v(\xi)} =: \psi(x) - \psi(x_0). \quad (2.21)$$

Due soluzioni uguali in t_0 , rimangono tali in tutto un intorno $N(t_0)$.

Dimostrazione (inizio)

Se $v(x_0) = 0$, $\hat{x}(t) := \phi(t, t_0, x_0) = x_0$ verifica equazione e condizioni iniziali.

Se $v(x_0) \neq 0$, la funzione $1/v(x)$ è definita e continua in un conveniente $N(x_0)$. La sua primitiva $\psi(x)$ esiste, unica, differenziabile in $N(x_0)$, ed è $\psi'(x) = 1/v(x) \neq 0$. Esiste quindi, su un certo $N(t_0, x_0)$, la funzione inversa $x = \hat{x}(t) := \psi^{-1}(t - t_0 + \psi(x_0))$ che vale x_0 in $t = t_0$ (ovvero $\psi(\hat{x}(t)) = t - t_0 + \psi(x_0)$). Tale funzione ha derivata

$$\frac{d}{dt} \hat{x}(t) = \frac{1}{\frac{d}{dx} \psi(x)} \Big|_{x=\hat{x}(t)} = v(\hat{x}(t)).$$

■

In tal modo è stata dimostrata l'unicità locale solo se $v(x_0) \neq 0$; e non è stata usata la differenziabilità della v . In effetti, in tale ipotesi più debole, se $v(x_0) = 0$ la soluzione $t \mapsto \hat{x}(t) := \phi(t, t_0, x_0) = x_0$ può non essere unica. Può accadere infatti che, sebbene sia $v(x_0) = 0$, eppure l'integrale (improprio) $t - t_0 = \int_{x_0}^x d\xi/v(\xi) =: \psi(x) - \psi(x_0)$ esista *finito* per $x \in V_0$; in tal caso le due funzioni $\hat{x}_1(t) := \psi^{-1}(t - t_0 + \psi(x_0))$ ed $\hat{x}(t) = x_0$ risultano entrambe soluzioni del problema (2.20).

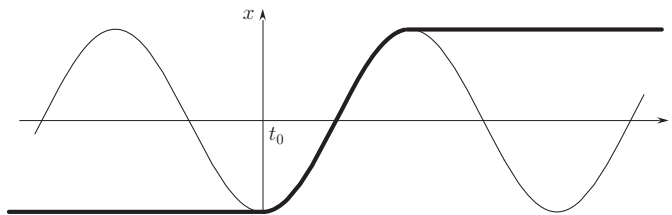
Esempio 1.2.1 $\dot{x} = \sqrt{1-x^2}$, $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$, con $|x_0| \leq 1$.

Sia $(t_0, x_0) = (t_0, -1)$. Il problema ha soluzioni per non solo:

$$t \mapsto \hat{x}(t) = -1 \quad \text{per ogni } t,$$

ma anche :

$$t \mapsto \hat{x}(t) = \begin{cases} -1 & \text{per } t - t_0 \leq 0 \\ -\cos(t - t_0) & \text{per } t - t_0 \in [0, \pi] \\ +1 & \text{per } t - t_0 \geq \pi, \end{cases}$$



ed anche, per un qualunque $t_1 > t_0$,

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} -1 & \text{per } t - t_1 \leq 0 \\ -\cos(t - t_1) & \text{per } t - t_1 \in [0, \pi] \\ +1 & \text{per } t - t_1 \geq \pi. \end{cases}$$

□

Esempio 1.2.2 $\dot{x} = x^{2/3}$, $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 = x_0 = 0$.

Il problema ha soluzione non solo $t \mapsto \hat{x}_2(t) = 0$ ma anche molte altre, per esempio, scelti arbitrariamente due istanti t_1 e t_2 tali che $t_1 \leq t_0 \leq t_2$, è soluzione la

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-t_1}{3}\right)^3 & \text{per } t \leq t_1 \leq t_0 \\ 0 & \text{per } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \left(\frac{t-t_2}{3}\right)^3 & \text{per } t_0 \leq t_2 \leq t \end{cases}$$

e cioè diverse funzioni per diverse scelte degli istanti $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

□

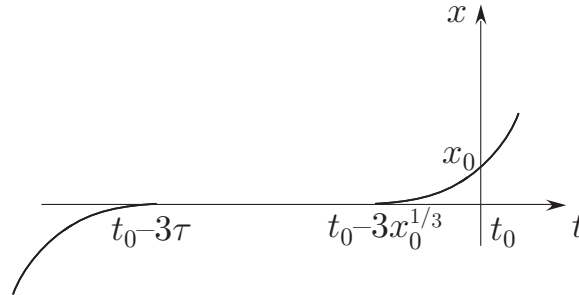
È chiaro d'altra parte che la perdita di unicità della soluzione non dipende dal dato iniziale $t_0 = x_0 = 0$ che qui si è scelto, ma solo dal fatto che in un qualche $\bar{x}$ il campo si annulla in modo tale da rendere convergente l'integrale $\bar{t} - t_0 = \int_{x_0}^{\bar{x}} d\xi/v(\xi) =: \psi(\bar{x}) - \psi(x_0)$. In tal caso la $\psi^{-1}(t - t_0 + \psi(x_0))$ e la funzione costante in $\bar{x}$ sono soluzioni dell'equazione ed hanno medesimo valore: $\bar{x}$ nel medesimo istante: $\bar{t}$.

Esempio 1.2.3 (continuazione dell'Esempio 1.2.2)

Per t_0 ed x_0 arbitrari (sia per esempio $x_0 > 0$), scelto comunque $\tau \in \mathbb{R}$ tale che $\tau \geq x_0^{1/3}$, la funzione

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-t_0}{3} + \tau\right)^3 & \text{per } t - t_0 \leq -3\tau \\ 0 & \text{per } t - t_0 \in [-3\tau, -3x_0^{1/3}] \\ \left(\frac{t-t_0}{3} + x_0^{1/3}\right)^3 & \text{per } t - t_0 \geq -3x_0^{1/3} \end{cases}$$

è soluzione dell'equazione e verifica le condizioni iniziali. Il problema però non è deterministico in quanto esistono istanti (ciascuno degli istanti nell'intervallo $[t_0 - 3\tau, t_0 - 3x_0^{1/3}]$) nei quali due distinte soluzioni assumono lo stesso valore $\bar{x} = 0$, e pertanto tale punto evolve in modo non univoco.



In modo analogo si riconosce che sono non univoche, per $t > 0$, tutte le soluzioni dell'equazione $\dot{x} = x^{1/3}$ per le quali $x_0 = 0$. Esse infatti possono valere $x(t) = 0$ per $t \leq \tau$, per un qualsiasi fissato $\tau > 0$, e $x(t) = \pm (2(t - \tau)/3)^{3/2}$ per $t > \tau$. $\square$

Se si confrontano gli esempi 1.2.1 e 1.2.2 con l'esempio 1.1.6 si osserva che, pur avendo tutti in comune il fatto che i loro campi ammettono un punto $\bar{x}$ tale che $v(\bar{x}) = 0$, tuttavia il campo dell'esempio 1.1 è, in tale punto, del tutto regolare; viceversa i campi degli esempi 1.2.1 e 1.2.2 non solo si annullano in qualche punto $\bar{x}$ dell'aperto D ma, in più, *sono in esso non differenziabili*. Essi sono *critici* per quanto riguarda l'unicità.

In particolare *non esiste* $k \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$|v(x) - v(\bar{x})| \equiv |v(x)| \leq k|x - \bar{x}|, \quad \forall x \in N(\bar{x}). \quad (2.22)$$

Lemma 1.2.1 Siano $\bar{x} \in \mathbb{R}$ ed $N(\bar{x})$ un intorno di $\bar{x}$. Siano poi $v_1, v_2 \in C^0(N(\bar{x}))$ e tali che $v_1(\bar{x}) = v_2(\bar{x}) = 0$ e che $v_1(x) < v_2(x)$, $\forall x \in N(\bar{x}) \setminus \{0\}$. Se ϕ_1 e ϕ_2 sono soluzioni rispettivamente di $\dot{x} = v_1(x)$ per $t \in J_1$ e di $\dot{x} = v_2(x)$ per $t \in J_2$ tali che $\phi_1(t_0) = \phi_2(t_0) = x_0 \in N(\bar{x})$ allora risulta:

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &\leq \phi_2(t) & \text{per } t \in [t_0, +\infty) \cap J_1 \cap J_2, \\ \phi_1(t) &\geq \phi_2(t) & \text{per } t \in (-\infty, t_0] \cap J_1 \cap J_2, \end{aligned}$$

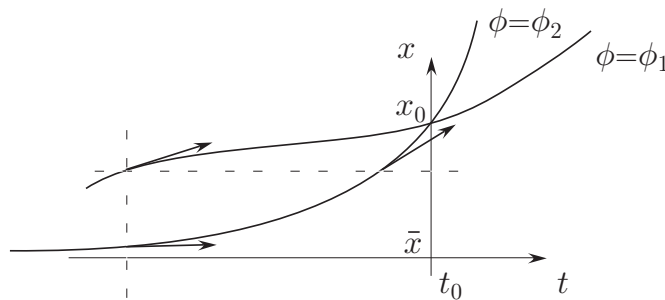
almeno fintanto che $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ sono in $N(\bar{x})$.

Dimostrazione Si dimostrerà la seconda delle due; l'altra è del tutto analoga. Per ipotesi $v_1(x_0) < v_2(x_0)$ e quindi, in un intorno sinistro di t_0 , si ha $\phi_1(t) > \phi_2(t)$. Sia $\tau := \inf \{t' \mid \text{per } t \in (t', t_0] \text{ si ha } \phi_1(t) \geq \phi_2(t)\}$. La continuità delle ϕ implica che, se $\tau \in J := J_1 \cap J_2$, allora $\phi_1(\tau) = \phi_2(\tau)$. L'ipotesi sui campi implica allora che $\dot{\phi}_1(\tau) < \dot{\phi}_2(\tau)$, e pertanto anche in un intorno sinistro di τ deve essere $\phi_1(t) > \phi_2(t)$, il che contraddice l'assunto che τ sia un estremo inferiore in J . $\blacksquare$

Ne segue che se v ammette una costante che verifichi la (2.22), ed a maggior ragione se la v è differenziabile con derivata limitata in $N(\bar{x})$, allora le curve integrali $\{(t, \phi(t, t_0, x_0))\}_{t \in J}$ che in t_0 passano per (t_0, x_0) , sia $x_0 > \bar{x}$, rimangono per $t < t_0$ inferiormente limitate dalla curva integrale, passante per lo stesso punto, dell'equazione $\dot{x} = k(x - \bar{x})$. Questa ha soluzione:

$$t \mapsto \bar{\phi}(t, t_0, x_0) = \bar{x} + e^{k(t-t_0)}(x_0 - \bar{x})$$

ed è quindi strettamente maggiore di $\bar{x}$ per ogni $t > -\infty$ se tale è stata in t_0 , e cioè se, come si è supposto, $x_0 > \bar{x}$.



Dimostrazione (del Teorema 1.2.1 fine) Si riconosce così che se il campo v verifica la (2.22) allora la soluzione costante $x = \bar{x}(t) := \phi(t, t_0, \bar{x}) = \bar{x}$ rimane separata da qualunque altra soluzione $t \mapsto x(t) := \phi(t, t_0, x_0)$ che in qualche istante sia stata diversa da $\bar{x}$, e quindi consegue che essa rimanga unica.

[La condizione dell'esistenza della costante k , che è la Lip $(\bar{x})$, è più debole della condizione che il campo sia loc.Lip $(N(\bar{x}))$ (che coincide (si veda: [Royden V.4.16]) con l'esistenza q.o. in $N(\bar{x})$ e limitatezza della $|v'|$); quest'ultima, più agevole, condizione è quella che verrà richiesta nel caso generale, non autonomo o con $\dim \mathbb{M} > 1$, vedi oltre. Qui si sfrutta il fatto che per un'equazione autonoma in $\mathbb{R}$ la non unicità può avvenire solo in punti fissati, nei quali il campo si annulla]. ■

In definitiva, se $v(\bar{x}) = 0$ l'unicità dipende dalla *rapidità* con cui $v(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow \bar{x}$. Se v si annulla abbastanza rapidamente (cioè se $|v(x)| \leq O(|x|)$) ciò non accade a $\phi(t) - \bar{x}$; l'unica soluzione per $\bar{x}$ è la costante, e ogni altra “non raggiunge in tempo” il valore $\bar{x}$. *La funzione $1/v(x)$ risulta non integrabile su $(x_0, x]$.*

N.B. 1.2.4 Quanto visto non permette di indurre che la soluzione sia definita per ogni $t \in \mathbb{R}$, e di conseguenza che $\mathcal{G}^t$, per un arbitrario fissato t , abbia come dominio l'intera retta. È però palese dalla (2.21) la proprietà di gruppo (locale) della famiglia degli evolutori della (2.20). $\diamond$

N.B. 1.2.5 Se il campo è regolare, e quindi c'è l'unicità, gli equilibri sono vere e proprie barriere che separano il piano delle fasi ampliato e verso cui le soluzioni tendono asintoticamente per $|t| \rightarrow \infty$. Inoltre è chiaro che fra un equilibrio e l'altro la soluzione è monotona. $\diamond$

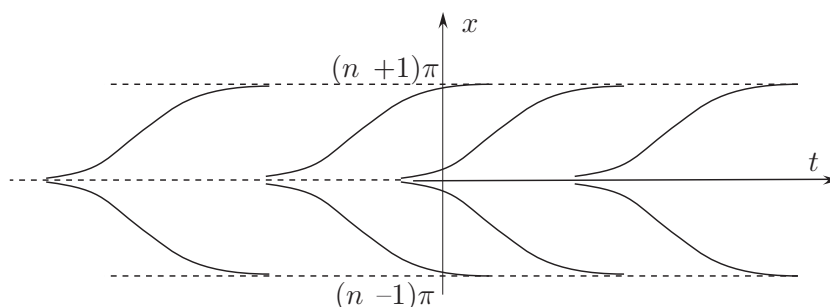
Esempio 1.2.6 $\dot{x} = \sin x, \quad t_0, x_0 \in \mathbb{R}.$

Si ponga $\tau := \tan \frac{x}{2}$. Se $x_0 \neq 0$, si ha che

$$d \left(\tan \frac{x}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) dx \quad \Rightarrow \quad \frac{d\tau}{\tau} = \frac{1 + \tau^2}{2\tau} dx = \frac{dx}{\sin x},$$

il che fornisce $\left| \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right| = \left| \tan \left(\frac{x_0}{2} \right) \right| e^{t-t_0}$. Il fatto che la funzione $\sin x$ si annulli solo nei punti $x_e = n\pi$, con $n \in \mathbb{N}$, e che né lei né la $\tan(x/2)$ cambino segno all'interno degli intervalli $(n\pi, (n+1)\pi)$, permette di stabilire l'inversione per fasce:

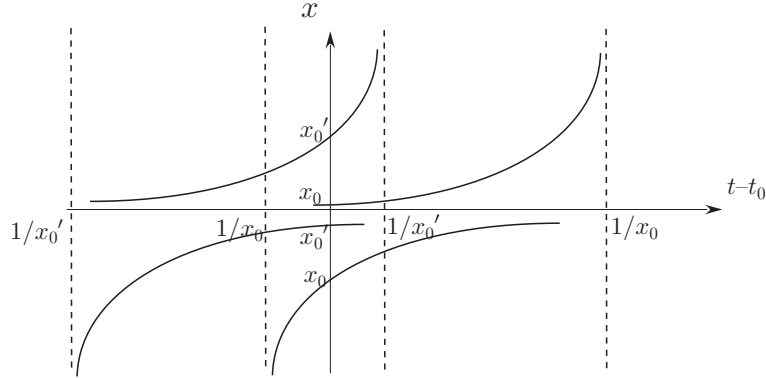
$$\hat{x}(t) = \begin{cases} n\pi & \text{se } x_0 = n\pi \\ 2 \arctan[e^{(t-t_0)} \tan(x_0/2)] \in (n\pi, (n+1)\pi) & \text{se } x_0 \in (n\pi, (n+1)\pi). \end{cases}$$

☐

Diverso è il caso degli asintoti “verticali” (cioè paralleli all’asse x) che sono invece barriere, rispetto all’ascissa temporale, per la validità della soluzione: la soluzione è *locale*, senza necessariamente contraddire l’unicità. Essi provengono da singolarità del campo, o da campi *troppo rapidi*, e se il campo è autonomo possono dipendere dalle condizioni iniziali.

Esempio 1.2.7 $\dot{x} = x^2$, $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$.

Risulta $t - t_0 = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0}$, $x = -\left(t - t_0 - \frac{1}{x_0}\right)^{-1}$, e si hanno due rami distinti, divisi da una singolarità che dipende dalle condizioni iniziali: se $x_0 > 0$ la soluzione *esiste ed è unica*, compositiva e stazionaria, ma solo per tempi $t < \frac{1}{x_0} + t_0$, se invece $x_0 < 0$, la soluzione ha tali proprietà solo per $t > \frac{1}{x_0} + t_0$.

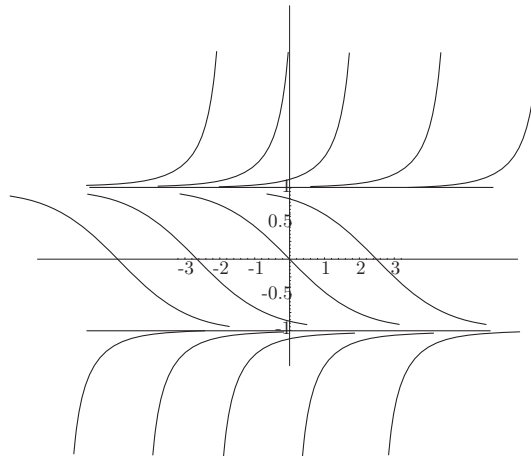


□

Esempio 1.2.8 $\dot{x} = \frac{x^2 - 1}{2}$, $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$.

Siccome $\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}$, si ha $t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\xi - 1} - \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\xi + 1}$ e quindi posto $d := \left| \frac{x_0 - 1}{x_0 + 1} \right|$ e chiamati J_- ed J_+ rispettivamente gli intervalli $(-\infty, t_0 - \ln c)$ ed $(t_0 - \ln c, +\infty)$, si ricava

$$\begin{aligned}
 x_0 > +1 &\Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = +ce^{(t-t_0)} \Rightarrow x = \frac{1 + c \exp(t-t_0)}{1 - c \exp(t-t_0)}, & \forall t \in J_- \\
 x_0 < -1 &\Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = +ce^{(t-t_0)} \Rightarrow x = \frac{1 + c \exp(t-t_0)}{1 - c \exp(t-t_0)}, & \forall t \in J_+ \\
 x_0 \in (-1, 1) &\Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = -ce^{(t-t_0)} \Rightarrow x = \frac{1 - c \exp(t-t_0)}{1 + c \exp(t-t_0)}, & \forall t \in \mathbb{R} \\
 x_0 = +1 &\Rightarrow & \Rightarrow x = +1, & \forall t \in \mathbb{R} \\
 x_0 = -1 &\Rightarrow & \Rightarrow x = -1, & \forall t \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$



□

1.3 I teoremi fondamentali

È opportuno innanzi tutto premettere una breve discussione dei principali risultati ottenuti nel precedente paragrafo.

L'equazione lineare $\dot{x} = kx$, $\hat{x}(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$ individua come si è visto la soluzione $t \mapsto \phi(t, t_0, x_0) = e^{k(t-t_0)}x_0$. Questo fatto lo si può anche interpretare come la capacità di determinare *per ogni fissato valore del parametro* $(t-t_0)$ *un operatore*: $e^{k(t-t_0)}$, *che agendo linearmente su* x_0 *ne fornisce la posizione attuale*. Tale operatore è l'operatore di moltiplicazione per il numero $e^{k(t-t_0)}$. Si può allora porre: $\mathcal{G}^{t-t_0}x_0 := e^{k(t-t_0)}x_0$, e la definizione è ben data visto che, come è noto, la funzione esponenziale si compone verificando le proprietà di gruppo rispetto al parametro t : $e^{t+\tau} = e^t e^\tau$, $\forall t, \tau \in \mathbb{R}$. D'altra parte quello che è stato definito è il più generale gruppo ad un parametro di trasformazioni lineari su $\mathbb{R}$. Infatti uno qualunque di tali gruppi determina univocamente il flusso di una equazione del tipo $\dot{x} = kx$ in quanto la velocità di fase non può che essere anch'essa lineare sulle x , e cioè, visto che $x \in \mathbb{R}$, proprio del tipo kx . Pertanto il moto deve necessariamente essere soluzione di questa equazione, ed il teorema di unicità della soluzione assicura che $\phi(t, t_0, x_0) = e^{k(t-t_0)}x_0$; il gruppo di partenza non può quindi che essere il gruppo moltiplicativo $\mathcal{G}^t \equiv e^{kt}$.

Nell'esempio 1.2.6 si è trovato, per l'operatore $\mathcal{G}^{t-t_0}$ la forma

$$\mathcal{G}^{t-t_0}x_0 = \begin{cases} 2 \arctan[\tan(x_0/2) \exp(t-t_0)] & \text{se } x_0 \neq n\pi \\ x_0 & \text{se } x_0 = n\pi, \end{cases}$$

e si vede che anche qui, fissato comunque $t-t_0$, il valore x_0 può essere scelto arbitrariamente in $\mathbb{R}$, che anche questa famiglia di applicazioni di avanzamento verifica la proprietà gruppale, e che è costituita da diffeomorfismi. In effetti, fissati t e t_0 , l'operatore $\mathcal{G}^{t-t_0}$:

- (i) è differenziabile rispetto ad x_0 ;
- (ii) è invertibile rispetto al tempo, dato che $x_1 = 2 \arctan[\tan(x_0/2) \exp(t_1-t_0)]$ equivale, in un fissato intervallo di invertibilità della tangente, alla $e^{-t_1} \tan x_1/2 = e^{-t_0} \tan x_0/2$ che è simmetrica nello scambio $(t_0, x_0) \leftrightarrow (t_1, x_1)$;
- (iii) verifica la proprietà gruppale: posto $x_1 = \mathcal{G}^{(t_1-t_0)}x_0$ e $x_2 = \mathcal{G}^{(t_2-t_1)}x_1$ risulta: $x_2 = \mathcal{G}^{(t_2-t_0)}x_0$ in quanto verifica le

$$e^{-t_2} \tan \frac{x_2}{2} = e^{-t_1} \tan \frac{x_1}{2} = e^{-t_0} \tan \frac{x_0}{2}.$$

D'altra parte non è detto che ogni equazione del tipo $\dot{x} = v(x)$ individui un gruppo ad un parametro. Nell'esempio 1.2.7, per $x_0 \neq 0$ si è trovata l'evoluzione $\mathcal{G}^{(t-t_0)}x_0 := -(t-t_0 - \frac{1}{x_0})^{-1}$ che dà $t + \frac{1}{x} = t_0 + \frac{1}{x_0}$, e quindi *verifica* (i),(ii),(iii) qui sopra, ma qualunque sia t c'è certamente almeno un x_0 , in questo caso dato da $(t-t_0)^{-1}$, sul quale $\mathcal{G}^{t-t_0}$ non è definito, e pertanto non può essere un diffeomorfismo da $\mathbb{R}$ in sé. Questo esempio individua un sistema dinamico locale (J, V_0, g) , (si veda: §.1) per il quale (se $x_0 > 0$) è: $J = (-\infty, t_0 + \frac{1}{x_0+\chi})$, $V_0 = (0, x_0 + \chi)$, per ogni (fissato) $\chi > 0$.

Nel caso in cui $|v(x)| < a|x| + b$, $v \in C^0$, $a > 0, b \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, è invece possibile ripetere il ragionamento fatto precedentemente e ricavare *l'esistenza, per ogni* $t \in \mathbb{R}$ *della soluzione*; (le curve integrali non possono avere asintoti paralleli all'asse x in quanto restano limitate dall'alto dagli esponenziali).

N.B. 1.3.1 Tutto quanto detto vale all'interno di aperti nei quali v è continua. ◇

È chiaro che il problema non si semplifichi se l'equazione non è scalare, o se non è autonoma: $\dot{x} = v(t, x)$, anche con $x \in \mathbb{R}$. Già per questa equazione infatti non esistono metodi generali di risoluzione. Anche per essa la soluzione:

- (i) può non essere unica;
- (ii) può non esistere per ogni $t \in \mathbb{R}$;
- (iii) può non dipendere in modo regolare dal dato (t_0, x_0) .

Sussistono tuttavia i seguenti basilari teoremi, tutti "locali" intorno alle assegnate condizioni iniziali: $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, e relativi alla più generale equazione differenziale ordinaria nell'incognita funzione $\hat{x} : t \in \mathbb{R} \mapsto x = \hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = v(t, x), \quad \hat{x}(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (3.23)$$

La loro validità locale implica che essi sussistano limitatamente a ciascuna carta anche quando lo spazio delle fasi è, più in generale, una varietà differenziabile $\mathbb{M}$ di dimensione finita n (vedi oltre) sulla quale sia stato scelto un sistema di coordinate reali. In tutti i seguenti enunciati si indicherà con D un *Dominio* di uno spazio reale, e cioè un insieme aperto (nella topologia indotta dalla metrica euclidea), connesso, non vuoto.

Teorema 1.3.1 (Peano) *(si veda: [Hale p.14]) Sia $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un dominio in $\mathbb{R}^{1+n}$. Se $\mathbf{v} \in C^0(D)$, e $(t_0, \mathbf{x}_0)$ è dato comunque in D , esiste almeno una soluzione della (3.23) passante per $\mathbf{x}_0$ nell'istante t_0 .*

Dimostrazione (cenno) Applicazione del teorema di punto fisso di Schauder su un sottoinsieme convesso compatto di uno spazio di Banach. Alternativamente [Michel p.46 opp. Coddington teor.1.2] si può usare il metodo di Newton-Eulero ed il teorema di Ascoli Arzelà.

In ogni caso il problema differenziale dato viene modificato in un equivalente problema integrale:

$$\widehat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}_0 = \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \widehat{\mathbf{x}}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\tau, \widehat{\mathbf{x}}(\tau)) d\tau. \quad (3.24)$$

Per esso si definisce, su un opportuno sottoinsieme dello spazio $C^0(N(t_0), \mathbb{R}^n)$, l'operatore $\mathcal{S}_+$ dato dalla

$$\mathcal{S}_+[\widehat{\mathbf{x}}](t, t_0, \mathbf{x}_0) := \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\tau, \widehat{\mathbf{x}}(\tau)) d\tau, \quad (3.25)$$

e, nel primo dei due procedimenti su accennati, si studiano le condizioni per le quali esso risulta ammettere un *punto unito*: ϕ , e cioè un punto tale che $\mathcal{S}_+[\phi] = \phi$.

Nel secondo dei due procedimenti detti, ci si limita a costruire la famiglia delle

$$\text{Spezzate di Eulero :} \quad \psi_m(t) = \psi_m(t_j) + \mathbf{v}(t_j, \psi_m(t_j))(t - t_j), \quad \text{per } t_j \leq t \leq t_{j+1},$$

con $|t_{j+1} - t_j| \leq \delta_m$ ove $\{\delta_m\}_{m=1,2,\dots}$ è una successione di numeri reali convenientemente piccoli rispetto alla rapidità di crescita del campo $|\mathbf{v}|$ e tali che $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m, \dots) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$. La famiglia delle Spezzate di Eulero è precompatta in quanto equicontinua uniformemente limitata come sottoinsieme di $C([t_0, t_0 + a'], \mathbb{R} : \|\cdot\|_\infty)$. Esiste pertanto in C almeno un punto di accumulazione di tali spezzate; esso sarà tale da verificare la (3.24) punto per punto. (Certo sarà soluzione. Se però questa non è unica, non è detto che queste siano tutte ottenibili in questo modo. Per esempio per la $\dot{x} = |x|^{1/2}$ con $x_0 = 0$, il metodo fornisce solo la soluzione nulla). ■

N.B. 1.3.2 Il teorema è locale nel senso che scelto un qualsiasi $(t_0, \mathbf{x}_0) \in D$ e fissato comunque un compatto $\Gamma \subset D$ del quale $(t_0, \mathbf{x}_0)$ è punto interno, si può garantire l'esistenza della soluzione uscente da $(t_0, \mathbf{x}_0)$ solo per tempi $t \in J := B_{a'}(t_0)$ con a' che dipende: dall'ampiezza del compatto Γ , dalla posizione di $(t_0, \mathbf{x}_0)$ all'interno di Γ , e da un parametro $a(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}$ che a sua volta dipende dalla rapidità di crescita del campo nell'intorno di $(t_0, \mathbf{x})$; per esempio nel successivo Teorema 1.3.1 è $a'(\mathbf{v}) \leq \min\left(\frac{\Delta b(\Gamma)}{\max_\Gamma |\mathbf{v}|}, \frac{1 - \varepsilon}{k_{Lip}(\mathbf{v})}\right)$, con $\varepsilon > 0$ e $\Delta b := b - b'$ che dipende anch'essa da Γ e dalla posizione di $(t_0, \mathbf{x}_0)$ in Γ . ◇

Nel seguito si continuerà ad indicare con $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ l'insieme *aperto* di regolarità del campo.

Prolungabilità := Fissato $(t_0, \mathbf{x}_0) \in D$, una soluzione $\phi = \phi(t, t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^n$ dell'equazione (3.23), definita su $[t_0, b]$ si dice prolungabile (come soluzione, non come funzione) nella $\phi_+ = \phi_+(t, t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^n$ definita su $[t_0, b_+]$ quando accade che ϕ_+ è soluzione della equazione sull'intervallo $[t_0, b_+]$, con $b_+ > b$, e risulta $\phi_+(t) = \phi(t)$, per ogni t in $[t_0, b]$. Analoghe considerazioni valgono naturalmente per l'intervallo di definizione precedente l'istante iniziale: $[a, t_0]$.

Quando il procedimento di prolungabilità non è ulteriormente possibile, l'estremo superiore dei b e l'estremo inferiore degli a , che verranno indicati con m_1 , ed m_2 rispettivamente, individuano il:

Massimo Intervallo $J_M \equiv (m_1, m_2)$ di esistenza contenente t_0 . Esso è senz'altro aperto in quanto, per il teorema di esistenza, il suo "sup", (per esempio), non può essere un "max" visto che se lo fosse la soluzione esisterebbe in tutto un suo intorno (aperto).

Teorema 1.3.1 (di prolungabilità) *(si vedano: [Hartman p.13], [Michel II.3.1], [Coddington p.13]) Con le stesse notazioni del Teorema 1.3.1, sia $\mathbf{v} \in C^0(D)$ e limitata in un aperto $U \subset D$, e sia $\phi : t \mapsto \phi(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ una soluzione uscente da $(t_0, \mathbf{x}_0) \in U$ e definita su un qualche intervallo $(a, b) =: J \subset J_M$, con $t_0 \in J$, e tale che $J \times \phi(J) \subset U$. Allora esistono i limiti: $\phi(a^+)$ e $\phi(b^-)$. Inoltre, posto (ad esempio) $\mathbf{x}_b := \phi(b^-)$, se il punto $(b, \mathbf{x}_b)$ appartiene a D (ne è interno) allora ϕ può essere definita su $(a, b]$, e quindi essere prolungata oltre b .*

Ovviamente lo stesso vale per a .

Dimostrazione Sia $\lambda := \sup_{(t,\mathbf{x}) \in U} |\mathbf{v}(t, \mathbf{x})|$ e sia $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione monotona: $a < t_n \nearrow b$. Vale la maggiorazione

$$|\phi(t_h) - \phi(t_k)| = \left| \int_{t_k}^{t_h} \mathbf{v}(t, \phi(t)) dt \right| \leq \lambda |t_h - t_k|.$$

Pertanto $\{\phi(t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy, e ciò assicura l'esistenza di $\mathbf{x}_b := \phi(b^-)$ in $\mathbb{R}^n$. Poi, se $(b, \mathbf{x}_b)$ è in U si definisce, per $\varepsilon > 0$ e $t \in [t_0, b + \varepsilon)$,

$$\tilde{\phi}(t, t_0, \mathbf{x}_0) := \begin{cases} \phi(t, t_0, \mathbf{x}_0) & \text{per } t \in [t_0, b) \\ \text{una soluzione per } (b, \mathbf{x}_b) & \text{per } t \in [b, b + \varepsilon). \end{cases}$$

Essa è soluzione su tutto $[t_0, b + \varepsilon)$ poiché per costruzione è $\tilde{\phi}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\tau, \tilde{\phi}(\tau)) d\tau$ per ogni $t \in [t_0, b + \varepsilon)$. In più, la sua continuità implica quella di $\mathbf{v}(t, \tilde{\phi}(t))$ e quindi quella della derivata $d\tilde{\phi}(t)/dt$. ■

Si indichi con la notazione: $|t| + |\phi| \rightarrow \infty$ l'eventualità che ϕ sia definita per $|t|$ comunque grandi, oppure che il vettore $\mathbf{x} := \phi(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ assuma lunghezza comunque grande.

Corollario 1.3.1 Sia $\mathbf{v} \in C^0(D)$. Allora

o è $|t| + |\phi| \rightarrow \infty$, oppure $(t, \phi(t, t_0, \mathbf{x}_0)) \xrightarrow[t_{JM}]{} \partial D$. La prima eventualità accade se $\partial D = \emptyset$.

Dimostrazione Se non si verifica la prima eventualità, e detto per esempio $m_2 < \infty$ l'estremo destro di J_M , si supponga che sia $(m_2, \phi(m_2^-)) \in \overset{\circ}{D} \equiv D \neq [D]$. Certo esisterebbe un $U := N(m_2, \phi(m_2^-)) \subset D$ sul quale il campo è limitato, contraddicendo la massimalità di m_2 . ■

Ci si ricorda di tutto ciò affermando che: ϕ può essere prolungata fino alla frontiera di un qualunque compatto K che, contenente $(t_0, \mathbf{x}_0)$, sia contenuto in D ; ove:

ϕ è prolungabile fino ad un insieme $F \subset \mathbb{R} \times \mathbb{M}$:= la soluzione ϕ della (3.23) è definita su $[t_0, \tau]$ e si ha che $(\tau, \phi(\tau, t_0, \mathbf{x}_0)) \in F$.

Per discutere l'unicità delle soluzioni in corrispondenza a ciascun dato iniziale risultano utili le seguenti considerazioni.

Condizioni di Lipschitz := Quando, per ciascun compatto $\Gamma \subset D \subseteq \mathbb{R}^{1+n}$ esiste $k_\Gamma \in \mathbb{R}^+$ tale che $|\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{v}(t, \mathbf{y})| \leq k_\Gamma |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ per ogni $(t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{y}) \in \Gamma$, allora il campo $\mathbf{v}$ si dice localmente Lipschitz su D , o “loc.Lip (D)”, relativamente a $\mathbf{x}$. $\mathbf{v}$ si dice Lipschitz su D , o “uniformemente Lipschitz continua su D ”, (relativamente a $\mathbf{x}$) se il numero k è unico su tutto D .

N.B. 1.3.3

$\mathbf{v} \in C^1(D) \Rightarrow \mathbf{v} \in \text{loc.Lip } (D)$ relativamente ad $\mathbf{x}$.

$\mathbf{v} \in \text{Lip}(D) \Rightarrow \mathbf{v}$ uniformemente continua rispetto ad $\mathbf{x}$, e per ogni t . ◇

Lemma 1.3.1 (di Gronwall) (si veda anche l'Appendice A.9)

Siano $f : [a, b] \subset \mathbb{R}$, $f \in C^0([a, b])$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\chi| \in L_1([a, b])$, con $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Allora, per $t \in [a, b]$

$$\begin{aligned} |f(t)| \leq |\alpha| + \int_a^t |f(s)\chi(s)| ds & \quad \text{implica} \quad |f(t)| \leq |\alpha| \exp \int_a^t |\chi(s)| ds ; \\ |f(t)| \leq |\alpha| + \int_t^b |f(s)\chi(s)| ds & \quad \text{implica} \quad |f(t)| \leq |\alpha| \exp \int_t^b |\chi(s)| ds . \end{aligned}$$

Dimostrazione Sia $h(t) := |\alpha| + \int_a^t |f(\tau)\chi(\tau)| d\tau$, per $t \in [a, b]$.

Per ipotesi è: $|f(t)| \leq h(t)$ e quindi $\dot{h} = |f\chi| \leq |\chi|h$. Ne segue che $\dot{h} - |\chi|h \leq 0$, che implica la decrescenza della funzione $h(t) \exp \left(- \int^t |\chi| \right)$. Quindi per $t \in [a, b]$ si ha $|\alpha| \exp \left(- \int^a |\chi| \right) \geq h(t) \exp \left(- \int^t |\chi| \right)$, che dà

$$|f(t)| \leq h(t) \leq |\alpha| \exp \int_a^t |\chi(\tau)| d\tau .$$

La seconda disuguaglianza si dimostra in modo analogo osservando che, nel secondo caso, è $\dot{h} = -|f\chi| \geq -|\chi|h$. ■

Teorema 1.3.1 (di unicità) (si veda: [Michel Teor. 4.2]) Con le stesse notazioni del Teorema 1.3.1, sia $\mathbf{v} \in C^0(D)$. Se $\mathbf{v}$ è anche loc.Lip (D) allora la soluzione $\phi : t \mapsto \phi(t, t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^n$ dell'equazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ uscente da un (arbitrario) dato iniziale $(t_0, \mathbf{x}_0) \in D$ è unica.

Dimostrazione Per assurdo, si applica il Lemma di Gronwall alla differenza

$$|\phi_1(t) - \phi_2(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\tau, \phi_1(\tau)) - \mathbf{v}(\tau, \phi_2(\tau)) d\tau \right| \leq \int_{t_0}^t k_\Gamma |\phi_1(\tau) - \phi_2(\tau)| d\tau .$$

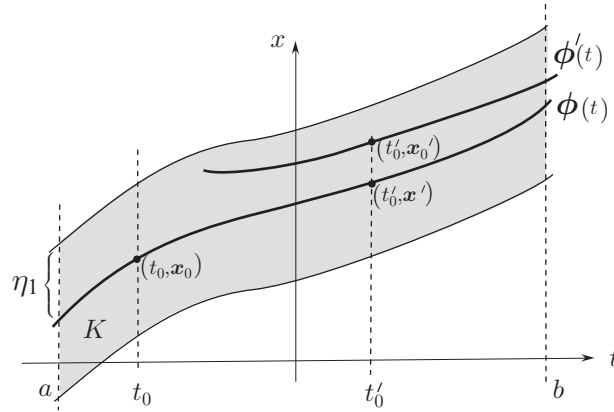
■

Corollario 1.3.1 (di continuità)

In tali ipotesi, ϕ è continua rispetto a $(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ su $(a, b) \times (a, b) \times N(\mathbf{x}_0)$.

Più precisamente: se una soluzione $t \mapsto \phi(t) := \phi(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ è definita su $[a, b] \ni t_0$ allora la soluzione $t \mapsto \phi'(t) := \phi(t, t'_0, \mathbf{x}'_0)$ uscente da un $(t'_0, \mathbf{x}'_0)$ scelto comunque in un conveniente $W' := (a, b) \times B_\eta(\mathbf{x}') \subset D$, ove si è chiamato $\mathbf{x}' := \phi(t'_0, t_0, \mathbf{x}_0)$, esiste almeno su (a, b) ed è tale che: dato comunque $\varepsilon > 0$, esiste $\delta(\varepsilon, a, b; t', t'_0, \mathbf{x}'_0)$ per il quale

$$|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}''_0| + |t'_0 - t''_0| + |t' - t''| < \delta \quad \text{implica} \quad |\phi(t', t'_0, \mathbf{x}'_0) - \phi(t'', t''_0, \mathbf{x}''_0)| < \varepsilon .$$



Dimostrazione Chiamata ancora, per brevità, $\phi(t) := \phi(t, t_0, \mathbf{x}_0)$, sia $\eta_1 > 0$ tale che l'insieme compatto $K := \{(t, \mathbf{x}) \mid t \in [a, b], |\mathbf{x} - \phi(t)| \leq \eta_1\}$ sia in D , e si ponga $\eta := \eta_1 \exp(-k_K(b-a))$. Per $(t'_0, \mathbf{x}'_0) \in (a, b) \times B_\eta(\mathbf{x}')$ il teorema di esistenza assicura che $\phi'(t) := \phi(t, t'_0, \mathbf{x}'_0)$ esiste per t prossimo a t'_0 e, fintanto che esiste, verifica la

$$\phi(t, t'_0, \mathbf{x}'_0) = \mathbf{x}'_0 + \int_{t'_0}^t \mathbf{v}(\tau, \phi(\tau, t'_0, \mathbf{x}'_0)) d\tau .$$

Ma è anche, per $t \in [a, b]$,

$$\phi(t, t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}' + \int_{t'_0}^t \mathbf{v}(\tau, \phi(\tau, t_0, \mathbf{x}_0)) d\tau ,$$

e quindi dal Lemma di Gronwall segue che, finché esiste, $\phi(t, t'_0, \mathbf{x}'_0)$ verifica la

$$|\phi(t, t'_0, \mathbf{x}'_0) - \phi(t, t_0, \mathbf{x}_0)| \leq |\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}'| \exp(k_K |t - t'_0|) < \eta \exp(k_K(b-a)) = \eta_1 .$$

Il Teorema di prolungabilità assicura allora che $\phi(t, t'_0, \mathbf{x}'_0)$ esiste per ogni $t \in [a, b]$.

Per provare la continuità si può usare o il seguente procedimento oppure, vedi oltre, far ricorso al Teorema di Ascoli-Arzelà.

Primo modo (si veda: [Coddington Teor. I 7.1]).

Si definisca la successione di funzioni:

$$\begin{cases} \phi'_0(t) := \phi_0(t, t'_0, \mathbf{x}'_0) := \mathbf{x}'_0 + \phi(t) - \mathbf{x}' \\ \phi'_{j+1}(t) := \phi_{j+1}(t, t'_0, \mathbf{x}'_0) := \mathbf{x}'_0 + \int_{t'_0}^t \mathbf{v}(\tau, \phi'_j(\tau)) d\tau \end{cases} \quad (3.26)$$

tutte evidentemente continue sull'insieme $W := (a, b) \times W'$.

Per $(t'_0, \mathbf{x}'_0) \in W'$ si ha $|\phi'_0(t) - \phi(t)| = |\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}'| < \eta$ e quindi per $t \in (a, b)$ si ha $(t, \phi'_0(t)) \in K$. Inoltre $|\phi'_1(t) - \phi'_0(t)| = \left| \int_{t'_0}^t \mathbf{v}(\tau, \phi'_0(\tau)) - \mathbf{v}(\tau, \phi(\tau)) d\tau \right| \leq k_K \left| \int_{t'_0}^t \phi'_0(\tau) - \phi(\tau) d\tau \right| = k_K |t'_0 - t| |\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}'|$ e questo implica $|\phi'_1(t) - \phi(t)| \leq (1 + k_K |t'_0 - t|) |\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}'| < \exp(k_K |t'_0 - t|) |\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}'|$, e la $(t, \phi'(t)) \in K$.

Induttivamente si ricava

$$\begin{cases} |\phi'_{j+1}(t) - \phi'_j(t)| \leq \frac{k_K^{j+1} |t'_0 - t|^{j+1}}{(j+1)!} |\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}'| \\ |\phi'_{j+1}(t) - \phi(t)| < \exp(k_K |t'_0 - t|) |\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}'| < \eta_1, \end{cases} \quad (3.27)$$

che dà $(t, \phi'_j(t)) \in K$, per ogni $j = 0, 1, \dots$.

La prima delle (3.27) e la compattezza di $[a, b]$ assicurano che la successione delle $\{\phi'_j(t)\}$ converge; la seconda delle (3.26) implica che lo fa verso la funzione $\phi'(t) \equiv \phi(t, t'_0, \mathbf{x}'_0) = \mathbf{x}'_0 + \int_{t'_0}^t \mathbf{v}(s, \phi'(s)) ds$; la limitatezza di W garantisce che la convergenza è uniforme cosa che, come è ben noto, conserva la continuità di $(t, t'_0, \mathbf{x}'_0) \mapsto \phi(t, t'_0, \mathbf{x}'_0)$ su W anche nel limite. ■

Secondo modo

È istruttivo qui riportare anche il secondo dei due procedimenti cui si è accennato per la dimostrazione del teorema di continuità, in quanto esso fa uso del seguente importante

Teorema 1.3.2 (si veda: [Michel Teor. II.5.2])

Con la stessa notazione del Teorema 1.3.1, siano $\mathbf{v} \in C^0(D)$, $\{\mathbf{x}_{0,m}\}_{m \in \mathbb{N}} \xrightarrow{m} \mathbf{x}_0$, $\{\mathbf{v}_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C^0(D)$, e sia $\{\mathbf{v}_m\}_{m \in \mathbb{N}} \xrightarrow{m} \mathbf{v}$ uniformemente sui sottoinsiemi compatti di D .

Se $\{\phi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ è una successione di soluzioni, con intervalli massimali J_m , dei problemi:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}_m(t, \mathbf{x}), \quad \phi_m(t_0, t_0, \mathbf{x}_{0,m}) = \mathbf{x}_{0,m}, \quad m = 1, 2, \dots$$

allora esiste una sottosuccessione $\{\phi_{m_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ ed una soluzione ϕ del problema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}), \quad \phi(t_0, t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$$

avente intervallo massimale $J_0 \ni t_0$ tali che

$$(i) \quad \liminf_{j \rightarrow \infty} J_{m_j} \supset J_0;$$

$$(ii) \quad \phi_{m_j} \xrightarrow{j} \phi \quad \text{uniformemente sui sottoinsiemi compatti di } J_0.$$

Se, inoltre, la soluzione ϕ è unica allora la successione $\{\phi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ ammette ϕ come limite uniforme.

Dimostrazione Applicazione del Teorema di Ascoli-Arzelà dopo aver mostrato che $\{\phi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ è equicontinua uniformemente limitata. ■

Corollario 1.3.2 (si veda: [Michel Cor. II.5.4]) Con la stessa notazione del Teorema 1.3.1, sia dato il problema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}; \varepsilon), \quad \phi(t_0, t_0, \mathbf{x}_0; \varepsilon) = \mathbf{x}_0$$

con $\mathbf{v} \in C^0(D \times D_\varepsilon)$ ove $D_\varepsilon \subset \mathbb{R}^\ell$ aperto, e si supponga che, per $(t_0, \mathbf{x}_0) \in D$, $\varepsilon \in D_\varepsilon$, esso abbia soluzione unica $\phi(t, t_0, \mathbf{x}_0; \varepsilon)$ con intervallo massimale $J := (m_1(t_0, \mathbf{x}_0; \varepsilon), m_2(t_0, \mathbf{x}_0; \varepsilon))$.

Detto $W := \{(t, t_0, \mathbf{x}_0; \varepsilon) \mid (t_0, \mathbf{x}_0) \in D, \varepsilon \in D_\varepsilon, t \in J\}$ allora ϕ è continua su W , $m_1(t_0, \mathbf{x}_0; \varepsilon)$ è semicontinuo superiormente e $m_2(t_0, \mathbf{x}_0; \varepsilon)$ semicontinuo inferiormente in $(t_0, \mathbf{x}_0; \varepsilon)$ su $D \times D_\varepsilon$.

Memento 1.3.1

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \mathbf{x}_j := \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf_{j > k} \mathbf{x}_k \quad \text{o anche} \quad \liminf_{y \rightarrow x} f(y) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{y \in B_\varepsilon(x)} f(y).$$

Semicontinua inferiormente su D := una funzione $f(\mathbf{x})$ tale che per ogni $\mathbf{y} \in D$ sia: $f(\mathbf{y}) \leq \liminf_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}} f(\mathbf{x})$; ovvero quando dato ε esiste $N_\varepsilon(x)$ tale che per ogni $y \in N_\varepsilon(x)$ si ha $f(y) > f(x) - \varepsilon$; o anche quando $f^{-1}(\alpha, +\infty)$ è aperto per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione (del Corollario)

Posto $\psi(\tau, 0, \mathbf{x}_0; \varepsilon) := \phi(\tau + t_0, t_0, \mathbf{x}_0; \varepsilon)$, la ψ risolve il problema

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{x} = \nu(\tau, \mathbf{x}) := \mathbf{v}(\tau + t_0, \mathbf{x}; \varepsilon), \quad \psi(0, 0, \mathbf{x}_0; \varepsilon) = \mathbf{x}_0.$$

Sia $\{(t_m, t_{0,m}, \mathbf{x}_{0,m}; \varepsilon_m) \in W\}_{m \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\infty} (t, t_0, \mathbf{x}_0; \varepsilon)$. Il teorema precedente sussiste per la successione dei campi $\nu_m(\tau, \mathbf{x}) := \mathbf{v}(\tau + t_{0,m}, \mathbf{x}; \varepsilon_m)$, ed assicura che

$$\phi(\tau + t_{0,m}, t_{0,m}, \mathbf{x}_{0,m}; \varepsilon_m) \xrightarrow{\infty} \phi(\tau + t_0, t_0, \mathbf{x}_0; \varepsilon_0)$$

uniformemente sui sottoinsiemi compatti di $(m_1(t_0, \mathbf{x}_0; \varepsilon) - t_0, m_2(t_0, \mathbf{x}_0; \varepsilon) - t_0)$. In particolare, quindi, si può scegliere $\tau + t_{0,m} = t_m$ per ciascun m , e dedurre che la convergenza per $t_m \rightarrow t$ è uniforme in m . In definitiva, tramite la

$$\begin{aligned} |\phi(t_m, t_{0,m}, \mathbf{x}_{0,m}; \varepsilon_m) - \phi(t, t_0, \mathbf{x}_0; \varepsilon_0)| &\leq \\ |\phi(t_m, t_{0,m}, \mathbf{x}_{0,m}; \varepsilon_m) - \phi(t_m, t_0, \mathbf{x}_0; \varepsilon_0)| &+ |\phi(t_m, t_0, \mathbf{x}_0; \varepsilon_0) - \phi(t, t_0, \mathbf{x}_0; \varepsilon_0)|, \end{aligned}$$

si conclude che $\phi(t_m, t_{0,m}, \mathbf{x}_{0,m}; \varepsilon_m) \xrightarrow{\infty} \phi(t, t_0, \mathbf{x}_0; \varepsilon_0)$.

Per la (i) inoltre si ha: $\liminf_{m \rightarrow \infty} (m_1(t_{0,m}, \mathbf{x}_{0,m}; \varepsilon_m), m_2(t_{0,m}, \mathbf{x}_{0,m}; \varepsilon_m)) \supset J_0$. ■

Sussiste infine anche la seguente estensione agli ordini superiori, (si veda il Teorema 1.3.1 per un enunciato meno forte):

Teorema 1.3.3 (si veda: [Arnold §32.9], opp. [Lefschetz p.40]) Sia $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}, \varepsilon) \in C^{r \geq 1}(D \times D_\varepsilon)$ con $D \subseteq \mathbb{R}^{1+n}$ aperto, e $D_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto. Allora la soluzione $\phi = \phi(t, t_0, \mathbf{x}_0; \varepsilon)$, è di classe C^r rispetto a $(t_0, \mathbf{x}_0, \varepsilon) \in D \times D_\varepsilon$, e C^{r+1} rispetto a t , nel suo dominio di definizione.

Ne segue che $\mathbf{v} \in C^1(D)$ determina una ed una sola soluzione uscente da una qualsiasi coppia $(t'_0, \mathbf{x}'_0) \in N(t_0, \mathbf{x}_0)$; tale soluzione è definita in tutto un intorno $N(t_0, \mathbf{x}_0)$ delle condizioni iniziali ed è ivi differenziabile rispetto a $(t, t'_0, \mathbf{x}'_0)$. Risulta quindi determinata una famiglia locale di applicazioni d'avanzamento in $N(t_0, \mathbf{x}_0)$.

Quanto segue, enunciato in $\mathbb{R}^n$, vale anche in $\mathbb{C}^n$ pur di considerare accoppiate le equazioni per le parti $\Re$ ed $\Im$; e costituisce un parziale riassunto di quanto detto, secondo un'alternativa linea di dimostrazione: Cauchy-Picard. In questo caso, esistenza ed unicità vengono provate simultaneamente, e sotto la più stretta ipotesi: $v \in C^1(D)$, (si veda: [Arnold, cap.IV]).

Si consideri dapprima uno spazio metrico $(\mathbb{X}, d)$ ed una mappa $\mathcal{S} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$.

$\mathcal{S}$ è una contrazione := esiste una costante reale non negativa k , strettamente minore di uno, tale che: $x, y \in \mathbb{X} \Rightarrow d(\mathcal{S}x, \mathcal{S}y) \leq k d(x, y)$.

Si osservi che per poter parlare di contrazioni è fondamentale il fatto che il dominio di $\mathcal{S}$ e l'immagine di $\mathcal{S}$ siano sottoinsiemi di uno stesso spazio metrico.

Una contrazione è un caso particolare di:

$\mathcal{S} : (\mathbb{X}, d) \rightarrow (\tilde{\mathbb{X}}, \tilde{d})$ Lipschitz := esiste $k > 0$: per ogni $x, y \in \mathbb{X}$ si ha:

$$\tilde{d}(\mathcal{S}x, \mathcal{S}y) \leq k d(x, y).$$

Quest'ultima implica l'uniforme continuità di $\mathcal{S}$ su $(\mathbb{X}, d)$.

Per le applicazioni contrattive sussiste il fondamentale :

Teorema 1.3.4 (delle contrazioni, o C.M.P.) Sia $(\mathbb{X}, d)$ uno spazio metrico completo ed $\mathcal{S} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ una contrazione. Esiste, ed è unico, un punto $\bar{x} \in \mathbb{X}$ che è punto unito per $\mathcal{S}$, e cioè: $\mathcal{S}\bar{x} = \bar{x}$. Esso inoltre è anche tale che preso comunque $x_0 \in \mathbb{X}$ si ha: $\mathcal{S}^n x_0 \xrightarrow{\infty} \bar{x}$.

Dimostrazione

Unicità: Se fosse $x' = \mathcal{S}x'$ e simultaneamente $x'' = \mathcal{S}x''$, con $x' \neq x''$, si avrebbe: $d(x', x'') = d(\mathcal{S}x', \mathcal{S}x'') < d(x', x'')$, e ciò non è lecito.

Esistenza: Sia $x_n := \mathcal{S}^n x_0$. Risulta: $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$.

Pertanto, se $m > n$ si ha

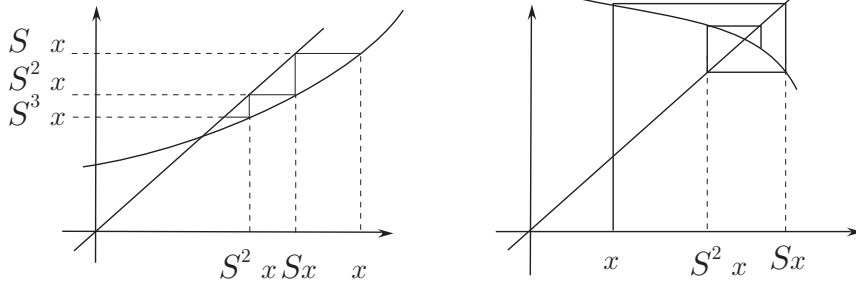
$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq (k^{m-1} + k^{m-2} + \cdots + k^n) d(x_1, x_0) \\ &= k^n \frac{(1 - k^{m-n})}{(1 - k)} d(x_1, x_0) \leq \frac{k^n}{1 - k} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Ne segue che la successione $\{\mathcal{S}^n x_0\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy, e la completezza dello spazio $\mathbb{X}$ assicura l'esistenza in $\mathbb{X}$ di un punto limite $\bar{x} := \lim x_n$. Tale punto è unito per $\mathcal{S}$, infatti dalle definizioni di limite e di operatore contrattivo segue che: $\bar{x}$ è punto limite anche della successione $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ con $m = n + 1$ la quale, d'altra parte, ha come limite anche il punto $\mathcal{S}\bar{x}$ dato che è

$$d(x_m, \mathcal{S}\bar{x}) = d(x_{n+1}, \mathcal{S}\bar{x}) = d(\mathcal{S}x_n, \mathcal{S}\bar{x}) \leq k d(x_n, \bar{x}).$$

L'unicità del limite implica necessariamente la $\mathcal{S}\bar{x} = \bar{x}$. ■

N.B. 1.3.4 Si è anche valutato l'errore: $d(\bar{x}, x_n) \leq \frac{k^n}{1 - k} d(x_1, x_0)$.



◇

Teorema 1.3.1 (Cauchy-Picard) Sia $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ aperto; sia $(t_0, \mathbf{x}_0) \in D$, e sia $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se il campo $\mathbf{v}$ è differenziabile con continuità in D , per ogni $\mathbf{x}$ sufficientemente prossimo ad $\mathbf{x}_0$ la soluzione dell'equazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ uscente da $(t_0, \mathbf{x})$ esiste almeno in un intorno delle condizioni iniziali $(t_0, \mathbf{x})$ unica e regolare rispetto alle condizioni iniziali stesse.

Dimostrazione Con a e b in $\mathbb{R}$, si introducano gli insiemi

$$\begin{aligned} &:= \left\{ t \in \mathbb{R} \mid t_0 - a \leq t \leq t_0 + a \right\}, \\ [B_b(\mathbf{x}_0)] &:= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| := \left(\sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i)^2 \right)^{1/2} < b \right\}, \end{aligned}$$

(si ricordi che con la notazione $[A]$ si intende la chiusura dell'insieme A) e si supponga che a e b siano scelti in modo tale che l'insieme (compatto)

$$\Gamma := [B_a(t_0)] \times [B_b(\mathbf{x}_0)] := \left\{ (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{1+n} \mid t \in [B_a(t_0)], \mathbf{x}_0 \in [B_b(\mathbf{x}_0)] \right\}$$

risulti appartenere al dominio D . Siano poi

$$\lambda := \max_{(t, \mathbf{x}) \in \Gamma} |\mathbf{v}(t, \mathbf{x})|, \quad k_\Gamma := \max_{(t, \mathbf{x}) \in \Gamma} \|\partial_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(t, \mathbf{x})\|,$$

e si noti che λ e k_Γ dipendono da Γ ma non direttamente da $(t, \mathbf{x})$. Infine, chiamato

$$K_{\mathbf{x}} := \left\{ (t, \mathbf{y}) \mid t \in [B_{a'}(t_0)], \mathbf{y} \in [B_{\lambda|t-t_0|}(\mathbf{x})] \right\}$$

il cono di apertura 2λ e centro $\mathbf{x}$, sia b' tale che, opportunamente fissato $a' \leq a$, si abbia:

$$\Gamma \supset K_{\mathbf{x}} \quad \text{per ciascun } \mathbf{x} \in [B_{b'}(\mathbf{x}_0)].$$

N.B. 1.3.5 a e b dipendono dalla posizione di $(t_0, \mathbf{x}_0) \in D$. I valori a', b' sono tali che $a' \leq a$, $b' \leq b$, $b' + \lambda a' \leq b$. Per l'unicità occorrerà che $a' < 1/k_\Gamma$; b' è l'ultimo ad essere fissato tale che $b' + \lambda a' \leq b$. ◇

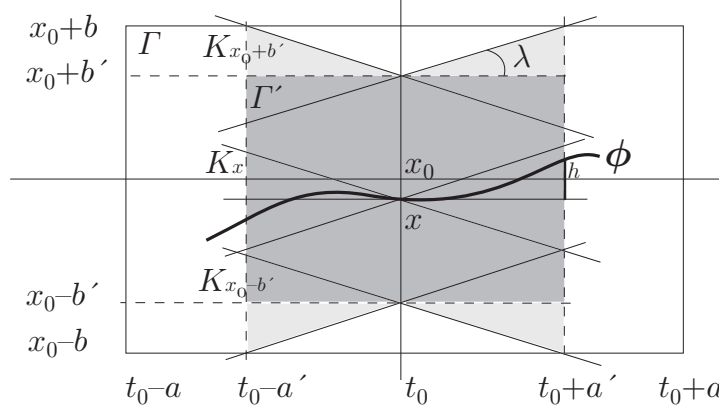
Qualora esista, la soluzione ϕ dell'equazione assegnata: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$, che esce dal dato $(t_0, \mathbf{x})$, è una funzione

$$\phi : t \mapsto \phi(t, t_0, \mathbf{x}) =: \mathbf{x} + \mathbf{h}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{h}(t_0, \mathbf{x}) = 0$$

che (equivalentemente) risolve il problema integrale

$$\phi(t, t_0, \mathbf{x}) = \mathbf{x} + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\tau, \phi(\tau, t_0, \mathbf{x})) d\tau =: \mathcal{S}_+[\phi](t, t_0, \mathbf{x}).$$

Essa quindi individua una curva integrale $(t, \phi(t, t_0, \mathbf{x})) =: (t, \mathbf{x} + \mathbf{h}(t, \mathbf{x}))$ che non potrà essere esterna a $K_{\mathbf{x}}$ finché $t < a'$, giacché in tutto Γ accade che $|\mathbf{v}| < \lambda$.



Sia $\Gamma' := [B_{a'}(t_0)] \times [B_{b'}(\mathbf{x}_0)]$, con b' fissato come detto ed a' ancora da specificare, e si definisca lo spazio funzionale

$$\mathbb{A}(a', b') := \left\{ \mathbf{h} \in C^0(\Gamma', \mathbb{R}^n) \text{ tali che } |\mathbf{h}(t, \mathbf{x})| \leq \lambda |t - t_0|, \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in \Gamma' \right\}$$

o, equivalentemente, lo spazio $\mathbb{A}_+(a', b')$ delle funzioni $\phi \in C^0(\Gamma', \mathbb{R}^n)$ tali che $|\phi(t, \mathbf{x}) - \mathbf{x}| \leq \lambda |t - t_0|$, $\forall (t, \mathbf{x}) \in \Gamma'$. Lo spazio $\mathbb{A}(a', b')$ contiene certamente la funzione costante $\mathbf{h} : (t, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{h}(t, \mathbf{x}) = 0$. Si doti tale insieme di funzioni della norma:

$$\|\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2\|_{\infty} := \max_{(t, \mathbf{x}) \in \Gamma'} |\mathbf{h}_1(t, \mathbf{x}) - \mathbf{h}_2(t, \mathbf{x})|.$$

N.B. 1.3.6 Siccome Γ' è compatto il valore che si ottiene è un massimo, cioè è un numero reale che viene assunto dalla funzione a secondo membro. In questa norma la convergenza implica l'uniforme convergenza delle funzioni appartenenti a $C(\Gamma', \mathbb{R}^n)$. Pertanto, se una successione $\{\mathbf{h}_n\}_{n=1,2,\dots}$ di funzioni in $\mathbb{A}$ ammette limite in questa norma, si può dedurre che la funzione limite non solo appartiene a $C(\Gamma', \mathbb{R}^n)$, ma appartiene addirittura ad $\mathbb{A}$, giacché la condizione sulla massima crescita della funzione continua a sussistere anche nel limite. Si ha cioè che $(\mathbb{A}; \|\cdot\|_{\infty})$ è un sottoinsieme chiuso, convesso, di uno spazio di Banach ed è pertanto esso stesso uno spazio di Banach e, come tale, completo rispetto alla norma $\|\cdot\|_{\infty}$. Analoghe affermazioni sussistono per lo spazio $\mathbb{A}_+$. $\diamond$

Si definisca ora su $(\mathbb{A}; \|\cdot\|_{\infty})$ l'operatore $\mathcal{S} : \mathbf{h} \mapsto \mathcal{S}[\mathbf{h}]$ mediante la:

$$\mathcal{S}[\mathbf{h}](t, \mathbf{x}) := \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\tau, \mathbf{x} + \mathbf{h}(\tau, \mathbf{x})) d\tau,$$

o, su $\mathbb{A}_+$, l'equivalente operatore $\mathcal{S}_+[\phi](t, \mathbf{x}) := \mathbf{x} + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\tau, \phi(\tau, \mathbf{x})) d\tau$.

Proposizione 1.3.1 Per a' sufficientemente piccolo l'operatore $\mathcal{S} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ è una contrazione su $(\mathbb{A}, \|\cdot\|_{\infty})$.

Dimostrazione (della Proposizione)

- (i) Siano $\tau \in B_{a'}(t_0)$ ed $\mathbf{x} \in B_{b'}(\mathbf{x}_0)$. Dalla definizione di $\mathbb{A}$ segue che se $\mathbf{h} \in \mathbb{A}$ allora $(\tau, \mathbf{x} + \mathbf{h}(\tau, \mathbf{x})) \in K_{\mathbf{x}} \subset \Gamma \subset D$. Quindi $\mathcal{S}[\mathbf{h}]$ è definita in quanto è definito $\mathbf{v}(\tau, \mathbf{x} + \mathbf{h}(\tau, \mathbf{x}))$;
- (ii) dalle proprietà degli integrali segue che $\mathcal{S}[\mathbf{h}] \in C^0(K_{\mathbf{x}})$, ed inoltre $\mathcal{S}$ manda $\mathbb{A}$ in sé; infatti

$$|\mathcal{S}[\mathbf{h}](t, \mathbf{x})| \leq \left| \int_{t_0}^t |\mathbf{v}(\tau, \mathbf{x} + \mathbf{h}(\tau, \mathbf{x}))| d\tau \right| \leq \lambda |t - t_0|,$$

il che implica che la funzione $\mathcal{S}[\mathbf{h}]$ appartiene ad $\mathbb{A}$; (si osservi infatti che $\mathbf{x}$ è definitivamente fissato in $B_{b'}(\mathbf{x}_0)$, e che t varia in $B_{a'}(t_0)$; quindi la $\mathcal{S}[\mathbf{h}]$ verifica tutte le condizioni per la sua appartenenza ad $\mathbb{A}$);

(iii) $\mathcal{S}$ può essere reso contrattivo su $(\mathbb{A}, \|\cdot\|_\infty)$. Infatti

$$(\mathcal{S}[\mathbf{h}_1] - \mathcal{S}[\mathbf{h}_2])(t, \mathbf{x}) = \int_{t_0}^t \left(\mathbf{v}(\tau, \mathbf{x} + \mathbf{h}_1(\tau, \mathbf{x})) - \mathbf{v}(\tau, \mathbf{x} + \mathbf{h}_2(\tau, \mathbf{x})) \right) d\tau ;$$

e siccome $\mathbf{v} \in C^1(D) \subset Lip(\Gamma)$ risulta

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}(\tau, \mathbf{x} + \mathbf{h}_1(\tau, \mathbf{x})) - \mathbf{v}(\tau, \mathbf{x} + \mathbf{h}_2(\tau, \mathbf{x}))| &\leq k_\Gamma |\mathbf{h}_1(\tau, \mathbf{x}) - \mathbf{h}_2(\tau, \mathbf{x})| \\ &\leq k_\Gamma \|\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2\|_\infty , \end{aligned}$$

da cui segue

$$|(\mathcal{S}[\mathbf{h}_1] - \mathcal{S}[\mathbf{h}_2])(t, \mathbf{x})| \leq k_\Gamma |t - t_0| \|\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2\|_\infty \leq k_\Gamma a' \|\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2\|_\infty .$$

Posto allora $k_\Gamma a' =: k$ si ottiene

$$\|\mathcal{S}[\mathbf{h}_1] - \mathcal{S}[\mathbf{h}_2]\|_\infty \leq k \|\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2\|_\infty .$$

Pertanto, purché sia $k < 1$, si ha che $\mathcal{S}$ è una contrazione su $(\mathbb{A}, \|\cdot\|_\infty)$. Equivalentemente: $\mathcal{S}_+$ è contrattivo su $\mathbb{A}_+$. ■

Scelto $\mathbf{x}$ prossimo a $\mathbf{x}_0$, per esempio $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < b'$, e se a' verifica la limitazione $k_\Gamma a' < 1$, ne segue che in $\mathbb{A}$ esiste ed è unico il punto unito di $\mathcal{S}$:

$$\bar{\mathbf{h}} = \mathcal{S}[\bar{\mathbf{h}}] \equiv \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\tau, \mathbf{x} + \bar{\mathbf{h}}(\tau, \mathbf{x})) d\tau ,$$

ed anzi risulta $\mathbf{x} + \bar{\mathbf{h}}(t, \mathbf{x}) \in K_{\mathbf{x}}$ per ogni $t \in B_{a'}(t_0)$.

Ponendo

$$\phi(t, t_0, \mathbf{x}) := \mathbf{x} + \bar{\mathbf{h}}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x} + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\tau, \phi(\tau, t_0, \mathbf{x})) d\tau \equiv \mathcal{S}_+[\phi](t, t_0, \mathbf{x})$$

si riconosce così che, per t_0 ed $\mathbf{x} \in B_{b'}(\mathbf{x}_0)$ fissati e per $t \in B_{a'}(t_0)$, la funzione $t \mapsto \phi(t) := \phi(t, t_0, \mathbf{x})$ verifica su $B_{a'}(t_0)$ l'identità

$$\dot{\phi}(t) = \mathbf{v}(t, \phi(t)) , \quad \text{con} \quad \phi(t_0) = \mathbf{x} .$$

Si noti anche che

$$\phi = \mathcal{S}_+[\phi] \quad \text{implica che} \quad \phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n ,$$

ove si è posto

$$\phi_0(t, t_0, \mathbf{x}) := \mathbf{x}, \quad \text{e, per } n = 0, 1, \dots$$

$$\phi_{n+1}(t, t_0, \mathbf{x}) := \mathbf{x} + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\tau, \phi_n(\tau, t_0, \mathbf{x})) d\tau = \mathcal{S}_+^n[\phi_0] .$$

Infine, la funzione $\phi(\cdot, t_0, \cdot)$ è uniformemente continua su Γ' , giacché $\bar{\mathbf{h}}$ è in $\mathbb{A}$. ■

Per provare la regolarità della soluzione è conveniente premettere il seguente:

Lemma 1.3.1 *Sia $\mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$ lo spazio degli operatori lineari reali su $\mathbb{R}^n$, sia $\mathcal{T} : t \mapsto \mathcal{T}(t) \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$, con $\mathcal{T} \in C^1(I \subseteq \mathbb{R})$, e sia $\mathbf{T}(t)$ la matrice che una data base assegna all'operatore $\mathcal{T}(t)$. L'equazione*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \tag{3.28}$$

ammette soluzione $\phi(\cdot, t_0, \mathbf{x}_0) : J_M \supset I \rightarrow \mathbb{R}^n$ se e solo se

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{T}(t)\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 = \mathbb{I} \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^n) \tag{3.29}$$

ammette soluzione $\Psi(\cdot, t_0, \mathbb{I}) : J_M \supset I \rightarrow \mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$, ed in tal caso esse sono tali che $\mathbf{x}_0$ è l'unico vettore in $\mathbb{R}^n$ tale che $\phi(t, t_0, \mathbf{x}_0) = \Psi(t, t_0, \mathbb{I})\mathbf{x}_0$.

Dimostrazione Indicata brevemente con $\Psi = \Psi(t, t_0)$ la detta soluzione di (3.29), dato comunque $\mathbf{x}_0$ si ha che $\dot{\Psi}(t, t_0)\mathbf{x}_0 = \mathbf{T}(t)\Psi(t, t_0)\mathbf{x}_0$, e pertanto $\phi(t, t_0, \mathbf{x}_0) := \Psi(t, t_0)\mathbf{x}_0$ è soluzione di (3.28). D'altra parte, tale $\mathbf{x}_0$ è ovviamente unico data l'unicità della soluzione di (3.28) ed il fatto che $\Psi(t_0, t_0) = \mathbb{I}$.

Per quanto riguarda il viceversa, si dimostrerà (si veda: Cap.II) che la famiglia delle soluzioni di (3.28) è dotata della proprietà di essere esprimibile, mediante una $\tilde{\Psi} : J_M \rightarrow \mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$, secondo la $\phi(t, t_0, \mathbf{x}_0) = \tilde{\Psi}(t, t_0)\mathbf{x}_0$, con $\mathbf{x}_0$ il vettore (arbitrario) che ne individua la condizione iniziale. Pertanto deve necessariamente essere $\tilde{\Psi} = \Psi$. ■

Nel seguito, all'occorrenza, i ruoli di (3.28) e di (3.29) verranno scambiati senza ulteriori commenti.

Teorema 1.3.1 (di regolarità) *Sotto le stesse ipotesi del Teorema 1.3.1, se il campo è differenziabile due volte con continuità, la soluzione, localmente, è differenziabile con continuità.*

Come si è detto, questo enunciato non esprime il migliore risultato ottenibile, (si veda: Arnold §32.6), ma è relativamente facile da dimostrare.

Dimostrazione Se $\mathbf{v}$ è in $C^2(D)$ allora $\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{v}$ è in $C^1(D)$, ove si è posto: $\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{v} =: \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^1} : \dots : \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^n} \right)$; per cui, per il Lemma 1.3.1, il sistema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) & (t, \mathbf{x}(t)) \in D \\ \dot{\mathbf{X}} = \partial_{\mathbf{x}}\mathbf{v}(t, \mathbf{x})\mathbf{X} & \mathbf{X} : t \mapsto \mathbf{X}(t) \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^n), \end{cases} \quad (3.30)$$

è anch'esso un sistema come nel Teorema 1.3.1. Si noti anche che le due equazioni sono accoppiate: la seconda non va considerata come indipendente dalla prima, bensì come quella relativa alla seconda componente di un unico vettore: $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{X} \end{pmatrix}$. Posto allora $\phi_0 := \mathbf{x}$ e $\partial_{\mathbf{x}}\phi_0 \equiv \Psi_0 = \mathbb{I}$, si riconosce che il sistema delle iterate successive del problema (3.30)

$$\begin{cases} \phi_{n+1}(t, t_0, \mathbf{x}) := \mathbf{x} + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\tau, \phi_n(\tau, t_0, \mathbf{x}))d\tau \\ \Psi_{n+1}(t, t_0, \mathbf{x}) := \mathbb{I} + \int_{t_0}^t \partial_{\mathbf{x}}\mathbf{v}(\tau, t_0, \phi_n(\tau, t_0, \mathbf{x}))\Psi_n(\tau, t_0, \mathbf{x})d\tau, \end{cases} \quad (3.31)$$

individua due successioni delle quali, come è facile riconoscere, la seconda ha gli elementi ordinatamente uguali alle derivate (rispetto alla variabile $\mathbf{x}$) degli elementi della prima: $\partial_{\mathbf{x}}\phi_n = \Psi_n$. Per il Teorema 1.3.1, d'altra parte, tali successioni convergono, simultaneamente ed entrambe uniformemente, la prima verso la soluzione $\phi = \phi(t, t_0, \mathbf{x})$ dell'equazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$, come già detto precedentemente, e la seconda verso la soluzione $\Psi = \Psi(t, t_0; \mathbf{x})$ della sua corrispondente

$$\text{Equazione Variazionale} \quad := \quad \dot{\mathbf{X}} = \partial_{\mathbf{x}}\mathbf{v}(t, \phi(t, \mathbf{x}))\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(t_0, t_0; \mathbf{x}) = \mathbb{I}.$$

Inoltre, ricordando che la seconda delle (3.31) uguaglia la derivata (rispetto alla variabile $\mathbf{x}$) della prima, si osserva che Ψ è limite uniforme delle derivate $\Psi_n = \partial_{\mathbf{x}}\phi_n$. Quindi, il limite ϕ delle ϕ_n è senz'altro derivabile ed ha come derivata il limite Ψ delle derivate: $\Psi(t, t_0, \mathbf{x}) \equiv \partial_{\mathbf{x}}\phi(t, t_0, \mathbf{x})$. In definitiva:

la derivata $\partial_{\mathbf{x}}\phi$ di quella funzione $\phi = \phi(t, t_0, \mathbf{x})$ che vale $\mathbf{x}$ all'istante t_0 e che come funzione della t è soluzione dell'equazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$, esiste, è continua, ed è la soluzione uscente dal dato iniziale: $\Psi(t_0) = \mathbb{I}$ dell'equazione $\dot{\mathbf{X}} = \partial_{\mathbf{x}}\mathbf{v}(t, \phi(t, t_0, \mathbf{x}))\mathbf{X}$ variazionale della $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ nel punto $\phi = \phi(t, t_0, \mathbf{x})$.

Infine, siccome la convergenza è uniforme su $[B_{a'}(t_0)] \times [B_{b'}(\mathbf{x})]$, la derivata $\partial_{\mathbf{x}}\phi$ è anche tale che

$$\lim_{|\chi| \rightarrow 0} \frac{|\phi(t, t_0, \mathbf{x} + \chi) - \phi(t, t_0, \mathbf{x}) - \partial_{\mathbf{x}}\phi(t, t_0, \mathbf{x})\chi|}{|\chi|} = 0$$

uniformemente rispetto a $t \in [B_{a'}(t_0)]$ (questo ultimo fatto, ancora più esplicitamente rimarcato nel Teorema 1.3.2, è di importanza fondamentale per tutto ciò che riguarda i procedimenti di calcolo approssimato). ■

N.B. 1.3.7 Tutto ciò è valido in insiemi limitati. In particolare a' , se anche può a volte essere arbitrario, deve comunque essere fissato e finito. ◇

N.B. 1.3.8 Si osservi che la seconda delle (3.31) individua la successione delle derivate delle ϕ_n e converge verso la derivata della $\phi(t, t_0, \mathbf{x})$ soluzione della $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ solo se quest'ultima viene considerata accoppiata con la $\dot{\mathbf{X}} = \partial_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \mathbf{X}$. In caso contrario, la soluzione di $\dot{\mathbf{X}} = \partial_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \mathbf{X}$ potrebbe non coincidere con quella di $\dot{\mathbf{X}} = \partial_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(t, \phi(t, t_0, \mathbf{x})) \mathbf{X}$, e la successione

$$\Psi_{n+1}(t, t_0, \mathbf{x}) = \mathbb{I} + \int_{t_0}^t \partial_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\tau, t_0, \phi_n(\tau, t_0, \mathbf{x})) \Psi_n(\tau, t_0, \mathbf{x}) d\tau$$

essere diversa dalla

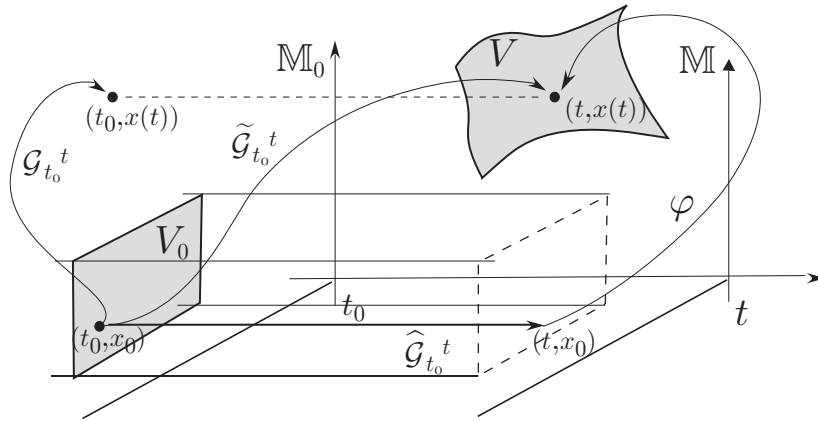
$$\Psi_{n+1}(t, t_0, \mathbf{x}) = \mathbb{I} + \int_{t_0}^t \partial_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\tau, t_0, \mathbf{x}) \Psi_n(\tau, t_0, \mathbf{x}) d\tau.$$

◇

Dal precedente Teorema segue che la trasformazione ($\mathcal{G}_{t_0}^t$ rappresentata da) $\mathbf{G}_{t_0}^t : \mathbf{x}_0 \mapsto \phi(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ per ogni fissato t prossimo a t_0 risulta essere un diffeomorfismo locale in un conveniente intorno V_0 contenente $\mathbf{x}_0$ e contenuto in D così come l'operatore $\tilde{\mathcal{G}}_{t_1}^t$ definito secondo la $\tilde{\mathbf{G}}_{t_1}^t(t_1, \mathbf{x}_1) := (t, \mathbf{G}_{t_1}^t \mathbf{x}_1)$ è un diffeomorfismo definito su $\{t_1\} \times V_0$ ed a valori in D .

Si può inoltre mostrare (si veda: Cap.II) che sotto le stesse ipotesi esiste un diffeomorfismo di rettificazione $\varphi : J \times V_0 \rightarrow D$, a t_0 fissato, rappresentato da $\varphi(t, \bar{\mathbf{x}}) := (t, \phi(t, t_0, \bar{\mathbf{x}}))$ la cui derivata trasforma il campo standard $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nel campo assegnato $\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ 1 \end{pmatrix}$ e risulta $\tilde{\mathcal{G}}_{t_0}^t \equiv \varphi \circ \hat{\mathcal{G}}_{t_0}^t \circ \varphi^{-1}$ ove $\hat{\mathcal{G}}_{t_0}^t$ è l'evoluzione banale: $\hat{\mathcal{G}}_{t_0}^t(t_0, x) = (t, x)$.

N.B. 1.3.9 $\tilde{\mathcal{G}}_{t_0}^t$ trasforma $\{t_0\} \times V_0$ in $\{t\} \times V$; φ trasforma (t, x_0) in (t, x) , e cioè $J \times V_0$ in $J \times V$, a t fissato; infine, $\mathcal{G}_{t_0}^t$ trasforma x_0 in x . ◇



1.4 Esempi e casi notevoli

Come si è detto, se il campo non è autonomo il problema della determinazione delle soluzioni dell'equazione $\dot{x} = v(t, x)$ anche con $x \in \mathbb{R}$ si complica in modo generalmente non risolubile.

Vi sono però alcuni casi particolari di speciale interesse. Sia D , anche in questo paragrafo, un dominio (un aperto, connesso, non vuoto) di uno spazio reale.

Primo caso notevole Separazione delle variabili.

$$\mathbf{v}(t, x) = \frac{v^x(x)}{v^t(t)}, \quad v^x, v^t \in C^1(D), \quad D \text{ dominio} \subseteq \mathbb{R}^{1+1}, \quad (t_0, x_0) \in D.$$

Essendo entrambe scalari, le due variabili x e t sono del tutto simmetriche, ed allora spesso si usano solo variabili “spaziali”: $x, y \in \mathbb{R}$ ottenendo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v^y(y)}{v^x(x)}, \quad \text{o addirittura :} \quad \frac{dx}{v^x(x)} = \frac{dy}{v^y(y)};$$

si osservi tuttavia che in quest'ultima espressione vi è un certo abuso di notazione (vedi oltre).

Si supponga che siano non nulli entrambi i valori $v^x(x_0)$, $v^y(y_0)$. Esisterà allora $N(y_0, x_0) \subset D$ nel quale ciò continua a sussistere. In $N(y_0, x_0)$ la soluzione $y = y(x)$, tale che $y_0 = y(x_0)$, esiste unica implicitamente definita da:

$$\psi_1(x) - \psi_1(x_0) := \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{v^x(\xi)} = \int_{y_0}^y \frac{d\eta}{v^y(\eta)} = \psi_2(y) - \psi_2(y_0).$$

Infatti: posto $t - t_0 := \psi_1(x) - \psi_1(x_0)$ si ha che ne esiste l'inversa $x(t) = \psi_1^{-1}(t - t_0 + \psi_1(x_0))$ in $N(y_0, x_0)$, e questa è soluzione di $\dot{x} = v^x(x)$, $x(t_0) = x_0$; (giacché $v^x(x_0) \neq 0$). Analogamente esiste unica la $y(t) = \psi_2^{-1}(t - t_0 + \psi_2(y_0))$ tale che: $\psi_2(y(t)) = t - t_0 + \psi_2(y_0)$. Pertanto, definita $\psi_3(x, x_0, y_0) := \psi_1(x) - \psi_1(x_0) + \psi_2(y_0)$, la soluzione del problema è data dalla: $y(x) := \psi_2^{-1}(\psi_3(x, x_0, y_0))$. Essa infatti ha per derivata

$$\begin{aligned} \frac{dy(x)}{dx} &= (\psi_2^{-1})'(x) = \frac{d\psi_2^{-1}(\eta)}{d\eta} \Big|_{\eta=\psi_3(x, x_0, y_0)} \frac{d\psi_1(x)}{dx} = \\ &= \left(\frac{d\psi_2}{dy} \Big|_{y=\psi_2^{-1}(\psi_3(x, x_0, y_0))} \right)^{-1} \frac{1}{v^x(x)} = \frac{v^y(y(x))}{v^x(x)} \end{aligned}$$

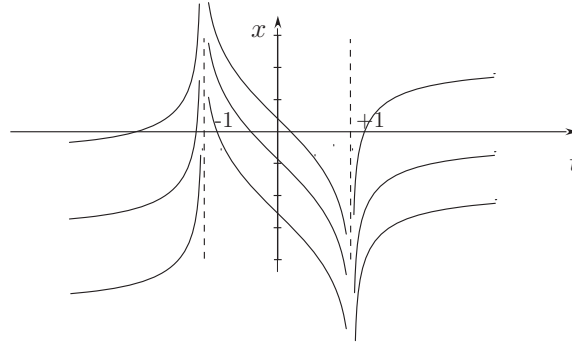
ed inoltre è evidente che $y(x_0) = \psi_2^{-1}(\psi_2(y_0)) = y_0$.

Sia per esempio y la variabile dipendente. Se in D la $v^x(x) \neq 0$ e la $v^y(y)$ si annulla per qualche $\bar{y}$, allora si può perdere l'unicità, a dipendere dalla convergenza o meno dell'integrale $\int_{y_0}^{\bar{y}} \frac{d\eta}{v^y(\eta)}$. L'unicità si perde se vi possono essere diverse curve integrali tangenti alla soluzione, certamente accettabile, $y(x) = \bar{y}$. Se l'integrale diverge, il procedimento su esposto porta ad un assurdo, e l'unica soluzione accettabile è la costante (Esempi 1.2.7 e 1.2.8). Se invece l'integrale converge, è possibile determinare infinite soluzioni, (Esempi 1.2.1 e 1.2.2), compatibili con arbitrarie condizioni iniziali e che "biforcano" dalla $y(x) = \bar{y}$, raccordandosi con questa nei punti di tangenza lungo la retta $y = \bar{y}$. Viceversa, se è la sola $v^x(x)$ ad annullarsi in qualche punto $\bar{x}$ allora è l'esistenza in grande che viene a mancare, e la soluzione resta definita solo in intervalli che dipendono dalle condizioni iniziali.

Esempio 1.4.1 $\dot{x} = \frac{2}{t^2 - 1} \equiv \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}$, $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 \neq \pm 1$,

(si veda anche: Esempio 1.2.8). La famiglia delle soluzioni è contenuta nell'espressione

$$\hat{x}(t) = \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \text{cost}.$$

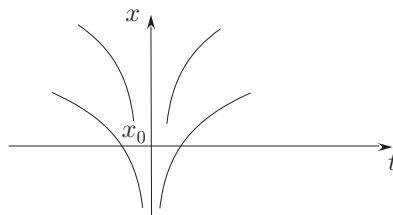


□

Esempio 1.4.2 $\dot{x} = \frac{1}{t}$ $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 \neq 0$.

Fissato comunque $\tau > 0$, non possono esistere soluzioni in $J := (-\tau, \tau)$, perché $\ln|\tau| + c$ è discontinua in zero. L'equazione ha però soluzioni date da

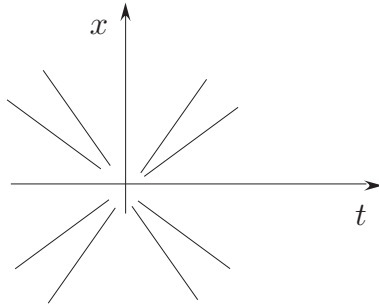
$$\begin{aligned} t \mapsto \phi(t, t_0, x_0) &= \ln(-t) - \ln(-t_0) + x_0 && \text{per } t \in (-\tau, 0), \text{ se } t_0 < 0 \\ t \mapsto \phi(t, t_0, x_0) &= \ln(+t) - \ln(+t_0) + x_0 && \text{per } t \in (0, +\tau), \text{ se } t_0 > 0. \end{aligned}$$



□

Esempio 1.4.3 $\dot{x} = \frac{x}{t}$ $t_0, x_0 \in \mathbb{R}, \quad t_0 \neq 0$.

Per $t > 0$ e per $t < 0$ le soluzioni sono date da $\hat{x}(t) = c_0 t$ con $c_0 := x_0/t_0$. Tuttavia nessuna di esse passa per la retta $t = 0$ che rappresenta la frontiera del dominio D di regolarità del campo. Quindi anche se (t_0, x_0) e (t'_0, x'_0) sono tali da avere lo stesso rapporto, qualora fosse $t_0 t'_0 < 0$ le due semirette *non fanno parte* di una stessa soluzione, pur facendo parte di una stessa retta.



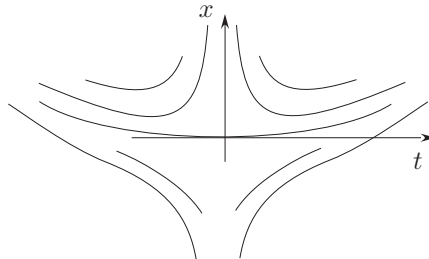
□

Ciò è per dire che quando v non è regolare, anche se la soluzione “sembra” regolare essa va comunque considerata come formata dalle varie parti dalle quali risulta composta e che *separatamente* sono soluzioni della equazione su diversi domini.

Si noti che il teorema di esistenza non dice che la soluzione è certamente singolare su ∂D , dice solo che non lo è in $\overset{\circ}{D}$.

Esempio 1.4.4 $t^2 \dot{x} + 2tx - 4t^3 = 0$, $(t_0, x_0) = (1, 1)$.

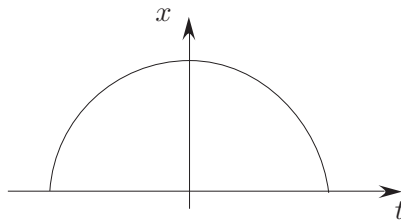
L'equazione implica $t^2 x - t^4 = c$, e le condizioni iniziali danno $c = 0$. La soluzione pertanto è contenuta in una funzione regolare su tutto $\mathbb{R}$ *pur non essendo, la soluzione stessa, definita su tutto $\mathbb{R}$* . Infatti essa è *comunque* composta da due rami disgiunti su $t < 0$ e $t > 0$. Ciò è immediato se si pensa al fatto che l'equazione data è, in realtà, la $\dot{x} = 4t - \frac{2}{t}x$, le cui soluzioni sono riassunte dalla $\hat{x}(t) = t^2 + c/t^2$.



□

Esempio 1.4.5 $\dot{x} = -\frac{t}{x}$, $t_0, x_0 \in \mathbb{R}, \quad x_0 \neq 0$.

L'equazione implica $x^2 + t^2 = c = x_0^2 + t_0^2$. La soluzione quindi cessa di esistere per $t^2 > c$. In particolare, se $c=0$, la funzione $\phi(t, 0, 0) : \{0\} \mapsto \{0\}$ non è certo differenziabile, (e non è la costante $\mathbb{R} \rightarrow \{0\}$).



□

Esempio 1.4.6 Il modello ecologico unidimensionale. $p : t \in \mathbb{R} \mapsto p(t) \in \mathbb{R}^+$.

Siano $n(t)$ il numero di nuovi nati, su un campione di $\bar{n}$ individui, nell'intervallo di tempo $[t - \tau, t]$; $m(t)$ il numero di morti nello stesso intervallo di tempo e sullo stesso campione; $p(t)$ il numero di individui vivi all'istante t . La frequenza di crescita all'istante t , *media* nell'intervallo Δt , è data per definizione da

$$\frac{\Delta p}{p \Delta t} := (n(t) - m(t)) \cdot \frac{1}{\bar{n} \tau}.$$

Ipotesi di lavoro però è che sia $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ed inoltre $\frac{\Delta p}{p \Delta t} = \frac{\dot{p}}{p}$.

Un primo modello si ottiene ponendo $n(t) - m(t) \sim \text{cost} = \alpha$, con α dipendente dalla quantità di cibo disponibile per individuo σ . Può essere plausibile supporre $\alpha = \beta(\sigma - \sigma_0)$, con β una costante positiva e con σ_0 la minima quantità di cibo sufficiente al sostentamento: si ha cioè $\sigma \leq \sigma_0 \iff \alpha \leq 0$. In tal modo risulta

$$\hat{p}(t) = p_0 \exp(\alpha(t - t_0)).$$

Con tale schema, (σ indipendente da p), la popolazione p potrebbe crescere in modo indefinito. È chiaro che generalmente questo non è accettabile; come correzione è necessario assegnare qualche fenomeno sociale, il cui modello sia $\sigma = \sigma(p)$, e che impedisca la crescita indefinita.

A questo scopo si può tenere conto della lotta per il cibo: $\sigma = (\tilde{\sigma} - kp)$ con $\tilde{\sigma} > \sigma_0$. Risulta allora $\alpha = \beta(\tilde{\sigma} - \sigma_0) - \beta kp =: c(\eta - p)$. Questo secondo modello dà luogo alla

$$\text{equazione Logistica :} \quad \dot{p} = c(\eta - p)p, \quad c, \eta > 0. \quad (4.32)$$

Gli equilibri sono $p = 0$, e $p = \eta$ che viene chiamata *popolazione endemica*. Si noti poi che $-cp^2$ è proporzionale al numero di incontri, e rappresenta gli *attriti sociali*. Ci si aspetta anche che per piccole popolazioni tali attriti siano piccoli, e cioè $\eta \gg 1$. Per p piccole allora si ha $\dot{p} \simeq c\eta p$ da cui si vede che lo zero è instabile in quanto la p segue l'evoluzione vista sopra. Viceversa, se $p > \eta$ risulta $\dot{p}/p < 0$ e di conseguenza si ha che η è stabile.

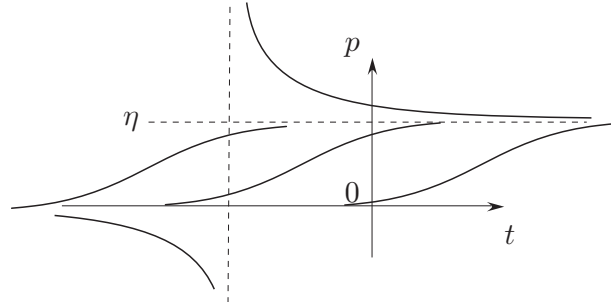
Più in dettaglio, mediante la relazione $\frac{1}{cp(\eta - bp)} \equiv \frac{1}{c} \left(\frac{1/\eta}{p} + \frac{b/\eta}{\eta - bp} \right)$ si ricava

$$c(t - t_0) = \frac{1}{\eta} \ln \left| \frac{p}{p_0} \right| - \frac{1}{\eta} \ln \left| \frac{\eta - bp}{\eta - bp_0} \right|, \quad \text{e quindi} \quad c\eta(t - t_0) = \ln \left| \frac{p(\eta - p_0)}{p_0(\eta - p)} \right|.$$

Pertanto, se $\eta - p_0 > 0$ allora (per continuità) è anche $\eta - p > 0$ almeno fino a che $p = \eta$; e ciò non può accadere in un tempo finito. Analogamente, se: $\eta - p_0 < 0$ allora $\eta - p < 0$ per ogni $t \geq t_0$. Risulta infatti esplicitamente:

$$\hat{p}(t) = \frac{\eta}{1 + \left(\frac{\eta}{p_0} - 1\right) \exp(-c\eta(t - t_0))},$$

che implica, dato $p_0 > 0$, che $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) \uparrow \eta$ se $p_0 < \eta$, e $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) \downarrow \eta$ se $p_0 > \eta$. Si ha cioè la *curva logistica*:



□

N.B. 1.4.7 Attenzione alle forme implicite. Con $x : t \in \mathbb{R} \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$ si hanno per esempio:

- $\dot{x}^2 + x^2 = 0$ non ha soluzioni: l'insieme aperto D di definizione del campo è vuoto. Al più si può estendere il concetto di soluzione (vedi qui sotto) ed accettare l'unica $x = x(t) = 0$ in corrispondenza dell'unica possibile scelta delle condizioni iniziali: $(t_0, x_0) \equiv (t_0, 0) \in \partial D$.
- $|\dot{x}| + 1 = 0$ non ha soluzioni ;
- $(\dot{x} - x)(\dot{x} - 2x) = 0$ non è una equazione ma sono due.

◇

Definizioni desuete:

Soluzione generale := Una funzione $\Phi : (t, t_0; \mathbf{c}) \mapsto \Phi(t, t_0; \mathbf{c}) \in \mathbb{R}^n$, con $\mathbf{c} := (c^1, \dots, c^n) \in \mathbb{R}^n$, definita su un aperto $J \times U \subseteq J \times D \subseteq \mathbb{R}^{2+n}$ e tale che ogni possibile soluzione $\mathbf{x} = \phi(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ dell'equazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$, con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $(t_0, \mathbf{x}_0) \in U$, si possa ricavare come caso particolare della Φ per una qualche scelta dei parametri $c^1, c^2, \dots, c^n$. Lo spazio dei parametri deve pertanto poter essere posto in corrispondenza biunivoca con quello dei dati iniziali (a t_0 fissato).

Soluzione singolare := una soluzione che *non* è ottenibile dalla soluzione generale per alcun valore reale finito dei parametri. (Spesso appartiene con la ∂D se il campo è *loc.Lip* in $\overset{\circ}{D}$).

Queste possono dar luogo a casi dubbi: $\dot{x} = -2x^{3/2}$, che è *Lip* in $\mathbb{R}$, dà

$$\frac{1}{(1-3/2)}(x^{-1/2} - x_0^{-1/2}) = -2(t - t_0)$$

da cui

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} (t+c)^{-2} & \text{se } x_0 \neq 0 \\ 0 & \text{se } x_0 = 0 \end{cases}$$

e si noti che la $x = 0$ non è ottenibile dalla prima per alcun valore reale di c . Se però si pone $k := 1/c$ la funzione che si ottiene è: $\hat{x}(t) = k^2/(1+kt)^2$ che è del tutto regolare, ma che non contiene il caso $c = 0$.

Convieni in definitiva riferirsi sempre alla soluzione locale per (t_0, x_0) .

Esempio 1.4.8 L'equazione di Clairaut

$$x = \dot{x}t - \frac{\dot{x}^2}{2} \quad t_0, x_0 \in \mathbb{R}.$$

In realtà queste sono due equazioni: $\dot{x} = t \pm \sqrt{t^2 - 2x}$ entrambe con campo *loc.Lip* in $D := \{(t, x) \mid x < t^2/2\}$, infatti ivi è finita la $\partial_x v = \mp(t^2 - 2x)^{-1/2}$. La frontiera del dominio D è la parabola $x = t^2/2$ che è *soluzione*, singolare.

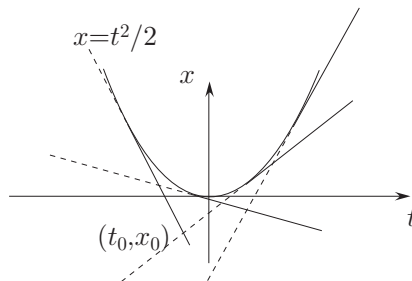
La funzione $\hat{x}(t) = x_0 + \lambda(t - t_0)$ è soluzione purché λ verifichi la:

$$x_0 + \lambda(t - t_0) = \lambda t - \frac{1}{2}\lambda^2, \quad \text{e cioè se } \lambda_{\pm} = t_0 \pm \sqrt{t_0^2 - 2x_0}.$$

A sua volta quest'ultima individua due rette (una per equazione) per ciascun $(t_0, x_0) \notin \partial D$; esse passano per la ∂D nei punti $(x_{\pm}, t_{\pm})$ tali che

$$\frac{t_{\pm}^2}{2} = x_{\pm} = x_0 + \lambda_{\pm}(t_{\pm} - t_0) = \lambda_{\pm}t_{\pm} - \frac{\lambda_{\pm}^2}{2}$$

che implica $(t_{\pm} - \lambda_{\pm})^2 = 0$ e quindi $t_{\pm} = \lambda_{\pm}$. D'altra parte il coefficiente angolare della tangente in t alla parabola ∂D vale: $d(t^2/2)/dt \equiv t$, per cui le rette soluzione sono tangenti alla parabola nei punti $(x_{\pm}, t_{\pm})$. Come nell'Esempio 1.4.3 però queste soluzioni vanno considerate in modo separato: l'una o l'altra delle due semirette il cui punto di separazione è quello di tangenza con la frontiera ∂D del dominio di regolarità del campo.



Nella figura il tratto unito rappresenta le soluzioni per l'equazione con il segno positivo, quello tratteggiato le soluzioni dell'equazione con il meno. $\square$

Memento 1.4.1 Una funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ si dice omogenea di grado $\alpha \in \mathbb{R}$ se, per ogni $x > 0$, si ha

$$f(xy, xz) = x^\alpha f(y, z), \quad \text{identicamente per } y, z \in \mathbb{R}.$$

Secondo caso notevole Equazioni omogenee di grado zero.

Siano $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ aperto, con $x_0 \neq 0$ e $v(x_0, y_0)$, e siano $v^x, v^y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $v^x, v^y \in C^1(D)$, due funzioni omogenee dello stesso grado. (Ridefinendo $x \rightarrow -x$ se $x_0 < 0$), la sostituzione $y(x) =: x z(x)$ trasforma l'equazione

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v^y(x, y)}{v^x(x, y)}, \quad (x_0, y_0) \in D \quad \text{nella :}$$

$$z + x \frac{dz}{dx} = \frac{v^y(1, z)}{v^x(1, z)}, \quad (x_0, z_0) \in D, \quad z_0 := y_0/x_0$$

che si risolve implicitamente con la

$$\ln \frac{x}{x_0} = \int_{z_0}^z \left(\frac{v^y(1, \zeta)}{v^x(1, \zeta)} - \zeta \right)^{-1} d\zeta \Big|_{z=y/x},$$

(si veda: [Petrovskij p.18]); tutte le curve integrali sono simili, con l'origine come centro di similitudine: $y \rightarrow cy, x \rightarrow cx$, con $c \neq 0$.

È evidente che questo metodo si applica anche ad equazioni del tipo: $y' = g(x, y)$ con $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funzione omogenea di grado zero.

Esempio 1.4.9 $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right)$ $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $dx_0+ey_0 \neq 0$ con $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, funzione regolare, e con $a, \dots, f \in \mathbb{R}$, tali che $|c| |f| \neq 0$.

Se $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \neq 0$ esiste un unico punto $(\bar{x}, \bar{y})$ intersezione delle due rette. Posto $x =: \xi + \bar{x}$, $y =: \eta + \bar{y}$ si ricava facilmente

$$\frac{d\eta}{d\xi} = g\left(\frac{a\xi+b\eta}{d\xi+e\eta}\right) \implies \zeta + \xi \frac{d\zeta}{d\xi} = g\left(\frac{a+b\zeta}{d+e\zeta}\right).$$

Se invece $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = 0$, (pur restando $|a| + |b| > 0$, e $|d| + |e| > 0$), esiste $\sigma \in \mathbb{R}$ tale che $a = \sigma d$, $b = \sigma e$, e si ha con $z = (ax+by) = \sigma(dx+ey)$:

$$b \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - a = bg\left(\frac{z+c}{1/\sigma} z + f\right).$$

□

N.B. 1.4.10 Nel seguito di questo paragrafo si assumeranno $x, y, z \in \mathbb{R}$; le funzioni $v^x, v^y, \mu, \nu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ verranno tutte considerate appartenenti a $C^1(D)$ per un conveniente aperto $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $D \ni (x_0, y_0)$; e si supporrà che in D entrambi i valori di v^x, v^y e di μ, ν siano non simultaneamente nulli.

Inoltre, la seguente notazione si intenderà valida con l'intesa di scegliere come variabile dipendente quella per la quale la condizione iniziale $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ rende la corrispondente componente del campo determinata e non nulla. Per esempio se $v^x(x_0, y_0)$ è in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ allora si intenderanno *localmente* equivalenti in $N(x_0, y_0) \subseteq \mathbb{R}^2$ le due espressioni

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v^y(x, y)}{v^x(x, y)} \quad \text{e} \quad v^y(x, y) dx = v^x(x, y) dy, \quad (4.33)$$

il che comporta che nell'intorno di punti nei quali è invece $v^y(x, y) \neq 0$ l'equazione che si pensa di risolvere è la: $\frac{dx}{dy} = \frac{v^x(x, y)}{v^y(x, y)}$ e non la prima delle (4.33). Allo stesso modo, se $\nu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, è tale che $\nu(x_0, y_0) \neq 0$, allora si equivarranno in $N(x_0, y_0) \subseteq \mathbb{R}^2$ le

$$\nu(x, y) \frac{dy}{dx} + \mu(x, y) = 0 \quad \text{e} \quad \mu(x, y) dx + \nu(x, y) dy = 0. \quad (4.34)$$

Questa notazione si può generalizzare al caso $n \geq 2$, e cioè con $\mathbf{x} := (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ e con $\mathbf{v} := (v^1, \dots, v^n) : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \in C^1(D)$. Tuttavia ciò dà luogo a due possibili "estensioni", diverse l'una dall'altra. Da un lato si può considerare la (4.33) come un caso particolare di un'espressione del tipo

$$\frac{dx^1}{v^1(x^1, \dots, x^n)} = \frac{dx^2}{v^2(x^1, \dots, x^n)} = \dots = \frac{dx^n}{v^n(x^1, \dots, x^n)}, \quad (4.35)$$

da intendersi equivalente al sistema (per esempio)

$$\frac{dx^i}{dx^j} = \frac{v^i(x^1, \dots, x^n)}{v^j(x^1, \dots, x^n)}, \quad i = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n$$

se nell'intorno di un punto $\mathbf{x}_0 := (x_0^1, \dots, x_0^n)$ nel quale è $v^j(\mathbf{x}_0) \neq 0$ (si veda: Cap.II). In particolare

$$\frac{dx^1}{v^1(t, x^1, \dots, x^n)} = \frac{dx^2}{v^2(t, x^1, \dots, x^n)} = \dots = \frac{dx^n}{v^n(t, x^1, \dots, x^n)} = \frac{dt}{1} \quad (4.36)$$

può essere ritenuta equivalente per esempio al sistema

$$\frac{d}{dt} x^i = v^i(t, x^1, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Dall'altro, la (4.33) può essere vista come caso particolare della sola espressione:

$$f_1(x^1, \dots, x^n)dx^1 + f_2(x^1, \dots, x^n)dx^2 + \dots + f_n(x^1, \dots, x^n)dx^n = 0, \quad (4.37)$$

la quale però, per $n > 2$, in generale non equivale ad alcuna equazione differenziale ordinaria risolubile in modo indipendente. Essa infatti stabilisce “solo” un vincolo di ortogonalità, nel punto $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$, fra il vettore $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ ed uno dei vettori $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ che possono comparire nella (4.35), e cioè un qualsiasi vettore di campo di un sistema del tipo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$. $\diamond$

Terzo caso notevole Equazioni differenziali *esatte*

(si vedano: [Ghizzetti II p.221] o anche: [Apostol III.7.19])

Memento 1.4.1 *Si ricordino dapprima le seguenti definizioni.*

Cammino semplice := Un cammino $\gamma := \{\gamma(\tau)\}_{\tau \in [t_0, t]}$ individuato da una funzione $\gamma : \tau \in [t_0, t] \rightarrow \mathbf{x} := \mathbf{x}(\tau) \in D \subset \mathbb{R}^2$, $\gamma \in C([t_0, t])$ tale che dati comunque $\tau_1, \tau_2 \in [t_0, t]$, $\tau_1 \neq \tau_2$, si ha $\gamma(\tau_1) \neq \gamma(\tau_2)$.

Cammino generalmente regolare := Un cammino $\gamma : [t_0, t] \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$, $\gamma \in C^0([t_0, t])$ che ammette $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n := t$ tali che su ciascun $I_i := (t_{i-1}, t_i)$ si ha $\gamma \in C^1(I_i)$, con $\|\dot{\gamma}\| := (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2} > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Sia γ un Cammino generalmente regolare in $\mathbb{R}^n$ dato da $\mathbf{x}(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$.

“Integrare una funzione scalare $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x^1, \dots, x^n)$ lungo γ ” significa sommare i valori ottenuti su ciascuno degli archi regolari: $\gamma_i := \{\gamma(t) \mid t \in I_i\}$ mediante la

$$\int_{\gamma_i} f \, ds \equiv \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\mathbf{x}(\tau)) \sqrt{|\dot{\mathbf{x}}(\tau)|^2} \, d\tau;$$

e si osserva che il risultato è indipendente dalla particolare parametrizzazione dell'arco γ_i .

“Integrare una forma differenziale lineare $\sum_{k=1}^n g_k(x^1, \dots, x^n) dx^k$ lungo γ_i significa calcolare l'integrale

$$\sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \left(\sum_{k=1}^n g_k \dot{x}^k(\tau) \right) \sqrt{|\dot{\mathbf{x}}|^2} \, d\tau = \int_{t_0}^t \sum_{k=1}^n g_k(x^1(\tau), \dots, x^n(\tau)) \dot{x}^k(\tau) \, d\tau.$$

Forma esatta := Una forma differenziale del tipo:

$$\mu(x, y)dx + \nu(x, y)dy, \quad \text{con } \mu, \nu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

si dice esatta su un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ quando esiste su D una funzione $\mathcal{F} : D \rightarrow \mathbb{R}$ che sia $\mathcal{F} \in C^1(D)$ con

$$\nabla \mathcal{F}(x, y) := \begin{pmatrix} \partial_x \mathcal{F}(x, y) \\ \partial_y \mathcal{F}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu(x, y) \\ \nu(x, y) \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in D.$$

In tal caso, scelto un qualunque cammino semplice e generalmente regolare $\gamma : [t_0, t] \rightarrow D$, la cui rappresentazione parametrica sia $\mathbf{x}(\tau) \equiv (x(\tau), y(\tau))$ con $\mathbf{x}(t_0) = P_0 \equiv (x_0, y_0)$ e $\mathbf{x}(t) = P \equiv (x, y)$, si ha:

$$\int_{\gamma} \mu dx + \nu dy := \int_{t_0}^t (\mu \dot{x} + \nu \dot{y}) d\tau = \int_{t_0}^t \frac{d\mathcal{F}}{d\tau} d\tau = \mathcal{F}(x, y) - \mathcal{F}(x_0, y_0).$$

Equivalentemente, lungo un qualunque cammino semplice e chiuso $\gamma_0 \subset D$ risulta, con T il periodo del ciclo γ_0 ,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_0} \mu dx + \nu dy &\equiv \int_{t_0}^{t_0+T} (\mu(\mathbf{x}(t))\dot{x}(t) + \nu(\mathbf{x}(t))\dot{y}(t)) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{d\mathcal{F}(\mathbf{x}(t))}{dt} dt = \mathcal{F}(\mathbf{x}(t_0+T)) - \mathcal{F}(\mathbf{x}(t_0)) \equiv 0. \end{aligned}$$

Le precedenti considerazioni si estendono al caso generale, e cioè per una forma differenziale del tipo (4.37) con $n > 2$ ed $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Anche questa si dice esatta quando esiste una funzione (scalare) $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ il cui differenziale totale uguaglia la forma stessa; e pertanto essa è tale che $\nabla \mathcal{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$. Come si vedrà più diffusamente nel Cap.III, se $n > 2$ l'esattezza di una forma implica "solo" che il valore $\mathcal{F}(t) := \mathcal{F}(\hat{\mathbf{x}}(t))$ non muta lungo ciascuna delle soluzioni $\mathbf{x} : t \mapsto \hat{\mathbf{x}}(t) := (x^1(t), \dots, x^n(t))$ di una qualsiasi delle equazioni $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ che hanno campo $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ che verifica

$$\nabla \mathcal{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \equiv \sum_{i=1}^n f_i(x^1, \dots, x^n) v^i(x^1, \dots, x^n) = 0,$$

e cioè quelle con campo $\mathbf{v}$ tangente in ogni suo punto a una superficie: $\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}_0$.

Esempio 1.4.11 (continuazione dell'Esempio 1.4.5)

La funzione $\mathcal{F}(x, y) := x^2 + y^2$ ha valori costanti non solo lungo le soluzioni del campo $\begin{pmatrix} -y/x \\ 1 \end{pmatrix}$, ma anche lungo quelle dei campi: $\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix} yx \\ -x^2 \end{pmatrix}$, etc, (ma solo il secondo dei tre verifica la condizione di Shwartz, cfr. oltre). $\square$

Viceversa, nel caso $n = 2$ (ovvero 1 variabile scalare dipendente ed 1 indipendente), sussiste la seguente

Proposizione 1.4.1 Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $x, y \in \mathbb{R}$, e $\mu, \nu \in C^1(D)$ a valori reali e non simultaneamente nulli. Se la forma $\mu(x, y)dx + \nu(x, y)dy$ è esatta, e quindi esiste una funzione $\mathcal{F} : D \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{F} \in C^1(D)$, tale che su D si abbia: $\nabla \mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}$, allora il teorema della funzione implicita permette di risolvere la $\mathcal{F}(x, y) = c = \mathcal{F}(x_0, y_0)$ e di ricavare la soluzione (generale) in D dell'equazione $\mu(x, y)dx + \nu(x, y)dy = 0$, e cioè di una (qualsiasi) delle equazioni $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$, con $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^2$, che hanno campo $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ ortogonale a $\nabla \mathcal{F}(\mathbf{x})$ nel punto $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, per esempio: $dy/dx = v^x/v^y = -\nu/\mu$, e sempre che sia $\mu(x, y) \neq 0$, la $x = x(y)$ tale che $\mathcal{F}(x(y), y) = \mathcal{F}_0 := \mathcal{F}(x_0, y_0)$ è la soluzione di

Dimostrazione Supposto, per esempio, che sia $\partial_x \mathcal{F}(x_0, y_0) \equiv \mu(x_0, y_0) \neq 0$, la: $\mathcal{F}(x, y) = \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}(x_0, y_0)$ definisce implicitamente $x = x(y)$ tale che:

- $\mathcal{F}(x(y), y) = \mathcal{F}_0$ per ogni y in un conveniente intorno di y_0 ;
- $x(y_0) = x_0$;
- $x = x(y)$ è soluzione di

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\nu(x, y)}{\mu(x, y)} \quad (4.38)$$

perché $x = x(y)$ è tale che

$$0 = \frac{d}{dy} (\mathcal{F}(x(y), y)) = \left[\mu(x, y) \frac{dx}{dy} + \nu(x, y) \right]_{x=x(y)}. \quad (4.39)$$

Si osservi che la (4.38) è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x' = -\frac{\nu(x, y)}{\mu(x, y)} \\ y' = 1 \end{cases}, \quad (4.40)$$

ed è quindi della forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \text{con } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad \text{e con } \mathbf{v} \perp \nabla \mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}.$$

In effetti anche qui, come nel caso generale, ogni soluzione della (4.38) è tale da giacere su una delle superfici $\mathcal{F}(x, y) = \text{cost}$. Infatti lungo le soluzioni della (4.38), ed in forza della (4.39), si riconosce che la funzione $\mathcal{F}$ conserva il valore $\mathcal{F}(x_0, y_0)$ che essa assume nel punto iniziale. Come si vedrà in seguito, la funzione $\mathcal{F}$ è un integrale primo del sistema (4.40).

Memento 1.4.1 *Sussistono i seguenti risultati classici.*

Teorema 1.4.1 (della funzione implicita) , (si veda: [Apostol III.3.29])

Sia $f : (x, y) \in D \rightarrow f(x, y) \in \mathbb{R}$, con $D := \mathbb{R} \times [a, b] \subset \mathbb{R}^2$, tale che $\partial_x f$ esista su D e verifichi $0 < m_1 \leq \partial_x f \leq m_2$ per certe due costanti $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$.

Se per ogni $\phi \in C^0([a, b])$ anche la $f \circ_1 \phi \in C^0([a, b])$, ove $(f \circ_1 \phi)(y) := f(\phi(y), y)$, allora esiste ed è unica la $\hat{\phi} \in C^0([a, b])$ tale che $f \circ_1 \hat{\phi} = 0$ per ogni $y \in [a, b]$.

Dimostrazione L'operatore $\mathcal{S}[\phi] := \phi - \frac{1}{m_2} f \circ_1 \phi$ è contrattivo su $(C^0([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$. Infatti, siccome è possibile scrivere

$$f \circ_1 \phi = f \circ_1 \psi + \left(\partial_x f \circ_1 \tilde{\psi} \right) (\phi - \psi)$$

per un'opportuna $\tilde{\psi}$ tale che $\tilde{\psi}(y) \in [\phi(y), \psi(y)]$, allora si ha che

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{S}[\phi] - \mathcal{S}[\psi] \right| &= \left| \phi - \psi - \frac{1}{m_2} (f \circ_1 \phi - f \circ_1 \psi) \right| = \left| (\phi - \psi) \left(1 - \frac{1}{m_2} \partial_x f \circ_1 \tilde{\psi} \right) \right| \\ &\leq \left(1 - \frac{m_1}{m_2} \right) |\phi - \psi| \end{aligned}$$

e quindi

$$\|\mathcal{S}[\phi] - \mathcal{S}[\psi]\|_\infty \leq k \|\phi - \psi\|_\infty \quad \text{con} \quad k = 1 - \frac{m_1}{m_2} < 1.$$

■

Per cui, se $f(x_0, y_0) = 0$, l'unicità di $\hat{\phi}$ ed il fatto che $\partial_x f \neq 0$ assicurano che $x_0 = \hat{\phi}(y_0)$. Infatti la $f(\cdot, y)$ è nulla in $\phi(y_0)$ e monotona in $N(x_0)$.

Alternativamente, con ipotesi leggermente meno restrittive ed una dimostrazione meno snella, si ha il seguente

Teorema 1.4.2 (del Dini) , (si veda: [Avantaggiati II.2.1]) Siano $f, \partial_x f \in C^0(D)$ con $D \subset \mathbb{R}^2$ aperto, e sia $(x_0, y_0) \in D$ tale che

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad \text{ed} \quad \partial_x f(x_0, y_0) \neq 0.$$

Allora esistono $h, k \in \mathbb{R}^+$ ed una sola $\hat{\phi} : [B_h(y_0)] \rightarrow [B_k(x_0)]$ tali che

$$\hat{\phi}(y_0) = x_0, \quad \text{e che} \quad f \circ_1 \hat{\phi} = 0 \quad \text{su} \quad B_k(y_0).$$

Dimostrazione Si supponga $\partial_x f(x_0, y_0) > 0$. Esistono $\delta, h, m > 0$ tali che $[B_h(x_0)] \times [B_\delta(y_0)] =: \Gamma \subset D$, e che su Γ risulti $\partial_x f \geq m > 0$.

Ma allora è $f(x_0 - h, y_0) < 0$ ed $f(x_0 + h, y_0) > 0$, e quindi esiste $0 < k \leq \delta$ tale che $f(x_0 - h, y) < 0$ ed $f(x_0 + h, y) > 0$ su $B_k(y_0)$.

Pertanto per ciascun $\bar{y} \in B_k(y_0)$ esiste $\bar{x} \in B_h(x_0)$ tale che $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, e tale $\bar{x}$ è unico giacché $\partial_x f > 0$.

Infine, la continuità della corrispondenza è provata, punto per punto, scegliendo h e k opportunamente piccoli.

■

Prendono il nome di *esatte* quelle equazioni differenziali che risultano le derivate totali di un'equazione di ordine inferiore. Per esempio, l'equazione di Lighthill: $\ddot{x} + t\dot{x} + x = 0$ è del tipo $\frac{d}{dt}(\dot{x} + tx) = 0$. Esse danno luogo, mediante quadratura, ad un'equazione di ordine più basso, e consistono in un caso particolare di ortogonalità fra il vettore $\mathbf{f}(\mathbf{x}) := \nabla \mathcal{F}(\mathbf{x})$ di una forma esatta ed un vettore $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n)$ espressi in funzione di un'unica variabile *dipendente* e delle sue derivate di ordine superiore. Nell'esempio della equazione di Lighthill si ha $\nabla \mathcal{F}(t, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) := (\mathcal{F}_t; \mathcal{F}_x; \mathcal{F}_{\dot{x}}; \dots; \mathcal{F}_{x^{(n)}}) = (x; t; 1)$ che è ortogonale al vettore $(1; \dot{x}; \ddot{x}; \dots; x^{(n+1)})$, e quindi $d\mathcal{F}(t, \hat{\mathbf{x}}(t))/dt = 0$.

N.B. 1.4.12 Se $\mu(x, y)$ si annulla in qualche punto in D occorre cambiare il ruolo delle due variabili dipendente ed indipendente: per la forma vista nell'Esempio 1.4.11: $x dx + y dy$ vanno presi in considerazione quattro domini; ciò non toglie tuttavia che la funzione $\mathcal{F}(x, y) = x^2 + y^2$ sia del tutto regolare. ◇

N.B. 1.4.13 Per definizione, la funzione $\mathcal{F}$ è $\mathcal{F} \in C^1(D)$, e quindi risulta necessariamente verificata la

$$\text{Condizione di Schwartz} \quad \delta(x, y) := \partial_y \mu(x, y) - \partial_x \nu(x, y) = 0, \quad x, y \in D.$$

e cioè la forma è chiusa in tutto il dominio di regolarità D della funzione $\mathcal{F}$.

L'opposto della funzione δ può essere interpretato sia (in $\dim = 2$) come la divergenza del vettore: $\mathbf{w} := (\nu, -\mu)$, sia (in $\dim = 3$) come la terza componente di un vettore $\boldsymbol{\omega}$ tale che $\omega^x = \mu$ ed $\omega^y = \nu$. $\diamond$

In generale non è immediato capire se esista o meno una tale funzione $\mathcal{F}$ anche al di fuori del “conveniente intorno” delle condizioni iniziali. A volte invece può succedere che se ne possa stabilire l'esistenza in modo semplice: è ciò che accade quando la funzione $\delta(x, y) := \partial_y \mu(x, y) - \partial_x \nu(x, y)$ si annulla in tutti i punti di un aperto semplicemente connesso: A .

Memento 1.4.1 Semplicemente connesso := Un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ si dice semplicemente connesso quando ogni curva generalmente regolare semplice e chiusa contenuta in A è frontiera, in $\mathbb{R}^2$, di un aperto connesso totalmente contenuto in A .

Ciò è l'equivalente in dimensione due di quello che in dimensione tre si chiama:

Connessione lineare semplice := Un aperto $A \subset \mathbb{R}^3$ si dice a connessione lineare semplice quando ogni curva generalmente regolare semplice e chiusa contenuta in A è frontiera, in $\mathbb{R}^3$, di una superficie S generalmente regolare totalmente contenuta in A .

Entrambi si possono anche enunciare richiedendo che ogni curva semplice chiusa sia “contraibile” ad un punto in modo continuo senza uscire dall'insieme A .

Se A è semplicemente connesso, dato comunque un cammino semplice chiuso $\gamma_0 \subset A$ si può assicurare l'esistenza di un insieme regolare $\Gamma \subset A \subset \mathbb{R}^2$ che lo ha per frontiera, ove:

Insieme regolare := Un chiuso $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ che ammette una decomposizione finita: $\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$ fatta con Insiemi normali o semplici $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\}$ rispetto ad un (qualche) piano coordinato, e frontiera costituita da porzioni di superficie regolari aventi a coppie al più punti (isolati) in comune.

Insieme in $\mathbb{R}^3$ normale rispetto al piano (x, y) , o: z -semplice := un compatto $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ espresso da

$$\Gamma := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \left| \begin{array}{l} \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y); \quad \alpha, \beta \in C^1(D \subset \mathbb{R}^2), \\ \alpha(x, y) < \beta(x, y) \quad \forall (x, y) \in \overset{\circ}{D}, \quad D \text{ normale} \end{array} \right. \right\}.$$

Se $A \subset \mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso sussistono le formule di Green secondo le quali, se $\mu, \nu \in C^0(A)$ e se γ_0 è semplice chiusa e bordo di $\Gamma \subset A$, si ha che:

$$\int_{\Gamma} (\partial_x \nu(x, y) - \partial_y \mu(x, y)) dx dy = - \int_{\Gamma} \delta(x, y) dx dy = \int_{\gamma_0} \mu(x, y) dx + \nu(x, y) dy. \quad (4.41)$$

Con la notazione $\mathbf{v} \parallel \mathbf{w} := \begin{pmatrix} \nu \\ -\mu \end{pmatrix}$ ed $\mathbf{n} d\lambda = \begin{pmatrix} +dy \\ -dx \end{pmatrix}$ la (4.41) si può anche leggere come la restrizione ad $\mathbb{R}^2$ del teorema della divergenza (o di Gauss):

$$\int_{\Gamma} \operatorname{div} \mathbf{w} d\Gamma = \oint_{\partial\Gamma} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} d\lambda \quad \text{con } \Gamma \subset \mathbb{R}^2 \text{ regolare, } \partial\Gamma \text{ semplice e liscia, } \mathbf{n} \text{ uscente.}$$

Solo per memoria si ricorsi che, in dimensione tre, sussistono le formule

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{w} dV = \oint_{\partial V} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad \text{con } V \subset \mathbb{R}^3 \text{ regolare, } \partial V \text{ orientata, } \mathbf{n} \text{ uscente,}$$

da paragonare con quelle del teorema di Stokes:

$$\int_{+S} \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{+\partial S} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\tau} d\lambda, \quad \boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}, \boldsymbol{\tau} \in C^1(A, \mathbb{R}^3). \quad (4.42)$$

nelle quali $\boldsymbol{\omega} = (\mu, \nu, \sigma) \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$, $\mathbf{n} dS = (dy dz, dz dx, dx dy)$, e $\boldsymbol{\tau} d\lambda = (dx, dy, dz)$. Inoltre, $+\partial S$ è una curva semplice chiusa generalmente regolare, bordo di una superficie S orientata regolare e contenuta in $A \subseteq \mathbb{R}^3$; quest'ultima esiste certamente purché A sia a connessione lineare semplice.

Pertanto, se $\text{rot } \omega = 0$ su un qualche insieme D a connessione lineare semplice, dal Teorema di Stokes segue che $\int_{P_0}^P \omega \cdot \tau \, ds = \mathcal{F}(P) - \mathcal{F}(P_0)$ qualsiasi sia il percorso semplice generalmente regolare che unisce P_0 a P . Allora necessariamente si ha $\omega = \nabla \mathcal{F}$. Infatti, facendo passare il percorso per un arbitrario $P' := (x', y, z)$ con $P' \in \Gamma(P) \subset D$ ed $x' < x$, si riconosce che $\partial_x \mathcal{F}(P) = \partial_x \int_{P_0}^P \omega^x \, dx + 0 \equiv \omega^x$; ed analogamente per le altre derivate parziali.

In definitiva, e con $\delta(x, y) := \partial_y \mu(x, y) - \partial_x \nu(x, y) = -\text{div } \mathbf{w} = \text{rot}^z \omega$, si ha che:

- in $\dim = 2$: la condizione $\text{div } \mathbf{w} = 0$ in tutti i punti di un aperto semplicemente connesso A
- in $\dim = 3$: la condizione $\text{rot } \omega = 0$ in tutti i punti di un dominio a connessione lineare semplice)

è condizione sufficiente (oltre che necessaria) perché si annulli l'integrale di linea della forma lungo una qualsiasi curva semplice chiusa γ_0 contenuta in A . Quest'ultima condizione equivale all'esistenza della funzione $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbf{x})$ il cui differenziale totale uguaglia la forma su A . In particolare, in $\dim = 2$ è garantita l'esistenza di $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x, y)$ tale che

$$\nabla \mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \nabla \mathcal{F} \parallel \omega \\ \nabla \mathcal{F} \perp \omega \end{cases}, \quad \text{e quindi tale che} \quad \nabla \mathcal{F} \cdot \tau \, d\lambda = d\mathcal{F}.$$

Riassumendo (in $\dim = 2$):

$$\exists \mathcal{F} \in C^1(D) \quad \begin{cases} \Leftarrow \partial_y \mu = \partial_x \nu, & \mu, \nu \in C^1 \quad \text{in } A \text{ semplicemente connesso} \\ \Rightarrow \partial_y \mu = \partial_x \nu, & \mu, \nu \in C^1 \quad \text{in } D \text{ aperto connesso.} \end{cases}$$

Nota 1.4.1 Sapendo che la forma è esatta, e quindi che la funzione $\mathcal{F}$ esiste, per calcolarla è opportuno scegliere percorsi convenienti; per esempio, per ogni $(x_0, y_0), (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ si ha

$$\mathcal{F}(x, y) - \mathcal{F}(x_0, y_0) = \int_{x_0}^x \mu(\xi, y) d\xi + \int_{y_0}^y \nu(x_0, \eta) d\eta;$$

oppure altre analoghe espressioni, quali per esempio la:

$$\mathcal{F}(x, y) - \mathcal{F}(x_0, y_0) = \int_{x_0}^x \mu(\xi, y_0) d\xi + \int_{y_0}^y \nu(x, \eta) d\eta.$$

Altre volte è invece conveniente agire come segue:

$$\partial_x \mathcal{F}(x, y) = \mu(x, y) \quad \implies \quad \mathcal{F}(x, y) = \int^x \mu(\xi, y) d\xi + r(y).$$

La derivata parziale rispetto ad y del secondo membro di quest'ultima deve uguagliare $\nu(x, y)$. Si risolve rispetto a dr/dy e si integra in modo indefinito la funzione della sola y così ottenuta; infatti

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dr}{dy} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu - \frac{\partial}{\partial y} \int^x \mu(\xi, y) d\xi \right) = \partial_x \nu - \partial_y \mu = 0$$

Si ha in tal modo:

$$r(y) = \int^y \left[\nu(x, \eta) - \int^x \partial_\eta \mu(\xi, \eta) d\xi \right] d\eta.$$

▷

Esempio 1.4.15 $\cos y \, dx - (x \sin y - y^2) \, dy = 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Si ha $\partial_x \nu = \partial_y \mu = -\sin y$. Pertanto $\mathcal{F}(x, y) = x \cos y + r(y)$, e quindi

$$-x \sin y + \frac{dr}{dy} = -x \sin y + y^2, \quad \text{che implica} \quad r(y) = (y^3 + c)/3$$

da cui $x(t) = (c - y^3/3)/\cos y + c$.

□

Esempio 1.4.16 $\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

La forma è definita in un aperto $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Tuttavia, anche se verifica la condizione di Schwartz ed esiste $\arctan \frac{y}{x}$ di cui essa risulta il differenziale totale:

$$\frac{d}{d\xi} \arctan \xi = \frac{1}{1 + \xi^2} \Rightarrow \left(\frac{xy' - y}{x^2} \right) \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{y}{x} \right) \frac{d}{d\xi} \arctan \xi \Big|_{\xi=y/x}$$

c'è il problema che $\arctan(\cdot)$ non è regolare, addirittura non è una funzione, su tutto D . Occorre pertanto “tagliare” il piano $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ con, per esempio, l'insieme $D_- := \{(x, y) \mid y = 0, \quad x < 0\}$ e la forma resta allora esatta nel complementare $\mathbb{R}^2 \setminus D_-$ che risulta infatti semplicemente connesso. (Per definirvi in modo opportuno la funzione $\mathcal{F}$ è opportuno procedere per quadranti; e tuttavia, per poterla adoperare ai fini della risoluzione di (una delle) equazioni compatibili con essa, occorre far salve le usuali cautele su quale dei suoi coefficienti possa annullarsi: si vedano anche i successivi due N.B.). $\square$

Fattore integrante := una funzione $\varpi : D \rightarrow \mathbb{R}$ per la quale si moltiplica la forma differenziale lineare rendendola così esatta. Per esempio, se $n = 2$, ϖ è fattore integrante quando

$$\varpi (\mu dx + \nu dy) \quad \text{è tale che} \quad \partial_y(\varpi \mu) = \partial_x(\varpi \nu).$$

Esempio 1.4.17 $(y^2 + y)dx - xdy, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

La forma non è esatta; tuttavia, moltiplicandola per il fattore $\varpi(x, y) := 1/y^2$ si ha $\left(1 + \frac{1}{y}\right)dx - \left(\frac{x}{y^2}\right)dy$ che è esatta e dà, per esempio, $\mathcal{F}(x, y) - \mathcal{F}(x_0, y_0) = (x - x_0) \left(1 + \frac{1}{y_0}\right) + x \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right)$ da cui segue $y = \frac{x}{c - x}$.

Naturalmente la soluzione $y = 0$ va considerata a parte. L'idea è che ϖ non deve introdurre nuove singolarità. $\square$

Se $\mu, \nu \in C^1(D)$, ogni forma $\mu(x, y)dx + \nu(x, y)dy$ ammette, localmente, un fattore integrante (così come ogni $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ammette n integrali primi dipendenti dal tempo ed indipendenti fra loro, come si vedrà nel seguito); ma non sono noti metodi generali per trovarlo.

N.B. 1.4.18 Se ϖ è un fattore integrante, e quindi tale che $\varpi \mu = \partial_x \mathcal{F}$, $\varpi \nu = \partial_y \mathcal{F}$, e se $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione regolare, allora $\varpi g \circ \mathcal{F}$ è un altro fattore integrante, infatti in tal caso la condizione di esattezza diviene $\partial_y(\varpi \mu g \circ \mathcal{F}) = \partial_x(\varpi \nu g \circ \mathcal{F})$ e fornisce $\varpi \mu \partial_y(g \circ \mathcal{F}) = \varpi \nu \partial_x(g \circ \mathcal{F})$ che è una identità, data l'ipotesi su ϖ . $\diamond$

Qualche idea sul come trovare il fattore integrante. Dovendo essere $\partial_y(\varpi \mu) = \partial_x(\varpi \nu)$, si ha:

$$\partial_y \mu - \partial_x \nu = \delta = \frac{1}{\varpi} (\nu \partial_x \varpi - \mu \partial_y \varpi), \quad (4.43)$$

e allora, con un pò di fortuna, possono darsi i seguenti casi:

- δ/ν funzione solo di x , (oppure δ/μ funzione solo di y), ed allora si può scegliere ϖ funzione solo di x (o di y), e dalla (4.43) si ricava

$$\ln \varpi = + \int^x \frac{\delta}{\nu}, \quad \left(\text{oppure} \quad \ln \varpi = - \int^y \frac{\delta}{\mu} \right).$$

- $\frac{\delta}{y\nu - x\mu}$ funzione solo di xy ; posto allora $\varpi = \varpi(xy)$, e quindi con

$$\partial_x \varpi = \varpi' y, \quad \partial_y \varpi = \varpi' x, \quad \text{si ha} \quad \ln \varpi = + \int^{xy} \frac{\delta}{y\nu - x\mu}.$$

- $\frac{\delta y^2}{y\nu + x\mu}$ funzione solo di x/y ; posto allora $\varpi = \varpi(x/y)$, e quindi con

$$\partial_x \varpi = \varpi' \frac{1}{y}, \quad \partial_y \varpi = \varpi' \frac{-x}{y^2}, \quad \text{si ha} \quad \ln \varpi = + \int^{x/y} \frac{\delta y^2}{y\nu + x\mu}.$$

- $\frac{-\delta x^2}{y\nu + x\mu}$ funzione solo di y/x ; posto allora $\varpi = \varpi(y/x)$, e quindi con

$$\partial_x \varpi = \varpi' \frac{-y}{x^2}, \quad \partial_y \varpi = \varpi' \frac{1}{x}, \quad \text{si ha} \quad \ln \varpi = + \int^{y/x} \frac{-\delta x^2}{y\nu + x\mu}.$$

Esempio 1.4.19 (continuazione dell'esempio 1.4.17)

Dalla $\delta = (2y+1) + 1$ segue

$$\frac{\delta}{\mu} = \frac{2(y+1)}{y(y+1)} = \frac{2}{y} \quad \text{che implica} \quad \varpi = \exp\left(\int -\frac{2}{y}\right) = \frac{1}{y^2}.$$

□

Esempio 1.4.20 $\dot{x} = -x/(t^2x - t)$, $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$.

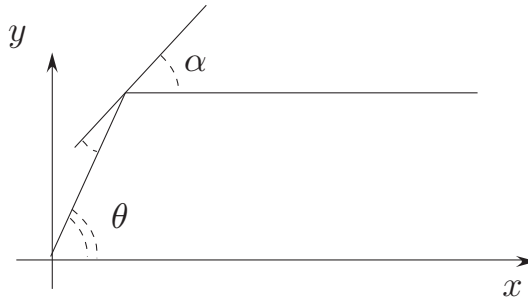
Posto $\mu(x, t) := t^2x - t$ e $\nu(x, t) := x$, l'equazione diviene $\mu\dot{x} + \nu = 0$; per cui si ha $\frac{\delta}{\mu} = \frac{\partial_t \mu - \partial_x \nu}{\mu} =$

$$\frac{(2tx - 2)}{t(tx - 1)} = \frac{2}{t} \Rightarrow \varpi = t^{-2}. \text{ Si ricava l'equazione } (x - 1/t)dx + (x/t^2)dt = 0 \text{ che fornisce } ((x^2/2) - (x/t)) = \text{cost.}$$

Questa seconda equazione si può anche ricondurre alla: $\dot{x} = (x/t) - x^2$ che verrà risolta in altro modo (si veda: Esempio 1.4.24). □

N.B. 1.4.21 È chiaro che anche se può sembrare il contrario, l'equazione non muta quando viene moltiplicata per ϖ , infatti essa rimane definita dal rapporto μ/ν e gli eventuali casi particolari vanno trattati direttamente su questo rapporto. Per esempio $xdy - ydx$ con $\varpi = (x^2 + y^2)^{-1}$ dà $\mathcal{F}(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$, mentre con $\varpi = \frac{1}{x^2}$ dà $\frac{1}{x}dy - \frac{y}{x^2}dx$ e cioè $\mathcal{F}(x, y) = \frac{y}{x}$. Comunque il luogo di punti che contiene la soluzione è dato da $\frac{y}{x} = \text{cost}$, ed in tutti i casi, l'equazione (nella variabile indipendente x) ha soluzioni *fuori* da $x = 0$. ◇

Esempio 1.4.22 Specchio con proiezione all'infinito; $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.



Sussistono le: $\theta = 2\alpha$, $\tan \theta = 2 \tan \alpha / (1 - \tan^2 \alpha)$, e cioè $y/x = 2y'/(1 - y'^2)$. Se ne ricava l'equazione omogenea $y' = (-x \pm \sqrt{x^2 + y^2})/y$ da cui

$$ydy + xdx = \pm \sqrt{x^2 + y^2} dx \quad \text{o anche} \quad \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx = \pm dx,$$

che dà $d(x \pm \sqrt{x^2 + y^2}) = 0$, e dunque la parabola: $x^2 + y^2 = x^2 + c^2 + 2cx$.

È opportuno osservare che il campo che si è trovato è omogeneo di grado zero. □

Esempio 1.4.23 L'equazione lineare in $\mathbb{R}^1$.

$$\dot{x} + p(t)x = q(t), \quad \text{con} \quad p, q \in C^0(I), \quad I \subset \mathbb{R} \text{ chiuso}, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \quad (4.44)$$

Il fattore integrante è $\varpi(t) = \exp(\int^t p(\tau) d\tau)$ e con esso si ha

$$\frac{d}{dt} \left(x(t) \exp \int^t p(\tau) d\tau \right) = q(t) \exp \int^t p(\tau) d\tau,$$

(la costante di integrazione si può scegliere nulla perché rappresenta solo un fattore moltiplicativo per tutta l'equazione). Di conseguenza si ha, per $t, t_0 \in [a, b]$, la nota relazione:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\int^t p(\sigma) d\sigma} \left[x_0 e^{\int^{t_0} p(\sigma) d\sigma} + \int_{t_0}^t \left(q(\tau) e^{\int^{\tau} p(\sigma) d\sigma} \right) d\tau \right] = \\ &= x_0 \exp \left(- \int_{t_0}^t p(\sigma) d\sigma \right) + \int_{t_0}^t q(\tau) \exp \left(- \int_{\tau}^t p(\sigma) d\sigma \right) d\tau . \end{aligned} \quad (4.45)$$

Si noti che il fattore integrante si può ottenere con le tecniche viste prima, infatti in questo caso si ha

$$\mu(x, t) = 1, \quad \nu(x, t) = p(t)x - q(t), \quad \delta(x, t) = \partial_t \mu(x, t) - \partial_x \nu(x, t) ,$$

e quindi

$$\frac{\delta(t, x)}{\mu(t, x)} \equiv -p(t) \quad \text{che implica} \quad \frac{\dot{\varpi}(t)}{\varpi(t)} = p(t) .$$

Si noti infine che la funzione $\Phi(t) := \varpi^{-1}(t) \equiv \exp -(\int^t p(\tau) d\tau)$ è soluzione della equazione “omogenea associata”: $\dot{x} + p(t)x = 0$, e che il prodotto $\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0$ è la soluzione, dell'omogenea associata, che vale x_0 in $t = t_0$. Allo stesso modo si vede che il secondo addendo della (4.45), e cioè $\tilde{y}(t) := \int_{t_0}^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)q(\tau) d\tau$ è soluzione particolare della (4.44) che vale zero in $t = t_0$. $\square$

Esempio 1.4.24 L'equazione di Bernoulli; $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\dot{x} + p(t)x = q(t)x^\alpha, \quad \text{con} \quad p, q \in C^0(I), \quad I \subset \mathbb{R} \text{ chiuso}, \quad \alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}.$$

Si moltiplichino ambo i membri dell'equazione per $(-\alpha + 1)x^{-\alpha}$. Si ottiene

$$\frac{d}{dt}(x^{-\alpha+1}) + (-\alpha + 1)p(t)x^{-\alpha+1} = (-\alpha + 1)q(t),$$

che è lineare e che quindi si può risolvere come visto nell'esercizio precedente. Ad esempio $\dot{x} + tx = t/x^3$ implica $\frac{d}{dt}x^4 + 4tx^4 = 4t$ che dà

$$\begin{aligned} e^{2t^2} x^4 &= \int_{t_0}^t 4te^{2t^2} dt + e^{2t_0^2} x^4(t_0) = \\ &= (e^{2t^2} - e^{2t_0^2}) + e^{2t_0^2} x_0^4 \quad \text{dalla quale segue} \\ x^4 &= 1 + ce^{-2t^2} . \end{aligned}$$

Un altro caso è l'equazione vista nell'Esempio 1.4.20: $\dot{x} = (x/t) - x^2$ che dà $\frac{d}{dt}(x^{-1}) + x^{-1}/t = 1$ da cui ottenere:

$$x(t) = t \left[\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) + \frac{t_0}{x_0} \right]^{-1} .$$

$\square$

Esempio 1.4.25 L'equazione di Riccati; $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\dot{x} + p(t)x = q(t)x^2 + r(t), \quad \text{con} \quad p, q, r \in C^0(I), \quad I \subset \mathbb{R} \text{ chiuso} .$$

L'equazione non ha metodi generali di risoluzione. Se però si conosce una soluzione x_1 allora, ponendo $x =: x_1 + (1/\xi)$ si ricava la soluzione generale. Sostituendo, infatti, si ottiene l'equazione *lineare*:

$$\dot{\xi} + [2qx_1 - p](t)\xi = -q(t) .$$

Un caso particolare di questa equazione è quelli in cui $p(t) = 0$, $q(t) = cost =: b$. Si ha allora la:

$$\text{Equazione speciale di Riccati:} \quad \dot{x} + bx^2 = r(t)$$

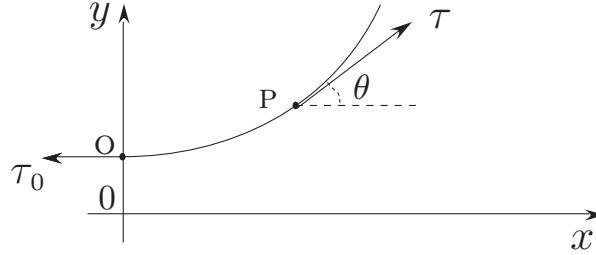
che si trasforma ponendo $bx =: \dot{u}/u$, ed ottenendo di conseguenza

$$b\dot{x} = \frac{\ddot{u}}{u} - \frac{\dot{u}^2}{u^2} = \frac{\ddot{u}}{u} - b^2x^2, \quad \text{dalla quale segue} \quad \ddot{u} = br(t)u .$$

Anche quest'ultima si può risolvere quando se ne conosca una soluzione (cfr oltre); tuttavia, è comunque possibile discuterla in modo qualitativo. $\square$

N.B. 1.4.26 Vi possono essere più modi alternativi per risolvere una stessa equazione: ad esempio la $(x^2 + y^2)dy + 2xydx = 0$ è omogenea, è esatta, ed è anche risolvibile “a occhio” osservando che equivale a $d(x^2y) = -d(\frac{1}{3}y^3)$. $\diamond$

Esempio 1.4.27 Catenaria; $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.



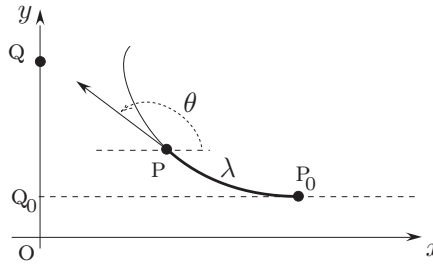
Le ipotesi sono: la tensione τ è tangente, la densità funzione della ascissa curvilinea λ la quale, come è noto, è definita da: $d\lambda/dx = \sqrt{1 + y'^2}$. Si ha $\tau \cos \theta = \tau_0$, $\tau \sin \theta = \text{peso di } \text{arc(OP)} =: \int_0^\lambda \rho(\sigma) d\sigma$.

Segue $\frac{dy}{dx} = \tan \theta = \frac{1}{\tau_0} \int_0^\lambda \rho(\sigma) d\sigma$, da cui l'equazione

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\tau_0} \rho(\lambda) \frac{d\lambda}{dx} = \frac{\rho(\lambda)}{\tau_0} \sqrt{1 + (y')^2},$$

che è risolvibile per separazione di variabili. Per il ponte sospeso si ha $x \mapsto \rho(x) = \text{cost}$, e quindi la prima di queste due equazioni dà immediatamente $y'' = \text{cost}$. Invece, con l'ipotesi $\lambda \mapsto \rho(\lambda) = \text{cost}$ e posto $y' =: \eta$, si ricava $(1/\sqrt{1 + \eta^2})d\eta = kdx$, da cui (usare un'ottima tavola di integrali o un computer) segue $\ln(\eta + \sqrt{1 + \eta^2}) = kx$. Essendo $\eta(0) = 0$ risulta infine $\eta = \frac{1}{2}(e^{kx} - e^{-kx})$, ovvero $y(x) = \frac{1}{k} \cosh kx$. $\square$

Esempio 1.4.28 Curve di inseguimento $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.



Con le posizioni:

$$\vec{OQ}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ at \end{pmatrix}, \quad \vec{OP}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad a = \text{cost}, \quad b := |\dot{\lambda}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \text{cost},$$

si considera il problema di moto (in figura è $a t_0 = y_0$)

$$y' := \frac{dy}{dx} = \frac{a(t - t_0) - (y - y_0)}{-x}.$$

Ne segue: $x y' = -a(t - t_0) + (y - y_0)$, e quindi $x y'' = -a dt/dx$.

D'altra parte, detta λ l'ascissa curvilinea decrescente con x , e detti $\vec{\tau}$ il versore tangente alla curva, $\vec{e}_1$ quello dell'asse delle x , e θ l'angolo che essi formano, si riconosce che sussiste anche la relazione

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{dx}{d\lambda} = \dot{\lambda} \frac{-1}{\sqrt{1 + (y')^2}}.$$

Sostituendo quest'ultima nella precedente si ricava l'equazione a variabili separabili

$$x y'' = a \sqrt{1 + y'^2} / \dot{\lambda} = a \sqrt{1 + (y')^2} / b.$$

Pertanto

$$\frac{d\eta}{\sqrt{1 + \eta^2}} = \frac{a}{b} dx,$$

che dà

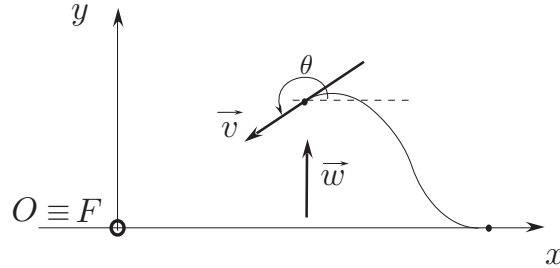
$$\ln(\eta + \sqrt{1 + \eta^2}) = \frac{a}{b} \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

e cioè

$$\frac{dy}{dx} := \eta = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^{a/b} - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-a/b} \right].$$

□

Esempio 1.4.29 Una barca punta verso un faro, con velocità (locale) di modulo v costante, ma subisce una corrente al traverso di velocità costante: w .



$$\begin{cases} \dot{\vec{OP}} = v \text{ vers } \vec{v} + w \vec{e}_2 \\ -\text{vers } \vec{v} = \text{vers } \vec{OP} = \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \cos \theta \\ -v \sin \theta + w \end{pmatrix}.$$

Si ottiene l'equazione omogenea:

$$y' = \tan \theta - \frac{w}{v \cos \theta} = \frac{y}{x} - \frac{w}{v} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

che si risolve ponendo $y = zx$ e quindi $xz' = -w\sqrt{1+z^2}/v$. Ne seguono

$$\begin{aligned} \ln(z + \sqrt{1+z^2}) &= \ln x^{-w/v} \Rightarrow z + \sqrt{1+z^2} = \left(\frac{x}{a}\right)^{-w/v} \Rightarrow \\ z &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x}{a}\right)^{-w/v} - \left(\frac{x}{a}\right)^{+w/v} \right) \Rightarrow y = \frac{a}{2} \left(\left(\frac{x}{a}\right)^{1-w/v} - \left(\frac{x}{a}\right)^{1+w/v} \right), \end{aligned}$$

e cioè

- (i) $w = v$, $\Rightarrow y = \frac{a}{2} (1 - x^2/a^2)$, una parabola che *non passa* per l'origine;
- (ii) $w > v$, $\Rightarrow y \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$, eventualità peggiore della precedente;
- (iii) $w < v$, $\Rightarrow y \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, e si ha successo solo in questo caso.

□

Esempio 1.4.30 Riduzione di ordine. Siano ancora $t_0, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

Si possono ridurre ad equazioni del primo ordine e senza aumentare la dimensione dello spazio della variabile dipendente, le seguenti equazioni:

- (i) $f(\ddot{x}, \dot{x}, t) = 0$ mediante l'ovvia posizione $y := \dot{x}$.
- (ii) $f(\ddot{x}, \dot{x}, x) = 0$ mediante la sostituzione: $t \leftrightarrow x$ come variabile indipendente. Ne seguono, con $\dot{x} = y$, le:
 $\ddot{x} = \dot{x} \frac{d}{dx} \dot{x} = y \frac{d}{dx} y$, e si ottiene la

$$f\left(y \frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0.$$

L'esplicita dipendenza da t si ricava poi risolvendo la $\frac{dx}{dt} = y(x)$.

È da notare che in tal modo si introduce una singolarità (d'altra parte questa non è la solita riduzione di ordine), tuttavia ciò accade lì dove la sostituzione $t \leftrightarrow x$ non è lecita.

- (iii) Procedimenti simili a quello del punto (ii) possono però risultare vincenti. Si consideri, per esempio, la $\ddot{x} + f(x)\dot{x}^2 + p(x) = 0$. Addirittura con $y = \frac{1}{2} \dot{x}^2$ essa fornisce: $\dot{x} y' = \dot{x} \ddot{x}$ e questa dà: $y' + 2f(x)y + p(x) = 0$.

□

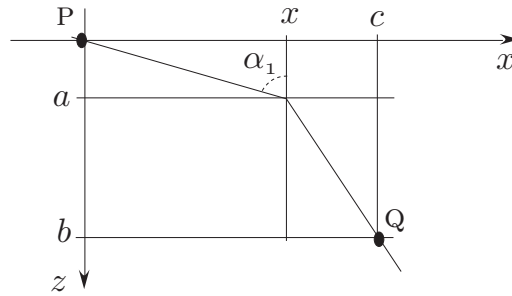
Esempio 1.4.31 Brachistocrona. $x_0, z_0 \in \mathbb{R}$.

Si consideri un elemento pesante vincolato senza attrito ad una linea semplice; questa sia contenuta in un piano verticale e congiunga due punti fissi: P e Q del piano. Si chiede quale sia la forma da attribuire alla linea affinché essa venga percorsa, in caduta, nel minimo tempo.

Supponendo una spezzata descritta con velocità costanti v_1 e v_2 , si ha che

$$\Delta t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_2}$$

ove a, b, c sono definite in figura



Per derivazione si ottiene Δt_{min} per x tale che

$$\frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c-x}{v_2 \sqrt{b^2 + (c-x)^2}}; \quad \text{e quindi} \quad \frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2}.$$

Si assume allora $\frac{\sin \alpha}{v} = \text{cost}$ come legge di minimo tempo.

D'altra parte la conservazione dell'energia dà $v = \sqrt{2gz}$, mentre è $\sin \alpha = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (z')^2}}$. Si

ottiene così: $\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right) z = k$, da cui:

$$\int_0^x d\xi = \int_0^z \left(\frac{\zeta}{k - \zeta}\right)^{1/2} d\zeta.$$

Posto $\left(\frac{\zeta}{k - \zeta}\right)^{1/2} = \tan \phi$, ovvero $\zeta = k \sin^2 \phi$, si ha infine $x = k \int_0^\theta (1 - \cos 2\phi) d\phi$ la cui soluzione è la cicloide:

$$\begin{cases} x = \frac{k}{2}(2\theta - \sin 2\theta) \\ z = \frac{k}{2}(1 - \cos 2\theta) \end{cases}$$

□

1.5 Equazioni lineari scalari del secondo ordine

In questo paragrafo, invece della (pesante seppur corretta) notazione $\hat{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^n$ per indicare i valori $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(t)$ della funzione moto $\hat{\mathbf{x}} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita da: $\hat{\mathbf{x}} : t \mapsto \hat{\mathbf{x}}(t) := \phi(t, t_0, \mathbf{x}_0)$, si userà quella imprecisa, ma sensibilmente più snella, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$. Con $\mathbf{x}$ quindi si indicherà (salvo esplicito contrario avviso) non solo un qualche vettore in $\mathbb{R}^n$, ma anche la funzione $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}$ il cui valore in t è $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$. Rimangono ovviamente in $\mathbb{R}^n$ i valori iniziali $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$.

Pur essendo riconducibili ad equazioni del primo ordine in $\mathbb{R}^2$, alcune tecniche delle equazioni scalari del secondo ordine sono di per sé interessanti, e vale la pena considerarle separatamente dal caso più generale di $\mathbb{R}^n$. D'altra parte, la bassa dimensionalità favorisce la notazione, per cui sarà conveniente usare le equazioni del secondo ordine proprio come modello per introdurre il procedimento di passaggio da sistemi di ordine superiore a sistemi del primo ordine in spazi ad un numero maggiore di dimensioni.

Così come accade per l'equazione $\dot{x} = v(t, x)$ seppure solo per $x(t) \in \mathbb{R}$, anche per la $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$ con $x(t) \in \mathbb{R}$ non esistono metodi generali di risoluzione analitica. Perfino il caso più semplice, quello delle equazioni

lineari, in generale non può essere risolto in forma chiusa ed in termini di funzioni elementari, a meno che sussistano particolari condizioni sui coefficienti o che sia possibile ricorrere a sviluppi in serie di convenienti funzioni.

È chiaro però che valgono i teoremi generali per i quali, se $f, \partial_x f, \partial_{\dot{x}} f$ sono continue in un aperto $D \subset \mathbb{R}^3$, allora dato comunque $(t_0, x_0, \dot{x}_0) \in D$ esiste una ed una sola soluzione: $\phi : (t, t_0, x_0, \dot{x}_0) \mapsto \phi(t, t_0, x_0, \dot{x}_0)$, continua rispetto alle ultime tre variabili in un conveniente intorno di $(t_0, x_0, \dot{x}_0)$, definita e differenziabile almeno in un conveniente intorno di t_0 , e tale che $\phi(t_0, t_0, x_0, \dot{x}_0) = x_0$, $\dot{\phi}(t_0, t_0, x_0, \dot{x}_0) = \dot{x}_0$; essa inoltre risulta prolungabile fino alla frontiera di un qualunque sottoinsieme di D che sia chiuso e limitato (in norma) e che contenga $(t_0, x_0, \dot{x}_0)$.

L'unico altro caso "quasi semplice" è quello in cui l'equazione si riduce a: $\ddot{x} = f(x)$. Questa dà senza troppa difficoltà la nota: $\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \int^x f(\xi)d\xi = \text{cost}$, che permette un'ampia discussione qualitativa. Ciò non toglie però che anche in questo caso *non è possibile*, in generale, fornire la soluzione $x = x(t)$ in forma chiusa; infatti l'integrale

$$\int^x \frac{d\xi}{\sqrt{2(\mathcal{E} - \mathcal{V}(\xi))}}, \quad \text{con} \quad \mathcal{V}(\xi) := - \int^\xi f(\eta)d\eta,$$

non è quasi mai esprimibile con funzioni elementari, o comunque con funzioni facilmente invertibili. Il caso $\ddot{x} = f(x)$ verrà trattato in dettaglio nel Cap.III.

È opportuno invece anticipare qui la discussione delle equazioni lineari in $\mathbb{R}^2$:

$$\ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = r(t), \quad p, q, r \in C^0(I); \quad I \text{ chiuso} \subset \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$$

A tale scopo, sarà opportuno pensare ai punti di $\mathbb{R}^2$ in modo astratto, e cioè non conseguente alla scelta di una specifica base, e quindi riconoscere ad $\mathbb{R}^2$ (o più in generale ad $\mathbb{R}^n$) la struttura di spazio vettoriale.

Memento 1.5.1 Uno Spazio vettoriale $\mathbb{V}$ è un gruppo commutativo che è un modulo su un campo $\mathbb{K}$ (con operazioni " + ", " · "). Esso cioè è un gruppo commutativo con operazione " ⊕ ", distributivo rispetto alle operazioni " + ", " · ", e " ⊕ ", e che accetta l'unità moltiplicativa del campo. L'operazione " ⊕ " viene perciò generalmente indicata anch'essa con " + ".

Una Base $\mathcal{E}$ per uno spazio $\mathbb{V}$ è un insieme $\mathcal{E} := \{e_1, \dots, e_n\}$ di vettori linearmente indipendenti e che sia massimale: ogni $x \in \mathbb{V}$ può essere espresso (in modo unico) come combinazione lineare degli elementi $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$. In tal caso, lo spazio $\mathbb{V}$ si dice n -dimensionale, ed i numeri $\{x^i\}_{i=1, \dots, n}$ tali che $x = x^i e_i$ formano la n -pla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ che la base $\mathcal{E}$ fa corrispondere in $\mathbb{R}^n$ al vettore $x \in \mathbb{V}$.

Scelta in esso una base, uno spazio vettoriale reale (e cioè con campo $\mathbb{K} \equiv \mathbb{R}$) resta così rappresentato da $\mathbb{R}^n$ e ciò permette di agire su di esso mediante le usuali operazioni per componenti e regole di trasformazione fra n -ple di numeri reali. In queste note si tratterà regolarmente con spazi vettoriali reali, e solo saltuariamente (per esempio nel Cap.II e nelle appendici) sarà opportuno considerare $\mathbb{V}$ come "parte reale" n -dimensionale di un conveniente spazio ${}^c\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^{2n}$ sul campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi.

Dati due spazi vettoriali $\mathbb{V}$ e $\mathbb{V}'$ sullo stesso campo numerico $\mathbb{K}$ si definisce

Operatore lineare $\mathcal{T}$:= una funzione $\mathcal{T} : x \in \mathbb{V} \mapsto \mathcal{T}[x] \in \mathbb{V}'$ tale che

$$c^1, c^2 \in \mathbb{K}, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{V}, \quad \text{implicano} \quad \mathcal{T}[c^1 x_1 + c^2 x_2] = c^1 \mathcal{T}[x_1] + c^2 \mathcal{T}[x_2].$$

Sia $\mathbb{K} \equiv \mathbb{R}$. La scelta delle basi $\mathcal{E} := \{e_1, \dots, e_n\}$, $\mathcal{E}' := \{e'_1, \dots, e'_m\}$ assegna a ciascun operatore lineare $\mathcal{T}$ da $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{V}' \equiv \mathbb{R}^m$ una matrice $\mathbf{T}$ reale $m \times n$, che muterà, al cambio di base, nella $\boldsymbol{\tau}$ secondo le note regole di trasformazione:

$$\text{Se} \quad \begin{cases} e_h = \mathcal{P}e_h \equiv \mathbf{p}_{ih}e_i \\ e'_h = \mathcal{P}'e'_h \equiv \mathbf{p}'_{ih}e'_i \end{cases} \quad \text{allora} \quad \begin{cases} x^h = \mathbf{p}_{hi}\xi^i \\ (x^h)' = \mathbf{p}'_{hi}(\xi^i)' \end{cases} \quad e \quad \mathbf{T} = \mathbf{p}'\boldsymbol{\tau}\mathbf{p}^{-1}.$$

Fissate le basi, fra le matrici che corrispondono ad altrettanti operatori si opera con le usuali regole del prodotto righe per colonne.

Lo spazio degli operatori lineari su $\mathbb{V}$ viene indicato con $\mathbb{L}(\mathbb{V})$, o con $\mathbb{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V}')$ se è opportuno specificare anche lo spazio $\mathbb{V}'$ nel quale essi assumono valori.

All'occorrenza, lo spazio $\mathbb{V}$ viene dotato di un prodotto scalare: $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ mediante il quale stabilire la lunghezza di un vettore: $|x| := \langle x, x \rangle^{1/2}$.

Un primo risultato importante relativo alle equazioni lineari è il seguente.

Proposizione 1.5.1 La soluzione massimale dell'equazione lineare omogenea (non autonoma)

$$\dot{x} = \mathcal{T}(t)x, \quad (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{T} : I \rightarrow \mathbb{L}(\mathbb{V}), \quad I \text{ chiuso} \subset \mathbb{R},$$

esiste almeno su tutto l'intervallo I di continuità dei coefficienti $\mathcal{T} \in C^0(I)$.

Dimostrazione Dato che il campo è del tutto regolare rispetto ad $x \in \mathbb{V}$, la frontiera al dominio D può essere generata soltanto da eventuali non regolarità rispetto alla variabile indipendente t .

D'altra parte, come si vedrà, il campo $v = \mathcal{T}x$ ha lunghezza (indotta da un qualche prodotto scalare su $\mathbb{V}$) che cresce *meno* di $c|x|$, ove $c \equiv \|\mathcal{T}\|$ è una conveniente costante reale positiva dipendente dall'intervallo di regolarità: I dei coefficienti). È pertanto possibile effettuare la stima

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} |\phi(t)|^2 \right| &= \left| 2 \langle \phi(t), \dot{\phi}(t) \rangle \right| = 2 \left| \langle \phi(t), \mathcal{T}(t)\phi(t) \rangle \right| \\ &\leq 2 |\phi(t)| |\mathcal{T}(t)\phi(t)| \leq 2c_I |\phi(t)|^2, \end{aligned}$$

che fornisce, per ogni $t \in I$, la disuguaglianza

$$\left| \ln \frac{|\phi(t)|^2}{|\phi_0|^2} \right| \leq 2c_I |t - t_0|.$$

Quest'ultima implica che la soluzione $\phi : (t, t_0, x_0) \mapsto \phi(t, t_0, x_0)$ non può raggiungere la superficie *laterale* del cilindro (ad esempio):

$$\left\{ (\tau, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{V} \mid \tau \in [t_0, t]; \quad |x| \leq 2|x_0| e^{c(t-t_0)}, \quad \varepsilon > 0 \right\}.$$

Se ne conclude che essa *arriva* fino al disco $\tau = t$, e quindi rimane definita fintanto che lo sono i coefficienti $\mathcal{T}(t) \in \mathbb{L}(\mathbb{V})$. Pertanto nel seguito si assumerà senz'altro $I \subset J_M \subseteq \mathbb{R}$. ■

Anche se per certi versi il caso delle equazioni lineari è particolarmente semplice, tuttavia anche per esso lo studio esplicito delle loro soluzioni richiede metodi non banali quali per esempio metodi approssimati, qualitativi, o addirittura perturbativi. A questo fa eccezione il solo sotto-caso particolare delle equazioni lineari a coefficienti costanti, per le quali infatti (e solo per esse) esiste un algoritmo generale di risoluzione che verrà esaminato in seguito.

Quando i coefficienti dipendono esplicitamente dal tempo, si può “solo” dire che le soluzioni sono esprimibili per mezzo di altre soluzioni, e ne bastano poche.

Siano $n \geq 2$ ed $\ell \geq 0$. Sullo spazio $C^{n \geq 2}(I)$ delle funzioni $t \in I \subset \mathbb{R} \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$ di regolarità n , si consideri l'operatore

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : C^n(I) &\rightarrow C^m(I), \quad I \text{ chiuso} \subseteq \mathbb{R}, \quad m = \inf\{\ell, n-2\}, \\ \mathcal{L}[\cdot](t) &:= \left(\frac{d^2}{dt^2} + p(t) \frac{d}{dt} + q(t) \right), \quad p, q : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad p, q \in C^\ell(I). \end{aligned}$$

L'operatore $\mathcal{L}$ è un *Operatore lineare* sullo spazio (vettoriale) $C^{n \geq 2}(I)$, e quindi tale che, identicamente rispetto a $t \in I$, si ha che

$$c^1, c^2 \in \mathbb{R}, \quad x_1, x_2 \in C^n(I) \quad \text{implicano} \quad \mathcal{L}[c^1 x_1 + c^2 x_2] = c^1 \mathcal{L}[x_1] + c^2 \mathcal{L}[x_2].$$

Ne segue che se x_1 è tale che $\mathcal{L}[x_1] = 0$ anche $\mathcal{L}[c^2 x_1] = 0$, e che se anche x_2 è tale che $\mathcal{L}[x_2] = 0$ allora $\mathcal{L}[c^1 x_1 + c^2 x_2] = 0$ per ogni scelta $c^1, c^2 \in \mathbb{R}$. (Ovviamente, lo zero a secondo membro sta per la funzione identicamente nulla su I).

Si supponga ora di conoscere una (particolare e possibilmente comoda) soluzione dell'equazione

$$\mathcal{L}[y](t) = \ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = r(t); \tag{5.46}$$

sia essa:

$$\begin{aligned} \tilde{y} : J \supset I &\rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{y} \in C^n(J), \quad (\tilde{y}(t_0), \dot{\tilde{y}}(t_0)) = (\tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0) \in \mathbb{R}^2, \\ \tilde{y}(t) &:= \phi(t, t_0, \tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0) \quad \text{e cioè} \quad \mathcal{L}[\tilde{y}](t) = r(t), \quad \text{per } t \in J \supset I. \end{aligned} \tag{5.47}$$

Ci si domanda come possano essere espresse le altre soluzioni $y : J \supset I \rightarrow \mathbb{R}$

$$y : t \mapsto y(t) := \phi(t, t_0, y_0, \dot{y}_0) \quad \text{tali che} \quad \mathcal{L}[y] = r.$$

Per la linearità di $\mathcal{L}$, non potrà che essere

$$\mathcal{L}[y] - \mathcal{L}[\tilde{y}] = \mathcal{L}[y - \tilde{y}] = r - r = 0,$$

da cui segue la *condizione necessaria*: $y = x + \tilde{y}$, ove x è soluzione di:

$$\mathcal{L}[x] = 0 \quad \text{ovvero} \quad \ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0, \quad p, q \in C^{\ell \geq 0}(I), \quad (5.48)$$

e si noti che $y, \tilde{y}$ sono arbitrarie, e cioè sono arbitrarie le quattro costanti relative ai dati iniziali $y_0, \dot{y}_0, \tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0 \in \mathbb{R}$. Di queste le seconde due sono scelte secondo criteri di convenienza, le prime due sono imposte dal problema concreto che si deve risolvere.

Si ricava quindi facilmente il seguente criterio.

Nota una soluzione particolare $\tilde{y} : t \mapsto \tilde{y}(t) := \phi(t, t_0, \tilde{y}_0, \dot{\tilde{y}}_0)$ su $J \supset I$ dell'equazione $\mathcal{L}[y] = r$, si conosce $y : t \mapsto y(t) := \phi(t, t_0, y_0, \dot{y}_0)$ soluzione generale della stessa equazione $\mathcal{L}[y] = r$, se e solo se si conosce $x : t \mapsto x(t) := \phi_{om}(t, t_0, x_0, \dot{x}_0)$ soluzione generale su $J \supset I$ dell'equazione omogenea associata $\mathcal{L}[x] = 0$, con $(x_0, \dot{x}_0)$ arbitrarie, "per esempio" tali che: $\begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 - \tilde{y}_0 \\ \dot{y}_0 - \dot{\tilde{y}}_0 \end{pmatrix}$, e risulta $y(t) = \tilde{y}(t) + x(t)$ per ogni $t \in J \supset I$.

Infatti

- (i) essa è soluzione dato che $\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\tilde{y}] + \mathcal{L}[x] = r$;
- (ii) verifica le condizioni iniziali dato che $y(t_0) = \tilde{y}(t_0) + x(t_0) = \tilde{y}_0 + y_0 - \tilde{y}_0 = y_0$;
- (iii) è la sola soluzione che esca da queste condizioni iniziali dato che di tali soluzioni ce n'è solo una.

Sempre per le proprietà di linearità ed unicità delle soluzioni, se x_1, x_2 sono certe due funzioni note, soluzioni *particolari ma non nulle* della $\mathcal{L}[x] = 0$, e cioè se si ha

$$\begin{aligned} x_1 : t \mapsto x_1(t) &:= \phi_{om}(t, t_0, x_1|_0, \dot{x}_1|_0), \\ x_2 : t \mapsto x_2(t) &:= \phi_{om}(t, t_0, x_2|_0, \dot{x}_2|_0), \end{aligned} \quad (5.49)$$

un'arbitraria $x : t \mapsto x(t) := \phi_{om}(t, t_0, x_0, \dot{x}_0)$ (e cioè con $x_0, \dot{x}_0$ arbitrari) è esprimibile nella specifica forma la: $x(t) = c^1 x_1(t) + c^2 x_2(t)$, se e solo se essa verifica le condizioni iniziali, e cioè se e solo se esistono le costanti $c^1, c^2 \in \mathbb{R}$ tali che i sei numeri $(x_0, \dot{x}_0, x_1|_0, \dot{x}_1|_0, x_2|_0, \dot{x}_2|_0)$, (non banali ma, per il resto, qualsiasi), verificano le

$$\begin{cases} x_0 = c^1 x_1|_0 + c^2 x_2|_0 \\ \dot{x}_0 = c^1 \dot{x}_1|_0 + c^2 \dot{x}_2|_0, \end{cases} \quad (5.50)$$

(anche in questo caso gli ultimi quattro dei sei valori detti sono fissati secondo criteri di convenienza, ed i primi due sono invece quelli che devono verificare le condizioni imposte dal problema); in tal caso infatti, con un ragionamento analogo a quello visto sopra, si prova che tale $x(t)$ è soluzione della (5.48), e verifica le date condizioni iniziali (5.50).

Si osserva che, affinché per un'arbitraria scelta del dato $(x_0, \dot{x}_0)$ possano esistere unici i coefficienti c^1, c^2 è necessario e sufficiente che: posto

$$\mathcal{W}(t) := \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix},$$

si abbia

$$\begin{vmatrix} x_1|_0 & x_2|_0 \\ \dot{x}_1|_0 & \dot{x}_2|_0 \end{vmatrix} = \mathcal{W}(t_0) \neq 0 \quad (5.51)$$

ed allora le due soluzioni x_1 ed x_2 si dicono *linearmente indipendenti*.

Dunque, siccome per entrambe le equazioni (5.48), (5.46) la soluzione è *unica* (per quei t per i quali esiste), si è provato che per assegnati comunque $(y_0, \dot{y}_0) \in \mathbb{R}^2$ la soluzione della (5.46) uscente da tali condizioni iniziali sarà certamente ed univocamente esprimibile con:

$$y : t \mapsto y(t) = c^1 x_1(t) + c^2 x_2(t) + \tilde{y}(t), \quad t \in J \supset I,$$

purché x_1, x_2 siano tali da verificare la (5.48) con dati iniziali che verificano la (5.51), ciò implicando l'esistenza di c^1, c^2 tali da verificare la (5.50), e sempre che $\tilde{y}$ sia una certa soluzione nota, ma per il resto qualsiasi, dell'equazione di partenza $\mathcal{L}[y] = r$.

Lo spazio delle fasi $\mathbb{V}$ dell'equazione lineare omogenea $\mathcal{L}[x] = 0$ e quello delle sue soluzioni sono spazi vettoriali isomorfi, [Arnold]; le soluzioni si combinano fra loro linearmente così come lo fanno i vettori $(x_0, \dot{x}_0) \in \mathbb{R}^2$ che ne esprimono le condizioni iniziali; se in t_0 c'è una certa dipendenza lineare fra le condizioni iniziali di certe soluzioni, la stessa dipendenza rimane valida fra i valori assunti all'istante t dai corrispondenti evoluti $(x(t), \dot{x}(t))$.

Data l'unicità delle funzioni soluzioni in corrispondenza a ciascuna scelta in $\mathbb{V}$ delle condizioni iniziali, la stessa dipendenza lineare sussiste allora fra le funzioni soluzioni.

D'altra parte, sebbene la scelta delle *soluzioni di base* possa dipendere dal particolare istante iniziale t_0 , l'essere queste linearmente indipendenti non muta al variare di t . Per convincersene, siano $x_1, x_2 \in C^n(J \supset I)$ soluzioni di $\mathcal{L}[x] = 0$ e tali da verificare (5.51). Queste stesse soluzioni possono essere usate per rappresentare la generica $x = x(t)$ anche qualora per essa si scelga un altro $\tilde{t}_0$, e cioè esse stesse continuano ad essere funzioni soluzione linearmente indipendenti. Basta notare infatti che dalle $\mathcal{L}[x_1] = \mathcal{L}[x_2] = 0$ segue subito

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{W} &= (x_1 \ddot{x}_2 - x_2 \ddot{x}_1) = x_1(-p\dot{x}_2 - qx_2) + x_2(p\dot{x}_1 + qx_1) \\ &= -p(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1) = -p \mathcal{W} , \end{aligned}$$

e questa si risolve nella

$$\mathcal{W}(t) = \mathcal{W}(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t -p(\tau) d\tau \right) . \quad (5.52)$$

Per cui se $\mathcal{W}(t_0) \neq 0$ ed x_1, x_2 sono soluzioni di $\mathcal{L}(x) = 0$ allora per ogni t si ha $\mathcal{W}(t) \neq 0$: due soluzioni che in un istante sono linearmente indipendenti lo saranno in ogni altro istante (immediata conseguenza, d'altra parte, del teorema di unicità).

Ciò implica in particolare che il problema dato: (5.48) ammette *almeno ed al più due soluzioni* che sono linearmente indipendenti: per esempio quelle che, *fissata arbitrariamente la base* nello spazio delle fasi $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^2$, nell'istante iniziale valgono: $\mathbf{x}_1|_0 = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ed $\mathbf{x}_2|_0 = \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

In definitiva il problema è quello di determinare $x_1, x_2, \tilde{y}$.

Nel caso *particolare* di un operatore del secondo ordine, come quello in esame:

$$\mathcal{L}[x](t) \equiv \left[\frac{d^2}{dt^2} + p(t) \frac{d}{dt} + q(t) \right] x(t) ,$$

pur non essendo disponibile una formula risolvente generale come quella vista nell'Esempio 1.4.23 per l'equazione del primo ordine, tuttavia ci si può ricondurre ad essa in casi speciali. Per esempio sussiste il seguente importante risultato: *qualora sia nota una soluzione dell'equazione omogenea associata*, la si scelga come una delle due funzioni di base: x_1 , è *possibile ricavarne un'altra*: x_2 con $\mathcal{W}(t_0) \neq 0$. Basta a questo scopo definire la funzione v mediante la $x_2 =: vx_1$ e ricavare:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[vx_1] &= \ddot{v}x_1 + 2\dot{v}\dot{x}_1 + v\ddot{x}_1 + p(\dot{v}x_1 + v\dot{x}_1) + qvx_1 = \\ &= \ddot{v}x_1 + (2\dot{x}_1 + px_1)\dot{v} . \end{aligned} \quad (5.53)$$

Si introduca la

$$\varpi(t) := \exp \int^t \left(2 \frac{\dot{x}_1(\tau)}{x_1(\tau)} + p(\tau) \right) d\tau \equiv x_1^2(t) \exp \int^t p(\tau) d\tau .$$

Si riconosce che la funzione ϖ è un fattore integrante per la (5.53), mediante il quale: $\mathcal{L}[vx_1]\varpi/x_1 = \frac{d}{dt}(\varpi\dot{v})$. Risulta pertanto

$$\mathcal{L}[vx_1] \equiv \mathcal{L}[x_2] = 0 \quad \text{purché sia} \quad \dot{v} \varpi = \kappa_1 = \text{cost} .$$

Segue

$$v(t) = \kappa_2 + \kappa_1 \int^t \frac{d\sigma}{\varpi(\sigma)} := \kappa_2 + \kappa_1 \int^t x_1^{-2}(\tau) \exp \left(- \int^\tau p(\xi) d\xi \right) d\tau ,$$

ed è lecito scegliere $\kappa_1 = 1$ dato che si tratta di una costante moltiplicativa inessenziale, e $\kappa_2 = 0$ perché altrimenti si avrebbe nuovamente l'addendo x_1 .

Per la funzione x_2 si ottiene in tal modo l'espressione:

$$x_2(t) = x_1(t) \int^t \frac{d\tau}{\varpi(\tau)} = x_1(t) \int^t x_1^{-2}(\tau) \exp \left(- \int^\tau p(\xi) d\xi \right) d\tau ,$$

e questa in effetti fornisce, per ogni $t \in J$,

$$\mathcal{W}(t) = (x_1\dot{v}x_1 + vx_1\dot{x}_1 - vx_1\dot{x}_1)(t) = \exp \left(- \int^t p(\xi) d\xi \right) \neq 0 .$$

Nota 1.5.1 Il procedimento può essere applicato anche ad equazioni non omogenee (si veda: [Tenenbaum p.244]). Infatti data l'equazione $\mathcal{L}[y] = r$, e nota x_1 soluzione dell'equazione omogenea $\mathcal{L}[x_1] = 0$, se si impone $y := vx_1$

si ricava la condizione: $\mathcal{L}[y] = \ddot{v}x_1 + (2\dot{x}_1 + px_1)\dot{v} = r$ che è lineare in $\dot{v}$. Lo stesso fattore integrante del caso omogeneo:

$$\varpi(t) := \exp \int^t \left(2 \frac{\dot{x}_1}{x_1} + p \right) \quad \text{fornisce :} \quad \dot{v}(t) = \frac{1}{\varpi(t)} \left(\kappa_1 + \int^t \frac{\varpi r}{x_1} \right) .$$

Ne segue che la funzione y definita da

$$y(t) = v(t)x_1(t) = x_1(t) \left[\kappa_2 + \int^t \left(\frac{\kappa_1}{\varpi(\sigma)} + \frac{1}{\varpi(\sigma)} \int^\sigma \frac{\varpi(\tau)r(\tau)}{x_1(\tau)} d\tau \right) d\sigma \right]$$

è la soluzione generale dell'equazione (5.46), (provare per credere!). $\triangleright$

La cosa è assai utile quando si è in presenza di equazioni che abbiano almeno una soluzione facilmente riconoscibile:

Esempio 1.5.2 $f(t)\ddot{x} + t\dot{x} - x = 0$, $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$.

$x_1(t) = t$ è soluzione; quindi $\varpi(t) = t^2 \exp \int^t \tau f^{-1}(\tau) d\tau$; per esempio se $f(t) = 1$ si ha $\varpi(t) = t^2 e^{t^2/2}$, e si ricava $x_2(t) = t \int^t \tau^{-2} e^{-\tau^2/2} d\tau$. $\square$

Esempio 1.5.3 $\ddot{x} - f(t)\dot{x} + (f(t) - 1)x = 0$, $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$.

$x_1(t) = e^t$ è soluzione; quindi $\varpi(t) = \exp \left(2t - \int^t f(\tau) d\tau \right)$. $\square$

Altri casi fortunati si possono cercare procedendo per tentativi:

Esempio 1.5.4 $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$, $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$, $p, q \in C^0(I)$.

Si può provare a trasformare l'equazione mediante la trasformazione

$$\tau = \tau(t), \quad \partial_t = \dot{\tau} \partial_\tau, \quad \partial_t^2 = \ddot{\tau} \partial_\tau + \dot{\tau}^2 \partial_\tau^2,$$

che dà

$$\mathcal{L}[x] \longrightarrow \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{\ddot{\tau}}{\dot{\tau}^2} \frac{dx}{d\tau} + \frac{p\dot{\tau}}{\dot{\tau}^2} \frac{dx}{d\tau} + \frac{q}{\dot{\tau}^2} x$$

con i coefficienti espressi in funzione di τ . Se allora p, q sono tali che per qualche particolare $\tau = \tau(t)$, questi nuovi coefficienti hanno una forma più agevole, allora si è riusciti ad ottenere qualcosa. Per esempio se esiste una costante c tale che $(c\dot{q} + 2cpq)/(2(cq)^{3/2}) = cost$ allora la sostituzione $\dot{\tau}^2 = cq$ è tale da rendere costanti tutti i coefficienti, infatti in tal caso si ha $(2\dot{\tau}\ddot{\tau} + 2p\dot{\tau}^2)/(2\dot{\tau}^3) = cost$. $\square$

Esempio 1.5.5 L'equazione di Eulero

$$t^2 \ddot{y} + t\dot{y} - y = r, \quad t_0, y_0, \dot{y}_0 \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad r \in C(\mathbb{R}^+).$$

È facile vedere che $x_1(t) = t$ è soluzione dell'equazione omogenea associata; quindi $\varpi(t) = t^2 \exp \left(\int^t \tau^{-1} d\tau \right) = t^3$.

Dunque, dalla $\varpi \dot{v} = K_1 + \int^t r \varpi / x$, ad esempio per $r(t) = t$, si ricavano

$$\dot{v}(t) = \frac{\kappa_1}{t^3} + \frac{1}{2t}, \quad \text{ed} \quad y(t) = \kappa_2 t - \frac{\kappa_1}{2t} + \frac{1}{2} t \ln t.$$

In questo caso è anche $(\dot{q} + 2pq)/(2q^{2/3}) = cost$ e la sostituzione $\tau = \ln t$ dà la facile equazione: $y'' - y = e^{3\tau}$. $\square$

Prima di esaminare qualche metodo per cercare le soluzioni particolari, è qui opportuno introdurre una simbologia più snella anche perché essa risulta valida, come si vedrà, anche per sistemi di equazioni di ordine maggiore al secondo (si veda §II.3). Inoltre ne sarà discusso l'aspetto geometrico, dopo aver introdotto il concetto di sistemi equivalenti, e cioè l'aspetto invariante al cambio di coordinate.

Chiamata x^1 la variabile x , si introduca l'ulteriore variabile: $x^2 := \dot{x}$. L'equazione

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}), \quad t_0, x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R},$$

equivale alla

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ f(t, x^1, x^2) \end{pmatrix} =: \mathbf{v}(t, \mathbf{x}).$$

Si scelga, nello spazio delle fasi $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^2$, la particolare base $e^\# = (e_1, e_2)$ tale che e_1 sia il versore relativo alle coordinate, ed e_2 quello relativo alle loro derivate. In tale base la precedente equazione si specializza nella

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} x \\ \frac{d}{dt} \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ f(t, x, \dot{x}) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} v^x(t, x, \dot{x}) \\ v^{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) \end{pmatrix} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}).$$

Di questa equazione si cercano le soluzioni

$$\mathbf{x} \in C^2(J) \times C^1(J) \quad \text{con} \quad \mathbf{x}(t) \equiv \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Queste, per la scelta della base $e^\#$, posseggono la particolare proprietà di avere seconda coordinata *identicamente uguale alla derivata $\frac{d}{dt}$ della prima*. In virtù dei teoremi fondamentali visti in precedenza, per poter determinare un particolare vettore soluzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ occorre assegnare, oltre che l'istante iniziale t_0 , anche i valori di tutte le sue componenti $\mathbf{x}_0$ *nello stesso istante*.

L'operatore di evoluzione $\mathcal{G}_{t_0}^t$ è rappresentato in coordinate da un $\mathbf{G}_{t_0}^t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ che trasforma, a t e t_0 fissati, il punto

$$\mathbf{x}_0 := \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix} \quad \text{nel punto} \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{G}_{t_0}^t \mathbf{x}_0 \equiv \begin{pmatrix} x(t, t_0, \mathbf{x}_0) \\ \dot{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0) \end{pmatrix}.$$

Nel caso particolare di equazioni lineari l'operatore di evoluzione ha una forma eccezionalmente semplice, ed ancora più semplice è quello relativo ad una equazione scalare di ordine n . Infatti, per esempio nel caso $n = 2$, secondo le considerazioni fatte sopra, la soluzione della (5.48) è espressa mediante le (5.49), e cioè risulta $x = c^1 x_1 + c^2 x_2$ dove x_1 ed x_2 sono due *arbitrarie* funzioni soluzione della (5.48). Scelta la base $e^\# := \{e_1, e_2\}$ come sopra, e cioè con il primo versore nella direzione delle coordinate ed il secondo in quella delle loro derivate, ed espresse le due prescelte $x_1(t)$ ed $x_2(t)$ in tale base mediante la

$$x_i(t) = x_i(t) e_1 + \dot{x}_i(t) e_2, \quad i = 1, 2$$

la $x = x(t)$ resta espressa dalla

$$x = x(t) = c^1 \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dot{x}_1(t) \end{pmatrix} + c^2 \begin{pmatrix} x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}$$

e cioè, nella base detta, dalle

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \end{pmatrix}, \quad \text{o anche} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dot{x}_1(t) \end{pmatrix} \mathbf{c}.$$

Per la (5.50), il vettore $\mathbf{c} := \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \end{pmatrix}$ si ricava dalla

$$\begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1|_0 & x_2|_0 \\ \dot{x}_1|_0 & \dot{x}_2|_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} x_1|_0 & x_2|_0 \\ \dot{x}_1|_0 & \dot{x}_2|_0 \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{x}_0.$$

Pertanto l'equazione:

$$\mathcal{L}[x](t) := \left(\frac{d^2}{dt^2} + p(t) \frac{d}{dt} + q(t) \right) x = 0, \quad p, q : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad p, q \in C^{\ell \geq 0}(I) \quad (5.54)$$

o meglio la

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}(t) \mathbf{x}, & \mathbf{x} : t \mapsto \mathbf{x}(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, & \text{con} \\ \mathbf{T} : t \mapsto \mathbf{T}(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^2), & \mathbf{T} \in C^{\ell \geq 0}(I), \end{cases} \quad (5.55)$$

ha come operatore di evoluzione $\mathcal{G}_{t_0}^t$ l'operatore lineare $\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0) \in \mathbb{L}(\mathbb{V})$ che, nella base $e^\#$ scelta su $\mathbb{R}^2$ in modo che sia $\mathbf{x}_0 = (x_0, \dot{x}_0)$, è rappresentato dalla matrice

$$\mathbf{G}_{t_0}^t = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1|_0 & x_2|_0 \\ \dot{x}_1|_0 & \dot{x}_2|_0 \end{pmatrix}^{-1} =: \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0) \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^2).$$

Il fatto che l'equazione provenga da una del secondo ordine si riscontra nella particolare forma (5.55) della matrice $\mathbf{T}$; questa è, invece, del tutto arbitraria nel caso di una generica equazione lineare del primo ordine in $\mathbb{R}^2$, così

come è del tutto arbitraria la base $\mathbb{B}$ nello spazio delle fasi $\mathbb{V}$. Se ne consideri una, fissata, che coincida con la $\mathcal{E}^\#$ nel particolare caso in esame, e si indichi con $\mathcal{T}(t)$ l'operatore cui la base detta assegna matrice $\mathbf{T}(t)$. Nello spazio delle soluzioni dell'equazione $\dot{x} = \mathcal{T}(t)x$ una possibile base naturale $\hat{\mathcal{E}} := \{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$ è quella consistente delle due soluzioni $\hat{e}_i : t \mapsto \hat{e}_i(t)$, $i = 1, 2$, che in $t = t_0$ hanno $\mathcal{E}^\#$ -componenti rispettivamente $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, che quindi rappresentano le evoluzioni della base $\mathcal{E}^\# = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ di $\mathbb{V}$, ed il cui valore in t è rappresentato dalla $\mathcal{E}^\#$ -matrice:

$$\Psi(t, t_0) := \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \hat{e}_1(t) & \hat{e}_2(t) \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Rispetto alla base $\hat{\mathcal{E}}$ si ha $x = x_0 \hat{e}_1 + \dot{x}_0 \hat{e}_2$, che mostra esplicitamente l'isomorfismo detto. In particolare, anche per le due (arbitrarie) soluzioni scelte sopra si hanno le $x_i(t) = x_i|_0 \hat{e}_1(t) + \dot{x}_i|_0 \hat{e}_2(t)$, $i = 1, 2$, e quindi la $x(t) = c^1 x_1(t) + c^2 x_2(t)$, conferma la relazione sulle $\mathcal{E}^\#$ -componenti al tempo t_0

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix} = c^1 \begin{pmatrix} x_1|_0 \\ \dot{x}_1|_0 \end{pmatrix} + c^2 \begin{pmatrix} x_2|_0 \\ \dot{x}_2|_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1|_0 & x_2|_0 \\ \dot{x}_1|_0 & \dot{x}_2|_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \end{pmatrix} = \Phi(t_0) \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \end{pmatrix}.$$

Si osservi infine come la matrice $\Psi(t, t_0)$ sia la migliore rappresentante $\mathbf{G}_{t_0}^t$ dell'operatore $\mathcal{G}_{t_0}^t$. Mediante essa, infatti, si esprimono non solo le $\hat{\mathcal{E}}$ -componenti della soluzione x uscente da $(x_0, \dot{x}_0)$ con la semplice espressione

$$\mathbf{x}(t) = \Psi(t, t_0) \mathbf{x}_0 \quad \text{ovvero} \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = \Psi(t, t_0) \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix}$$

ma si esprime anche la soluzione $\Phi = \Phi(t)$ uscente da $\Phi_0 := \Phi(t_0)$ dell'equazione $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{T}(t)\mathbf{X}$ mediante l'espressione $\Phi(t) = \Psi(t, t_0)\Phi_0$. Di questa, ciascuna colonna rappresenta una soluzione: $\mathbf{x}_i(t)$, $i = 1, 2$, dell'equazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}(t)\mathbf{x}$, come si può verificare immediatamente applicando sul dato $\mathbf{e}_i$ tale equazione.

Con la notazione appena introdotta è particolarmente agevole, fra l'altro, scrivere ed interpretare il cosiddetto *metodo della variazione della costante* per la ricerca di una *soluzione particolare* dell'equazione non omogenea (5.46):

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{T}(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{y}(t) := \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{T}, \mathbf{b} \in C^{\ell \geq 0}(I),$$

dove la matrice $\mathbf{T}(t)$ è stata definita come nella (5.55) e dove $\mathbf{b}(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ r(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Esso consiste nel cercare la soluzione $\mathbf{y} : J \supset I \rightarrow \mathbb{R}^2$ della (5.46) tale che $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0$ esprimendola sotto la speciale forma

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{y}}(t) = \Psi(t, t_0)(\mathbf{x}_0 + \mathbf{c}(t))$$

con $\mathbf{c} \equiv (c^1, c^2)^T \in C^2(J) \times C^1(J)$ tale che $\mathbf{c}(t_0) = 0$, e con $\Psi(t, t_0)$ la matrice che la base detta fa corrispondere all'operatore di evoluzione $\mathcal{G}_{t_0}^t$ dell'equazione (5.55), o meglio della $\dot{x} = \mathcal{T}(t)x$. In altre parole si cerca, dell'equazione non omogenea, la soluzione particolare $\tilde{\mathbf{y}}(t) := \Psi(t, t_0)\mathbf{c}(t)$ che esce da condizioni iniziali nulle: $\tilde{\mathbf{y}}(0) = 0$, ed espressa proprio come combinazione lineare, a coefficienti $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$ dipendenti dal tempo, delle due soluzioni di base $(\hat{e}_1, \hat{e}_2)$ dell'equazione *omogenea associata* (5.55) e cioè quelle che, all'istante iniziale, valgono rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. È altresì ovvio che, qualora queste non fossero note, ma lo fossero altre due: x_1 ed x_2 , la matrice $\Psi(t, t_0)$ potrebbe essere facilmente calcolata mediante il prodotto $\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$.

Si ottiene così la condizione necessaria:

$$\dot{\Phi}(t)\Phi^{-1}(t_0)(\mathbf{x}_0 + \mathbf{c}(t)) + \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{T}(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)(\mathbf{x}_0 + \mathbf{c}(t)) + \mathbf{b}(t);$$

ma è

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) &= \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_1(t) & \ddot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}(t)\mathbf{x}_1(t) & \mathbf{T}(t)\mathbf{x}_2(t) \end{pmatrix} = \\ &= \mathbf{T}(t) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(t) & \mathbf{x}_2(t) \end{pmatrix} = \mathbf{T}(t)\Phi(t) \end{aligned}$$

pertanto rimane $\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{b}(t)$ al quale assegnare come condizioni iniziali $\mathbf{c}(t_0) = 0$. Si ricava

$$\mathbf{c}(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t_0)\Phi^{-1}(\tau)\mathbf{b}(\tau)d\tau$$

che dà come soluzione generale dell'equazione (5.46) la funzione $\mathbf{y}$ tale che

$$\mathbf{y}(t) =: \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0) \begin{pmatrix} y_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} + \int_{t_0}^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau) \begin{pmatrix} 0 \\ r(\tau) \end{pmatrix} d\tau,$$

della quale un caso particolare è la soluzione trovata nell'Esempio 1.4.23

N.B. 1.5.6 Naturalmente il metodo è proficuo solo se si conosce la matrice $\Phi(t)$, e cioè una coppia x_1, x_2 di soluzioni indipendenti della (5.54). Tuttavia esso può essere usato per funzioni $b(t)$ che abbiano discontinuità eliminabili e/o di prima specie, e in tal caso la y è solo C^1 . $\diamond$

N.B. 1.5.7 Se ciò che si cerca è una qualunque soluzione particolare, l'integrale può essere considerato indefinito e la soluzione espressa mediante la

$$\mathbf{y}(t) = \Phi(t) \left[\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + \int^t \Phi^{-1}(\tau) \mathbf{b}(\tau) d\tau \right].$$

Si osservi inoltre che il procedimento si può ripetere per una equazione lineare non omogenea di ordine $n \geq 2$:

$$y^{[n]} + a_1(t)y^{[n-1]} + \dots + a_n(t)y = r(t), \quad a_1, \dots, a_n, r \in C^{\ell \geq 0}(I).$$

Anche per essa il vettore $\mathbf{b}(t)$ ha nulle tutte le componenti salvo l'ultima, ed anche di essa l'unica componente che interessa calcolare è la prima. Visto poi che le prime componenti del vettore $\mathbf{b}(t)$ sono nulle per costruzione, l'unico elemento interessante della matrice integranda è l'elemento $(1, n)$. Una soluzione particolare è allora: $\tilde{y}(t) = \int^t [\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)]_{(1,n)} r(\tau) d\tau$. In particolare, il caso che si sta qui trattando ha $n = 2$, e siccome $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = (ad - bc)^{-1} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, si ha:

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{pmatrix} \int^t \frac{1}{\mathcal{W}(\tau)} \begin{pmatrix} -x_2(\tau)r(\tau) \\ x_1(\tau)r(\tau) \end{pmatrix} d\tau \\ &= \int^t \frac{1}{\mathcal{W}(\tau)} \begin{vmatrix} x_1(\tau) & x_2(\tau) \\ x_1(t) & x_2(t) \end{vmatrix} r(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

da cui si riconosce la forma speciale del nucleo risolvete. Ciò dà anche, per la (5.52),

$$\tilde{y}(t) = c \int^t \begin{vmatrix} x_1(\tau) & x_2(\tau) \\ x_1(t) & x_2(t) \end{vmatrix} \exp\left(\int^\tau p(\sigma) d\sigma\right) r(\tau) d\tau.$$

$\diamond$

Se l'operatore $\mathcal{L}[x]$ è a coefficienti costanti, un metodo che a volte è più veloce per trovare la soluzione particolare è detto "dei coefficienti indeterminati". Esso consiste nell'ipotizzare la forma della soluzione, e cercarne la specifica espressione imponendo l'equazione come condizione necessaria. Un modo per formulare l'ipotesi detta è quello di derivare ripetutamente il termine noto (o meglio la parte di esso che non compare già nella soluzione della omogenea associata) fino ad ottenere termini ripetitivi, o zero. In definitiva, si cerca una soluzione dell'equazione (non omogenea) sotto forma di una combinazione lineare dei termini (diversi) così ottenuti più quelli di un'opportuna soluzione dell'omogenea associata e del termine noto stesso.

Esempio 1.5.8 $\ddot{y} + \dot{y} + y = t^3 e^t, \quad t_0, y_0 \in \mathbb{R}.$

$t^3 e^t$ dà luogo a $t^2 e^t, t e^t, e^t$. Ipotizzata una forma del tipo:

$$f(t)e^t = (at^3 + bt^2 + ct + d)e^t$$

si richiede che questa sia soluzione anche dell'equazione non omogenea

$$3f(t)e^t + 3\dot{f}(t)e^t + \ddot{f}(t)e^t = t^3 e^t,$$

da cui

$$3a = 1, \quad 9a + 3b = 0, \quad 6a + 6b + 3c = 0, \quad 2b + 3c + 3d = 0.$$

$\square$

Esempio 1.5.9 $\ddot{y} + 4y = te^t + t \sin 2t, \quad t_0, y_0 \in \mathbb{R}.$

$$\begin{aligned}\ddot{y} + 4y &= te^t \rightarrow (a_0 t + a_1)e^t \\ \ddot{y} + 4y &= t \sin 2t \rightarrow (b_0 t^2 + b_1 t) \sin 2t + (c_0 t^2 + c_1 t) \cos 2t\end{aligned}$$

e poi si può provare con una combinazione lineare delle funzioni così trovate. $\square$

Ancora nel caso di una equazione lineare di ordine n in una variabile scalare, ed a coefficienti costanti, talvolta può convenire non usare la teoria generale, che verrà esposta nel Cap.II, ma ricorrere a una simbologia ancora più compatta.

Alla base di tutto c'è il fatto che l'equazione

$$\dot{y} + ay =: (\partial + a)y = f(t), \quad t_0, y_0 \in \mathbb{R}, \quad \partial := \frac{d}{dt}, \quad (5.56)$$

ha fattore integrante: $\varpi(t) = e^{at}$ per cui è $e^{at}(\partial + a)y = \partial(e^{at}y)$, e quindi l'equazione (5.56) ha soluzione

$$y(t) = e^{-at} \partial^{-1}(e^{at} f(t)) := e^{-at} \int^t e^{a\tau} f(\tau) d\tau ;$$

(qui si parla solo di soluzioni particolari, quindi tutte le costanti di integrazione sono irrilevanti: esse specificano infatti l'una soluzione particolare rispetto ad un'altra e quindi, per quanto visto all'inizio del paragrafo, la loro presenza serve ad introdurre nella soluzione l'addendo consistente nella soluzione dell'omogenea associata. In tal senso, tutti i risultati si intenderanno noti *a meno di una arbitraria traslazione nel $\text{Ker}(\mathcal{L})$*).

Nascita del metodo: scrivere il fatto qui sopra nel seguente modo:

l'equazione $(\partial + a)y = f(t)$ ha soluzione particolare data da:

$$y(t) = (\partial + a)^{-1} f(t) := e^{-at} \partial^{-1}(e^{at} f(t))$$

sempre che $f(t) \in \text{Im}(\partial + a)$, che si intendano $\partial := \frac{d}{dt}$, $\partial^2 := \frac{d^2}{dt^2}, \dots$, e che l'invertibilità venga intesa per classi di equivalenza e cioè a meno di una traslazione in $\text{Ker}(\partial + a)$.

Evoluzione del metodo: notare che $(\partial + a_1)(\partial + a_2)y = f(t)$ fornisce:

$$\begin{aligned}y(t) &= (\partial + a_2)^{-1}(\partial + a_1)^{-1} f(t) = (\partial + a_2)^{-1} \left[e^{-a_1 t} \int^t e^{a_1 \tau} f(\tau) d\tau \right] = \\ &= e^{-a_2 t} \int^t \left(e^{a_2 \tau} e^{-a_1 \tau} \int^\tau e^{a_1 \sigma} f(\sigma) d\sigma \right) d\tau ;\end{aligned}$$

ed osservare che, posto $h(\tau) := \int^\tau e^{a_1 \sigma} f(\sigma) d\sigma$, un'integrazione per parti fornisce

$$\begin{aligned}y(t) &= e^{-a_2 t} \int^t e^{(a_2 - a_1)\tau} h(\tau) d\tau = \\ &= \frac{e^{-a_2 t}}{a_2 - a_1} \left[h(t) e^{(a_2 - a_1)t} - \int^t e^{(a_2 - a_1)\tau} e^{a_1 \tau} f(\tau) d\tau \right] = \\ &= \frac{1}{a_2 - a_1} [(\partial + a_1)^{-1} - (\partial + a_2)^{-1}] f(t) .\end{aligned}$$

Decollo del metodo: fare ricorso ai seguenti punti:

- (i) Sia $p(\xi)$ un polinomio di grado n nell'indeterminata $\xi \in \mathbb{R}$, con il coefficiente della potenza di grado massimo uguale ad uno e tutte le radici distinte: $a_1, a_2, \dots, a_n$. Se si vuole porre $\frac{1}{p(\xi)} = \frac{\alpha_1}{(\xi - a_1)} + \dots + \frac{\alpha_n}{(\xi - a_n)}$ si può sfruttare la: $\frac{(\xi - a_j)}{p(\xi) - p(a_j)} = \alpha_j + \sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i (\xi - a_j)}{(\xi - a_i)}$ per determinare $\alpha_j^{-1} = p'(a_j)$ e quindi $\frac{1}{p(\xi)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p'(a_i)(\xi - a_i)}$. Se invece gli zeri sono molteplici va considerata la decomposizione $p(\xi) = (\xi - a_1)^{n_1} (\xi - a_2)^{n_2} \dots$ e poi uguagliato ad uno il polinomio che si ottiene a numeratore avendo posto

$$\frac{1}{p(\xi)} = \frac{\alpha_1}{(\xi - a_1)} + \dots + \frac{\alpha_{n_1}}{(\xi - a_1)^{n_1}} + \frac{\beta_1}{(\xi - a_2)} + \dots + \frac{\beta_{n_2}}{(\xi - a_2)^{n_2}} + \dots .$$

- (ii) In modo analogo, se si considera la ∂ come un simbolo e si ha $p(\partial) = (\partial + a_1)^{n_1}(\partial + a_2)^{n_2} \dots$, si possono determinare i coefficienti $\alpha_i, \beta_i, \dots$ in modo tale che sia

$$\alpha_1(\partial + a_1)^{n_1-1}(\partial + a_2)^{n_2} \dots + \alpha_2(\partial + a_1)^{n_1-2}(\partial + a_2)^{n_2} \dots + \\ + \beta_1(\partial + a_1)^{n_1}(\partial + a_2)^{n_2-1} \dots + \dots = 1$$

che, in base al punto precedente, sono quelli per i quali risulta unitario il prodotto (non operatoriale ma per ora solo formale) fra $p(\partial)$ ed

$$\left(\frac{\alpha_1}{(\partial - a_1)} + \dots + \frac{\alpha_{n_1}}{(\partial - a_1)^{n_1}} + \frac{\beta_1}{(\partial - a_2)} + \dots + \frac{\beta_{n_2}}{(\partial - a_2)^{n_2}} + \dots \right).$$

- (iii) Un polinomio $p = p(\partial)$ di grado n intero non negativo ed a coefficienti costanti è senz'altro un operatore lineare $\mathcal{P} := p(\partial)$ ben definito su C^m purché $m \geq n$.

Inversamente: si conviene di definire $\mathcal{P}^{-1}(\partial)$ come quell'operatore che trasforma $f \in C^{m-n}$ in quella funzione $y =: \mathcal{P}^{-1}(\partial)f$ che è soluzione dell'equazione $\mathcal{P}(\partial)y = f$. L'operatore esiste in quanto esiste la soluzione, e questa è "unica" se si conviene di trattare sempre con quella "senza" costanti d'integrazione, cioè con $(y_0, \dot{y}_0, \dots, y_0^{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ scelte nulle;

- (iii.1) l'operatore $\mathcal{P}^{-1}(\partial)$ così definito può essere considerato come operatore inverso di $\mathcal{P}(\partial)$, (fatte salve le precauzioni sul fatto che il suo dominio dovrà essere contenuto nell'immagine di $\mathcal{P}(\partial)$, e che delle soluzioni va scelta sempre quella con costanti di integrazioni banali);

- (iii.2) la linearità di $\mathcal{P}(\partial)$ implica che anche l'operatore $\mathcal{P}^{-1}(\partial)$ è un operatore lineare, infatti la relazione di linearità di $\mathcal{P}(\partial)$ dà luogo alla:

$$\mathcal{P}(\partial)(\alpha \mathcal{P}^{-1}(\partial)f_1 + \beta \mathcal{P}^{-1}(\partial)f_2) = \alpha \mathcal{P}(\partial)\mathcal{P}^{-1}(\partial)f_1 + \beta \mathcal{P}(\partial)\mathcal{P}^{-1}(\partial)f_2,$$

e l'asserto segue applicando $\mathcal{P}^{-1}(\partial)$ ad ambo i membri dell'uguaglianza.

- (iv) La linearità dell'operatore ∂ permette inoltre:

- (iv.1) di fattorizzare l'operatore $\mathcal{P}(\partial)$ nel prodotto (questa volta sì, operatoriale):

$$(\partial + a_1)^{n_1}(\partial + a_2)^{n_2} \dots (\partial + a_m)^{n_m};$$

- (iv.2) di fare lo stesso con $\mathcal{P}^{-1}(\partial)$;

- (iv.3) di riconoscere che su essi valgono le usuali regole algebriche, giustificando così il punto (ii).

- (v) Tutto ciò rende leciti, sempre fatte salve le debite cautele di esistenza nell'immagine ed unicità nel kernel, i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}^{-1}(\partial)f(t) \\ &= \frac{\alpha_1(\partial + a_1)^{n_1-1}(\partial + a_2)^{n_2} \dots + \alpha_2(\partial + a_1)^{n_1-2}(\partial + a_2)^{n_2} \dots + \\ & \quad + \beta_1(\partial + a_1)^{n_1}(\partial + a_2)^{n_2-1} \dots}{(\partial + a_1)^{n_1}(\partial + a_2)^{n_2} \dots} f(t) = \\ &= \alpha_1(\partial + a_1)^{-1}f(t) + \alpha_2(\partial + a_2)^{-2}f(t) + \dots \end{aligned}$$

In particolare si ritrova, dato che $[(\xi + a_1)(\xi + a_2)]' \big|_{(-a_1)} = (a_2 - a_1)$ che la soluzione della $(\partial + a_1)(\partial + a_2)y = f(t)$ si può esprimere mediante la

$$\begin{aligned} y(t) &= ((\partial + a_1)(\partial + a_2))^{-1} f(t) = \\ &= \frac{1}{(a_2 - a_1)} ((\partial + a_1)^{-1} - (\partial + a_2)^{-1}) f(t) = \\ &= \frac{1}{(a_2 - a_1)} \left(e^{-a_1 t} \int^t e^{a_1 \tau} f(\tau) d\tau - e^{-a_2 t} \int^t e^{a_2 \tau} f(\tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

Esempio 1.5.10 $(\partial^2 - 3\partial + 2)y = t$, $y, t \in \mathbb{R}$.

$-a_{(1,2)} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$ e quindi una soluzione particolare è data da

$$y(t) = - \left(e^t \int^t e^{-\tau} \tau d\tau - e^{2t} \int^t e^{-2\tau} \tau d\tau \right) = \frac{t}{2} + \frac{3}{4}.$$

□

Esempio 1.5.11 $(\partial^2 + 4\partial + 4)y = t^3 e^{-2t}$, $y, t \in \mathbb{R}$.

Ha soluzione particolare data da $y(t) = (\partial + 2)^{-1} \left(e^{-2t} \int^t \tau^3 d\tau \right) = \frac{1}{20} t^5 e^{-2t}$.

Si noti che se si fossero conservate le due costanti di integrazione si sarebbero trovate le due soluzioni dell'omogenea associata: $c_1 t e^{-2t}$, $c_2 e^{-2t}$. $\square$

N.B. 1.5.12 Sempre con $p : a \in \mathbb{R} \rightarrow p(a) \in \mathbb{R}$ un polinomio a coefficienti costanti, e con $\mathcal{P}(\partial) := p(a) \big|_{(\partial)}$, si ha $\mathcal{P}(\partial)e^{at} \equiv p(a)e^{at}$. Pertanto se un numero a è tale che $p(a) = 0$ detta *equazione ausiliaria*, si vede subito che e^{at} è senz'altro soluzione dell'equazione omogenea $\mathcal{P}(\partial)x = 0$. Nel caso di tutte radici distinte si può ottenere in questo modo la soluzione generale. $\diamond$

N.B. 1.5.13 Mediante l'espressione $\partial(e^{at}y) = e^{at}(\partial + a)y$ si ottiene:

$$\partial^2(e^{at}y) = \partial(e^{at}(\partial + a)y) = e^{at}(\partial + a)^2 y$$

e così via, ricavando in modo analogo:

$$\mathcal{P}(\partial)(e^{at}y) = e^{at}\mathcal{P}(\partial + a)y.$$

Questa poi può essere usata anche in senso inverso:

$$(\partial + a)^n y = 0 \iff \partial^n(e^{at}y) = 0$$

che di conseguenza ha soluzione data da $e^{at}y = c_1 + c_2 t + \dots + c_n t^{n-1}$. $\diamond$

1.6 Ricerca di soluzioni per serie di potenze

In questo paragrafo, per motivi in definitiva solo “storici”, si userà la lettera x per indicare la variabile *indipendente* mentre la lettera y per la funzione *dipendente*, *entrambe scalari reali*.

Memento 1.6.1 Una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ (di punto iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$) si dice convergente nel punto x se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n(x - x_0)^n =: s(x) < \infty.$$

Raggio di convergenza $r :=$ l'estremo superiore dei valori $|x - x_0| \in \mathbb{R}$ per i quali il limite detto esiste finito.

In molti casi il criterio del rapporto permette di trovare r . Posto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x - x_0| =: \lambda(x) \quad \text{si ha che} \quad \begin{cases} \lambda < 1 & \text{serie convergente} \\ \lambda > 1 & \text{serie non convergente} \end{cases}$$

e quindi

$$r \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Sussiste il seguente, generale, criterio di convergenza per una qualsiasi serie di funzioni $u_n = u_n(t)$.

Weierstrass m -test o convergenza totale $:=$ Sia $\{u_n\}_{n=0,1,\dots}$ una successione di funzioni $u_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

- (1) le funzioni u_n siano definite su un insieme aperto $A \subseteq \mathbb{R}$;
- (2) su A , e per ciascun n , si abbia $|u_n(x)| < m_n$ per certi $m_n \in \mathbb{R}^+$;
- (3) la serie $\sum_{n=0}^{\infty} m_n$ sia convergente;

allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ si dice *totalmente convergente* su A . La convergenza totale implica sia la convergenza assoluta che quella uniforme.

Dimostrazione Basta ricordare la definizione di uniforme convergenza. ■

Per semplicità, si assuma $x_0 = 0$.

Lemma 1.6.1 *Se una data serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ è convergente per un certo $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, e cioè se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{x}^n =: s(\tilde{x}) < \infty$, allora l'm-test assicura che: la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge assolutamente ed uniformemente per ogni $x \in [-\xi, \xi]$ con $0 \leq \xi < |\tilde{x}|$.*

Lo stesso risultato sussiste per la serie delle derivate $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ la quale, inoltre, ha come somma la derivata della somma della serie iniziale.

Dimostrazione Dato che la successione $\{\tilde{s}_N\}_{N \in \mathbb{N}} := \left\{ \sum_{n=0}^N a_n \tilde{x}^n \right\}_{N \in \mathbb{N}}$ delle somme ridotte è di Cauchy si ha $\left| \sum_{i=j}^{j+1} a_i \tilde{x}^i \right| < \varepsilon$ e quindi $a_n \tilde{x}^n \xrightarrow{\infty} 0$. In particolare esiste $\sigma \in \mathbb{R}$ tale che $|a_n| |\tilde{x}|^n < \sigma$ per ogni n . Sia $0 \leq \xi < |\tilde{x}|$; allora per $|x| \leq \xi$ si ha: $|a_n| |x|^n \leq |a_n| |\xi|^n = |a_n \tilde{x}^n| \xi^n / |\tilde{x}|^n < \sigma |\xi / \tilde{x}|^n$.

Ma la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} |\xi / \tilde{x}|^n$ converge, e siccome maggiore la serie data questa converge assolutamente ed uniformemente su $[-\xi, \xi]$.

Analogo risultato si ottiene per la serie delle derivate, infatti sussiste la stima

$$|n a_n x^{n-1}| \leq |n| |a_n| |\xi|^{n-1} = n |a_n| |\tilde{x}|^n |\xi / \tilde{x}|^n |1 / \xi| < |\sigma / \xi| n |\xi / \tilde{x}|^n ;$$

la serie di cui quest'ultima è il termine n -mo converge per il criterio del rapporto, per cui (eventualmente rinominando i coefficienti) si può nuovamente agire con l'm-test. Ne segue anche che la somma delle derivate è continua ed è proprio la derivata della somma della serie, (metodo "3ε"). Infine, lo stesso ragionamento si può ripetere per la k -esima derivata, per la quale si ha

$$\begin{aligned} n(n-1) \cdots (n-k+1) |a_n| |\tilde{x}|^n |\xi / \tilde{x}|^n |1 / \xi^k| < \\ < |\sigma / \xi^k| n(n-1) \cdots (n-k+1) |\xi / \tilde{x}|^n \end{aligned}$$

ed ancora il criterio del rapporto dà $|\xi / \tilde{x}| n / (n-k) \rightarrow |\xi / \tilde{x}| < 1$. ■

Funzione (reale) analitica in x_0 : $f(x) \in C^\omega(x_0) :=$ una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che ammette derivate $f^{[n]}(x_0)$ di ogni ordine, e per la quale esista un $c > 0$ tale che: per ogni $x \in B_c(x_0)$ si ha

$$f(x) - \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} f^{[m]}(x_0) (x - x_0)^m =: r_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

La sola condizione $f \in C^\infty(x_0)$, e cioè l'esistenza in x_0 delle derivate $f^{[n]}(x_0)$ di ogni ordine n , comporta "solo" (Teorema di Taylor, [Spivak 19.4]) l'esistenza di un conveniente punto $\tilde{x} \in B_{|x-x_0|}(x_0)$, dipendente da x, x_0, n, f , tale che (per un qualsiasi n) $r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{[n+1]}(\tilde{x}) (x - x_0)^{n+1}$.

Le proprietà asintotiche e di derivabilità viste sopra implicano che: la somma $s(x)$ di una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ è una funzione analitica all'interno dell'intervallo di convergenza $B_r(x_0)$, e verifica la relazione $a_n \equiv \frac{1}{n!} s^{[n]}(x_0)$. Quest'ultima uguaglianza inoltre implica l'unicità dello sviluppo della somma.

Più debolmente: se una funzione $f = f(x)$ è infinitamente differenziabile per $|x - x_0|$ minore di un certo $c \in \mathbb{R}^+$ è possibile che, in $B_c(x_0)$, essa sia uguale alla somma della sua serie di Taylor

$$f(x) = s(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \text{con} \quad a_n = \frac{f^{[n]}(x_0)}{n!} ;$$

tuttavia ciò non è necessario; non è detto infatti che la somma $s(x)$ della serie sia l'unica funzione che ha nel punto tutte le derivate ordinatamente uguali ai coefficienti della serie (si veda: [Spivak p.398]). Per esempio la funzione ($f \in C^\infty(\mathbb{R})$)

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

non è analitica in zero: ha infatti tutte le derivate nulle nell'origine pur non essendo la funzione nulla.

Le funzioni analitiche sono invece per definizione quelle identicamente uguali alla somma della loro serie di Taylor nel suo intervallo di convergenza.

Stante l'uniforme convergenza, sulle serie di potenze convergenti si può agire come sui polinomi:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n \iff a_n = b_n \quad \forall n; \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) (x-x_0)^n; \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n &= s_1(x)s_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n, \\ \text{ove} \quad c_n &:= \sum_{k+j=n} a_k b_j \equiv \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0. \end{aligned}$$

In più si riconosce che lo spazio delle funzioni analitiche è chiuso rispetto alla somma, prodotto, composizione funzionale, limite uniforme, inversa continua (si veda: [Simmons §25; Flanagan V.2.3])

In virtù di tali proprietà, le serie di potenze risultano idonee ad essere usate come funzioni “campione” per problemi differenziali lineari in quei casi nei quali si sappia per altra via, o si assuma, che la soluzione del problema *sia una funzione analitica in un certo punto* x_0 . È chiaro che in tal modo il risultato è da intendersi locale all'interno del cerchio di convergenza centrato nel punto di analiticità.

Il procedimento consiste nell'assumere l'incognita soluzione del tipo $y(x) =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, e nel ricercare le condizioni *necessarie* sui coefficienti $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ affinché tale y sia soluzione del problema originario: equazione e dati iniziali. L'unicità della soluzione implica che tali condizioni risultano anche *sufficienti* all'interno del cerchio di convergenza.

Esempio 1.6.1 $y' = k y$, con $k \in \mathbb{R}$

Il metodo fornisce, con $x_0 = 0$, la seguente condizione necessaria

$$\sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

dalla quale si ricavano le $(n+1)a_{n+1} = k a_n$. Si calcolano quindi, ricorsivamente,

$$a_1 = k a_0, \quad 2a_2 = k a_1 = k^2 a_0, \quad 3a_3 = k a_2 = \frac{k^3}{2} a_0, \quad \dots, \quad a_n = \frac{k^n}{n!} a_0, \quad \dots$$

e si trova

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} x^n =: a_0 e^{kx}.$$

In questo caso è palese che il coefficiente a_0 rappresenta il dato $y(0)$. □

Il metodo è utile particolarmente quando non si hanno a disposizione funzioni elementari che siano somma delle serie così trovate. Inoltre il procedimento può essere applicato anche per ottenere lo sviluppo di un'assegnata funzione, purché analitica e soluzione di una qualche equazione differenziale ordinaria.

Esempio 1.6.2 $y(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

La funzione data è soluzione particolare, per $x \in B_c(0)$ con $c < 1$, della

$$y' = \alpha(1+x)^{\alpha-1} = \alpha(1+x)^{-1}y \quad \text{e cioè della} \quad \begin{cases} (1+x)y' = \alpha y \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Con $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ si ha, scrivendo i termini fino al grado $(n-1)$,

$$\begin{aligned} y' &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} \\ xy' &= a_1x + 2a_2x^2 + \dots + (n-1)a_{n-1}x^{n-1} \\ (1+x)y' &= a_1 + (2a_2 + a_1)x + (3a_3 + 2a_2)x^2 + \dots + (na_n + (n-1)a_{n-1})x^{n-1} \\ \alpha y &= \alpha a_0 + \alpha a_1x + \alpha a_2x^2 + \dots + \alpha a_{n-1}x^{n-1} \end{aligned}$$

e quindi $a_1 = \alpha a_0$, $2a_2 + a_1 = \alpha a_1$, $\dots$, $na_n + (n-1)a_{n-1} = \alpha a_{n-1}$, ovvero

$$a_n = \frac{1}{n} (\alpha - (n-1)) a_{n-1}.$$

Più brevemente, dalla

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n x^n = 0$$

si trova l'equivalente $a_{n+1} = (\alpha - n) a_n / (n+1)$.

Se ne ricava

$$a_1 = \alpha a_0, \quad a_2 = \frac{1}{2}(\alpha - 1) a_1 = \frac{1}{2} \alpha(\alpha - 1) a_0 \quad \dots$$

che fa sperare in un termine ricorrente del tipo

$$a_n = \frac{1}{n!} \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - (n - 1)) a_0,$$

la quale, giustamente, fornisce

$$n a_n = \frac{1}{(n-1)!} [\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - (n - 2)) a_0] (\alpha - (n - 1)).$$

Pertanto, dato che la condizione iniziale fissa $y(0) = a_0 = 1$, la soluzione del problema è necessariamente espressa dalla serie

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - (n - 1)) x^n$$

nella quale, ovviamente, si riconosce lo sviluppo di Taylor in $x = 0$ della funzione $(1 + x)^\alpha$. Siccome poi $\left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| = \left| \frac{\alpha - n + 1}{n} \right| \rightarrow 1$, tale funzione è la somma di una serie di potenze convergente in $|x| < 1$ e quindi $y \in C^\omega(B_1(0))$ e tutti i passaggi effettuati sono leciti. Il teorema di unicità infine garantisce che la funzione iniziale $y(x)$ e la somma della serie trovata sono necessariamente coincidenti. $\square$

Nota 1.6.1 Talvolta viene introdotto il simbolo

$$(\beta)_k := (\beta)(\beta + 1)(\beta + 2) \dots (\beta + k - 1);$$

con esso, i coefficienti trovati sopra si possono anche scrivere come segue

$$\begin{aligned} a_n &= a_n(\alpha) = \frac{1}{n!} \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1) \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} (-\alpha)(-\alpha + 1) \dots (-\alpha + n - 1) \\ &= \frac{1}{n!} (-1)^n (-\alpha)_n. \end{aligned}$$

$\triangleright$

In qualsiasi forma vengano espressi, i coefficienti a_n hanno le seguenti proprietà. Nel caso particolare in cui il numero $\alpha =: m$ è un numero intero positivo ciascuno dei coefficienti $a_n(m)$ è nullo se $n > m$, infatti $(-m)_{m+1} \equiv 0$, e quindi la serie dell'esempio precedente termina in una somma finita. Invece, per $n \leq m$ si ha

$$a_n(m) = \frac{1}{n!} m(m - 1) \dots (m - n + 1) \frac{(m - n)!}{(m - n)!} = \frac{m!}{n!(m - n)!} = \binom{m}{n}.$$

Nel caso generale, e facendo riferimento a quanto trovato nel caso $m \in \mathbb{N}$, si nota che la prima delle due espressioni ottenute per i coefficienti a_n può essere usata per *definire il Coefficiente binomiale* $\binom{\alpha}{n}$ anche per α non necessariamente interi positivi; esso si definisce mediante la:

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{1}{n!} (-1)^n (-\alpha)_n = \frac{1}{n!} \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1); \quad \binom{\alpha}{0} := 1.$$

In tal modo dall'Esempio 1.6.2 si può dedurre la formula cercata per α reale; essa è

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Esempio 1.6.4 La funzione $\theta(x) := \arcsin x$, definita per $|x| < 1$, è soluzione della

$$\frac{d\theta}{dx} = \left(\frac{d \sin \theta}{d\theta} \Big|_{\theta(x)} \right)^{-1} = \frac{1}{\cos \theta(x)} = (1 - x^2)^{-1/2}. \quad (6.57)$$

Ma dalla (1.6) con $\alpha = 1/2$ segue che il secondo membro è esprimibile come segue

$$(1 - x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (1/2)_n x^{2n}.$$

Applicando, d'altra parte, all'equazione (6.57) il metodo di ricerca per serie di potenze si ottiene, per la funzione $\arcsin x$, uno sviluppo del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, e si trova che i coefficienti devono necessariamente verificare la

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (1/2)_n x^{2n}.$$

Da questa si ricavano le due relazioni $a_{2k} = 0$, ed $a_{2k+1} = \frac{1}{k!(2k+1)} (1/2)_k$, e quindi una delle forme note per il calcolo di π :

$$\frac{1}{6} \pi = \arcsin \frac{1}{2} = 1 \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \dots$$

□

Il metodo si applica ad equazioni differenziali *lineari omogenee* con coefficienti $C^\omega(B_r(x_0))$ infatti (si veda: [Bender - Orszag cap.III, opp. Simmons §27]) *anche ogni loro soluzione è $C^\omega(B_r(x_0))$.*

Qui verrà trattato il caso delle equazioni *lineari omogenee del secondo ordine* con primo coefficiente uguale ad uno, e cioè

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad \text{con } x_0, y_0, y'_0 \in \mathbb{R}; \quad (6.58)$$

e si mostrerà come se $p, q \in C^\omega(B_r(x_0))$ allora anche la y è in $C^\omega(B_r(x_0))$.

Un siffatto punto x_0 viene detto Punto ordinario, o non singolare.

Se invece x_0 è tale che p, q sono non analitici in x_0 , ma lo sono le due funzioni

$$\tilde{p}(x) := (x - x_0)p(x) \quad \text{ed} \quad \tilde{q}(x) := (x - x_0)^2 q(x)$$

allora il punto x_0 è detto Punto singolare regolare.

In tal caso la funzione soluzione può, non deve, essere non analitica nell'intorno di x_0 ; la sua singolarità è algebrica oppure logaritmica a seconda che compaiano termini del tipo $(x - x_0)^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, oppure $\ln(x - x_0)$.

Negli altri casi il punto è detto Singolare Irregolare, ed almeno una delle funzioni soluzione presenta una singolarità essenziale, in generale tutte.

Le stesse definizioni si estendono ai casi di equazioni di ordine superiore: un punto x_0 è singolare regolare per l'equazione $y^{[n]} + q_1(x)y^{[n-1]} + \dots + q_n(x)y = 0$ se esso è tale da rendere analitici ciascuno dei prodotti

$$\begin{aligned} \tilde{q}_n(x) &:= (x - x_0)^n q_n(x), \\ \tilde{q}_{n-1}(x) &:= (x - x_0)^{n-1} q_{n-1}(x), \\ &\dots \quad \dots \\ \tilde{q}_1(x) &:= (x - x_0) q_1(x). \end{aligned}$$

Sia per il momento x_0 un punto ordinario per la (6.58) con r il (più piccolo) raggio di analiticità dei coefficienti e condizioni iniziali $y(x_0) = y_0$ ed $y'(x_0) = y'_0$ arbitrarie. Si cerca la soluzione sotto forma di uno sviluppo locale intorno al punto x_0 , che risulta anche globale qualora $r = \infty$. Il procedimento è costruttivo. [Qui di seguito si supporrà $x_0 = 0$, ma il caso generale si può ottenere facilmente sostituendo x con $(x - x_0)$].

Siano: $p(x) =: \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ e $q(x) =: \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$; e si ponga

$$y(x) =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n, \\ y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n. \end{cases}$$

Si ricavano le

$$\begin{aligned} q(x)y(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^n a_k q_{n-k} \quad ; \\ p(x)y'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^n (k+1)a_{k+1} p_{n-k} . \end{aligned}$$

Ne segue la successione di condizioni necessarie

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{k=0}^n [(k+1)a_{k+1}p_{n-k} + a_k q_{n-k}] = 0 . \quad (6.59)$$

Tali relazioni permettono di determinare in modo univoco il termine a_{n+2} quando siano noti i precedenti:

$$\begin{array}{llll} (n=0) & \longrightarrow & 2a_2 & = -(a_1 p_0 + a_0 q_0) \\ (n=1) & \longrightarrow & 3 \cdot 2a_3 & = -(a_1 p_1 + a_0 q_1) - (2a_2 p_0 + a_1 q_0) \\ & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Di conseguenza rimangono da assegnare solo i due coefficienti a_0, a_1 , ed è palese che ciò si possa fare in modo del tutto arbitrario. In funzione delle condizioni iniziali si esprimono allora $a_0 = y_0 = y(0)$ ed $a_1 = y_1 = y'(0)$ e quindi quella trovata rappresenta l'unica "soluzione" che passa per esse.

Occorre però dimostrare che tale soluzione esiste, e cioè che esista un qualche $r > 0$ per il quale la serie converge almeno in $B_r(0)$. Se questo è il caso, tutte le operazioni effettuate risultano lecite, e la soluzione del problema è trovata, stante l'unicità, ed è analitica in $B_r(0)$; (in tal modo, le (6.59) risultano condizioni anche sufficienti).

Questo è il caso; la dimostrazione della convergenza in $B_r(0)$ di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ quando le a_n verificano le (6.59) e purché i coefficienti p, q siano analitici in $B_r(0)$, è di routine: (si veda: [Simmons p. 183]).

Nota 1.6.2 Se l'equazione è a coefficienti costanti, e quindi $p_n = q_n = 0$ per ogni $n > 0$ la (6.59) si riduce a

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + (n+1)a_{n+1}p_0 + a_n q_0 = 0 .$$

▷

Esempio 1.6.6 Nel caso particolare $y'' + y = 0$ si hanno $p_0 = 0, q_0 = 1$. Ne segue la $(n+1)(n+2)a_{n+2} + a_n = 0$ e quindi

$$a_{2n} = \frac{1}{(2n)!} (-1)^n a_0 \quad \text{ed} \quad a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!} (-1)^n a_1 .$$

Si ottiene in tal modo un'alternativa *definizione* delle funzioni trigonometriche, chiaramente con raggio di convergenza $r = \infty$, data da

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (-1)^n x^{2n} \right) + a_1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (-1)^n x^{2n+1} \right) \\ &= a_0 \cos x + a_1 \sin x . \end{aligned}$$

Si osservi che tale definizione è consistente con il modello di un punto che percorra di moto uniforme una circonferenza; esso ha infatti vettore posizione ed accelerazione paralleli e discordi, e posizione totalmente individuata dall'"angolo" x . □

Naturalmente il difficile è determinare non certo la forma (6.59) ma la formula ricorrente che ne consegue: in questo esempio è stata a due termini, ma potrebbe essere peggiore, e ciò anche in base alla forma che si dà all'equazione di partenza.

Esempio 1.6.7 L'equazione di Schrödinger stazionaria unidimensionale

$$\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + (\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(\xi)) \psi = 0 , \quad \xi \in \mathbb{R} . \quad (6.60)$$

Quando siano

$$\mathcal{V}(\xi) = \frac{k}{2} \xi^2, \quad \frac{k}{m} =: \omega^2, \quad \hbar\omega =: h\nu, \quad \frac{m\omega}{\hbar} \xi^2 =: x^2 \in \mathbb{R} ,$$

la (6.60) (insieme con le necessarie condizioni fisiche) diviene:

$$\begin{cases} \psi'' + (\lambda - x^2)\psi = 0 & \lambda = \frac{2\mathcal{E}_0}{h\nu} \in \mathbb{R}^+ ; \\ \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1, \quad \text{e quindi } \psi \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0; & \nu^2 = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2 = \frac{k/m}{4\pi^2} . \end{cases} \quad (6.61)$$

A prescindere dalle condizioni al contorno, l'equazione così trovata può ulteriormente essere trasformata. Si ponga: $y(x) := e^{x^2/2}\psi(x)$ e quindi $\psi' = e^{-x^2/2}(y' - xy)$ e $\psi'' = e^{-x^2/2}[y'' - 2xy' - y + x^2y]$. Con queste relazioni, dalla (6.61) si ottiene l'equazione di Hermite classica:

$$y'' - 2xy' + (\lambda - 1)y = 0 \quad ; \quad (6.62)$$

la quale a sua volta, moltiplicata per e^{-x^2} , assume una forma particolarmente utile per la sua discussione, [Simmons]:

$$\left(e^{-x^2}y'\right)' + (\lambda - 1)e^{-x^2}y = 0 \quad . \quad (6.63)$$

Il metodo consiste nel cercare soluzioni della forma $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. La (6.61) dà facilmente $(n+1)(n+2)a_{n+2} + \lambda a_n - a_{n-2} = 0$, la quale però è una ostica relazione a tre termini. È più conveniente, invece, servirsi della (6.62). Ponendo $2\rho := (\lambda - 1)$ si ottiene $y'' - 2xy' + 2\rho y = 0$ dalla quale segue $(n+1)(n+2)a_{n+2} - 2na_n + 2\rho a_n = 0$, ovvero

$$a_{n+2} = \frac{-2(\rho - n)}{(n+1)(n+2)} a_n \quad (6.64)$$

dalla quale si ricavano

$$a_2 = -\rho a_0, \quad a_4 = \frac{-2(\rho - 2)}{3 \cdot 4} a_2 = \frac{(-2)^2 \rho(\rho - 2)}{(2 \cdot 2)!} a_0 ,$$

e così via. In definitiva si arriva alle

$$a_{2k} = \frac{(-2)^k}{(2k)!} \rho(\rho - 2) \cdots (\rho - 2k + 2) a_0 , \quad (6.65)$$

$$a_{2k+1} = \frac{(-2)^k}{(2k+1)!} (\rho - 1)(\rho - 3) \cdots (\rho - 2k + 1) a_1 , \quad (6.66)$$

e si vede subito che è $r = \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1)(2k+1)/|\rho - 2k| = \infty$. Inoltre, con il porre nulli prima tutti i termini dispari e poi quelli pari, e cioè scegliendo, come fatto nel precedente esempio, $(a_{1,0}, a_{1,1}) := (1, 0)$ e, rispettivamente, $(a_{2,0}, a_{2,1}) := (0, 1)$, si trova che la soluzione generale della (6.60) è

$$\psi(x) = e^{-x^2/2}y(x) = e^{-x^2/2}y_1(x) + e^{-x^2/2}y_2(x) , \quad (6.67)$$

ove le funzioni y_1 ed y_2 sono espresse mediante le serie di potenze aventi i coefficienti (6.65), (6.66) rispettivamente e gli altri tutti nulli. Infatti, tali funzioni sono convergenti per ogni $x < \infty$ poiché tali sono i coefficienti di (6.62), e certo fra loro linearmente indipendenti poiché di diversa parità.

Nel problema fisico, tuttavia, non basta che la serie converga per ogni $x \in \mathbb{R}$; occorre anche che la soluzione sia $\psi \in L_2(\mathbb{R})$, e quindi che sia soggetta al vincolo: $|\psi| \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$. Per studiare l'avverarsi di tale condizione, si ricordi innanzi tutto che $e^{x^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} x^{2n}$ con $b_{2n} := (2^n n!)^{-1}$. Pertanto, il primo addendo della (6.67) ammette la seguente espressione

$$e^{-x^2/2}y_1(x) = \frac{a_0 + a_2 x^2 + \cdots + a_{2n} x^{2n} + \cdots}{b_0 + b_2 x^2 + \cdots + b_{2n} x^{2n} + \cdots} .$$

Si può esaminare cosa accade per $|x| \rightarrow \infty$ osservando il rapporto $|a_{2n}|/|b_{2n}|$. Se per $n \gg 1$ risultasse $|a_{2n}|/|b_{2n}| > 1$ allora, dato che tutti i coefficienti hanno lo stesso segno (positivo) per n sufficientemente grandi, senz'altro *non potrebbe essere* $|\psi| \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$. Analogo risultato si ottiene studiando il rapporto $|a_{2n+1}|/|b_{2n}|$. Perché anche la y_2 possa verificare la condizione al contorno occorre escludere la possibilità che sia $|a_{2n+1}|/|b_{2n}| > 1$.

Per assicurarsene si usi il seguente procedimento. Dalla (6.64) segue che

$$\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = \frac{(-2)(\rho - 2n)}{(2n+1)(2n+2)} \quad \text{insieme con} \quad \frac{b_{2n+2}}{b_{2n}} = \frac{1}{2(n+1)} ;$$

e pertanto

$$\frac{a_{2n+2}/a_{2n}}{b_{2n+2}/b_{2n}} = \frac{(-2)(\varrho - 2n)2(n+1)}{(2n+1)(2n+2)} \rightarrow 2.$$

Se allora n è sufficientemente grande tale rapporto è maggiore per esempio di $3/2$, e quindi se ne deduce $a_{2n+2}/b_{2n+2} > (3/2) a_{2n}/b_{2n}$. Da questa si ricava, per n maggiori di un qualche n_0 , la stima: $a_{2n_0+2n}/b_{2n_0+2n} > (3/2)^n a_{2n_0}/b_{2n_0} > 1$. Se ne conclude che la soluzione $e^{-x^2/2} y_1(x)$ è *fisicamente inaccettabile a meno che la serie termini*, e cioè a meno che $(\varrho - 2n)$ si annulli per qualche n . Allo stesso modo si riconosce che il secondo addendo della (6.67): $e^{-x^2/2} y_2(x)$ diverge all'infinito a meno che $(\varrho - 2n + 1) = 0$ si annulli per qualche n . In conclusione, affinché il problema fisico ammetta soluzione occorre che sia $\varrho \in \mathbb{N}$.

N.B. 1.6.8 Questo è un modo di mostrare la condizione $\varrho \in \mathbb{N}$ alternativo a quello che sfrutta l'autoaggiunzione dell'operatore $\mathcal{T}^* \mathcal{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{dt} + x \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(+\frac{d}{dt} + x \right)$ nello spazio $\left(L_2(\mathbb{R}), \quad |\psi| \xrightarrow{\frac{|x|}{\infty}} 0 \right)$. $\diamond$

In altre parole il problema fisico risulta un problema agli autovalori, le cui autofunzioni sono date dalle

$$\psi_m(x) = e^{-x^2/2} h_m(x), \quad m \in \mathbb{N},$$

nelle quali gli $h_m(x)$ sono polinomi, detti *Polinomi di Hermite*, autosoluzioni delle (6.62), (6.63) corrispondenti agli autovalori $\varrho = 2m$ e $\varrho = 2m + 1$. Per quanto si è visto, tali polinomi sono dati rispettivamente dalle

$$\begin{cases} h_{2m}(x) = c_{2m} \sum_{k=0}^m \frac{(-2)^k}{(2k)!} (2m)(2m-2) \cdots (2m-2k+2) x^{2k} \\ h_{2m+1}(x) = c_{2m+1} \sum_{k=0}^m \frac{(-2)^k}{(2k+1)!} (2m-1)(2m-3) \cdots (2m-2k+1) x^{2k+1} \end{cases}$$

ove le c_m sono costanti di normalizzazione. Per varie ragioni, queste vengono scelte in modo tale che il termine di grado massimo sia $2^n x^n$, e quindi sono

$$c_{2m} = (-2)^m 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1) \quad \text{e} \quad c_{2m+1} = -(-2)^{m+1} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m+1);$$

per esempio, i primi valori sono $\{1, -2, -12, 12, 120, \dots\}$, e forniscono finalmente

$$h_0(x) = 1, \quad h_1(x) = 2x, \quad h_2(x) = 4x^2 - 2, \quad h_3(x) = 8x^3 - 12x, \quad \text{etc.}$$

Alternativamente, detto a_n il termine più alto del polinomio e cioè con $\varrho = n$, si sarebbe potuto anche usare le (6.64) per trovare

$$a_{n-2k} = (-1)^k \frac{1}{2^k (2k)!} \frac{n!}{(n-2k)!} a_n$$

ed allora con $a_n := 2^n$ si ottiene

$$h_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k}{k!} n! \frac{(2x)^{n-2k}}{(n-2k)!}.$$

È utile notare che la (6.63) è autoaggiunta: $(2n-1)e^{-x^2}y = -\left(e^{-x^2}y'\right)'$ e quindi in tal caso, per le proprietà dell'esponenziale e con $r := e^{-x^2}$, si ha $\langle \psi_n, \psi_m \rangle = 2(n-m) \langle h_n, h_m \rangle_r = \left[e^{-x^2} \mathcal{W}(h_n, h_m) \right]_{-\infty}^{\infty} = 0$. Un calcolo diretto, con l'uso delle formole di Rodriguez: $h_n(x) = (-1)^n e^{x^2} d^n(e^{-x^2})/dx^n$, mostra poi che invece

$$\begin{aligned} \langle h_n, h_n \rangle_r &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} h_n^2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^n h_n(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx \\ &= (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} h'_n(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} dx = \dots \\ &= 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \neq 0 \end{aligned}$$

Si osservi il profondo significato fisico della limitazione trovata per il parametro $\varrho \equiv \frac{\lambda-1}{2} = \frac{\mathcal{E}}{h\nu} - \frac{1}{2} \in \mathbb{N}$. Essa rende *discreto numerabile* lo spettro dei valori accettabili per l'energia di un oscillatore armonico descritto dalla equazione di Schrödinger, che pertanto è detto *quantistico*: $\frac{\mathcal{E}}{h\nu} = \frac{1}{2} + n$ con $n = 0, 1, \dots$. $\square$

Si esaminino ora un caso di punto singolare regolare.

Esempio 1.6.9 Sia data, su $(0, \infty)$, l'equazione di Bessel:

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - \varrho^2) y = 0, \quad \lambda, \varrho \in \mathbb{R}. \quad (6.68)$$

Anche l'equazione (6.68) può essere opportunamente trasformata. Per esempio, oltre che poter essere scritta nella forma $-(xy')' + \varrho^2 y/x = \lambda^2 xy$ mediante la $u(x) := \sqrt{x} \cdot y(x)$, e quindi per $y' = x^{-1/2} u' - \frac{1}{2} x^{-3/2} u$ ed $y'' = x^{-1/2} u'' - x^{-3/2} u' + \frac{3}{4} x^{-5/2} u$, essa si trasforma nella

$$u'' + \left(\lambda^2 + \frac{1/4 - \varrho^2}{x^2} \right) u = 0; \quad (6.69)$$

oppure, per $t := \lambda x$, la

$$t^2 \ddot{y} + t \dot{y} + (t^2 - \varrho^2) y = 0; \quad (6.70)$$

così come questa stessa sostituzione trasforma (6.69) nella

$$\ddot{u} + \left(1 + \frac{1/4 - \varrho^2}{t^2} \right) u = 0. \quad (6.71)$$

Di questa generalmente si cercano soluzioni per $x \in (0, l]$ con $y(0^+) < \infty$ e per $\lambda = \lambda(\varrho) \in \mathbb{R}$ tale che $y(l) = 0$; (in questo esempio, ϱ è una costante reale fissata a priori).

L'origine è palesemente un punto singolare regolare. Come tale non è possibile sperare, *a priori*, in soluzioni analitiche: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. $\square$

Osservazione.

Nel caso $\lambda = 0$, la (6.68) si riduce alla nota equazione di Eulero, vedi Esempio 1.5.5, nella quale le $\tilde{p}$ e $\tilde{q}$ sono costanti reali e si badi che qui la variabile x è positiva; nel caso generale i prossimi risultati vanno intesi validi con $|x|$ ove occorra.

$$y'' + \frac{\tilde{p}}{x} y' + \frac{\tilde{q}}{x^2} y = 0 \quad (6.72)$$

la quale, con $\xi := \ln x$, e quindi con $\partial_x = \frac{1}{x} \partial_\xi$ e $\partial_x^2 = -\frac{1}{x^2} \partial_\xi + \frac{1}{x} \partial_x \partial_\xi = \frac{1}{x^2} (\partial_\xi^2 - \partial_\xi)$, diviene l'equazione lineare a coefficienti costanti:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} y + (\tilde{p} - 1) \frac{d}{d\xi} y + \tilde{q} y = 0. \quad (6.73)$$

Come è noto, e come si rivedrà nel seguito, a seconda che le radici dell'equazione caratteristica:

$$\alpha^2 + (\tilde{p} - 1)\alpha + \tilde{q} \equiv [\alpha(\alpha - 1) + \alpha\tilde{p} + \tilde{q}] = 0 \quad (6.74)$$

siano reali distinte, coincidenti, o complesse coniugate, l'equazione (6.73) ammette soluzioni del tipo $e^{\alpha_1 \xi}$ ed $e^{\alpha_2 \xi}$, oppure $e^{\alpha \xi}$ e $\xi e^{\alpha \xi}$, oppure $e^{(\rho+i\theta)\xi}$ ed $e^{(\rho-i\theta)\xi}$, e quindi la (6.72) avrà in loro corrispondenza soluzioni contenenti potenze algebriche (e cioè non necessariamente intere) della $|x|$ oppure prodotti di queste con logaritmi, oppure potenze della $|x|$ moltiplicate per funzioni trigonometriche del logaritmo.

L'equazione di Bessel è un caso particolare della seguente forma generale (del secondo ordine)

$$y'' + \frac{\tilde{p}(x)}{x - x_0} y' + \frac{\tilde{q}(x)}{(x - x_0)^2} y = 0, \quad \text{con } x_0 \text{ singolare regolare} \quad (6.75)$$

e cioè x_0 tale che: i coefficienti $p(x) = \tilde{p}(x)/(x - x_0)$ e $q(x) = \tilde{q}(x)/(x - x_0)^2$ possono essere non analitici in x_0 , ma sono analitiche le due funzioni $\tilde{p}(x)$, $\tilde{q}(x)$.

Motivati dalla precedente osservazione sull'equazione di Bessel, viene spontaneo cercare soluzioni, nell'intorno di x_0 ,

$$\text{o della forma} \quad y(x) = (x - x_0)^\alpha s(x), \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

$$\text{oppure della forma} \quad y(x) = (x - x_0)^\alpha s(x) \ln |x - x_0|, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$\text{dove si è posto} \quad s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad \text{con } a_0 \neq 0,$$

e nell'ipotesi che i coefficienti $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots \in \mathbb{R}$ siano tali che la serie di potenze $s(x)$ abbia raggio di convergenza non nullo.

La prima di tali rappresentazioni quando α è un numero reale prende il nome di Serie di Frobenius, della quale α è detto l'Esponente indiciale.

Sia, per semplicità, $x_0 = 0$, e siano

$$\tilde{p}(x) =: \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{p}_n x^n \quad \text{ed} \quad \tilde{q}(x) =: \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{q}_n x^n$$

entrambe analitiche per $|x| < r$.

Si ponga, come tentativo,

$$y(x) = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{con} \quad a_0 \neq 0. \quad (6.76)$$

È opportuno notare che se $\alpha \neq 0$ il coefficiente a_0 non rappresenta il valore $y(0)$; d'altra parte con le attuali ipotesi il punto $x = 0$ è addirittura non appartenente al dominio di regolarità del campo.

In base alla posizione fatta, risultano

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n) a_n x^{\alpha+n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n)(\alpha + n - 1) a_n x^{\alpha+n-2}$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{p}(x)}{x} y'(x) &= x^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{p}_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n) a_n x^{\alpha+n-1} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \tilde{p}_{n-k} (\alpha + k) a_k \right) x^{\alpha+n-2} \end{aligned}$$

ed in modo analogo si ha

$$\frac{\tilde{q}(x)}{x^2} y(x) = x^{-2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{q}_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\alpha+n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \tilde{q}_{n-k} a_k \right) x^{\alpha+n-2}.$$

Anche in questo caso si trova una successione di condizioni necessarie, per $n \geq 0$,

$$(\alpha + n)(\alpha + n - 1) a_n + \sum_{k=0}^n \tilde{p}_{n-k} (\alpha + k) a_k + \sum_{k=0}^n \tilde{q}_{n-k} a_k = 0$$

o anche, con la somma presente solo per $n > 0$,

$$[(\alpha + n)(\alpha + n - 1) + \tilde{p}_0(\alpha + n) + \tilde{q}_0] a_n + \sum_{k=0}^{n-1} [\tilde{p}_{n-k}(\alpha + k) + \tilde{q}_{n-k}] a_k = 0. \quad (6.77)$$

N.B. 1.6.10 La (6.77) si può paragonare con la (6.59)

$$n(n-1)a_n + \sum_{k=1}^{n-1} k a_k p_{n-k-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k q_{n-k-2} = 0, \quad n \geq 2, \quad (6.78)$$

che si è ottenuta per un punto regolare nel quale $\tilde{p}_0 = \tilde{q}_0 = \tilde{q}_1 = 0$; il passaggio da p, q a $\tilde{p}, \tilde{q}$ comporta uno spostamento in avanti negli indici: un posto per la p , due per la q ; vedi anche la seguente Nota 1.6.3. $\diamond$

Per rendere più agevole la discussione delle (6.77) si definisca la funzione (già incontrata nella (6.74))

$$\alpha \mapsto \text{ind}(\alpha) := \alpha(\alpha - 1) + \tilde{p}_0 \alpha + \tilde{q}_0;$$

la (6.77) si può riscrivere nella

$$\text{ind}(\alpha + n) a_n + \sum_{k=0}^{n-1} (\tilde{p}_{n-k}(\alpha + k) + \tilde{q}_{n-k}) a_k = 0, \quad (6.79)$$

e l'equazione (6.75) calcolata per $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (e moltiplicata per x^2) assumerà la forma

$$a_0 \operatorname{ind}(\alpha) x^\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{ind}(\alpha + n) a_n + \sum_{k=0}^{n-1} (\tilde{p}_{n-k}(\alpha + k) + \tilde{q}_{n-k}) a_k \right] x^{\alpha+n} = 0. \quad (6.80)$$

In particolare, e ricordando la convenzione sulla $n \geq 0$ sussistono le

$$\begin{array}{llll} (n=0) & \longrightarrow & \operatorname{ind}(\alpha) a_0 & = 0 \\ (n=1) & \longrightarrow & \operatorname{ind}(\alpha+1) a_1 & = -(\tilde{p}_1 \alpha + \tilde{q}_1) a_0 \\ (n=2) & \longrightarrow & \operatorname{ind}(\alpha+2) a_2 & = -(\tilde{p}_2 \alpha + \tilde{q}_2) a_0 - (\tilde{p}_1(\alpha+1) + \tilde{q}_1) a_1 \\ & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

L'assunto $a_0 \neq 0$ rende non ambigua la determinazione dell'esponente α ; esso dovrà essere una delle radici della:

$$\underline{\text{Equazione indiciale}} \quad \operatorname{ind}(\alpha) := \alpha(\alpha-1) + \tilde{p}_0 \alpha + \tilde{q}_0 = 0 \quad (6.81)$$

e quindi, generalmente si avrà: $\alpha \notin \mathbb{N}$. Tuttavia non è questa l'unica differenza con il caso dei punti regolari. Diversamente dalla (6.78), infatti, le (6.77) permettono di determinare in modo ricorsivo tutti i coefficienti $a_i = a_i(a_0, a_1, \dots, a_{i-1}) = a_i(\alpha; a_0)$, $i = 1, 2, \dots$, solo se, in corrispondenza a quel valore di α , non esista alcun intero positivo $\bar{n}$ tale che

$$\operatorname{ind}(\alpha + \bar{n}) = (\alpha + \bar{n})(\alpha + \bar{n} - 1) + \tilde{p}_0(\alpha + \bar{n}) + \tilde{q}_0 = 0.$$

Inoltre, anche ammettendo che per qualche α un tale $\bar{n}$ non esista e sia quindi possibile determinare l'intera successione $\{a_i(\alpha; a_0)\}_{i=0,1,\dots}$, la soluzione che così si determina in corrispondenza della prescelta radice α dell'equazione indiciale (6.81) non potrà di regola essere la soluzione generale del problema; essa infatti dipende da una sola costante arbitraria a_0 .

Siano α_1, α_2 le radici di $\operatorname{ind}(\alpha) = 0$, e si suppongano entrambe reali ed ordinate secondo la $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Certamente $\operatorname{ind}(\alpha_1 + n)$ sarà non nullo per ogni $n > 0$, infatti l'altra radice di $\operatorname{ind}(\alpha) = 0$ è α_2 che, per costruzione, cade a sinistra di α_1 . Pertanto *almeno una prima soluzione si potrà trovare con questo metodo*, ed avrà la forma

$$y_1(x) = x^{\alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n} x^n, \quad \text{con } a_{1,n} = a_{1,n}(\alpha_1; a_{1,0}).$$

È di routine (si veda: [Simmons p.185, opp. Tenenbaum 40.b]) la dimostrazione del fatto che la serie così trovata è convergente almeno all'interno del cerchio di raggio r di analiticità dei termini $\tilde{p}, \tilde{q}$. Ne segue che la soluzione $y_1(x)$, analitica o meno a seconda del valore α_1 , è certamente definita per $x \in (0, r)$.

Sfortunatamente, siccome la (6.77) è condizione *necessaria* per gli a_n , si riscontra qui un

Primo caso sfavorevole: se $\alpha_1 = \alpha_2$ non esiste alcun'altra *serie di Frobenius* linearmente indipendente da quella già trovata. Per trovare un'altra soluzione y_2 indipendente dalla y_1 , e quindi la soluzione generale del problema, occorrerà inventare qualcos'altro.

Siano $\alpha_2 \neq \alpha_1$. Se è anche $(\alpha_2 - \alpha_1) \notin \mathbb{N}$ allora $\operatorname{ind}(\alpha_2 + n)$ è anch'esso non nullo per ogni $n > 0$, e quanto appena fatto a partire dalla α_1 può essere ripetuto per questa seconda radice α_2 . Si trova così una seconda serie di Frobenius y_2 , la quale per la condizione $(\alpha_2 - \alpha_1) \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ risulta evidentemente indipendente dalla y_1 .

Quando invece esiste un intero positivo $\bar{n}$ tale che $\alpha_1 = \alpha_2 + \bar{n}$, allora accade che $\operatorname{ind}(\alpha_1) = \operatorname{ind}(\alpha_2 + \bar{n}) = 0$ e ciò fa sì che la (6.79), inizializzata con α_2 e con un qualche $a_{2,0}$, termini con la:

$$0 a_{\bar{n}} + \sum_{k=0}^{\bar{n}-1} (\tilde{p}_{\bar{n}-k}(\alpha_2 + k) + \tilde{q}_{\bar{n}-k}) a_k = 0. \quad (6.82)$$

Questa eventualità può generare il

Secondo caso sfavorevole: $(\alpha_2 - \alpha_1) \in \mathbb{N}$ e $\sum_{k=0}^{\bar{n}-1} (\tilde{p}_{\bar{n}-k}(\alpha_2 + k) + \tilde{q}_{\bar{n}-k}) a_k \neq 0$.

In tal caso la (6.82) non può essere risolta rispetto ad $a_{\bar{n}}$, ed anche ora occorre inventare qualcos'altro.

Questo caso sfavorevole può però anche non presentarsi. Infatti, qualora accada che risulti nulla anche l'intera somma $\sum_{k=0}^{\bar{n}-1} (\tilde{p}_{\bar{n}-k}(\alpha_2 + k) + \tilde{q}_{\bar{n}-k}) a_k$, allora *un arbitrario $a_{\bar{n}}$ permette di reinnescare il procedimento, e dato che le radici della $\operatorname{ind}(\alpha) = 0$ sono solo due il metodo è ormai vincente.*

In definitiva, se $(\alpha_2 - \alpha_1) \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ oppure se, essendo $\alpha_1 = \alpha_2 + \bar{n}$ con $\bar{n} \in \mathbb{N}$ è anche $\sum_{k=0}^{\bar{n}-1} (\tilde{p}_{\bar{n}-k}(\alpha_2 + k) + \tilde{q}_{\bar{n}-k}) a_k = 0$, si ottiene una seconda soluzione che è certamente linearmente indipendente dalla prima ed è anch'essa una serie di Frobenius:

$$y_2(x) = x^{\alpha_2} \sum_{k=0}^{\infty} a_{2,n} x^n, \quad \begin{cases} a_{2,n} = a_{2,n}(\alpha_2; a_{2,0}) & \text{nel primo caso,} \\ a_{2,n} = a_{2,n}(\alpha_2; a_{2,0}, a_{\bar{n}}) & \text{nel secondo caso.} \end{cases}$$

D'altra parte, quando si impongano sulla $y(x)$ arbitrarie condizioni iniziali si nota che solo due delle tre costanti $a_{1,0}$, $a_{2,0}$, ed $a_{\bar{n}}$ sono realmente arbitrarie.

Nota 1.6.3 Si osservi, (si veda: [Bender-Orszag p.83]), che l'ultimo caso preso in esame contiene quello dei punti ordinari. Per essi si ha $\tilde{p}_0 = \tilde{q}_0 = \tilde{q}_1 = 0$, e quindi $\text{ind}(\alpha) = \alpha(\alpha - 1)$ che fornisce $\alpha_1 = 1$ ed $\alpha_2 = 0$. In questo caso la (6.82), per $\bar{n} = 1$ ed $\alpha_2 = 0$, fornisce $0a_{2,1} + \sum_{k=0}^0 (0\tilde{p}_1 + \tilde{q}_1) a_{2,0} \equiv 0$. Si hanno pertanto: una prima serie di Frobenius $y_1(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n} x^n$, e quindi tale che $y_1(0) = 0$, ed una seconda serie di Frobenius, sicuramente indipendente dalla prima, data da $y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2,n} x^n$ con $a_{2,0} \neq 0$ ed $a_{\bar{n}} \equiv a_{2,1}$ arbitrario, per esempio nullo se si richiede $a_{1,0} = y'(0)$. $\triangleright$

Resta a questo punto solo da inventare qualcosa di diverso nei due possibili casi sfavorevoli. Ciò che si sfrutta è il fatto che l'equazione che si sta studiando è del secondo ordine: come si è fatto in precedenza, visto che ormai una soluzione è nota, si tenta di determinarne un'altra con il metodo della variazione della costante moltiplicativa. Posto cioè $y_2 = v y_1$, questa verifica la (6.75) se e solo se la funzione $u := v'$ è soluzione della

$$y_1(x)u' + \left(\frac{\tilde{p}(x)}{x} y_1(x) + 2y_1'(x) \right) u = 0.$$

Moltiplicando tale equazione per $y_1(x) \exp \int^x \tilde{p}(\xi)/\xi d\xi$ si deduce che

$$\begin{aligned} v'(x) &= y_1^{-2}(x) \exp \left(- \int^x \frac{\tilde{p}(\xi)}{\xi} d\xi \right) \\ &= x^{-2\alpha_1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n} x^n \right)^{-2} \exp \left(-\tilde{p}_0 \ln x - \tilde{p}_1 x - \tilde{p}_2 \frac{x^2}{2} - \dots \right) \\ &= x^{-(2\alpha_1 + \tilde{p}_0)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{1,n} x^n \right)^{-2} \exp \left(-\tilde{p}_1 x - \tilde{p}_2 \frac{x^2}{2} - \dots \right). \end{aligned} \quad (6.83)$$

Si noti che in entrambi i due casi sfavorevoli si ha che $\alpha_1 = \alpha_2 + \bar{n}$ per un qualche $\bar{n} = 0, 1, \dots$. Tuttavia, siccome α_1, α_2 sono soluzioni dell'equazione indiciale $\text{ind}(\alpha) \equiv \alpha^2 - (1 - \tilde{p}_0)\alpha + \tilde{q}_0 = 0$, è anche $\alpha_1 + \alpha_2 = (1 - \tilde{p}_0)$, e quindi (sommandole) si ha $2\alpha_1 + \tilde{p}_0 = \bar{n} + 1$. Pertanto, il primo dei tre fattori della (6.83) ha come esponente il numero intero: $-(\bar{n} + 1)$. D'altra parte, l'intero coefficiente di $x^{-(2\alpha_1 + \tilde{p}_0)}$ nella (6.83) è senz'altro analitico in zero giacché vale $(a_{1,0})^{-2}$. Si ottiene così, con $\beta_0 \neq 0$,

$$v'(x) = x^{-(\bar{n}+1)} (\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots),$$

da cui

$$v(x) = \frac{\beta_0}{-(\bar{n}+1)+1} x^{-(\bar{n}+1)+1} + \frac{\beta_1}{-(\bar{n}+1)+2} x^{-(\bar{n}+1)+2} + \dots$$

In questa somma, siccome $\bar{n}+1$ è intero positivo, ci sarà uno ed un solo termine non algebrico: il termine $\beta_{\bar{n}} \ln x$. Si ha cioè

$$y_2(x) = \beta_{\bar{n}} y_1(x) \ln x + x^{-\bar{n}} y_1(x) \{ [v(x) - \beta_{\bar{n}} \ln x] x^{\bar{n}} \}$$

con il termine fra parentesi graffe, e quindi anche il suo prodotto con $y_1(x)$, ormai analitici in zero.

In definitiva, se $\alpha_1 = \alpha_2 + \bar{n}$, risulta

$$y_2(x) = \beta_{\bar{n}} y_1(x) \ln x + x^{\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \quad (6.84)$$

Si osservi che se $\alpha_1 = \alpha_2$ si ha $\beta_{\bar{n}} = \beta_0$ non nullo per costruzione, e quindi in tal caso il termine logaritmico è sicuramente presente, e $c_0 = 0$. Può invece essere presente se è $\alpha_1 - \alpha_2 =: \bar{n} > 0$ (e allora $c_0 \neq 0$) ma può anche non esserlo, a dipendere dal fatto che sia $b_{\bar{n}} \neq 0$ oppure $b_{\bar{n}} = 0$, come nel caso accennato sopra nel quale la sommatoria in (6.82) risulta nulla.

Infine, si consideri il caso $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$. Dall'ipotesi che l'equazione assegnata sia reale segue che anche i coefficienti dell'equazione indiciale sono reali, e pertanto le sue due radici saranno, nel caso, complesse coniugate: $\alpha_1 =: \rho + i\theta$, $\alpha_2 =: \rho - i\theta$. Ricordando l'identità $x^{(\rho+i\theta)} \equiv x^\rho (\cos(\theta \ln |x|) + i \sin(\theta \ln |x|))$, lo studio che si è fatto nel primo dei casi esaminati: $\alpha_1 \neq \alpha_2$ può essere ora ripetuto, e dà luogo alle seguenti due serie di Frobenius certamente indipendenti ed atte ad essere determinate con il metodo visto

$$y_1(x) = +x^\rho \cos(\theta \ln x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{ed} \quad y_2(x) = +x^\rho \sin(\theta \ln x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n ;$$

queste, tuttavia, presentano entrambe una singolarità nel punto singolare regolare.

È bene notare che comunque, in tutti i casi discussi, per trovare esplicitamente i coefficienti delle serie è sicuramente preferibile sostituire la forma ipotizzata per la soluzione direttamente nella equazione di partenza. A tale proposito, anzi, dalla (6.80) si possono trarre le seguenti considerazioni (si veda Boyce-Di Prima § 5.7). Nel caso $\alpha_1 = \alpha_2$, se si suppone di risolvere tutte le infinite equazioni (6.79) mantenendo indeterminato il parametro α e di sostituire le $a_n = a_n(\alpha; a_0)$ così trovate nella (6.80), questa diviene necessariamente:

$$a_0 \operatorname{ind}(\alpha) x^\alpha = a_0 (\alpha - \alpha_1)^2 x^\alpha = 0 \quad (6.85)$$

in quanto la $\alpha_1 = \alpha_2$ è l'unica radice (doppia) della equazione $\operatorname{ind}(\alpha) = 0$, e conferma che $y_1 = y_1(x)$ è soluzione della (6.75). Ricordando poi la formula: $d(x^\alpha)/d\alpha = x^\alpha \ln x$, si derivi rispetto ad α la (6.85); si ottiene l'identità:

$$a_0 \frac{\partial}{\partial \alpha} [(\alpha - \alpha_1)^2 x^\alpha] = a_0 x^\alpha [2(\alpha - \alpha_1) + (\alpha - \alpha_1)^2 \ln x] = 0 .$$

Ma i coefficienti della (6.75) non dipendono (ovviamente) da α e quindi quest'ultima espressione coincide necessariamente con quello che si ottiene sostituendo nella (6.75) al posto della y le derivate rispetto ad α della $y_1(\alpha; a_0)$. Se ne deduce che anche la derivata $\partial y_1(\alpha; a_0)/\partial \alpha$ risulta soluzione della stessa equazione (6.75) quando la si calcoli per $\alpha = \alpha_1$. In breve, si è provato che è soluzione della stessa equazione (6.75) anche la funzione

$$\begin{aligned} y_2(x) &:= \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} y_1(\alpha; x) \right]_{\alpha=\alpha_1} \\ &= \left[\sum_{n \geq 1} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} a_n(\alpha; a_0) \right) x^{\alpha+n} + \ln x \sum_{n \geq 0} a_n(\alpha; a_0) x^{\alpha+n} \right]_{\alpha=\alpha_1} \\ &= \sum_{n \geq 1} a'_n(\alpha_1; a_0) x^{\alpha_1+n} + y_1(x) \ln x \end{aligned} \quad (6.86)$$

dove la $a'_n(\alpha_1; a_0)$ indica la derivata, rispetto alla α e valutata per $\alpha = \alpha_1$, della $a_n(\alpha; a_0)$ soluzione della (6.79). Anche in questo caso si ha che spesso la sostituzione diretta della espressione $y_2(x) = y_1(x) \ln x + \sum_{k \geq 0} b_k x^{\alpha_1+k}$ nella equazione (6.75) è preferibile al calcolo delle derivate $a'_n(\alpha_1; a_0)$ giacché non è sempre immediata la forma di queste funzioni della α .

Il caso della differenza intera $\alpha_1 - \alpha_2 \in \mathbb{N}$ dà luogo a considerazioni simili alle precedenti (si veda Coddington Cap.4) e fornisce per i coefficienti c_n della (6.91) qui sotto l'espressione (per $n \geq 1$)

$$c_n(\alpha_2) = \frac{\partial}{\partial \alpha} ((\alpha - \alpha_2) a_n(\alpha; a_0)) \Big|_{\substack{\alpha=\alpha_2 \\ a_0=1}}$$

ed è $\gamma = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_2} (\alpha - \alpha_2) a_n(\alpha)$. In definitiva sussiste il seguente

Teorema 1.6.1 *Sia data l'equazione (6.75):*

$$y'' + \frac{\tilde{p}(x)}{x - x_0} y' + \frac{\tilde{q}(x)}{(x - x_0)^2} y = 0 , \quad (6.87)$$

con x_0 singolare regolare, e cioè con $\tilde{p}(x), \tilde{q}(x) \in C^\omega(N(x_0))$. Sia r il (più piccolo) raggio di convergenza dei suoi coefficienti $\tilde{p}$ e $\tilde{q}$, e siano α_1 e $\alpha_2 \leq \alpha_1$ le soluzioni (supposte reali) dell'equazione indiciale (6.81): $\operatorname{ind}(\alpha) := \alpha(\alpha - 1) + \tilde{p}_0 \alpha + \tilde{q}_0 = 0$. Allora in uno dei due intervalli $-r < x < 0$ o $0 < x < r$ esiste una soluzione della forma

$$y_1(x) = |x|^{\alpha_1} \left(1 + \sum_{n \geq 1} a_n(\alpha_1) x^n \right) \quad (6.88)$$

ove le $a_n(\alpha_1)$ sono date dalle relazioni di ricorrenza (6.79) con $a_0 = 1$ ed $\alpha = \alpha_1$, e la serie converge almeno per $|x| < r$.

Se inoltre l'altra radice α_2 è tale che $\alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ allora nello stesso intervallo esiste una seconda soluzione avente la medesima forma della prima e linearmente indipendente da essa:

$$y_2(x) = |x|^{\alpha_2} \left(1 + \sum_{n \geq 1} a_n(\alpha_2) x^n \right) \quad (6.89)$$

con le $a_n(\alpha_2)$ date dalle (6.79) con $a_0 = 1$ ed $\alpha = \alpha_2$, e la serie converge almeno per $|x| < r$.

Se $\alpha_1 = \alpha_2$ la seconda soluzione della (6.75) ha la forma

$$y_2(x) = y_1(x) \ln |x| + |x|^{\alpha_1} \sum_{n \geq 1} b_n(\alpha_1) x^n \quad (6.90)$$

Se invece $\alpha_1 - \alpha_2 \in \mathbb{N}$ la seconda soluzione della (6.75) ha la forma

$$y_2(x) = \gamma y_1(x) \ln |x| + |x|^{\alpha_2} \left(1 + \sum_{n \geq 1} c_n(\alpha_2) x^n \right). \quad (6.91)$$

I coefficienti a_n , b_n , c_n , γ vanno cercati sostituendo direttamente nella equazione (6.75) tali espressioni e usando l'uniforme convergenza delle serie e le relazioni di identità dei loro coefficienti, oppure, all'occasione, mediante le

$$\begin{aligned} \bar{n} = \alpha_2 - \alpha_1 \\ \gamma = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_2} (\alpha - \alpha_2) a_{\bar{n}}(\alpha) \end{aligned} \quad e \quad \begin{cases} b_n(\alpha_1) = \frac{\partial}{\partial \alpha} (a_n(\alpha; a_0)) \Big|_{\substack{\alpha=\alpha_1 \\ a_0=1}}, \\ c_n(\alpha_2) = \frac{\partial}{\partial \alpha} ((\alpha - \alpha_2) a_n(\alpha; a_0)) \Big|_{\substack{\alpha=\alpha_2 \\ a_0=1}}. \end{cases}$$

Il coefficiente γ può essere nullo.

DECALOGO PER LA RICERCA DI SOLUZIONI PER SERIE DI POTENZE

Si parte dalla equazione (supposta del secondo ordine) scritta nella forma

$$y'' + \frac{\tilde{p}(x)}{x - x_0} y' + \frac{\tilde{q}(x)}{(x - x_0)^2} y = 0 \quad (6.92)$$

e si decide se il punto x_0 nell'intorno del quale si sviluppa è regolare, singolare regolare, singolare irregolare. Sia, per semplicità, $x_0 = 0$. Quanto segue vale in particolare per il caso singolare regolare.

- (1) Si individuano i valori $\tilde{p}_0 = [x p(x)]_{x=0}$ e $\tilde{q}_0 = [x^2 p(x)]_{x=0}$.
- (2) Si scrive l'equazione indiciale $\alpha(\alpha - 1) + \alpha \tilde{p}_0 + \tilde{q}_0 = 0$ e se ne trovano le due radici α_1 e α_2 .
- (3) Si scrivono le

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\alpha+k}, & y'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\alpha+k) x^{\alpha+k-1}, \\ y''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\alpha+k)(\alpha+k-1) x^{\alpha+k-2}, \end{aligned}$$

e si sostituiscono nella (6.92) scritta nella forma

$$r_1(x) y'' + r_2(x) y' + r_3(x) y = 0 \quad (6.93)$$

con i coefficienti r_1 , r_2 , r_3 senza denominatori.

- (4) Si eseguono le operazioni di prodotto per i coefficienti r_i e si raccolgono a fattore comune i vari termini (per opportuni $n_1, n_2, \dots$):

$$\sum_{k \geq 0} \left(\dots \right) x^{\alpha+k+n_1} + \sum_{k \geq 0} \left(\dots \right) x^{\alpha+k+n_2} + \dots = 0.$$

- (5) A partire dall'ordine più basso si annullano i primi coefficienti: nei primi si deve ritrovare l'equazione indiciale come condizione necessaria. Ciò fa crescere l'indice dei primi termini non banali.
- (6) Si rinominano i vari indici k in modo da riconoscere l'uguaglianza fra le potenze della x e da poter raccogliere tutto in un'unica somma (in generale con $k_0 = 0$)

$$\sum_{k \geq k_0} \left(\dots \right) x^{\alpha+k} = 0.$$

Poi si sostituisce $\alpha = \alpha_1$ (la maggiore delle due radici) e si annullano i vari coefficienti.

- (7) Si ricavano i coefficienti a_k in funzione dei precedenti (a partire dai primi), poi si cerca un'unica relazione di ricorrenza per la prima delle due soluzioni: $y_1(x)$, quella relativa alla α_1 , la radice (reale) maggiore.
- (8) Si ricomincia dal Punto (6) per $\alpha = \alpha_2$, e si cerca una $y_2(x)$ indipendente dalla $y_1(x)$.
- (9) Se non si riesce (certamente quando $\alpha_1 = \alpha_2$; eventualmente quando $(\alpha_1 - \alpha_2) \in \mathbb{N}$) si prova con una delle

$$\begin{cases} y_2(x) = v(x) y_1(x) & \text{quando la } y_1 \text{ è "facile"} \\ y_2(x) = \gamma y_1(x) \ln|x| + \sum_{k \geq 0} b_k x^{\alpha_2+k} & \text{quando la } y_1 \text{ è una serie} \end{cases}$$

Il fattore γ è certamente presente se $\alpha_1 = \alpha_2$, può essere nullo se $\alpha_1 - \alpha_2 \in \mathbb{N}$; l'equazione risolvente per la v è: $v'(x) = y_1^{-2}(x) \exp - \int^x r_2(s)/r_1(s) ds$.

Se il punto è singolare regolare almeno una delle due riesce certamente.

- (10) Si confermano i risultati rimettendo le $y_i(x)$ nell'equazione di partenza (6.93) e controllando che esse ne siano soluzioni.

Esempio 1.6.12 L'equazione di Bessel (continuazione; si veda la (6.70))

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \varrho^2)y = 0. \quad (6.94)$$

Si cerca lo sviluppo nell'intorno dell'origine, e senza imporre la condizione fisicamente significativa $\varrho \in \mathbb{N}$, ma solo (senza ledere la generalità) supponendo ϱ positiva. L'origine è singolare regolare, con $\tilde{p}_0 = 1$, $\tilde{q}_0 = -\varrho^2$, $\tilde{q}_2 = 1$, e tutti gli altri nulli.

L'equazione indiciale è $\alpha(\alpha-1) + \alpha - \varrho^2 = 0$, che dà $\alpha_{1,2} = \pm\varrho$.

Si inizia lo studio con $\alpha_1 = +\varrho$, e cioè si impone $y_1(x) = x^\varrho \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con $a_0 \neq 0$. Siccome il raggio di convergenza di $\tilde{p}(x) = 1$ e di $\tilde{q}(x) = -\varrho^2 + x^2$ è banalmente infinito, si ha la convergenza ovunque della prima serie di Frobenius. La funzione y_1 è quindi definita su tutto $\mathbb{R}$ dato che, per ipotesi, è $\varrho \geq 0$, ed è addirittura analitica se $\varrho \in \mathbb{N}$. Per trovare i coefficienti a_n basta seguire l'usuale metodo:

$$\begin{aligned} x^2 y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\alpha + n)(\alpha + n - 1) x^{\alpha+n}; \\ xy'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\alpha + n) x^{\alpha+n}; \\ x^2 y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\alpha+n+2}; \\ -\varrho^2 y(x) &= -\sum_{n=0}^{\infty} \varrho^2 a_n x^{\alpha+n}. \end{aligned}$$

Si trovano:

$$(\alpha(\alpha-1) + \alpha - \varrho^2) a_0 = 0, \quad \text{e} \quad (\alpha(\alpha+1) + (\alpha+1) - \varrho^2) a_1 = 0,$$

e per $n \geq 2$ si ritrova la (6.77), con $\tilde{p}_0 = 1$, $\tilde{q}_0 = -\varrho^2$, $\tilde{q}_2 = 1$, e gli altri tutti nulli. Se ne deduce, con a_0 arbitrario, la

$$\begin{cases} ((\alpha+1)^2 - \varrho^2) a_1 = 0, \\ ((\alpha+n)(\alpha+n-1) + (\alpha+n) - \varrho^2) a_n + a_{n-2} = 0, \quad n = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (6.95)$$

da cui, (si ricordi che è $\varrho \geq 0$, e a_{-1} da determinare) si ha

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(\alpha+n)^2 - \varrho^2}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad a_0 \neq 0. \quad (6.96)$$

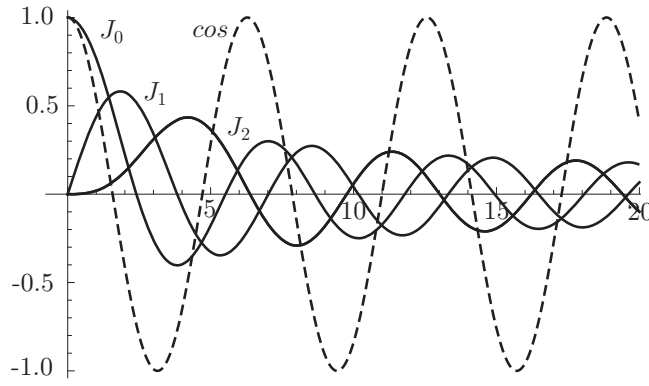
Nel primo caso, e cioè $\alpha = \alpha_1 = \varrho$, occorre allora porre $a_{-1} = 0$, e quindi, con $a_{1,0} := a_0$ arbitrario, per i coefficienti della prima Frobenius dalla $a_{2k} = -\frac{a_{2(k-1)}}{2k(2k+2\varrho)}$ si ricavano i valori $a_{1,2} = \frac{-a_{1,0}}{2(2+2\varrho)}$; $a_{1,4} = \frac{-a_{1,2}}{4(4+2\varrho)}$; e così via, ovvero

$$a_{1,2k+1} = 0, \quad a_{1,2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \frac{a_{1,0}}{k!(\varrho+1) \cdots (\varrho+k)}; \quad k = 1, 2, \dots$$

Scelto in particolare $a_{1,0} := \frac{1}{2^\varrho \varrho!}$ si ha che la prima soluzione, certamente esistente definita e continua su tutto $(0, \infty)$, ed anzi su tutto $[0, \infty)$ giacché $\varrho \geq 0$, può essere esplicitamente espressa da:

$$j_\varrho(x) = \frac{x^\varrho}{2^\varrho \varrho!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \frac{1}{k!(\varrho+1) \cdots (\varrho+k)} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{2k+\varrho}}{k!(\varrho+k)!}. \quad (6.97)$$

□



Curiosità: per $\varrho = 0$ il coefficiente di $(-x^2)^k$ è $(2^k k!)^{-2}$ e quindi vale $(2^2 \cdot 4^2 \cdots 4k^2)^{-1}$; questo può essere paragonato a quello di un coseno che è $((2k)!)^{-1} = (2 \cdot 4 \cdots 2k)^{-1}$.

Nota 1.6.4 Per il momento, la (6.97) è priva di significato a meno che non si definisca il simbolo $\varrho!$ nel caso in cui $\varrho \notin \mathbb{N}$.

Esiste una funzione, e precisamente la $\Gamma(\varrho) := \int_0^\infty t^{\varrho-1} e^{-t} dt$ che quando venga calcolata sugli interi positivi ha le stesse proprietà del fattoriale, e cioè

$$(i) \quad \Gamma(\varrho + 1) = \varrho \Gamma(\varrho);$$

$$(ii) \quad \Gamma(1) = 1.$$

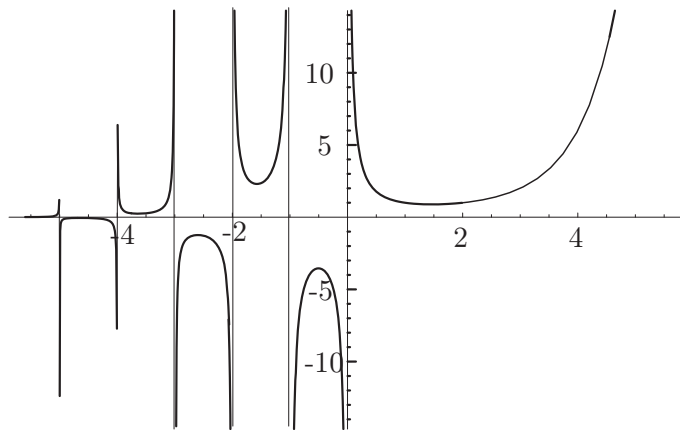
Infatti si nota che

$$\Gamma(\varrho + 1) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t^\varrho e^{-t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\left[-t^\varrho e^{-t} \right]_0^b + \int_0^b \varrho t^{\varrho-1} e^{-t} dt \right) = \varrho \Gamma(\varrho),$$

e pertanto risulta $\Gamma(n + 1) = n!$ per $n = 0, 1, \dots$.

D'altra parte Γ è definibile su tutto $\mathbb{R}^+$. Infatti per $\varrho \in [\varepsilon, 1 + \varepsilon]$, con $\varepsilon > 0$, la funzione è definita e limitata; e la (i) permette di scrivere $\Gamma(\varrho + n) = (\varrho + n - 1)(\varrho + n - 2) \cdots \varrho \Gamma(\varrho)$ per ogni $\varrho \in (0, 1]$, e $n = 1, 2, \dots$. Pertanto la (i) stessa può ancora essere usata per definire la $\Gamma(\varrho)$ quando $\varrho \in (-1, 0)$ secondo la $\Gamma(\varrho) := \frac{1}{\varrho} \Gamma(\varrho + 1)$, e così via procedendo all'indietro.

In definitiva, salvo che sugli interi negativi, la funzione Γ è atta a rappresentare il simbolo fattoriale: $\varrho! := \Gamma(\varrho + 1)$ per ogni $\varrho \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^-$.



▷

Mediante la funzione Γ si può scrivere

$$j_\varrho(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\varrho + k + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+\varrho}$$

purché sia $\varrho \neq 0, -1, -2, \dots$ come è nell'ipotesi: $\varrho \geq 0$.

Per trovare un'altra soluzione dell'equazione di Bessel, indipendente dalla (6.97), si supponga dapprima che sia $\varrho \notin \{0, 1, 2, \dots\}$, e la si ricerchi nuovamente della forma $y_2(x) = x^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con $\alpha = \alpha_2 = -\varrho$. Si ricava la

$$\begin{cases} (1 - 2\varrho) a_1 = 0, \\ \left((-\varrho + n)(-\varrho + n - 1) + (-\varrho + n) - \varrho^2 \right) a_n + a_{n-2} = 0, \quad n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Anche in questo secondo caso quindi, la scelta $a_{-1} := 0$ permette di porre nulli tutti i coefficienti di ordine dispari, e di ricavare tutti i coefficienti di ordine pari in funzione dell'unico, arbitrario, primo coefficiente $a_{2,0}$:

$$n(n - 2\varrho)a_{2,n} + a_{2,n-2} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad a_{2,0} \neq 0. \quad (6.98)$$

Diversamente dal caso precedente, in questo secondo caso il coefficiente $n(n - 2\varrho)$ nella (6.98) potrebbe creare delle difficoltà qualora le radici dell'equazione indiciale fossero tali che $\alpha_1 - \alpha_2 \equiv \varrho - (-\varrho) = 2\varrho \in \mathbb{N}$, e cioè: o quando $\varrho \in \{0, 1, 2, \dots\}$, oppure quando per qualche $k \in \mathbb{N}$ si ha $2\varrho = 2k + 1$. È però solo il primo di questi due casi che fa realmente terminare il procedimento ed impedisce che i coefficienti vengano determinati per mezzo della (6.98). La seconda eventualità infatti potrebbe far terminare la determinazione dei soli coefficienti di ordine dispari e non può impedire, come è stato fatto, che essi siano posti tutti nulli.

In definitiva, se 2ϱ è un intero positivo dispari o non è intero, e cioè se $\varrho \notin \{0, 1, 2, \dots\}$, dalla (6.98) si ricavano

$$a_{2,2k+1} = 0; \quad a_{2,2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \frac{a_{2,0}}{k!(-\varrho + 1) \cdots (-\varrho + k)}; \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.99)$$

Scegliendo $a_{2,0} = (2^{-\varrho} \Gamma(-\varrho + 1))^{-1}$ si ottiene un'altra soluzione particolare, e cioè l'altra Frobenius di cui si è parlato sopra:

$$j_{-\varrho}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-\varrho + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\varrho} \quad (6.100)$$

e siccome questa è non limitata in $x = 0$, (infatti il primo termine è certamente divergente in zero), essa è certo indipendente da j_{ϱ} . Si osserva che la singolarità in zero è di tipo algebrico.

Rimane la difficoltà $\varrho = m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, che è però il caso fisicamente significativo. Applicando a ritroso la (6.98) si conferma che necessariamente (e ancora usando $x!$ in luogo di $\Gamma(x + 1)$)

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \frac{a_{2,0}}{k!(k - m)!} = 0 \quad \text{per } k = 0, 1, \dots, m - 1,$$

e siccome le relazioni per j_{ϱ} e $j_{-\varrho}$ danno

$$\begin{aligned} j_{-m}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k - m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k - m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{n!(n + m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2m-m} = (-1)^m j_m(x) \end{aligned}$$

si ha che quando $\varrho \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ la $y_2 \equiv j_{-\varrho}$ non fornisce una soluzione indipendente dalla y_1 , e la $y = c_1 j_{\varrho} + c_2 j_{-\varrho}$ non è la soluzione generale.

Nel caso dell'equazione di Bessel è parso opportuno usare, come seconda soluzione di base nel caso $\varrho \in \{0, 1, 2, \dots\}$ e qualora sia necessaria, invece della y_2 logaritmica come visto sopra, la seguente (Bessel di seconda specie)

$$Y_m(x) := \lim_{\varrho \rightarrow m} \frac{j_{\varrho}(x) \cos \varrho \pi - j_{-\varrho}(x)}{\sin \varrho \pi}.$$

Si possono constatare le seguenti proprietà delle funzioni di Bessel j_{ϱ} :

$$(p1) \quad (x^{+\varrho} j_{\varrho}(x))' = +x^{+\varrho} j_{\varrho-1}(x) \quad \text{per } \varrho > 0;$$

$$(p2) \quad (x^{-\varrho} j_{\varrho}(x))' = -x^{-\varrho} j_{\varrho+1}(x) \quad \text{per } \varrho > 0;$$

$$(p3) \quad j'_0 = -j_1;$$

$$(p4) \quad j'_{\varrho} + \frac{\varrho}{x} j_{\varrho} = +j_{\varrho-1};$$

$$(p5) \quad j'_\varrho - \frac{\varrho}{x} j_\varrho = -j_{\varrho+1};$$

$$(p6) \quad \text{La (6.69): } u'' + \left(\lambda + \frac{1/4 - \varrho^2}{x^2} \right) u = 0, \text{ con } \varrho^2 = \frac{1}{4} \text{ e } \lambda = 1 \text{ fornisce alla (6.68) la soluzione } y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} (c_1 \cos x + c_2 \sin x).$$

Ma per quanto visto è anche $y = \tilde{c}_1 j_{1/2} + \tilde{c}_2 j_{-1/2}$ per cui seguono le

$$\begin{cases} \sqrt{x} j_{1/2}(x) = a \cos x + b \sin x \\ \sqrt{x} j_{-1/2}(x) = c \cos x + d \sin x. \end{cases}$$

Tuttavia, $[\sqrt{x} j_{1/2}(x)]_{x=0} = 0$ per la convergenza di j_ϱ con $\varrho > 0$; e quindi è $a = 0$. Questa proprietà, d'altra parte, è facilmente dimostrabile mediante il calcolo diretto; infatti (si noti che $2^k k! \neq (2k)!$) mediante la (6.95) con $2\varrho = 1$ si arriva alla

$$j_{1/2} \propto x^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

A sua volta, un calcolo diretto tramite la (6.99) fornisce

$$[\sqrt{x} j_{-1/2}(x)]_{x=0} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (-\frac{1}{2} + k)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k} \sqrt{2} \right]_{x=0} = \frac{\sqrt{2}}{(-\frac{1}{2})!} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} = c.$$

[Si noti che l'ultima uguaglianza proviene dalla $\Gamma(\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})! = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt = \int_0^\infty 2e^{-s^2} ds = \sqrt{4 \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy} = \sqrt{4 \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta} = \sqrt{\pi}$ per la quale si ha anche $(n - \frac{1}{2})! = (\frac{1}{2})_n \sqrt{\pi}$].

Servendosi di questi risultati, e ancora dalla (p1) si ricava la $(b \sin x)' = c \cos x + d \sin x$, da cui seguono $d = 0$ e $b = c = \sqrt{2}/\sqrt{\pi}$.

(p7) Sommando (p4) e (p5) si ha $\frac{2\varrho}{x} j_\varrho = j_{\varrho-1} + j_{\varrho+1}$ ed in particolare $j_{n+2} = \frac{2(n+1)}{x} j_{n+1} - j_n$ che permette di esprimere le j_n , per ogni $n \geq 2$, in funzione di j_0 e j_1 . Allo stesso modo, la (p6) implica che ogni $\sqrt{x} j_{m+1/2}$ è una combinazione lineare di termini del tipo $\sin x/x^{n_1}$ e $\cos x/x^{n_2}$ con $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, e cioè che è esprimibile con funzioni elementari

Nota 1.6.5 Una qualunque equazione della forma

$$x^2 y'' + \beta_1 x y' + (\beta_2 + \beta_3 x^{2b}) y = 0, \quad \text{con } \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}, \quad b > 0, \quad (6.101)$$

diviene l'equazione (6.94):

$$z^2 w'' + z w' + (z^2 - \varrho^2) w = 0$$

con le posizioni:

$$z := ax^b, \quad w(z(x)) := y(x)x^c, \quad a := \frac{\sqrt{\beta_3}}{b}, \quad d := \frac{\beta_1 - 1}{2}, \quad \varrho^2 := \frac{c^2 - \beta_2}{b^2}.$$

Infatti, la prima di queste fornisce:

$$\frac{d}{dz} = (abx^{b-1})^{-1} \frac{d}{dx} \quad \text{ed} \quad \frac{d^2}{dz^2} = (abx^{b-1})^{-2} \frac{d^2}{dx^2} - (abx^{b-1})^{-2} (b-1)x^{-1} \frac{d}{dx},$$

e sostituendo queste e la w definita come sopra nella (6.94) si verifica, con un pò di algebra,

$$\begin{aligned} 0 &= a^2 x^{2b} \left(\frac{1}{a^2 b^2 x^{2b-2}} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{(b-1)}{a^2 b^2 x^{2b-1}} \frac{d}{dx} \right) (yx^c) + \\ &\quad + ax^b \left(\frac{1}{abx^{b-1}} \frac{d}{dx} \right) (yx^c) + (a^2 x^{2b} - \varrho^2) (yx^c) \\ &= x^2 y'' + (2c+1)xy' + (a^2 b^2 x^{2b} + (c^2 - \varrho^2 b^2))y. \end{aligned}$$

▷

Nota 1.6.6 Un'altra famiglia di equazioni dalla forma molto comune è la

$$(t - \beta_1)(t - \beta_2)\ddot{y} + (\beta_3 + \beta_4 t)\dot{y} + \beta_5 y = 0 \quad (6.102)$$

con $\beta_1, \dots, \beta_5 \in \mathbb{R}$ e naturalmente con $\beta_1 \neq \beta_2$. Mediante le posizioni:

$$\begin{aligned} x &:= \frac{t - \beta_1}{\beta_2 - \beta_1}, & d &:= -\frac{\beta_3 + \beta_1 \beta_4}{\beta_2 - \beta_1}, & \frac{d}{dt} &= \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \frac{d}{dx}, \\ a + b + 1 &:= \beta_4, & a \ b &:= \beta_5, \end{aligned}$$

e quindi con

$$-\frac{\beta_3 + \beta_4 t}{\beta_2 - \beta_1} = -\frac{\beta_3 + \beta_4[(\beta_2 - \beta_1)x + \beta_1]}{\beta_2 - \beta_1} = c - (a + b + 1)x,$$

la (6.102) si trasforma nella Equazione ipergeometrica di Gauss:

$$x(1 - x)y'' + (c - (a + b + 1)x)y' - aby = 0 \quad (6.103)$$

che ha lo zero e l'unità come punti singolari regolari:

$$\begin{aligned} \tilde{p}(x) &= xp(x) = \frac{1}{1 - x}(c - (a + b + 1)x) = (c - (a + b + 1)x)(1 + x + x^2 + \dots) \\ \tilde{q}(x) &= x^2 q(x) = \frac{-abx}{1 - x} = -abx(1 + x + x^2 + \dots) \end{aligned}$$

ed analoghe per il punto $x = 1$.

Nel punto zero si ha allora, in particolare, $\tilde{p}_0 = c$, $\tilde{q}_0 = 0$, e l'equazione indiciale risulta $\alpha(\alpha - 1) + c\alpha = 0$ che dà $\alpha_{(1,2)} = (0; 1 - c)$.

Per quanto visto sopra, *a meno che* $(1 - c) \in \{0, 1, 2, \dots\}$, una soluzione è certamente

$$y_1(x) = x^0 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{con} \quad a_0 \neq 0.$$

In tal caso, sostituendo questa espressione nella (6.103), si ha

$$(k + 1)ka_{k+1}x^k - k(k - 1)a_k x^k + c(k + 1)a_{k+1}x^k - (a + b + 1)ka_k x^k - aba_k x^k = 0$$

da cui per $k = 1, 2, \dots$ si ottiene

$$a_{k+1} = \frac{(k(a + b + k) + ab)}{(k + 1)(k + c)} a_k = \frac{(a + k)(b + k)}{(k + 1)(c + k)} a_k,$$

e quindi la ricorrente

$$a_k = \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} a_0, \quad k = 1, 2, \dots$$

La somma y_1 della serie così trovata, con $a_0 = 1$, prende il nome di Funzione Ipergeometrica di Gauss e si indica con

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} x^k =: F(a, b, c; x),$$

definita ed analitica per $|x| < 1$, dato che è questo il polo dei coefficienti più vicino all'origine, e sempre che $(1 - c) \notin \{0, 1, 2, \dots\}$. In particolare è un polinomio se a, b sono interi negativi.

Inoltre, qualora sia $(1 - c) \notin \{0, -1, -2, \dots\}$, c'è anche un'altra soluzione

$$y_2(x) = x^{1-c} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Per trovarla esplicitamente conviene porre $y(x) =: x^{1-c} z(x)$ nella (6.103) ed ottenere

$$\begin{aligned} &(x(1 - x))((1 - c)(-c)x^{-1-c}z + 2(1 - c)x^{-c}z' + x^{1-c}z'') + \\ &+ (c - (a + b + 1)x)((1 - c)x^{-c}z + x^{1-c}z') - abx^{1-c}z = 0, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} (x(1-x)) z'' + [2(1-c)(1-x) + c - (a+b+1)x] z' + [(-c)(1-c)(1-x)x^{-1} + \\ + c(1-c)x^{-1} - (a+b+1)(1-c) - ab] z = \\ = (x(1-x)) z'' + [(2-c) - (a+b+1+2-2c)x] z' - \\ - [(1-c)(a+b+1-c) + ab] z = 0, \end{aligned}$$

che ha soluzione

$$F(a-c+1, b-c+1, 2-c; x).$$

Ne segue

$$y_2(x) = x^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c; x)$$

e si noti che $1-(2-c) \notin \mathbb{N}$ per l'ipotesi che sia $(1-c) \notin \{0, -1, -2, \dots\}$.

Tutto ciò è valido in un intorno dello zero. Se si vuole uno sviluppo valido nell'intorno di $x=1$ basta porre $t := (1-x)$ nella (6.103) ed ottenere la

$$t(1-t)\ddot{y} + [(a+b+1-c) - (a+b+1)t]\dot{y} - aby = 0$$

da cui, sempre che $(c-a-b) \notin \mathbb{N}$, segue

$$y(t) = c_1 F(a, b, a+b+1-c; t) + c_2 F(c-b, c-a, c-a-b+1; t).$$

▷

La flessibilità delle funzioni ipergeometriche è notevole:

Esempio 1.6.16

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (-\alpha)_k}{k!} x^k = F(-\alpha, 1, 1; -x).$$

□

Esempio 1.6.17 La funzione $\frac{\ln(1+x)}{x} =: y$ verifica l'equazione

$$y' = \left(\frac{x}{1+x} - \frac{y}{x} \right) / x^2 \quad \text{e quindi} \quad x(1+x)y'' + (2+3x)y' + y = 0.$$

Questa è del tipo (6.103) con variabile indipendente $-x$ e con

$$ab = 1, \quad a+b+1 = 3, \quad c = 2.$$

Ne segue la soluzione particolare

$$\ln(1+x) = x F(1, 1, 2; -x).$$

□

Esempio 1.6.18 (si veda per esempio la Nota 1.5.1)

$$\arcsin x = x F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; x^2\right).$$

□

Capitolo 2

Sistemi differenziali lineari

2.1 Il procedimento di linearizzazione

Si consideri un sistema differenziale *autonomo* di tipo generale:

$$\dot{x} = v(x), \quad x_0 \in \mathbb{M}, \quad (1.1)$$

con campo sufficientemente regolare, per esempio $C^1(D)$, in un aperto $D \subseteq \mathbb{M}$ di una varietà n -dimensionale $\mathbb{M}$. Scelto un sistema di coordinate $h_{(x)}$ su $\mathbb{M}$, resta definito su un aperto di $\mathbb{R}^n$ un sistema di equazioni che verrà indicato con la notazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Nell'intorno di punti non di equilibrio, come si vedrà, il campo può essere rettificato, e quindi le linee di flusso risultano localmente "pettinate". Di conseguenza la maggior parte dell'informazione qualitativa circa il diagramma di fase proviene dagli intorno dei punti di equilibrio e dalla struttura e forma delle traiettorie in essi.

D'altra parte se si pensa allo sviluppo di Taylor del campo $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, in un intorno sufficientemente piccolo del punto critico $\mathbf{x}_e$ e nell'ipotesi $\|\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}_e)\| > 0$, si ha che il suo termine principale risulta essere quello lineare: $\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}_e)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_e)$ in quanto $\mathbf{v}(\mathbf{x}_e) = 0$.

Un metodo che *a volte*, si badi bene, *e non sempre* è utile a fornire informazioni sul diagramma di fase nell'intorno di un punto di equilibrio isolato: $\mathbf{x}_e$, consiste nello studiare, invece che l'equazione di partenza (1.1) in generale non lineare, la sua *variazionale* o "linearizzata" in $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}_e$, e cioè

$$\dot{u} = v_*(\mathbf{x}_e)u, \quad u \in \mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^n. \quad (1.2)$$

A parziale ed euristica giustificazione del procedimento, si possono considerare i seguenti punti, (un teorema più dettagliato verrà richiamato nel § IV.1).

(•) Una funzione $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ è differenziabile in $\hat{x} \in \mathbb{M}$ quando risulta differenziabile una sua qualche rappresentazione in coordinate. In tal caso, ciò resta vero (si veda: Appendice A.4 N.B.1.4.13) in tutte le carte (U, h_ξ) che siano $C^{r \geq 1}$ -compatibili con la prima, ed è quindi possibile definire l'operatore lineare $\mathcal{T} := f_*(\hat{x}) : T_{\hat{x}}\mathbb{M} \rightarrow T_{f(\hat{x})}\mathbb{M}'$ come quello che, nelle coordinate che rappresentano f con $\mathbf{f}$, è rappresentato dalla matrice Jacobiana $\mathbf{T} := \partial \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})$. Pertanto, *scelto comunque* x in un intorno $N(\hat{x}) \subset \mathbb{M}$ sufficientemente piccolo, in tali coordinate risulta

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\chi}) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) + \partial \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}})\boldsymbol{\chi} + |\boldsymbol{\chi}| \boldsymbol{\kappa}_{(\mathbf{f})}(\hat{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\chi}) \quad (1.3)$$

con $\boldsymbol{\kappa}_{(\mathbf{f})}(\hat{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\chi}) \xrightarrow{|\boldsymbol{\chi}| \rightarrow 0} 0$. L'incremento $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ può essere pensato come $\boldsymbol{\chi} = \varepsilon \boldsymbol{\nu}$ con $\boldsymbol{\nu}$ arbitrario finito e $0 < \varepsilon \ll 1$. A partire da questi, sulla varietà $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ resta definito il corrispondente vettore $\boldsymbol{\nu}$.

A tale scopo, indicate con $h_{(x)}$ le coordinate su $\mathbb{M}$, e detto $\mathcal{X} := (h_{(x)})^*$ l'isomorfismo da esse indotto fra $T_{\hat{x}}\mathbb{M}$ ed $\mathbb{R}^n$, innanzi tutto si considera quel vettore $\mathbf{w} \in h_{(x)}(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ per il quale (si veda: Appendice A.4 N.B.1.4.16) $\mathbf{x} = h_{(x)}(x) =: h_{(x)}(\hat{x}) + \varepsilon \mathbf{w} = \hat{\mathbf{x}} + \varepsilon \mathbf{w}$, e poi, a partire da questo, si definisce su $T_{\hat{x}}\mathbb{M}$ il vettore $\boldsymbol{\nu} = \mathcal{X}^{-1}\mathbf{w}$. Esso contiene la curva $\gamma : N(0) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}$ che, al variare di ε , resta definita dalla $\gamma(\varepsilon) := h_{(x)}^{-1}(h_{(x)}(\hat{x}) + \varepsilon \mathbf{w})$. Tale curva è basata in $\hat{x}$, contiene x , ed è tale che $\dot{\gamma}(0) = \boldsymbol{\nu}$, e quindi $[\gamma]_{\hat{x}} = \boldsymbol{\nu}$ che, tuttavia, dipende dal sistema di coordinate scelto su $\mathbb{M}$.

Inoltre, ciò giustifica l'espressione

$$h_{(x)}\left(\mathcal{L}_{\boldsymbol{\nu}} f \Big|_{\hat{x}}\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}} + \varepsilon \boldsymbol{\nu}) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}))}{\varepsilon} \equiv \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}} + \varepsilon \boldsymbol{\nu}) = \mathbf{f}_*(\hat{\mathbf{x}})\boldsymbol{\nu}$$

che vuole interpretare la

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{\nu}} f \Big|_{\hat{x}} = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} (f \circ \gamma) = f_* \Big|_{\hat{x}} \boldsymbol{\nu}$$

ove $\gamma : \varepsilon \in \mathbb{R} \mapsto \gamma(\varepsilon) \in \mathbb{M}$ è una curva tale che $\gamma(0) = \hat{x}$ e $\dot{\gamma}(0) = \boldsymbol{\nu}$.

(•) Si assuma che la (1.1) abbia campo $v : \mathbb{M} \rightarrow T\mathbb{M}$ almeno $C^2(D)$, e che sia nota la sua soluzione $t \mapsto x = \phi(t, t_0, \hat{x}_0)$ uscente da un certo $\hat{x}_0 \in D \subseteq \mathbb{M}$; l'istante t_0 è arbitrario ma fissato, per esempio $t_0 = 0$. Detta $t \mapsto \phi(t, t_0, x_0)$ la soluzione uscente da un qualunque $x_0 \in N(\hat{x}_0)$ la regolarità del campo v impone che sulla varietà $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^n$ esista una funzione (vettoriale) $\chi = \chi(t, t_0, x_0, \hat{x}_0)$ soluzione del seguente problema, ancora non lineare e sostanzialmente *equivalente al problema* (1.1), detto

Problema alle variazioni (relativo alla $\phi(t, t_0, \hat{x}_0)$)

$$\begin{cases} \dot{\chi} = v_*(\phi(t, t_0, \hat{x}_0))\chi + |\chi| \kappa_{(v)}(t, \chi), \\ \chi_0 = \chi(t_0) \quad \text{arbitrario in } \mathbb{V}, \end{cases} \quad (1.4)$$

ed è

$$\begin{aligned} \kappa_{(v)}(t, \chi) &\in C^0(N(t_0) \times N(0)) \quad \text{con } N(t_0) \times N(0) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{V} \\ \kappa_{(v)}(t, \chi) &\xrightarrow[0]{|\chi|} 0 \quad \text{uniformemente per } t_0 \leq t \leq \tau < \infty. \end{aligned}$$

Quest'ultima affermazione, conseguenza dell'ipotesi che il punto $x = \phi(t, t_0, \hat{x}_0)$ esista e sia in D , va intesa nel senso che: fissato comunque un valore $\tau < \infty$ (e per esempio $\tau > t_0$) appartenente all'intervallo massimale J_M di definizione della soluzione di riferimento $t \mapsto \phi(t, t_0, \hat{x}_0)$, il limite per $|\chi| \rightarrow 0$ della $\kappa_{(v)}(t, \chi)$ esiste (nullo) ed è anzi uniforme rispetto a $t \in [t_0, \tau]$ giacché ϕ è funzione continua di t , e le funzioni v e (quindi) v_* e $\kappa_{(v)}$ sono funzioni continue del punto x , e quindi di t .

(•) Il teorema di dipendenza continua (si veda: Teorema 1.3.2 Cap. I) afferma che $\chi : t \mapsto \chi(t)$ è definita su tutto $[t_0, \tau]$, e che per $\chi_0 \rightarrow 0$ anche $\chi(t) \rightarrow 0$ in modo uniforme sui compatti rispetto a t , (risulta cioè $\lim_{\chi_0 \rightarrow 0} \sup_{t \in [t_0, \tau]} |\chi(t)| = 0$).

(•) Si ponga $\chi_0 = x_0 - \hat{x}_0 =: \varepsilon u_0$ con $u_0 \in T_{\hat{x}_0} \mathbb{R}^n$ arbitrario finito ed $\varepsilon > 0$ e, per ciascun $t \in J_M$, sulla varietà $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ si consideri l'operatore

$$\mathcal{T}(t) \in \mathbb{L}(\mathbb{V}) \quad \text{definito da} \quad \mathcal{T}(t) := v_*(\phi(t, t_0, \hat{x}_0)) .$$

Si indichi poi con $u : t \mapsto u(t) \in \mathbb{V}$ la soluzione del

Problema variazionale (relativo alla $\phi(t, t_0, \hat{x}_0)$)

$$\begin{cases} \dot{u} = \mathcal{T}(t)u := v_*(\phi(t, t_0, \hat{x}_0)) u \\ u(t_0) = u_0 . \end{cases} \quad (1.5)$$

Sotto l'ipotesi $v \in C^2(D)$, il teorema di regolarità, (si veda: Teorema 1.3.2 Cap. I), non solo dichiara la ϕ derivabile rispetto a x_0 , e quindi dichiara lecita la

$$\phi(t, t_0, \hat{x}_0 + \varepsilon u_0) = \phi(t, t_0, \hat{x}_0) + \partial \phi(t, t_0, \hat{x}_0) \varepsilon u_0 + |\varepsilon u_0| \kappa_{(\phi)}(t, \varepsilon) ,$$

con $\kappa_{(\phi)}(t, \varepsilon) = o(|\varepsilon|)$ e per arbitrari t_0, u_0 , ma in più individua nella soluzione $u : t \mapsto u(t)$ del problema (1.5) la funzione

$$u(t) = \phi_*(t, t_0, \hat{x}_0) u_0 \quad \text{o, in coordinate,} \quad u(t) = \partial \phi_*(t, t_0, \hat{x}_0) u_0 .$$

Ne segue che le funzioni $\chi(t)$ ed $\varepsilon u(t)$ sono tali che

$$\left| \frac{\chi(t)}{\varepsilon} - u(t) \right| \xrightarrow[0]{\varepsilon} 0, \quad \text{uniformemente per } t_0 \leq t \leq \tau < \infty. \quad (1.6)$$

Nota 2.1.1 Nel caso più generale nel quale la (1.1) ha campo $v = v(t, x; \sigma)$ non autonomo, dipendente da un ulteriore parametro $\sigma \in \mathbb{G}$ con $\dim \mathbb{G} = \ell$, e sufficientemente regolare rispetto alle sue tre variabili, e chiamata $t \mapsto \phi_0(t) := \phi(t, t_0, \hat{x}_0, 0)$ la soluzione nota di $\dot{x} = v(t, x; 0)$, si ricava che la $t \mapsto u(t)$ soddisfacente la (1.6) e relativa a una variazione di condizioni iniziali per esempio date da $(\hat{x}_0, 0) \mapsto (x_0, \sigma_0) \equiv (x_0, \varepsilon 1_\ell)$, è la soluzione della

$$\begin{cases} \dot{u} = \mathcal{T}(t)u + b(t) , \\ u(t_0) = u_0 \in \mathbb{V} , \end{cases} \quad \text{con:} \quad \begin{cases} \mathcal{T}(t) := v_*(t, \phi_0(t); 0) , \\ b(t) := v_\sigma(t, \phi_0(t); 0) 1_\ell , \\ \phi_0(t) := \phi(t, t_0, \hat{x}_0) . \end{cases} \quad (1.7)$$

Notazione

$\mathbb{1}_m :=$ l'operatore identità su uno spazio m -dimensionale;

$1_m :=$ il vettore m -dimensionale che nelle coordinate scelte ha tutte le componenti unitarie.

Dimostrazione All'equazione $\dot{x} = v(t, x; \sigma)$, con $v : \mathbb{R} \times \mathbb{M} \times \mathbb{G} \rightarrow T\mathbb{M}$ si aggiunga l'equazione $\dot{\sigma} = 0$. Si ottiene il sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t, x; \sigma) \\ 0 \end{pmatrix}$$

e se ne indichi con $\begin{pmatrix} \hat{\phi} \\ \hat{\sigma} \end{pmatrix} : t \mapsto \begin{pmatrix} \phi(t, t_0, \hat{x}_0; \hat{\sigma}_0) \\ \sigma(t, t_0, \hat{x}_0; \hat{\sigma}_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{M} \times \mathbb{G}$ la soluzione uscente dalle condizioni iniziali $(t_0, \hat{x}_0; \hat{\sigma}_0)$.

Tale sistema ha variazionale in $(\hat{\phi}, \hat{\sigma})$ individuata dalla

$$\dot{\Phi} = \begin{pmatrix} v_* & v_\sigma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big|_{(\hat{\phi}, \hat{\sigma})} \Phi := \begin{pmatrix} \partial v / \partial x & \partial v / \partial \sigma \\ \partial 0 / \partial x & \partial 0 / \partial \sigma \end{pmatrix} \Big|_{(\hat{\phi}, \hat{\sigma})} \Phi, \quad \Phi_0 \in \mathbb{L}(\mathbb{M} \times \mathbb{G});$$

in base alla teoria generale, la sua soluzione uscente dalle condizioni iniziali $\Phi_0 = \mathbb{I}_{n+\ell}$ è riassunta dalla

$$\Phi(t, t_0, \hat{x}_0; \hat{\sigma}_0) = \begin{pmatrix} \partial_x \phi & \partial_\sigma \phi \\ \partial_x \sigma & \partial_\sigma \sigma \end{pmatrix} \Big|_{(\hat{\phi}, \hat{\sigma})} \equiv \begin{pmatrix} \hat{\phi}_* & \hat{\phi}_\sigma \\ 0 & \mathbb{I}_\ell \end{pmatrix}.$$

Sussiste cioè l'identità (rispetto a t):

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_* & \hat{\phi}_\sigma \\ 0 & \mathbb{I}_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_* & v_\sigma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big|_{(\hat{\phi}, \hat{\sigma})} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_* & \hat{\phi}_\sigma \\ 0 & \mathbb{I}_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_* \hat{\phi}_* & v_* \hat{\phi}_\sigma + v_\sigma \mathbb{I}_\ell \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big|_{(\hat{\phi}, \hat{\sigma})}$$

ovvero: le $(\hat{\phi}_*, \hat{\phi}_\sigma)$ sono soluzioni dell'equazione

$$\begin{cases} \dot{\phi}_* = v_* \phi_* & (n \times n), \text{ con condizioni iniziali } \phi_*|_0 = \mathbb{I}_n; \\ \dot{\phi}_\sigma = v_* \phi_\sigma + v_\sigma & (n \times \ell), \text{ con condizioni iniziali } \phi_\sigma|_0 = 0. \end{cases}$$

Dati allora $u_0 \in T_{\hat{x}_0} \mathbb{M}$ e $h_0 \in T_0 \mathbb{G}$, la funzione

$$t \mapsto \begin{pmatrix} u(t) \\ h(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \hat{\phi}_* & \hat{\phi}_\sigma \\ 0 & \mathbb{I}_\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ h_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_* u_0 + \hat{\phi}_\sigma h_0 \\ h_0 \end{pmatrix}$$

è la soluzione uscente da (u_0, h_0) dell'equazione variazionale

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_* & v_\sigma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big|_{(\hat{\phi}, \hat{\sigma})} \begin{pmatrix} u \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_* u + v_\sigma h \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_{(\hat{\phi}, \hat{\sigma})}.$$

In definitiva, analogamente alla (1.6) e con $\varepsilon > 0$, risulta (in coordinate)

$$\left| \begin{pmatrix} \phi(t, t_0, \hat{x}_0 + \varepsilon u_0; \hat{\sigma}_0 + \varepsilon h_0) \\ \hat{\sigma}_0 + \varepsilon h_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \phi(t, t_0, \hat{x}_0, \hat{\sigma}_0) \\ \hat{\sigma}_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \partial_x \hat{\phi} & \partial_\sigma \hat{\phi} \\ 0 & \mathbb{I}_\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon u_0 \\ \varepsilon h_0 \end{pmatrix} \right| = o(\varepsilon)$$

da cui segue

$$\left| \phi(t, t_0, x_0, \sigma_0) - \phi(t, t_0, \hat{x}_0, \hat{\sigma}_0) - \varepsilon \partial_x \hat{\phi} u_0 - \varepsilon \partial_\sigma \hat{\phi} h_0 \right| = o(\varepsilon).$$

In particolare, con $h_0 = 1_\ell$ e detta $\mathbf{u} : t \mapsto \mathbf{u}(t)$ la soluzione uscente da $(u_0, 1_\ell)$ dell'equazione $\dot{\mathbf{u}} = \partial_x \mathbf{v} \mathbf{u} + \partial_\sigma \mathbf{v} 1_\ell$, si ha, uniformemente per $t_0 \leq t \leq \tau < \infty$,

$$\frac{1}{\varepsilon} \left| \phi(t, t_0, \hat{x}_0 + \varepsilon u_0; \hat{\sigma}_0 + \varepsilon 1_\ell) - \phi(t, t_0, \hat{x}_0; \hat{\sigma}_0) - \varepsilon \mathbf{u}(t) \right| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Di speciale interesse è il caso in cui $\hat{\sigma}_0 = 0$ e $\hat{x}_0 =: x_0$ è arbitrario. Per esso si ha

$$\begin{pmatrix} \phi(t, t_0, \hat{x}_0; \hat{\sigma}_0) \\ \hat{\sigma}_0 \end{pmatrix} \Big|_{\substack{\hat{\sigma}_0=0 \\ \hat{x}_0=x_0}} =: \begin{pmatrix} \phi(t, t_0, x_0) \\ 0 \end{pmatrix}$$

ove $t \mapsto \phi_0(t, t_0, x_0)$ è la soluzione del problema “all'ordine 0”:

$$\begin{cases} \dot{x} = v(t, x; 0) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

In tal caso, la $\mathbf{u}(t)$ è soluzione del problema “all'ordine 1” dato dalla (1.7).

Queste considerazioni permettono di sviluppare (si veda: Cap. VI) molti e diversi metodi di risoluzione approssimata dei sistemi nonlineari il cui campo dipende da un parametro σ che, rispetto agli altri coefficienti presenti, possa essere considerato sufficientemente “piccolo”. In tali metodi il teorema appena ricordato è solo uno (e non il migliore) dei teoremi che permettono di giustificare le varie tipologie di soluzioni approssimate. $\triangleright$

(•) Sia $x_e \in \mathbb{M}$ tale che $v(x_e) = 0$. La quiete $t \mapsto \phi(t, t_0, x_e) \equiv x_e$ nel punto di equilibrio x_e (supposto isolato) è allora la soluzione della (1.1) uscente da $x_0 = x_e$.

Contrariamente al caso generale, nel quale all'operatore $\mathcal{T}(t)$ resta associata (in coordinate) una matrice $\mathbf{T}$ di dimensione $(n \times n)$, *generalmente dipendente dal tempo*, individuata dalla:

$$\partial \mathbf{v}(\phi(t)) =: \mathbf{T}(t) \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^n), \quad \mathbf{T}^i_j(t) = \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j}(t) \right),$$

se la soluzione di riferimento è la quiete l'operatore $\mathcal{T}(t) := v_x(\phi(t, t_0, x_e))$ risulta indipendente dal tempo, e lo stesso accade a ogni sua matrice $\partial v(x_e) =: \mathbf{T}$.

Sotto tali ipotesi, il sistema (1.5) (in coordinate) risulta allora *un sistema lineare a coefficienti costanti*:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{T} \mathbf{u}, & \mathbf{T} = \partial v(x_e) \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^n) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0, & \text{arbitrario in } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1.8)$$

È quest'ultimo il sistema del quale, nel paragrafo seguente, si cercheranno i diagrammi di fase nell'intorno di x_e .

(•) Quanto detto assicura che *per tempi limitati* ogni orbita del sistema (1.5) (o del sistema (1.8) se vicino a un equilibrio) *presa singolarmente* è prossima a quella del sistema non lineare (1.4) e lo è in misura tanto maggiore quanto più lo è stata in $t = t_0$ e secondo un scarto che dipende dalla durata dell'intervallo dopo il quale avviene il confronto.

È ben vero che questo *non implica* che il diagramma *nel suo insieme* del sistema lineare sia “simile” al diagramma del sistema nonlineare, *anche se solo* vicino al punto di equilibrio x_e . Tuttavia come si vedrà (teorema di Hartman e Grobman) ciò accade, pur se al costo di accettare somiglianze non più che topologiche fra certe classi di diagrammi per il resto diversi, nel caso in cui il punto di equilibrio sia un

Punto Iperbolico := un punto di equilibrio $x_e \in \mathbb{M}$ tale che le parti reali degli autovalori $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ dell'operatore $\mathcal{T} := v_*(x_e)$ siano tutte non nulle.

In modo analogo si definiranno i punti iperbolici per le mappe $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dei sistemi dinamici discreti; per essi andranno però tenute presenti le relative modifiche: per esempio per una mappa $f \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$ un punto è unito quando verifica la $x_e = f x_e$. Un tale punto è allora detto *iperbolico* se accade che $|\lambda_i| \neq 1$, $\forall i$, e ciò perché in questo caso la proprietà di iperbolicità si riconosce dallo studio degli autovalori di f e non di quelli del suo esponenziale, visto che per una mappa l'evoluzione è governata dalla sua tangente, mentre per un flusso dalla $\exp(tv_*(x_e))$ (si veda: Cap.V).

(•) Fortunatamente i casi di iperbolicità sono *generici*, (si veda: Cap.IV), e quindi lo studio del sistema lineare (1.8) ha comunque un rilevante interesse.

Nota Dato che $v(x_e) = 0$, l'operazione di linearizzazione (non quello di sviluppo di Taylor) nell'intorno di un punto di equilibrio x_e non dipende dal particolare sistema di coordinate scelto su $\mathbb{M}$ *nel seguente senso*. Se, in un sistema di coordinate, a $v_*(x_e)$ corrisponde una certa matrice: $\partial v(x_e) := \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x_e}$ allora, in un nuovo sistema di coordinate $\xi = \varphi(x)$ nel quale l'equazione (non lineare) equivalente a quella data è $\dot{\xi} = \nu(\xi) := \partial \varphi v \Big|_{x=\varphi^{-1}(\xi)}$, la matrice $\partial \nu(\xi_e) \equiv \frac{\partial \nu}{\partial \xi} \Big|_{\xi_e}$ che regola l'evoluzione linearizzata nelle nuove coordinate è la $\partial \varphi$ -trasformata della ∂v :

$$\partial \nu(\xi_e) = [\partial \varphi \partial v (\partial \varphi)^{-1}] \Big|_{x_e=\varphi^{-1}(\xi_e)}$$

ed è quindi unico l'operatore lineare v_* che assegna l'avanzamento locale *nell'intorno di un equilibrio*, come si poteva, d'altra parte, leggere direttamente dalla (1.5).

[Questa precisazione è necessaria dato che il cambio di coordinate avviene sulla varietà e non solo nello spazio $\mathbb{V}$. In questo secondo caso infatti, e cioè nel caso in cui v_* rappresentasse una qualunque assegnata trasformazione lineare, l'osservazione sarebbe conseguenza dell'essere questa lineare (si veda: Appendice A.4, N.B.1.4.15)].

Se invece il campo nel punto non è nullo, la variazionale risente anche della curvatura delle linee $\varphi = \text{cost}$, (a meno che la φ sia lineare).

Dimostrazione

Dalla $\nu(\xi) := \partial_x \varphi v \circ \varphi^{-1}(\xi)$, e indicate rispettivamente con ∂_x e con ∂_ξ le operazioni di derivazione nelle coordinate x e ξ , si ricava

$$\begin{aligned} \partial_\xi \nu(\xi_e) &= \partial_x (\partial_x \varphi v) \Big|_{x=\varphi^{-1}(\xi_e)} \cdot \partial_\xi \varphi^{-1}(\xi_e) \\ &= (\partial_x^2 \varphi v + \partial_x \varphi \partial_x v) \Big|_{x=\varphi^{-1}(\xi_e)} \cdot \partial_\xi \varphi^{-1}(\xi_e) \\ &= \partial_x \varphi \partial_x v \partial_x \varphi^{-1} \Big|_{x=\varphi^{-1}(\xi_e)} \end{aligned}$$

giacché $v(x_e) = v(\varphi^{-1}(\xi_e)) = 0$ e $1 = \partial_x \varphi \Big|_{x_e} \cdot \partial_\xi \varphi^{-1} \Big|_{\varphi(x_e)}$. ■

Si osservi che per la generalità del risultato l'essere nullo il campo $v(x_e)$ è condizione necessaria, come si può vedere nel seguente

Esempio L'equazione

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y(x^2 + y^2) \\ x(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} v^x(x, y) \\ v^y(x, y) \end{pmatrix}, \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}$$

ha linearizzata in $(\bar{x}, \bar{y}) \neq (0, 0)$ data sul vettore $\begin{pmatrix} u^x \\ u^y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ dalla:

$$\dot{u} \equiv \begin{pmatrix} \dot{u}^x \\ \dot{u}^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\bar{x}\bar{y} & -\bar{x}^2 - 3\bar{y}^2 \\ 3\bar{x}^2 + \bar{y}^2 & 2\bar{x}\bar{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^x \\ u^y \end{pmatrix} \equiv v_*(\bar{x}, \bar{y})u.$$

D'altra parte, mediante l'usuale trasformazione in coordinate polari $\rho, \theta \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{e quindi con} \quad \partial\varphi := \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix},$$

essa è equivalente alla

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho^2 \end{pmatrix} \equiv \nu(\rho, \theta) \equiv (\partial\varphi v) \big|_{\varphi^{-1}(\rho, \theta)}$$

che ha linearizzata sul vettore $\begin{pmatrix} \kappa^\rho \\ \kappa^\theta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\theta} \end{pmatrix}$ data dalla:

$$\dot{\kappa} \equiv \begin{pmatrix} \dot{\kappa}^\rho \\ \dot{\kappa}^\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\bar{\rho} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa^\rho \\ \kappa^\theta \end{pmatrix} \equiv \nabla\nu(\bar{\rho}, \bar{\theta}) \kappa.$$

Si osserva che, essendo $\nabla\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$, e quindi

$$\nabla^2\varphi^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \rho^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho^2\sin\theta & -\rho^3\cos\theta \\ \rho^2\cos\theta & -\rho^3\sin\theta \end{pmatrix},$$

fra i due campi ∂v e $\nabla\nu$ sussiste il legame su indicato:

$$\begin{aligned} & \left(\nabla^2\varphi^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \rho^2 \end{pmatrix} \cdot \partial\varphi \right)_{\bar{x}, \bar{y}} + \left(\nabla\varphi^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\bar{\rho} & 0 \end{pmatrix} \cdot \partial\varphi \right)_{\bar{x}, \bar{y}} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \\ \bar{x}^2 + \bar{y}^2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\bar{x}\bar{y} & -2\bar{y}^2 \\ 2\bar{x}^2 & 2\bar{x}\bar{y} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Prima di iniziare lo studio sistematico dei sistemi lineari a coefficienti costanti verrà qui brevemente accennato uno dei più importanti esempi di linearizzazione: quella che si esegue nell'intorno di una posizione *di equilibrio regolare* di un sistema meccanico conservativo, e cioè a vincoli indipendenti dal tempo e forze posizionali a potenziale.

Memento 2.1.1 Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice convessa su $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso quando per ogni $x, y \in A$ e $\alpha \in [0, 1]$ accade che

$$f(x + \alpha(y - x)) \leq f(x) + \alpha(f(y) - f(x)).$$

Se f è di classe C^2 su A ne segue che $f(x) \geq f(y) + \partial f(y)(x - y)$ e quindi la forma $\mathcal{B} := \frac{1}{2}(y - x)^T \partial^2 f(x)(y - x)$ è definita positiva.

Sia $\mathbb{G}$ la varietà delle configurazioni di un sistema lagrangiano generalizzato (vedi oltre) di dimensione n , e sia $(U, h_{(q)})$ un sistema di coordinate (o carta) di classe C^k locale nell'intorno di un qualche punto q_0 in $\mathbb{G}$, dal quale quest'ultima è resa localmente omeomorfa ad $\mathbb{R}^n$. Sia $\mathbb{V} \equiv T_{q_0}\mathbb{G}$ il suo tangente. Sia $\mathbb{M}$ la varietà delle fasi (fibrato tangente di $\mathbb{G}$) di dimensione $2n$ del sistema. In corrispondenza alle coordinate scelte, nello spazio $\mathbb{V}$ resta individuata la base naturale $e = \{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ dei vettori tangenti alle curve coordinate, e questa (ad esempio) rende $\mathbb{V}$ isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Lo spazio $\mathbb{V} \equiv T_{q_0}\mathbb{G}$, inoltre, sia reso metrico da un certo prodotto scalare reale $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V}^2 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{0\}$, e quindi tale che risulta definita per ciascuna coppia $x, y \in \mathbb{V}$ la forma bilineare simmetrica $\mathcal{K} : \mathbb{V}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (o tensore della metrica) individuata da

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x, y) &:= \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \equiv x^i \langle e_i, e_j \rangle y^j, \\ \langle x, \alpha y \rangle &= \alpha \langle x, y \rangle, \quad \langle x, x \rangle > 0 \text{ se } x \neq 0, \end{aligned}$$

della quale sia $\mathbf{K}_{hk} := \langle e_h, e_k \rangle$ la matrice (in quella base) e $\mathbf{K}^{hk}$ la sua inversa: $\mathbf{K}_{jk} \mathbf{K}^{kh} = \mathbf{K}^{hk} \mathbf{K}_{kj} = \delta_j^h$.

Si denoti con $(q, \dot{q})$ il vettore che in $\mathbb{R}^{2n}$ rappresenta (in tal modo, localmente, e in queste coordinate) il punto $(q, \dot{q}) \in \mathbb{M}$.

Sia $\mathcal{L} : \mathbb{R} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 , e si continui a indicare con $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, q, \dot{q}) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ la sua rappresentazione in coordinate.

Il sistema si dice *Lagrangiano generalizzato*, e la $\mathcal{L}$ si dice *Lagrangiana del sistema* quando ciascuna delle funzioni $\dot{\mathbf{q}} \mapsto \mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ è convessa su $\mathbb{R}^n$, e quando le equazioni del moto del sistema, minimizzando l'integrale d'azione a estremi fissati: $\int_{t_0}^t \mathcal{L}(\tau, \mathbf{q}(\tau), \dot{\mathbf{q}}(\tau)) d\tau$, risultano le

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^h} = 0 \quad h = 1, \dots, n. \quad (1.9)$$

Certo ogni sistema meccanico a potenziale è un sistema Lagrangiano generalizzato con la $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$, ove la $\mathcal{V} = \mathcal{V}(t, \mathbf{q})$ è la sua *energia potenziale* (generalizzata), e $\mathcal{T} = \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_0$ è la sua *energia cinetica*, con $\mathcal{T}_i$ forme di grado $i = 0, 1, 2$ rispetto alle $\dot{\mathbf{q}}$ e coefficienti dipendenti da $(t, \mathbf{q})$, e con $\mathcal{T}_2$ definita positiva.

N.B. 2.1.2 Nel caso qui in esame il sistema è reale, meccanico, a vincoli bilaterali olonomi, regolari, perfetti, indipendenti dal tempo, e forze strettamente conservative. Come tale, sussistono i seguenti fatti.

- la sua funzione Lagrangiana, certo convessa rispetto alle $\dot{\mathbf{q}}$, ha espressione in coordinate

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{T}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \Pi(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\kappa} \mathbf{a} \dot{\mathbf{q}} - \Pi(\mathbf{q}),$$

nella quale la funzione energia potenziale $\mathcal{V} = \mathcal{V}(t, \mathbf{q})$ è la sola parte $\Pi = \Pi(\mathbf{q})$ dovuta al contributo delle forze conservative, e quindi

$$\left\{ Q_h(\mathbf{q}) = - \frac{\partial \Pi}{\partial q^h}(\mathbf{q}) \right\}_{h=1, \dots, n} \quad \text{ed} \quad \left(\mathbf{a}_{kj}(\mathbf{q}) \right) := \left(\frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^j}(\mathbf{q}) \right)$$

sono rispettivamente le componenti lagrangiane Q_h delle forze, e la matrice *reale simmetrica* $\mathbf{a}$ della forma quadratica $\mathcal{T}_2$ dell'energia cinetica $\mathcal{T}$;

- valgono le espressioni $\dot{q}_i \boldsymbol{\kappa}^{ik} = \dot{q}^k$ e $\dot{q}^k \boldsymbol{\kappa}_{ki} = \dot{q}_i$;
- l'operatore $\mathcal{T}_2 : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, definito su $\mathbb{V}$ (a partire dalla sua rappresentazione in coordinate e per $q \in \mathbb{G}$ fissato) dalla

$$\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{a} \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{q}^k \mathbf{a}_{kj} \dot{q}^j = \mathcal{T}_2(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) =: \frac{1}{2} \langle \mathcal{T}_2 \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle =: \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \mathcal{T}_2^* \dot{\mathbf{q}} \rangle,$$

è autoaggiunto rispetto all'iniziale prodotto scalare: $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Infatti la $\mathcal{T}_2$ è, in particolare, Hermitiana simmetrica (rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ considerato Hermitiano), e quindi si ha

$$\langle \dot{\mathbf{q}}, \mathcal{T}_2^* \dot{\mathbf{q}} \rangle := 2 \mathcal{T}_2(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = 2 \overline{\mathcal{T}_2(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})} = \overline{\langle \mathcal{T}_2 \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle} = \langle \dot{\mathbf{q}}, \mathcal{T}_2 \dot{\mathbf{q}} \rangle.$$

Alternativamente, detta $\mathbf{A}$ la matrice dell'operatore $\mathcal{T}_2$, il calcolo in coordinate fornisce

$$\langle \mathcal{T}_2 x, y \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \boldsymbol{\kappa} \bar{\mathbf{y}} \quad \text{ed} \quad \langle x, \mathcal{T}_2^* y \rangle = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\kappa} \bar{\mathbf{A}}^* \bar{\mathbf{y}},$$

che mostra come la definizione di aggiunto implichi che

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa} \bar{\mathbf{A}}^* \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{A}_h^i \boldsymbol{\kappa}_{ik} = \boldsymbol{\kappa}_{hj} \bar{\mathbf{A}}_k^{*j}.$$

D'altra parte, dalla simmetria della $\mathcal{T}_2$ si ha la $\mathbf{a}^T = \bar{\mathbf{a}}$, e quindi segue la: $\bar{\boldsymbol{\kappa}} \mathbf{A} = \bar{\boldsymbol{\kappa}} \mathbf{A}^*$. In definitiva, fissata la base $\mathcal{C}$, l'operatore $\mathcal{T}_2$ ha $\mathcal{C}$ -matrice $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$, che conferma l'autoaggiunzione di $\mathcal{T}_2$ reale. Qui di seguito, come si è detto, $\mathbb{G}$, $\mathbb{V}$, e $\boldsymbol{\kappa}$ verranno supposti reali, e pertanto

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\kappa} = \bar{\boldsymbol{\kappa}} \bar{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\kappa} \mathbf{A}, \quad \text{e quindi} \quad \mathbf{A} = \boldsymbol{\kappa}^{-1} \mathbf{a}.$$

La scelta più comune è certo $\boldsymbol{\kappa} = \mathbb{I}$.

◇

Come è noto, a partire dalla n -pla di funzioni

$$\mathbf{z} : (t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{1+2n} \mapsto \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^n,$$

si definiscono:

Momenti Coniugati delle $\mathbf{q}$:= le variabili $\mathbf{p} := (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ (che nella riduzione d'ordine delle equazioni (1.9) verranno considerate ulteriori variabili, indipendenti dalle $\mathbf{q}$) definite dalla

$$p_k = p_k(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad k = 1, \dots, n.$$

Il fatto che la $\mathcal{L}$ sia funzione convessa delle $\dot{\mathbf{q}}$ assicura che è anche possibile invertire le $\mathbf{p} = \mathbf{z}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ rispetto alle $\dot{\mathbf{q}}$. In altre parole, il considerare i momenti coniugati come variabili alla stessa stregua delle ($\mathbf{q}$ e delle) $\dot{\mathbf{q}}$ permette di definire (localmente) una trasformazione di coordinate $\varphi : x \mapsto \xi = \varphi(x)$ espressa da

$$\begin{pmatrix} t \\ \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{q} \\ \mathbf{z}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione La trasformazione φ ha matrice Jacobiana

$$\partial \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ \partial_t \mathbf{z} & \partial_{\mathbf{q}} \mathbf{z} & \partial_{\dot{\mathbf{q}}} \mathbf{z} \end{pmatrix},$$

dove per le due matrici $n \times n$ in essa contenute si è usata la notazione: $\partial_{\mathbf{q}} \mathbf{z}$ per indicare la matrice $\left(\frac{\partial z_h}{\partial q^k} \right)$, $k, h = 1, \dots, n$, e analogamente $\partial_{\dot{\mathbf{q}}} \mathbf{z}$ per la matrice $\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^h \partial \dot{q}^k} \right) = \left(\frac{\partial z_h}{\partial \dot{q}^k} \right)$. È facile riconoscere che per l'assunta convessità di $\mathcal{L}$ rispetto alle $\dot{\mathbf{q}}$, la $\partial \varphi$ ha determinante non nullo

$$\text{Det} \left(\frac{\partial z_h}{\partial \dot{q}^k} \right) \equiv \text{Det} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^h \partial \dot{q}^k} \right) \neq 0.$$

Nel caso in esame, tale determinante coincide con il determinante della matrice $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{q})$ dell'energia cinetica $\mathcal{T}_2$, e si ricavano le facili espressioni

$$p_j = \mathbf{A}_{jk} \dot{q}^k = \boldsymbol{\kappa}_{ji} \mathbf{A}_k^i \dot{q}^k, \quad \text{e pertanto} \quad \boldsymbol{\kappa}^{ij} p_j =: p^i = \mathbf{A}_k^i \dot{q}^k.$$

Esiste pertanto (localmente) la trasformazione inversa della φ data da

$$\begin{pmatrix} t \\ \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi^{-1}} \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\zeta}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{pmatrix},$$

dove la $\boldsymbol{\zeta}$ verifica l'identità $\mathbf{p} = \mathbf{z}(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\zeta}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}))$, per ogni $(t, \mathbf{q})$. ■

Si osservi ora che il sistema delle equazioni di Lagrange è

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad \text{e cioè} \quad \frac{\partial z_h}{\partial \dot{q}^k} \ddot{q}^k + \frac{\partial z_h}{\partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial z_h}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^h}, \quad h = 1, \dots, n$$

e quindi esso si può certo scrivere, al primo ordine, nella forma ($k = 1, \dots, n$)

$$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{q}^k = y^k \\ \dot{y}^k = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^h \partial y^k} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q^h} - \frac{\partial z_h}{\partial q^j} y^j - \frac{\partial z_h}{\partial t} \right), \end{cases} \quad (1.10)$$

con, ovviamente, $z_h(t, \mathbf{q}, \mathbf{y}) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^h}(t, \mathbf{q}, \mathbf{y})$, $h = 1, \dots, n$.

Detto $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ il sistema (1.10), e $\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\nu}(t, \boldsymbol{\xi})$ il suo equivalente nelle nuove coordinate: $\boldsymbol{\xi} = \varphi(\mathbf{x})$, l'espressione $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi}) = \partial \varphi \mathbf{v} \big|_{\varphi^{-1}(\boldsymbol{\xi})}$ fornisce facilmente tale sistema, equivalente a (1.10):

$$\begin{cases} \dot{t} = 1 \\ \dot{q}^k = \zeta^k(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ \dot{p}_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} \big|_{\dot{\mathbf{q}}=\boldsymbol{\zeta}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})} \end{cases} \quad k = 1, \dots, n, \quad (1.11)$$

infatti le ultime n componenti del vettore $\boldsymbol{\nu}$ sono date da

$$\boldsymbol{\nu}_3(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{h=1}^{2n+1} \partial \varphi_{3,h} v^h = [\partial_t \mathbf{z} + (\partial_q \mathbf{z}) \mathbf{y} + (\partial_q \mathcal{L} - (\partial_q \mathbf{z}) \mathbf{y} - \partial_t \mathbf{z})].$$

È possibile dare una forma più espressiva alle (1.11). Per farlo si inizi con il notare che le funzioni $\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\zeta}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ possono essere usate per definire la

Funzione Hamiltoniana $\mathcal{H} : \mathbb{R} \times T\mathbb{G} \rightarrow \mathbb{R}$ definita dalla:

$$\mathcal{H}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) := \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k - \mathcal{L} \right]_{\dot{\mathbf{q}}=\boldsymbol{\zeta}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})} = \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\zeta}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) - \mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\zeta}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})). \quad (1.12)$$

N.B. 2.1.3 Sulla funzione $\mathcal{H}$ non è difficile riconoscere la validità dei seguenti punti.

- la $\mathcal{H}$ ha Hessiano non singolare

$$\left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_h \partial p_k} \right) = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^h} \right)^{-1};$$

- sussistono, per ciascun $k = 1, \dots, n$, le identità

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) &\equiv \zeta^k(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}), \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^h}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) &\equiv - \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^h} \right|_{\dot{\mathbf{q}}=\boldsymbol{\zeta}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})}, \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) &\equiv - \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right|_{\dot{\mathbf{q}}=\boldsymbol{\zeta}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

- tramite queste ultime identità è possibile dare all'equazione (1.11) una forma più interessante. Essa infatti si trasforma nelle

Equazioni di Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{q}^k = + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ \dot{p}_k = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^k}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{cases} \quad k = 1, \dots, n; \quad (1.14)$$

- le posizioni di equilibrio per il sistema lagrangiano: $(q_e, \dot{q} = 0) \in \mathbb{M}$ con $\frac{\partial \Pi}{\partial q}(q_e) = 0$, si trasformano nelle particolari posizioni di equilibrio: $(q_e, p = 0)$ per quello Hamiltoniano.
- nel particolare caso in esame, e facendo uso della (1.12), la funzione Hamiltoniana è data da

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &:= \widetilde{\mathcal{T}}_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \Pi(\mathbf{q}), \quad \text{dove si è posto} \\ \widetilde{\mathcal{T}}_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &:= \frac{1}{2} (\mathbf{A}^{-1})^{hk} p_h p_k =: \frac{1}{2} \langle p, \mathcal{T}_2^{-1} p \rangle. \end{aligned}$$

◇

In definitiva, mediante la funzione Hamiltoniana e il diffeomorfismo φ , il sistema Lagrangiano assegnato si trasforma nell'equivalente sistema di $2n$ equazioni *del primo ordine* (1.14) che è generalmente del tipo (1.1) e con campo $v(q, p)$ definito sulla varietà $2n$ -dimensionale $\widetilde{\mathbb{M}}$ a partire dalla sua rappresentazione i componenti $\mathbf{v}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) := \left(+ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}; - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \in \mathbb{R}^{2n}$.

Nel caso particolare in esame, il sistema che si ottiene (in coordinate) è

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{p} \\ -\partial_q \left(\frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{p} + \Pi \right) \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

o anche (se $\mathbf{K} \neq \mathbf{I}$)

$$\begin{aligned} \dot{q}^k &= (\mathbf{A}^{-1})^{kj} p_j = (\mathbf{A}^{-1})_i^k \mathbf{K}^{ij} p_j = (\mathbf{A}^{-1})_i^k p^i \\ \dot{p}^i &= -\mathbf{K}^{ih} \frac{\partial}{\partial q^h} \left(\frac{1}{2} p^k \mathbf{K}_{kl} (\mathbf{A}^{-1})_m^l p^m + \Pi \right) \end{aligned}$$

Le equazioni variazionali delle equazioni di Hamilton (1.14), di centro la quiete in $\mathbf{u}_e := (\mathbf{q}_e, 0)$, sono le

$$\dot{\mathbf{u}} = \partial \mathbf{v}(\mathbf{u}_e) \mathbf{u} \quad \text{con} \quad \mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^{2n} \text{ arbitrario} \quad (1.16)$$

e con $\partial \mathbf{v}(\mathbf{q}_e, 0)$ che rappresenta in coordinate la derivata

$$v_*(q, p) = \left(\begin{array}{cc} +\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p \partial q} & +\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p \partial p} \\ -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q \partial q} & -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p \partial q} \end{array} \right) \bigg|_{(q_e, 0)}.$$

Questa, nel caso in esame, ha elementi dati da

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p} \partial \mathbf{q}} \bigg|_{(q_e, 0)} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{p}) \bigg|_{(q_e, 0)} = 0; \\ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p} \partial \mathbf{p}} \bigg|_{(q_e, 0)} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{p}) \bigg|_{(q_e, 0)} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{q}_e) =: \mathbf{A}_e^{-1} \boldsymbol{\kappa}^{-1} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}} \bigg|_{(q_e, 0)} &= \frac{\partial^2 (\mathcal{T}_2 + \Pi)}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}} \bigg|_{(q_e, 0)} = \frac{\partial^2 \Pi(\mathbf{q}_e)}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}} =: \boldsymbol{\kappa} \mathbf{B}_e, \end{aligned}$$

ed è opportuno osservare che allo stesso risultato si sarebbe giunti se, al posto dell'attuale Hamiltoniana, fosse stata considerata l'altra definita dalle funzioni "ridotte":

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}_2^{(e)}(\dot{\mathbf{q}}) := \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_h \mathbf{A}_k^h(\mathbf{q}_e) \dot{\mathbf{q}}^k =: \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \mathcal{T}_e \dot{\mathbf{q}} \rangle, \\ \Pi_2^{(e)}(\mathbf{q}) := \frac{1}{2} \mathbf{q}_h \mathbf{B}_k^h(\mathbf{q}_e) \mathbf{q}^k =: \frac{1}{2} \langle \mathbf{q}, \Pi_e \mathbf{q} \rangle, \end{array} \right. \quad (\boldsymbol{\kappa} \mathbf{A}_e) := \left(\frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}} \partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \bigg|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_e}$$

$$(\boldsymbol{\kappa} \mathbf{B}_e) := \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}} \right) \bigg|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_e}$$

In definitiva, per un sistema meccanico come quello del caso in esame la variazionale in $(\mathbf{q}_e, 0)$ del sistema Hamiltoniano è data da

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}_e^{-1} \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\boldsymbol{\kappa} \mathbf{B}_e \mathbf{q} \end{array} \right. \quad \text{o anche} \quad \left(\begin{array}{c} \dot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\kappa}^{-1} \dot{\mathbf{p}} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & \mathbf{A}_e^{-1} \\ -\mathbf{B}_e & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\kappa}^{-1} \mathbf{p} \end{array} \right)$$

nelle quali $\mathbf{A}_e^{-1}$ è definita positiva e $\mathbf{B}_e$ è simmetrica, e il cui determinante vale $\text{Det}(\mathbf{A}_e^{-1} \mathbf{B}_e)$. (L'ipotesi che il punto di equilibrio sia regolare consiste nell'assumere che, inoltre, $\text{Det} \mathbf{B} \neq 0$).

Posto $\left(\begin{array}{c} \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\kappa}^{-1} \mathbf{p} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \mathbf{q}_e \\ 0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \mathbf{r} \\ \mathbf{s} \end{array} \right)$ e cioè con $\mathbf{u}(t) = \left(\begin{array}{c} \mathbf{r}(t) \\ \mathbf{s}(t) \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{2n}$ la (1.16) fornisce

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{A}_e^{-1} \mathbf{s} \\ \dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{B}_e \mathbf{r} \end{array} \right. \quad (1.17)$$

ovvero l'equivalente

$$\mathbf{A}_e \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{B}_e \mathbf{r} = 0. \quad (1.18)$$

Nota 2.1.2 Lo stesso risultato si sarebbe potuto ricavare anche direttamente dalle equazioni di Lagrange, sempre nel caso $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$, e quindi con $(\mathbf{q}_e, 0)$ che annulla sia il campo dell'equazione di Lagrange che quello dell'equazione di Hamilton.

A questo scopo si consideri che le equazioni

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \partial_{\mathbf{q}} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right) = -\partial_{\mathbf{q}} \Pi(\mathbf{q})$$

divengono

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := -\partial_{\mathbf{q}} \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \partial_{\mathbf{q}} \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \partial_{\mathbf{q}} \Pi(\mathbf{q})$$

e cioè

$$f_i = -\frac{\partial \mathbf{A}_{ij}}{\partial q^h} \dot{q}^h \dot{q}^j + \frac{1}{2} \dot{q}^h \frac{\partial \mathbf{A}_{hk}}{\partial q^i} \dot{q}^k - \frac{\partial \Pi}{\partial q^i}.$$

Nell'ipotesi che $\mathbf{f}$ sia regolare in $G \subseteq \mathbb{R}^{2n}$, e cioè che sia valido lo sviluppo:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) + \partial_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) + \partial_{\mathbf{y}} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \partial_{xx}^2 \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \partial_{yy}^2 \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \\ &\quad + (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \partial_{xy}^2 \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) + o(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}), \quad \text{ove} \\ \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{y} \rightarrow \hat{\mathbf{y}}}} \frac{o(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})} &= 0, \quad \text{con} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) := (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^2 + (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^2, \end{aligned}$$

e con la posizione: $\mathbf{q}(t) =: \hat{\mathbf{q}}(t) + \varepsilon \mathbf{r}(t)$, nella quale $t \mapsto \hat{\mathbf{q}}(t) \in G$ è la soluzione di

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad \hat{\mathbf{q}}(0) = \hat{\mathbf{q}}_0, \quad \dot{\hat{\mathbf{q}}}(0) = \dot{\hat{\mathbf{q}}}_0,$$

si ottiene

$$\mathbf{A}(\hat{\mathbf{q}} + \varepsilon \mathbf{r})(\ddot{\hat{\mathbf{q}}} + \varepsilon \ddot{\mathbf{r}}) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{q}}, \dot{\hat{\mathbf{q}}}) + \varepsilon \partial_{\mathbf{q}} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{q}}, \dot{\hat{\mathbf{q}}}) \mathbf{r} + \varepsilon \partial_{\dot{\mathbf{q}}} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{q}}, \dot{\hat{\mathbf{q}}}) \dot{\mathbf{r}} + o(\varepsilon)$$

dalla quale si ricava la

$$\mathbf{A}(\hat{\mathbf{q}}) \ddot{\mathbf{r}} = +\partial_{\mathbf{q}} \mathbf{f} \mathbf{r} + \partial_{\dot{\mathbf{q}}} \mathbf{f} \dot{\mathbf{r}} - \mathbf{r} \partial_{\mathbf{q}} \mathbf{A}(\hat{\mathbf{q}}) \ddot{\hat{\mathbf{q}}} + O(\varepsilon).$$

Pertanto, se la soluzione di riferimento è una soluzione statica: $t \mapsto \hat{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{q}_e$, e quindi tale che $\ddot{\hat{\mathbf{q}}} = 0$ e $\partial_{\dot{\mathbf{q}}} \mathbf{f}(\mathbf{q}_e, 0) = 0$, si riottiene la variazionale

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}_e) \ddot{\mathbf{r}} = (\partial_{\mathbf{q}} \mathbf{f})_e \mathbf{r} \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{A}(\mathbf{q}_e) \ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial^2 \Pi(\mathbf{q}_e)}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}} \mathbf{r}.$$

Nel caso in cui l'energia cinetica abbia la sua forma generale

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \dot{q}_h \mathbf{A}_k^h(\mathbf{q}, t) \dot{q}^k + \dot{q}_h b^h(\mathbf{q}, t) + \mathcal{T}_0(\mathbf{q}, t),$$

e quindi l' i -ma equazione di Lagrange venga

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{A}^i(\mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + b^i(\mathbf{q}, t)) - \partial_{q_i} \mathcal{T} &= \mathbf{A}^i \ddot{\mathbf{q}} + \partial_{\mathbf{q}} \mathbf{A}^i \dot{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \partial_t \mathbf{A}^i \dot{\mathbf{q}} + \partial_{\mathbf{q}} b^i \dot{\mathbf{q}} + \partial_t b^i \\ &\quad - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \partial_{q_i} \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} - \partial_{q_i} b \dot{\mathbf{q}} - \partial_{q_i} (\mathcal{T}_0) = -\partial_{q_i} \Pi, \end{aligned}$$

la linearizzata intorno a una soluzione statica: $t \mapsto \hat{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{q}_e$ (non necessariamente di equilibrio) risulta

$$\mathbf{A}^i(\mathbf{q}_e) \ddot{\mathbf{r}} = (\partial_{q_i} \mathbf{b} - \partial_{\mathbf{q}} b^i - \partial_t \mathbf{A}^i) \dot{\mathbf{r}} + (\partial_{q_i \mathbf{q}}^2 (\mathcal{T}_0 - \Pi) - \partial_{t \mathbf{q}} b^i) \mathbf{r}$$

ovvero più esplicitamente

$$\mathbf{A}_k^i(\mathbf{q}_e) \ddot{r}^k = \left(\frac{\partial b_k}{\partial q_i} - \frac{\partial b^i}{\partial q^k} - \frac{\partial \mathbf{A}_k^i}{\partial t} \right) \dot{r}^k + \frac{\partial}{\partial q^k} \left(\frac{\partial (\mathcal{T}_0 - \Pi)}{\partial q_i} - \frac{\partial b^i}{\partial t} \right) r^k.$$

▷

È chiaro che le coordinate $\mathbf{r}$ non sono le migliori per risolvere il sistema $\mathbf{A}_e \ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{B}_e \mathbf{r}$. Infatti, in generale, la matrice $\mathbf{A}_e^{-1} \mathbf{B}_e$ non solo non è diagonale, ma nemmeno simmetrica, (ovvero corrispondente a un operatore $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -autoaggiunto). È quindi giustificata la ricerca di una trasformazione di coordinate $\boldsymbol{\varrho} := \mathbf{P}^{-1} \mathbf{r}$ che possa ridurre il sistema

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{A}_e^{-1} \mathbf{B}_e \mathbf{r} \tag{1.19}$$

in uno più semplice, e in particolare in un sistema disaccoppiato:

$$\ddot{\varrho}^j + \lambda_{(j)} \varrho^j = 0, \quad j = i, \dots, n. \tag{1.20}$$

Sostituendo direttamente $\mathbf{r} = \mathbf{P} \boldsymbol{\varrho}$ nella (1.18) si ricava la (1.20) purché esista $\mathbf{P}^{-1}$ tale che il prodotto $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}_e^{-1} \mathbf{B}_e \mathbf{P}$ dia luogo a una matrice diagonale.

N.B. 2.1.5 Lo stesso risultato si ottiene tenendo presente che sia il sistema di equazioni differenziali che la trasformazione di coordinate sono entrambi lineari (si veda: Appendice A.4 N.B.1.4.12). In effetti il sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{s}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ -\mathbf{A}_e^{-1} \mathbf{B}_e \mathbf{r} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}_e^{-1} \mathbf{B}_e & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}$$

può essere trasformato, preservandone la struttura di sistema del secondo ordine, mediante la

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\varrho} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{P}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix}$$

nell'equivalente sistema

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\varrho}} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{P}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}_e^{-1} \mathbf{B}_e & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P} & 0 \\ 0 & \mathbf{P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varrho} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{P}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{P} \\ -\mathbf{A}_e^{-1} \mathbf{B}_e \mathbf{P} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varrho} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}_e^{-1} \mathbf{B}_e \mathbf{P} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varrho} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

◊

Proposizione 2.1.1 L'operatore $\mathcal{T}_e^{-1} \pi_e$ individuato dalla $\{e\}$ -matrice $\mathbf{A}_e^{-1} \mathbf{B}_e$ è diagonalizzabile.

Esiste cioè (almeno) un operatore non singolare $\mathcal{P}$, avente $\mathcal{C}$ -matrice $\mathbf{P}$, tale che $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}_e^{-1} \mathbf{B}_e \mathbf{P} = \boldsymbol{\Lambda}$ con $\boldsymbol{\Lambda}$ una matrice diagonale.

Dimostrazione

Per semplicità di notazione, il prodotto $\langle \cdot, \cdot \rangle$ verrà supposto reale, e la base $\mathcal{C} := \{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ ortonormale rispetto a esso: $\langle e_i, e_j \rangle = \mathbf{K}^{ij} = \mathbf{K}_{ij} = \delta_{ij}$. In tal modo si può confondere la matrice $\mathbf{A}$ con la $\mathbf{A}$, e affermare che se $\mathcal{T}_2$ è simmetrico allora lo è anche la sua $\{e\}$ -matrice $\mathbf{A}$. (Il caso: $\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K}^T \neq \mathbf{I}$, d'altra parte, è poco dissimile dato che la simmetria di $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q} \partial \dot{q}}$ e di $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q \partial q}$ implica l'autoaggiunzione sia di $\mathcal{T}_e$ che di π_e (entrambi reali).

(•) Esiste $\mathbf{A}_e^{-1/2}$, simmetrica reale definita positiva dato che tale è $\mathbf{A}_e$.

(•) L'equazione

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}_e^{-1} \mathbf{B}_e \mathbf{P} \equiv \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}_e^{-1/2} (\mathbf{A}_e^{-1/2} \mathbf{B}_e \mathbf{A}_e^{-1/2}) \mathbf{A}_e^{1/2} \mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$$

ammette soluzione rispetto all'incognita $\mathbf{P}$. Infatti la matrice $\mathbf{A}_e^{-1/2} \mathbf{B}_e \mathbf{A}_e^{-1/2}$ è simmetrica e, come tale, corrisponde a un operatore autoaggiunto e quindi normale. È noto allora che esiste almeno un sistema ortonormale di suoi autovettori abbastanza ricco da formare una base per lo spazio $\mathbb{R}^n$. Ciò implica l'esistenza di un operatore $\hat{\mathbf{P}}$, avente $\mathcal{C}$ -matrice $\hat{\mathbf{P}} =: \mathbf{A}_e^{1/2} \mathbf{P}$, reale, ortogonale (o, se occorre, $\mathbf{K}$ -ortogonale) e tale che

$$\hat{\mathbf{P}}^{-1} \mathbf{A}_e^{-1/2} \mathbf{B}_e \mathbf{A}_e^{-1/2} \hat{\mathbf{P}} = \mathbf{\Lambda}, \quad \text{con } \mathbf{\Lambda} \text{ diagonale.}$$

(•) L'operatore $\mathcal{P} := \mathcal{T}_e^{-1/2} \circ \hat{\mathbf{P}}$ individuato dalla $\mathcal{C}$ -matrice $\mathbf{P} = \mathbf{A}_e^{-1/2} \hat{\mathbf{P}}$, generalmente *né autoaggiunto né ortogonale*, è tuttavia invertibile e come tale definisce un cambio di base $\{\epsilon_i = \mathcal{P}e_i\}_{i=1, \dots, n}$ che rende diagonali *non già le nuove matrici* α_e, β_e degli operatori $\mathcal{T}_e$ e π_e le cui $\mathcal{C}$ -matrici sono $\mathbf{A}_e$ e $\mathbf{B}_e$ rispettivamente, *bensì il prodotto* $\alpha_e^{-1} \beta_e$ e cioè la nuova matrice dell'operatore $\mathcal{T}_e^{-1} \pi_e$. Infatti si ha, per costruzione,

$$\alpha_e^{-1} \beta_e = (\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}_e \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}_e \mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}_e^{-1} \mathbf{B}_e \mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}.$$

(•) L'ortogonalità della matrice $\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{A}_e^{1/2} \mathbf{P}$ e la simmetria di $\mathbf{A}_e^{1/2}$ permettono di ricavare l'espressione

$$\mathbf{P}^T \mathbf{A}_e^{1/2} = \hat{\mathbf{P}}^T = \hat{\mathbf{P}}^{-1} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}_e^{-1/2} \quad \text{e quindi} \quad \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T \mathbf{A}_e.$$

Ne segue la $\mathbf{P}^T \mathbf{A}_e \mathbf{P} = \mathbf{I}$ o anche $\mathcal{T}_e = \mathcal{P}^{-*} \mathcal{P}^{-1}$. Ciò implica il fatto che *i versori della nuova base* $\{\epsilon_i := \mathcal{P}e_i\}_{i=1, \dots, n}$, le cui $\mathcal{C}$ -componenti sono ordinatamente uguali alle colonne della matrice $\mathbf{P}$, *sono* ($\mathbf{K}$ -) *ortonormali rispetto al prodotto scalare definito dall'energia cinetica* $\mathcal{T} \equiv \mathcal{T}_2^{(e)}$. Valgono cioè le

$$(\mathbf{P}^T \mathbf{A}_e \mathbf{P})_{ij} = \delta_{ij} \equiv \mathbf{K}_{ij} = \langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle_{\mathcal{T}_e} := \langle \epsilon_i, \mathcal{T}_e \epsilon_j \rangle = \mathcal{T}_2^{(e)}(\epsilon_i, \epsilon_j)$$

giacché la $\mathcal{T}_e = \mathcal{P}^{-*} \mathcal{P}^{-1}$ implica

$$\langle \epsilon_i, \mathcal{T}_e \epsilon_j \rangle = \langle \epsilon_i, \mathcal{P}^{-*} \mathcal{P}^{-1} \epsilon_j \rangle = \langle \mathcal{P}^{-1} \epsilon_i, \mathcal{P}^{-1} \epsilon_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle.$$

Si nota in particolare che l'operatore $\mathcal{P}$, rappresentato in base $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ dalla matrice $\mathbf{P}$, non è né $\mathbf{I}$ -ortogonale, né $\mathcal{T}_e$ -ortogonale, perché trasforma la base $\mathbf{I}$ -ortonormale: $\mathcal{C}$ in quella $\mathcal{T}_e$ -ortonormale: $\mathcal{E} := \{\epsilon_j\}_{j=1, \dots, n}$.

(•) Allo stesso modo si riconosce che *il cambio di base rende simultaneamente diagonali i prodotti*

$$\mathbf{I} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \mathbf{A}_e \mathbf{P} \equiv \mathbf{P}^T \mathbf{P} \alpha_e \quad \text{e} \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}^T \mathbf{B}_e \mathbf{P} \equiv \mathbf{P}^T \mathbf{P} \beta_e,$$

e quindi entrambe le forme quadratiche $\mathcal{T}_2^{(e)}(\dot{q}, \dot{q})$ e $\Pi_2^{(e)}(q, q)$. Infatti, esprimendo le due forme nelle nuove coordinate: $\xi := \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}$, si ha:

$$\begin{aligned} \langle x, \mathcal{T}_e y \rangle &= \mathbf{x}^T \mathbf{A}_e \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{P}^{-T} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{y} = \xi^T \boldsymbol{\eta} \equiv 2\mathcal{T}_2^{(e)}(x, y) \\ \langle x, \pi_e y \rangle &= \mathbf{x}^T \mathbf{B}_e \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{P}^{-T} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{y} = \xi^T \mathbf{\Lambda} \boldsymbol{\eta} \equiv 2\Pi_2^{(e)}(x, y), \end{aligned}$$

(•) Indicando con $\{\lambda_h\}_{h=1, \dots, n}$ gli autovalori dell'operatore $\mathcal{T}_e^{-1} \pi_e$, si ha che $\mathbf{\Lambda}_h^i = \delta_h^i \lambda_{(h)}$, e si osservi che essi sono generalmente diversi da quelli sia di $\mathcal{T}_e$ sia di π_e . Tali autovalori $\{\lambda_h\}_{h=1, \dots, n}$ possono essere determinati come radici dell'equazione secolare:

$$\text{Det} (\mathbf{B}_e - \lambda \mathbf{A}_e) = 0,$$

e siccome coincidono con gli autovalori dell'operatore $\mathcal{T}_e^{-1/2} \pi_e \mathcal{T}_e^{-1/2}$, che è simmetrico, sono sicuramente reali.

(•) La nuova base $\{\epsilon_i = \mathcal{P}e_i\}_{i=1,\dots,n}$ è composta da autovettori dell'operatore $\mathcal{T}_e^{-1}\pi_e$ in quanto la $\mathbf{A}_e^{-1}\mathbf{B}_e$ viene diagonalizzata dalla trasformazione $\mathcal{P}$. D'altra parte si può controllare anche direttamente, per esempio lungo e_j , che:

$$(\mathbf{A}_e^{-1}\mathbf{B}_e\epsilon_i)^j = \mathbf{A}_e^{-1j}{}_h \mathbf{B}_k^h \mathbf{P}_i^k = \mathbf{P}_m^j \mathbf{A}_i^m = \lambda_{(i)} \mathbf{P}_i^j = (\lambda_{(i)}\epsilon_i)^j.$$

Essa pertanto è anche tale che $\mathbf{B}_e\epsilon = \lambda\mathbf{A}_e\epsilon$. Si osservi che la base $\mathbb{I}$ -ortonormale fatta con gli autovettori di $\mathcal{T}_e$ di regola *non coincide* né con la base degli autovettori di $\mathcal{T}_e^{-1/2}\pi_e\mathcal{T}_e^{-1/2}$ (che dipende da π_e), né con la nuova base $\{\epsilon_i = \mathcal{P}e_i\}_{i=1,\dots,n}$ che generalmente non è nemmeno $\mathbb{I}$ -ortonormale. Queste ultime due sono a loro volta correlate dal fatto che la prima è $\mathbf{A}^{1/2}$ volte la seconda. D'altra parte, dalla $\mathbf{B}_e\epsilon = \lambda\mathbf{A}_e\epsilon$ segue che se gli ϵ_i fossero autovettori di $\mathcal{T}_e$ dovrebbero esserlo anche di π_e che è invece del tutto indipendente dalla $\mathcal{T}_e$. ■

Siccome la (1.20) è disaccoppiata, si vede facilmente che lungo ciascun autovettore ϵ_j la j -ma componente della soluzione $\varrho = \varrho(t)$, e cioè la $t \mapsto \varrho^j(t)$ ha la forma

$$\begin{aligned} c_1 \exp \sqrt{|\lambda_j|} t + c_2 \exp -\sqrt{|\lambda_j|} t & \quad \text{oppure la forma} \\ c_3 \cos \sqrt{\lambda_j} t + c_4 \sin \sqrt{\lambda_j} t \end{aligned}$$

a seconda che λ sia *negativo oppure positivo*. Infatti, se fosse nullo si avrebbe $\text{Rank } \partial \mathbf{v}(\mathbf{q}_e, 0) < n$ contrariamente all'ipotesi che $(q_e, 0)$ sia di equilibrio regolare, e cioè che $\text{Det } \mathbf{B}_e \neq 0$ il che implica $\text{Det } \partial \mathbf{v}(\mathbf{q}_e, 0) = \text{Det } (\mathbf{A}_e^{-1}\mathbf{B}_e) \neq 0$.

Infine, il teorema degli assi principali (ovvero: la $\mathcal{T}_e$ -autoaggiunzione dell'operatore $\mathcal{T}_e^{-1}\pi_e$) assicura che gli $\{\epsilon_j\}_{j=1,\dots,n}$ sono in numero sufficiente a formare una base, con ciò escludendo la possibilità, anche nel caso in cui un qualche autovalore λ_j avesse molteplicità maggiore di uno, di soluzioni del tipo: $t \mapsto p(t) \exp \sqrt{|\lambda_j|} t$ oppure $t \mapsto p(t) \cos \sqrt{\lambda_j} t$ con $p(t)$ un polinomio in t .

Nota 2.1.3 Si osservi che pur non essendo autovalori di $\mathbf{B}_e$ le λ ne hanno la stessa segnatura. Ciò permette di affermare che *se la forma $\mathbf{x}^T \mathbf{B}_e \mathbf{y}$ è definita positiva, e quindi il punto $(q_e, 0)$ è di minimo per l'energia potenziale $\Pi(q)$, allora le λ_i sono tutte positive,* dando così luogo a soluzioni oscillanti intorno all'origine. Si parla in tal caso di piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio, descritte dalle coordinate normali: ϱ_i , con pulsazioni proprie $\sqrt{\lambda_i}$.

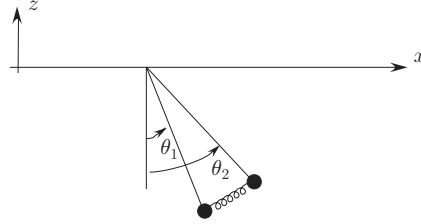
Si noti però che non è stato dimostrato che il comportamento delle $t \mapsto \varrho(t)$, e quindi delle $t \mapsto \mathbf{r}(t) = \mathbf{P}\varrho(t)$ oscillanti intorno all'origine “bene approssima” il comportamento delle $t \mapsto \mathbf{q}(t)$. Ciò si può fare solo parzialmente e usando il “Secondo metodo di Liapunov” (si veda: Cap.IV) nella misura in cui si mostra che sotto le ipotesi fatte, e in particolare quella sulla conservatività del sistema, le $q = q(t)$ rimangono indefinitamente limitate in un intorno dell'equilibrio e senza contrarre i volumi nello spazio delle fasi, anzi con traiettorie che appartengono alle superfici $\mathcal{H} = \text{cost}$. Ad esempio non si riesce a dire nulla di definitivo sui periodi “veri” delle oscillazioni, i quali restano dipendenti dai termini superiori dello sviluppo in serie del campo; né si può dire molto nel caso, generale, non conservativo. ▷

Riassumendo: per trovare i modi normali si devono determinare:

- (i) gli autovalori di $\mathbf{A}_e^{-1}\mathbf{B}_e$, soluzioni dell'equazione $\text{Det } (\mathbf{B}_e - \lambda\mathbf{A}_e) = 0$;
- (ii) gli autovettori di $\mathbf{A}_e^{-1}\mathbf{B}_e$, soluzioni dell'equazione $\mathbf{B}_e \mathbf{x} = \lambda_i \mathbf{A}_e \mathbf{x}$;
- (iii) la loro normalizzazione: $\langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle_{\mathcal{T}_e} \equiv \epsilon_i^T \mathbf{A}_e \epsilon_j = (\mathbf{P}_i^k)^T \mathbf{A}_{eh}^k \mathbf{P}_j^h = \delta_{ij}$;
- (iv) la loro matrice $\mathbf{P} := \begin{pmatrix} \cdots & \vdots & \epsilon_i & \vdots & \cdots \end{pmatrix}$;
- (v) i modi normali ϱ^i , legati alle coordinate r^j dalle: $\mathbf{r} = \mathbf{P}\varrho$, e le $t \mapsto \mathbf{r}(t)$, a loro volta definite (localmente) dalla $\mathbf{q} = \mathbf{q}_e + \mathbf{r}$.

Esempio 2.1.7 (si veda: [Arnold II])

Si considerino due pendoli fisici di uguale lunghezza l e stesso punto di sospensione, vincolati senza attrito a oscillare su un piano verticale x, z , (z verticale ascendente), e accoppiati da una sollecitazione elastica $(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_1}, \vec{f}_{12} = k \overrightarrow{P_1P_2}, \vec{f}_{21} = -\vec{f}_{12})$, e quindi $\mathcal{V} \equiv \Pi^{el} = k|\overrightarrow{P_1P_2}|^2/2$.



Date le

$$\overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} l \sin \theta_2 \\ 0 \\ -l \cos \theta_2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} l \sin \theta_1 \\ 0 \\ -l \cos \theta_1 \end{pmatrix}$$

si riconoscono nelle θ delle convenienti variabili lagrangiane $\mathbf{q} := (\theta_1, \theta_2)$. Di conseguenza, le energie cinetica e potenziale del sistema risultano espresse da:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2) = \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\theta}_2^2 \\ \Pi &= c + m_1 g z_1 + m_2 g z_2 + \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k (z_2 - z_1)^2 \\ &= -g(m_1 l \cos \theta_1 + m_2 l \cos \theta_2) - kl^2 \cos(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned}$$

Se ne traggono le

$$\begin{pmatrix} \partial \Pi / \partial \theta_1 \\ \partial \Pi / \partial \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} gm_1 l \sin \theta_1 + kl^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ gm_2 l \sin \theta_2 - kl^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{pmatrix},$$

e quindi le equazioni di Lagrange

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \theta_1} = m_1 l \ddot{\theta}_1 = -gm_1 l \sin \theta_1 - kl^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \theta_2} = m_2 l \ddot{\theta}_2 = -gm_2 l \sin \theta_2 + kl^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{cases}$$

Si riconosce innanzi tutto che la posizione $\mathbf{c}_e := (\theta_1 = 0, \theta_2 = 0)$ è di equilibrio per il sistema. Poi, essendo la matrice $\mathbf{B} = (\partial^2 \Pi / \partial \theta_i \partial \theta_j)$ data da:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} gm_1 l \cos \theta_1 + kl^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & -kl^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ -kl^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & gm_2 l \cos \theta_2 + kl^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{pmatrix}$$

si vede che la posizione è anche di equilibrio stabile, giacché la matrice: $\mathbf{B}_e = \begin{pmatrix} gm_1 l + kl^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & gm_2 l + kl^2 \end{pmatrix}$ è definita positiva. Infine si ricavano le forme ridotte dell'energia cinetica e potenziale ancora nell'intorno della posizione $\theta_1 = \theta_2 = 0$:

$$\begin{aligned} \Pi_2^{(e)} &:= \frac{1}{2} (gm_1 l \theta_1^2 + gm_2 l \theta_2^2 + kl^2 (\theta_1 - \theta_2)^2) \\ \mathcal{T}_2^{(e)} &:= \frac{1}{2} (m_1 l^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l^2 \dot{\theta}_2^2). \end{aligned}$$

In definitiva, e ponendo per semplicità $m_1 = m_2 = l = g = 1$, si ha

$$\mathbf{B}_e = \begin{pmatrix} 1+k & -k \\ -k & 1+k \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad \mathbf{A}_e = \mathbf{I}.$$

Ne segue l'equazione delle pulsazioni proprie:

$$\text{Det}(\mathbf{B}_e - \lambda \mathbf{A}_e) = (1+k-\lambda)^2 - k^2 = \lambda^2 - 2(1+k)\lambda + (1+2k) = 0$$

che fornisce $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1+2k$; e quindi le equazioni per determinare gli autospazi $\text{span}\{\epsilon_i\}$ divengono rispettivamente

$$(1+k)\alpha_1 - k\beta_1 = \alpha_1, \quad \text{e} \quad (1+k)\alpha_2 - k\beta_2 = (1+2k)\alpha_2$$

da cui: $\tilde{\epsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ed $\tilde{\epsilon}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Affinché la matrice $\mathbf{A}^{1/2}\mathbf{P}$ sia ortogonale, questi vettori vanno normalizzati secondo la $\langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle_{\mathcal{T}_e} = \delta_{ij}$ e cioè in questo caso, dato che qui la $\mathbf{A}$ è diagonale, moltiplicati per $1/\sqrt{2}$. Di conseguenza la matrice di trasformazione è $\mathbf{P} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ che, di nuovo giacché in questo semplice esempio la matrice $\mathbf{A}_e$ vale $\mathbf{I}$, risulta qui anche ortogonale.

Le coordinate normali ϱ sono quelle per le quali

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_1^e \\ q_2^e \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} \varrho_1 \\ \varrho_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \varrho_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \varrho_2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

ed evolvono secondo le

$$\begin{cases} \ddot{\varrho}_1 + \varrho_1 = 0 \\ \ddot{\varrho}_2 + (1+2k)\varrho_2 = 0 \end{cases}$$

Si possono per esempio distinguere i seguenti casi:

- (i) condizioni iniziali tali che $\varrho_2(t) = 0$, ovvero $\varrho_2(0) = \dot{\varrho}_2(0) = 0$.

Si ha $\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \varrho_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e cioè i pendoli oscillano, in fase, con pulsazione $\omega_1 = 1$, e la forza elastica non lavora;

- (ii) condizioni iniziali tali che $\varrho_1(t) = 0$, ovvero $\varrho_1(0) = \dot{\varrho}_1(0) = 0$.

Si ha $\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \varrho_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e cioè i pendoli oscillano, in opposizione di fase, con pulsazione $\omega_2 = \sqrt{1+2k}$;

- (iii) condizioni iniziali $\begin{pmatrix} \theta_1(0) \\ \theta_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(0) \\ \dot{\theta}_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$, che la

$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ trasforma nelle: $\begin{pmatrix} \varrho_1(0) \\ \varrho_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \dot{\varrho}_1(0) \\ \dot{\varrho}_2(0) \end{pmatrix} = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Se ne ricava:

$$\begin{pmatrix} \varrho_1(t) \\ \varrho_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{2}} \sin t \\ \frac{v}{\sqrt{2(1+2k)}} \sin(\sqrt{1+2k}t) \end{pmatrix}.$$

Con l'ipotesi $k \ll 1$, e la ben nota approssimazione: $\sqrt{1+2k} \simeq (1+k)$, questa fornisce $\varrho_2(t) \simeq \frac{v}{\sqrt{2}} \sin(1+k)t$, e formule le $\sin p \pm \sin q = 2 \sin \frac{p \pm q}{2} \cos \frac{p \mp q}{2}$ danno

$$\begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix} = \frac{v}{2} \begin{pmatrix} \sin t + \sin(1+k)t \\ \sin t - \sin(1+k)t \end{pmatrix} \simeq v \begin{pmatrix} \sin t \cos \frac{1}{2}kt \\ -\cos t = \sin \frac{1}{2}kt \end{pmatrix}$$

e cioè il primo pendolo oscilla con pulsazione $\omega_1 \simeq 1$ e ampiezza $a_1 \simeq v \cos \frac{1}{2}kt$, mentre il secondo ha un moto analogo, sfasato di π , e con ampiezza sfasata di un tempo (lungo): $\tau/4 = \pi/k$.

Si rammenti che le soluzioni trovate sono relative al sistema lineare e non sono conclusive per quello non lineare, in special modo per quanto riguarda i periodi di oscillazione; questi, come si è visto, rappresentano solo il primo termine di uno sviluppo perturbativo i cui termini successivi hanno valori che dipendono dalla scelta dei dati iniziali. $\square$

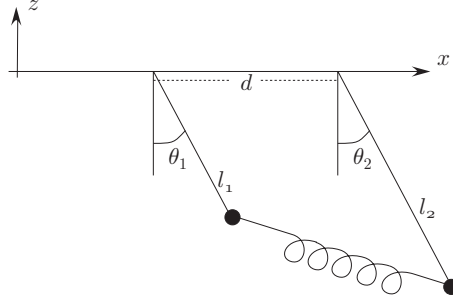
L'esempio precedente è ottenuto come semplificazione, parzialmente esasperata, del seguente e più corretto, caso fisico.

Esempio 2.1.8

Si considerino due pendoli fisici di lunghezze l_1 ed l_2 rispettivamente, con punti di sospensione posti su una retta x orizzontale a distanza d l'uno dall'altro, vincolati senza attrito a oscillare sul piano verticale x, z (con z verticale ascendente), e accoppiati da una sollecitazione elastica

$$\left(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_1}, \vec{f}_{12} = k \left(|\overrightarrow{P_1P_2}| - \ell \right) \text{ vers } \overrightarrow{P_1P_2}, \quad \vec{f}_{21} = -\vec{f}_{12} \right),$$

tale che $\ell = \sqrt{d^2 + (l_2 - l_1)^2}$ sia la lunghezza di riposo della molla. Ne consegue la $\mathcal{V} \equiv \Pi^{el} = k \left(|\overrightarrow{P_1P_2}| - \ell \right)^2 / 2$, per la quale è, correttamente, $\nabla_{\overrightarrow{OP}} \Pi^{el} = k \left(|\overrightarrow{P_1P_2}| - \ell \right) \nabla_{\overrightarrow{OP}} |\overrightarrow{P_1P_2}|$.



Date le

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{q}} |\overrightarrow{P_1P_2}| &= \frac{2|\overrightarrow{P_1P_2}| \nabla_{\mathbf{q}} |\overrightarrow{P_1P_2}|}{2|\overrightarrow{P_1P_2}|} = \frac{\nabla_{\mathbf{q}} \left(\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{P_1P_2} \right)}{2|\overrightarrow{P_1P_2}|} = \frac{\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \nabla_{\mathbf{q}} \overrightarrow{P_1P_2}}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} \\ &= \begin{pmatrix} \text{vers } \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \partial \overrightarrow{P_1P_2} / \partial \theta_1 \\ \text{vers } \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \partial \overrightarrow{P_1P_2} / \partial \theta_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.21)$$

e le

$$\overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} l_2 \sin \theta_2 + d \\ 0 \\ -l_2 \cos \theta_2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} l_1 \sin \theta_1 \\ 0 \\ -l_1 \cos \theta_1 \end{pmatrix}$$

si riconoscono nelle $\boldsymbol{\theta}$ delle convenienti variabili lagrangiane $\mathbf{q} := (\theta_1, \theta_2)$ per le quali si hanno le

$$\frac{\partial \overrightarrow{P_1P_2}}{\partial \theta_2} = \frac{\partial \overrightarrow{OP_2}}{\partial \theta_2} = l_2 \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \\ 0 \\ \sin \theta_2 \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial \overrightarrow{P_1P_2}}{\partial \theta_1} = -\frac{\partial \overrightarrow{OP_1}}{\partial \theta_1} = -l_1 \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ 0 \\ \sin \theta_1 \end{pmatrix}.$$

Queste e la (1.21) forniscono la

$$\nabla_{\mathbf{q}} |\overrightarrow{P_1P_2}| = \begin{pmatrix} \partial |\overrightarrow{P_1P_2}| / \partial \theta_1 \\ \partial |\overrightarrow{P_1P_2}| / \partial \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (+l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - dl_1 \cos \theta_1) / |\overrightarrow{P_1P_2}| \\ (-l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + dl_2 \cos \theta_2) / |\overrightarrow{P_1P_2}| \end{pmatrix}$$

e quindi, in particolare, le

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^{el}}{\partial \theta_1} &= k \left(1 - \ell / |\overrightarrow{P_1P_2}| \right) \left(l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - dl_1 \cos \theta_1 \right) \\ \frac{\partial \Pi^{el}}{\partial \theta_2} &= k \left(1 - \ell / |\overrightarrow{P_1P_2}| \right) \left(l_1 l_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + dl_2 \cos \theta_2 \right). \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{pmatrix} \partial \Pi / \partial \theta_1 \\ \partial \Pi / \partial \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} gm_1 l_1 \sin \theta_1 + k \left(1 - \ell / |\overrightarrow{P_1P_2}| \right) \left(l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - dl_1 \cos \theta_1 \right) \\ gm_2 l_2 \sin \theta_2 + k \left(1 - \ell / |\overrightarrow{P_1P_2}| \right) \left(l_1 l_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + dl_2 \cos \theta_2 \right) \end{pmatrix}$$

da cui insieme con la

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2) = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2,$$

seguono le corrispondenti equazioni di Lagrange:

$$\begin{cases} m_1 l \ddot{\theta}_1 + gm_1 l_1 \sin \theta_1 + k \left(1 - \ell / |\overrightarrow{P_1P_2}| \right) \left(l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - dl_1 \cos \theta_1 \right) = 0, \\ m_2 l \ddot{\theta}_2 + gm_2 l_2 \sin \theta_2 + k \left(1 - \ell / |\overrightarrow{P_1P_2}| \right) \left(l_1 l_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + dl_2 \cos \theta_2 \right) = 0. \end{cases}$$

□

Esempio 2.1.9 Il seguente calcolo mostra come il normalizzare a 1 i prodotti $\epsilon_h \cdot \mathbf{A}_e \epsilon_h$ non sia rilevante ai fini della scrittura delle soluzioni del problema linearizzato, quando queste si esprimano tramite le loro condizioni iniziali.

Sia $\mathbf{A}_1$ la matrice reale data da $\mathbf{A}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$. Risulta

$$\mathbf{P}_{1\sim}^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{P}_{1\sim} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbf{P}_{1\sim} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix}; \quad \mathbf{P}_{1\sim}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/\omega \end{pmatrix}.$$

D'altra parte, come è noto, l'equazione

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad \text{implica} \quad \begin{pmatrix} \tilde{\xi}(t) \\ \tilde{\eta}(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_0 \\ \tilde{\eta}_0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto la soluzione $\boldsymbol{\rho}(t) \equiv (\rho_1(t), \dots, \rho_n(t))$ del sistema disaccoppiato di equazioni

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\rho} = 0 \quad \text{con} \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_n \end{pmatrix}$$

può essere scritta nella forma

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho} \\ \dot{\boldsymbol{\rho}} \end{pmatrix} = \mathbf{P}_{\sim} \begin{pmatrix} \mathbf{C} & -\mathbf{S} \\ \mathbf{S} & \mathbf{C} \end{pmatrix} \mathbf{P}_{\sim}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho}_0 \\ \dot{\boldsymbol{\rho}}_0 \end{pmatrix} =: \mathbf{E} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho}_0 \\ \dot{\boldsymbol{\rho}}_0 \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

ove si sono introdotte le matrici diagonali

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &:= \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \cos \omega_n t \end{pmatrix}, & \mathbf{S} &:= \begin{pmatrix} \sin \omega_1 t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sin \omega_n t \end{pmatrix} \\ \mathbf{P}_{\sim} &= \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\Omega} \end{pmatrix}, & \mathbf{P}_{\sim}^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\Omega}^{-1} \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{\Omega}^{-1} &:= \begin{pmatrix} 1/\omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\omega_n \end{pmatrix}, & \mathbb{I}_n &:= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In altre parole:

$$\text{ciascuna} \quad \ddot{\rho}_i + \omega_i^2 \rho_i = 0 \quad \text{ha soluzione} \quad \rho_i(t) = \rho_i|_0 \cos \omega_i t + \frac{\dot{\rho}_i|_0}{\omega_i} \sin \omega_i t$$

e ciò è quanto si legge dalla (1.22) ove si svolga il prodotto $\mathbf{E}$ servendosi del fatto che il prodotto di matrici entrambe diagonali è commutativo. Si ha:

$$\mathbf{E} = \mathbf{P}_{\sim} \begin{pmatrix} \mathbf{C} & -\mathbf{S} \\ \mathbf{S} & \mathbf{C} \end{pmatrix} \mathbf{P}_{\sim}^{-1} = \mathbf{P}_{\sim} \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{S} \boldsymbol{\Omega}^{-1} \\ \mathbf{S} & -\mathbf{C} \boldsymbol{\Omega}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{S} \boldsymbol{\Omega}^{-1} \\ -\boldsymbol{\Omega} \mathbf{S} & \mathbf{C} \end{pmatrix}.$$

□

Esprimendo con tale notazione le coordinate $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n)$ di un sistema del quale si cercano i modi normali $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_n)$, e cioè chiamando $\mathbf{P}$ la matrice che ha come colonne gli $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ soluzioni della equazione $\mathbf{B}_e \epsilon = \lambda \mathbf{A}_e \epsilon$, si ricava quindi la

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & 0 \\ 0 & \mathbf{P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho} \\ \dot{\boldsymbol{\rho}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & 0 \\ 0 & \mathbf{P} \end{pmatrix} \mathbf{E} \begin{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{P}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}_0 \end{pmatrix} =: \boldsymbol{\Xi} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}_0 \end{pmatrix}$$

nella quale si è introdotta la matrice $\boldsymbol{\Xi}$ data esplicitamente dalla

$$\boldsymbol{\Xi} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & 0 \\ 0 & \mathbf{P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{S} \boldsymbol{\Omega}^{-1} \\ -\boldsymbol{\Omega} \mathbf{S} & \mathbf{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{P}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} \mathbf{C} \mathbf{P}^{-1} & \mathbf{P} \mathbf{S} \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{P}^{-1} \\ -\mathbf{P} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{S} \mathbf{P}^{-1} & \mathbf{P} \mathbf{C} \mathbf{P}^{-1} \end{pmatrix}$$

per ottenere la quale si è usato il fatto che le Ω , C , e Ω^{-1} commutano fra loro.

Se allora, invece di una certa n -pla $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ di autovettori dell'equazione $B_e \epsilon = \lambda A_e \epsilon$ se ne usa un'altra: $(\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_n)$, ancora di autovettori della stessa equazione, ciascuno dei quali proporzionale al suo corrispondente: $\epsilon'_i \propto \epsilon_i$, $i = 1, \dots, n$, si ricava da questi la matrice P' data dalla

$$P' = \begin{pmatrix} k_1 \epsilon_1 & \vdots & \vdots & k_n \epsilon_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \vdots & \vdots & \epsilon_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_n \end{pmatrix} =: PK.$$

Ripetendo lo stesso procedimento seguito nel caso precedente, si arriva in tal modo alla matrice

$$\Xi' = \begin{pmatrix} PKCK^{-1}P^{-1} & PKS\Omega^{-1}K^{-1}P^{-1} \\ -PK\Omega SK^{-1}P^{-1} & PK\Omega C\Omega^{-1}K^{-1}P^{-1} \end{pmatrix}.$$

Tuttavia, il fatto che tutte le matrici K , Ω , C , S , Ω^{-1} , K^{-1} siano diagonali permette di concludere che Ξ' coincide con Ξ . Le $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n)$ non dipendono quindi dalle costanti $(k_1, \dots, k_n)$, e sono date dalla

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PCP^{-1} & PS\Omega^{-1}P^{-1} \\ -P\Omega SP^{-1} & PCP^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}_0 \end{pmatrix}$$

o, più semplicemente, dalla

$$\mathbf{x} = PCP^{-1}\mathbf{x}_0 + PS\Omega^{-1}P^{-1}\dot{\mathbf{x}}_0 = P \left(C\rho_0 + S\Omega^{-1}\dot{\rho}_0 \right)$$

nella quale le colonne della matrice P non sono necessariamente normalizzate a uno secondo la A_e , pur restando necessariamente A_e -ortogonali fra loro. In altre parole la matrice P è (una qualsiasi matrice) fatta da n vettori $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ linearmente indipendenti e tali da verificare le

$$B_e \epsilon_i = \lambda_{(i)} A_e \epsilon_i \quad \text{per } i = 1, \dots, n, \quad \text{ed} \quad \epsilon_k \cdot A_e \epsilon_h = 0 \quad \text{se } k \neq h.$$

La teoria assicura che essi esistono e che le seconde di queste relazioni sono conseguenza delle prime quando i corrispondenti autovalori λ_h e λ_k sono diversi fra loro.

Esempio di linearizzazione di un sistema, non necessariamente Hamiltoniano.

Si è già introdotta (si veda: § I.4 Es. 5) l'equazione logistica per una specie, e cioè la $\dot{p} = \beta(\sigma - \sigma_0)p$ ove σ_0 è la minima quantità di cibo per individuo. Con le ipotesi: $\sigma = \tilde{\sigma} - kp$, $\tilde{\sigma} > \sigma_0$, e posto $\eta := (\tilde{\sigma} - \sigma_0)/k$, $c := \beta k$, si è ottenuto il modello per una specie singola:

$$\dot{p} = c(\eta - p)p, \quad t \in \mathbb{R}, \quad p_0 \in \mathbb{R}^+.$$

Se si vuole estendere il modello e considerare la presenza di due specie di cui una rappresenti il cibo per l'altra e che abbia essa stessa scorte più che sufficienti di cibo, la preda x avrà mortalità proporzionale al numero di incontri con il predatore y , e quindi l'equazione

$$\dot{x} = ax - bxy, \quad a, b > 0,$$

mentre il predatore avrà riserva di cibo proporzionale alla popolazione delle prede, sua unica fonte di sussistenza:

$$\dot{y} = cxy - dy, \quad c, d > 0.$$

Si ha cioè il campo

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} ax - bxy \\ cxy - dy \end{pmatrix},$$

del quale la linearizzata è

$$\dot{\mathbf{u}} = \partial \mathbf{v}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad \text{ovvero} \quad \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ cy & cx - d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

Il campo si annulla in $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ e in $\mathbf{x}_e = (x_e, y_e) := (d/c, /a b)$.

Nell'intorno del primo equilibrio si ricava

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

del quale è soluzione la $t \mapsto (x(t), y(t)) = (e^{at}x_0, e^{-dt}y_0)$ che mostra come, in prossimità di un disastro ecologico, le prede siano insufficienti a sostenere i predatori: anche se x cresce, localmente y decresce.

Nell'intorno del secondo equilibrio si ricava

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -bd/c \\ ac/b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

che rappresenta, come si è accennato nella Nota 2.1.3 più sopra, un caso in cui il sistema linearizzato *non dà* sufficienti informazioni, per tempi grandi, sulle soluzioni del sistema iniziale. Per quanto possibile sarà allora opportuno affrontarne lo studio tramite metodi qualitativi simili a quelli già visti per i sistemi conservativi. $\square$

2.2 Sistemi differenziali lineari a coefficienti costanti, in $\mathbb{R}^2$

In questo paragrafo verrà considerato in dettaglio il caso dei sistemi lineari (reali) a coefficienti costanti di due equazioni scalari del primo ordine in due incognite scalari. Il loro interesse risiede nel fatto che, malgrado la loro estrema semplicità, possono essere usati come “caso guida” dei sistemi a coefficienti costanti e di ordine qualunque, e in tal senso verrà sviluppato lo studio sistematico del procedimento di risoluzione.

È opportuno osservare preliminarmente che, così come è stato possibile perfino nel caso non lineare $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$, $\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, trovare talvolta dei metodi particolari di risolubilità, anche nel caso lineare vi sono spesso alternative al metodo generale. In particolare se il sistema è propriamente lineare, nel senso che ha $(0,0)$ come punto di equilibrio, si possono usare i metodi visti nel § I.4 per cercare le soluzioni dell'equazione associata: $dx^2/dx^1 = v^2(x^1, x^2)/v^1(x^1, x^2)$ che, in tal caso, ha come campo una funzione omogenea di grado zero. Il caso propriamente lineare, d'altra parte, non manca di generalità giacché è generalmente sufficiente operare con una semplice traslazione di origine per ricondurvisi (si veda: Es. I.4.7). Tuttavia lo scopo di questo paragrafo è di illustrare il metodo generale di risoluzione dei sistemi lineari a coefficienti costanti in modo tale che esso possa essere esteso al caso di dimensione n qualsiasi, e di evidenziarne gli aspetti geometrici.

Sia allora dato un sistema, per il momento in $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{T} \mathbf{x} \quad \text{con } \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{T} \in \mathbb{R}^4; \quad \text{ovvero} \\ \begin{pmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Per poter fare uso del concetto di sistemi coniugati, e operare convenienti trasformazioni di coordinate, si ricorrerà al fatto che l'equazione data può essere considerata come una particolare rappresentazione in coordinate di un'equazione quale la

$$\dot{x} = \mathcal{T}x, \quad x_0 \in \mathbb{V}, \quad \mathcal{T} \in \mathbb{L}(\mathbb{V}), \quad (2.27)$$

assegnata su uno spazio vettoriale (reale) $\mathbb{V}$ al quale, per esempio, può essere identificato lo spazio tangente $T_{\bar{x}}\mathbb{M}$ relativo ad un punto $\bar{x}$ di una varietà $\mathbb{M}$ di ugual dimensione $n = 2$. Le coordinate scelte su $\mathbb{M}$ (o un'arbitraria scelta) individuano su $\mathbb{V}$ una certa base $\mathcal{E} := \{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ dalla quale esso è reso isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Su $\mathbb{V}$ si definisce l'operatore lineare $\mathcal{T} \in \mathbb{L}(\mathbb{V})$ come quello al quale la base $\mathcal{E}$ assegna la matrice $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n^2}$.

Quando $\mathbb{M} \equiv \mathbb{V}$ (e quindi per la (2.27) stessa) non lede la generalità identificare la famiglia dei $\{T_{\bar{x}}\mathbb{M}\}_{\bar{x} \in \mathbb{M}}$ con un unico spazio $\mathbb{V}$ al quale è stata identificata anche la stessa varietà delle fasi $\mathbb{M}$ (e cioè lo spazio delle condizioni iniziali $u_0 := \bar{x}_0 - \bar{x} =: x_0$); in caso contrario l'isomorfismo dipenderà dal punto x_e oltre che dalle coordinate scelte e le identificazioni dette saranno locali. Tuttavia, fintanto che non viene variato il punto x_e per il quale $v(x_e) = 0$ e $v_*(x_e) = \mathcal{T}$, e cioè a partire dal quale la (2.27) è l'equazione variazionale in $x(t) = x_e$ di una qualche equazione non lineare $\dot{x} = v(x)$, le identificazioni dette rimangono valide. In particolare lo saranno per tutto il resto di questo capitolo.

Una volta determinate le soluzioni $t \mapsto \phi(t, 0, x_0) \equiv \mathcal{G}^t x_0$ dell'equazione $\dot{x} = \mathcal{T}x$, la loro rappresentazione in coordinate fornirà nelle coordinate assegnate le soluzioni del sistema dato.

$\mathcal{G}^t$ DETERMINA $\mathcal{T}$ Come si è visto nel Cap.I, ogni gruppo a un parametro $\{\mathcal{G}^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ di trasformazioni, non necessariamente lineari, determina un flusso $g : (t, x) \mapsto g(t, x) := \mathcal{G}^t x$ (differenziabile rispetto a entrambe le sue variabili), che determina un campo vettoriale $v : x \mapsto v(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathcal{G}^t x$. Questo è tale che le funzioni $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}$, definite per ciascun $x \in \mathbb{M}$ dalla $t \mapsto \phi(t, 0, x) := \mathcal{G}^t x$, sono soluzioni dell'equazione associata, e cioè: per ogni $\tau \in \mathbb{R}$ si ha

$$\dot{\phi}(\tau) := \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathcal{G}^t(\mathcal{G}^\tau x) = v(\phi(\tau)) .$$

Se, in particolare, le trasformazioni $\mathcal{G}^t : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ sono lineari certo anche il campo v risulta lineare e, come si è già accennato, non lede la generalità identificare (nell'intorno di un $\bar{x} \in \mathbb{M}$ fissato) le varietà $\mathbb{M}$ e $T_{\bar{x}}\mathbb{M}$ con un unico *spazio vettoriale* $\mathbb{V}$ di dimensione n sul quale agiscono gli operatori $\mathcal{G}^t$.

Inoltre, la linearità degli operatori $\mathcal{G}^t$ permette di raccogliere a fattore moltiplicativo la parte evolutiva rispetto a quella attuale

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathcal{G}^t(\mathcal{G}^\tau x) = \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathcal{G}^t \right) \mathcal{G}^\tau x =: \mathcal{T} \mathcal{G}^\tau x ; \quad (2.28)$$

e cioè di operare la derivazione direttamente su $\mathbb{L}(\mathbb{V})$ anziché su $\mathbb{V}$, (vedi oltre).

Riassumendo: *un gruppo a un parametro di trasformazioni lineari su $\mathbb{V}$ determina univocamente un flusso g definito da $g(t, x) := \mathcal{G}^t x$ il quale determina un campo lineare (e cioè un operatore $\mathcal{T}$) tramite la $\mathcal{T} := \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathcal{G}^t$. Quest'ultimo è tale che il moto $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{V}$ definito da $\phi(t, 0, x) := \mathcal{G}^t x$ è soluzione dell'equazione $\dot{x} = \mathcal{T}x$. Per ogni fissata base in $\mathbb{V}$, al moto ϕ corrisponde, in coordinate, un vettore di funzioni $\mathbf{x} : t \mapsto \mathbf{x}(t) := (x^1(t), \dots, x^n(t))$ soluzione dell'equazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T} \mathbf{x}$, ove $\mathbf{T} = \text{cost}$ è definita in coordinate dalla $\mathbf{T} \mathbf{x} := \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (h_{(x)} \circ \mathcal{G}^t x)$. $\square$*

$\mathcal{T}$ DETERMINA $\mathcal{G}^t$ Inversamente: in $\dim = 1$ ogni funzione lineare, e cioè ogni costante moltiplicativa k , determina l'equazione $\dot{x} = kx$, che a sua volta determina un flusso $g(t, x) = e^{kt}x$ che determina l'operatore e^{kt} , lineare sulle x ed evolutore della soluzione uscente dal dato $x_0 = 1$. Pertanto essa determina il gruppo a un parametro di trasformazioni lineari della retta $\{e^{kt}\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Si vuole estendere questa proprietà a un numero qualunque di dimensioni, tale estensione potendo essere ottenuta in due modi, equivalenti nello stesso senso in cui la (2.27) è equivalente alla

$$\dot{\mathcal{X}} = \mathcal{T} \mathcal{X} , \quad \mathcal{X}_0 , \quad \mathcal{T} \in \mathbb{L}(\mathbb{V}) \quad (2.29)$$

qualora questa si dimostri sensata.

Il secondo modo è il procedimento che verrà illustrato più avanti, date le sue doti di generalità e di sintesi. In esso si ripete sulla (2.29) il ragionamento appena fatto per la $\dot{x} = kx$ e se ne ricava il corrispondente flusso in $\mathbb{L}(\mathbb{V})$, dal quale segue quello in $\mathbb{V}$. Tuttavia, per far ciò, si ha bisogno di introdurre procedimenti di limiti e di derivazioni nello spazio $\mathbb{L}(\mathbb{V})$.

Il primo modo, "per componenti", viene qui riassunto per favorire l'interpretazione del secondo. Con esso si potrebbe addirittura evitare il ricorso al sistema (2.27) giacché il sistema viene risolto direttamente in coordinate. Si riconosce innanzi tutto che per ogni assegnata matrice $\mathbf{T}$ esiste unica in $\mathbb{R}^n$ la n -pla dei vettori soluzioni dell'equazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T} \mathbf{x}$ e uscenti da fissate condizioni iniziali (ad esempio dai versori di base). Ne risulta univocamente determinata la matrice $\Psi : t \mapsto \Psi(t)$ che ha per colonne le loro componenti (in quella base). Questa individua il vettore $t \mapsto \mathbf{x}(t)$, soluzione uscente dal (arbitrario) dato iniziale $\mathbf{x}$ mediante l'operazione lineare $\mathbf{x}(t) = \Psi(t) \mathbf{x}$. Se ne ricava $\mathcal{G}^t x = h_{(x)}^{-1}(\Psi(t) \mathbf{x})$. L'unicità della soluzione e le sue proprietà di linearità (rispetto a x) e di compositività (rispetto a t) garantiscono che si è generata una famiglia a un parametro di operatori $\{\mathcal{G}^t\}_{t \in \mathbb{R}}$, ciascuno dei quali:

- è rappresentato in quelle coordinate dalla matrice $\Psi(t)$,
- appartiene a un gruppo rispetto al parametro, in quanto $\mathcal{T}$ non dipende da t ,
- è definito su tutto $\mathbb{V}$, in quanto x è arbitrario,
- è lineare, in quanto lo è $\mathcal{T}$,
- verifica l'equazione (2.28): $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathcal{G}^{\tau+t} x = \mathcal{T} \mathcal{G}^\tau x$ giacché, in coordinate,

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Psi(t) \mathbf{x} = \mathbf{T} \Psi(t) \mathbf{x} \Big|_{t=0} = \mathbf{T} \mathbf{x} ,$$

- in conseguenza di una qualsiasi trasformazione lineare di coordinate: $\mathbf{x}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$ (e quindi con campo che varia secondo la: $\mathbf{T}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{P}$) ha matrice che varia secondo la $\mathbf{\Psi}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{\Psi}\mathbf{P}$, e ciò fornisce la soluzione nelle nuove coordinate: $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{\Psi}'(t)\mathbf{x}'$,
- fra tutti i sistemi di coordinate (lineari) su $\mathbb{V}$, resta allora possibile scegliere quello ottimale alla risoluzione del dato problema cercandolo come quello per il quale la corrispondente matrice $\mathbf{T}'$ equivalente alla $\mathbf{T}$ risulta particolarmente semplice.

Riassumendo: un campo lineare $\mathcal{T}x$ determina univocamente una famiglia $\{\mathcal{G}^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ di trasformazioni $\mathcal{G}^t$ che è un gruppo a un parametro; gli operatori $\mathcal{G}^t$ sono lineari su $\mathbb{V}$ e sono rappresentati, in coordinate, da una matrice $\mathbf{\Psi} : t \mapsto \mathbf{\Psi}(t)$ tale che $\frac{d}{dt} \big|_{t=0} \mathbf{\Psi}(t) = \mathbf{T}$. Tale matrice $\mathbf{T}$ rappresenta (in quelle coordinate) l'operatore di campo $\mathcal{T}$. Il sistema che si risolve è un conveniente $\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{T}'\mathbf{x}'$.

L'unicità della soluzione di $\dot{x} = \mathcal{T}x$ per ciascun x_0 garantisce anche che ogni gruppo a un parametro di trasformazioni lineari su $\mathbb{V}$ è esprimibile in questo modo. Infatti l'equazione da esso determinata è unica, ed è unico il flusso g associato al gruppo. Ma il flusso generato dall'equazione (o anche, per ogni dato iniziale $x \in \mathbb{V}$, la sua soluzione $t \mapsto \phi(t, x)$) è esso stesso unico e quindi, siccome anche il flusso associato al gruppo deve esserne soluzione, essi non possono che coincidere.

In definitiva, conseguenza delle unicità della soluzione e del gruppo associato a un flusso è che: due gruppi a un parametro di trasformazioni lineari $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ sono identici se e solo se hanno uguali generatori $\mathcal{T}$. $\square$

Si osservi che per determinare esplicitamente le rappresentazioni $\mathbf{\Psi}(t)$ degli operatori del gruppo, il metodo per componenti passa necessariamente attraverso la soluzione esplicita corrispondente ai vari possibili sistemi lineari (e cioè alle varie $\mathbf{T}'$), e non ne permette un'espressione generale, valida apriori dagli specifici dati iniziali e matrici di campo.

Nell'illustrare il secondo dei due procedimenti citati sopra si farà riferimento alla più generale equazione lineare, anche non autonoma:

$$\dot{x} = \mathcal{T}(t)x, \quad t_0, x_0 \in \mathbb{R} \times \mathbb{V}, \quad \mathcal{T}(t) \in \mathbb{L}(\mathbb{V}), \quad t \mapsto \mathcal{T} \in C^{r \geq 0}(\mathbb{R}) \quad (2.30)$$

e la discuterà in forma generale, anche se solo formale. In un secondo momento, e nel solo caso $\mathcal{T} = cost$, si esprimeranno le soluzioni in un qualche conveniente sistema di coordinate.

A tale scopo, innanzi tutto occorre attribuire significato all'operazione di derivazione in $\mathbb{L}(\mathbb{V})$. Verrà poi discussa, direttamente in questo spazio, la soluzione $\mathcal{G}_{t_0}^t$ dell'equazione $\dot{\mathcal{X}} = \mathcal{T}(t)\mathcal{X}$. Infine, e solo dopo aver fissate le coordinate e attribuita all'operatore $\mathcal{T}(t)$ una matrice $\mathbf{T}(t)$, verrà esaminato il problema di determinare esplicitamente la matrice che quelle coordinate assegnano all'operatore $\mathcal{G}_{t_0}^t$.

La prima parte è introduttiva, e mostra come molte delle considerazioni fatte nel caso autonomo sussistono anche in quello, più generale, di operatori di campo dipendenti dal tempo. In esse infatti si usa solo la linearità dell'operatore $\mathcal{T}(t)$ e non la sua indipendenza o meno dal tempo.

Si danno le seguenti definizioni

Matrice fondamentale dell'equazione (2.30) := una matrice $\mathbf{\Phi}(t, t_0)$ che ha per colonne le coordinate di una n -pla di vettori soluzioni linearmente indipendenti della (2.30). In tal modo essa fornisce il valore attuale $\mathbf{x}(t)$ della "soluzione generale" secondo la $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t, t_0)\mathbf{c}$, ove $\mathbf{c}$ è un vettore numerico.

Matrice principale dell'equazione (2.30) := quella matrice fondamentale $\mathbf{\Psi}$ che ha per colonne le coordinate degli n vettori, soluzioni della (2.30), che hanno come dati iniziali i versori della base dello spazio delle fasi. Essa è pertanto la matrice $\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Psi}(t, t_0)$ tale che $\mathbf{\Psi}(t_0, t_0) = \mathbb{I}$, e fornisce il valore attuale $\mathbf{x}(t)$ che parte dal dato iniziale $\mathbf{x}_0$ secondo la $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Psi}(t, t_0)\mathbf{x}_0$.

La matrice principale $\mathbf{\Psi}(t, t_0)$ rappresenta, nella base scelta, l'operatore di evoluzione $\mathcal{G}_{t_0}^t$ dell'equazione (2.30). Infatti applicandola a un qualsiasi vettore $\mathbf{x}_0$ di $\mathbb{R}^n$, che rappresenti le condizioni iniziali di un moto che evolve secondo la (2.30), si ottiene la soluzione $\phi(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ uscente da $\mathbf{x}_0$.

In particolare, a partire da una n -pla di condizioni iniziali $\mathbf{x}_1|_0, \mathbf{x}_2|_0, \dots, \mathbf{x}_n|_0$ che siano vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$, e formata con essi la matrice (invertibile) $(n \times n)$:

$$\mathbf{C} \equiv \mathbf{\Phi}_0 := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1|_0 & \vdots & \mathbf{x}_2|_0 & \vdots & \vdots & \mathbf{x}_n|_0 \end{pmatrix},$$

si riconosce che la matrice

$$\Phi(t) := \Phi(t, t_0, \Phi_0) = \Psi(t, t_0)\Phi_0 = \begin{pmatrix} x_1(t) & \vdots & x_2(t) & \vdots & \vdots & x_n(t) \end{pmatrix}$$

ha colonne che sono soluzioni indipendenti dell'equazione $\dot{x} = T(t)x$; esse sono gli n vettori $\left\{ \phi_i(t, t_0, x_i|_0) \in \mathbb{R}^n \right\}_{i=1, \dots, n}$ che rappresentano in quelle coordinate gli n vettori $\left\{ \phi_i(t, t_0, x_i|_0) \in \mathbb{V} \right\}_{i=1, \dots, n}$ soluzioni della (2.30) che verificano gli assegnati dati.

Questi ultimi formano un

Sistema fondamentale $\Phi = \{\phi_i\}_{i=1, \dots, n}$ per l'equazione (2.30) := una n -pla di funzioni a valori in $\mathbb{V}$: $\phi_i : t \mapsto x_i = \phi_i(t, t_0, x_i|_0) \in \mathbb{V}$, $i = 1, \dots, n$, che siano soluzioni linearmente indipendenti della (2.30).

D'altra parte, come si è osservato nel § I.5, la più generale soluzione della (2.30) può essere scritta come combinazione lineare di una n -pla di vettori soluzioni linearmente indipendenti della (2.30). Pertanto ogni sistema fondamentale può essere ottenuto a partire da un altro mediante il prodotto per un operatore costante non singolare C , e venire rappresentato (in componenti) mediante la

$$\Phi(t, t_0, \Phi_0) = \Psi(t, t_0)C \quad \text{ove} \quad C \equiv \Phi(t_0) \equiv \Phi_0 \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^n).$$

Si può notare che ogni colonna della C è formata dalle componenti degli (arbitrari purché linearmente indipendenti) vettori numerici ϕ_0 , condizioni iniziali dei vettori soluzioni ϕ che formano la $\Phi(t, t_0, \Phi_0)$; e anzi, le colonne della C sono le n -ple dei coefficienti delle combinazioni lineari che si operano sui vettori colonne della $\Psi(t, t_0)$ (e cioè le soluzioni uscenti dai versori di base) per ottenere i vettori colonne della $\Phi(t, t_0, \Phi_0)$.

Considerando che la matrice $C \equiv \Phi_0$ è non singolare se e solo se tale è la Φ , si conclude che *tutte e sole le matrici fondamentali sono esprimibili in questa forma purché C sia non singolare.*

Osservazione importante. La matrice fondamentale $\Phi(t)$ ha derivata (fatta elemento per elemento) tale che $\dot{\Phi}(t) = T(t)\Phi(t)$, essa ha quindi come colonne le derivate di altrettante funzioni vettoriali che sono soluzioni della (2.30). Si vuole sfruttare la linearità dell'operatore di derivazione per interpretare una matrice che abbia come colonne le derivate di altrettante funzioni vettoriali *come derivata della matrice* le cui colonne siano le funzioni vettoriali stesse (il tutto naturalmente su una base che non dipenda dal parametro), e pensare a ciò come alla rappresentazione in (quelle) coordinate di un procedimento fatto sull'operatore di cui quella matrice è l'espressione in coordinate. Si vuole cioè interpretare la matrice $\Phi(t, t_0, \Phi_0)$ come la rappresentazione in coordinate di quell'operatore lineare che verifica nello spazio $\mathbb{L}(\mathbb{V})$ l'equazione

$$\dot{\mathcal{X}} = \mathcal{T}(t)\mathcal{X}, \quad t_0 \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{T}(t) \in \mathbb{L}(\mathbb{V}), \quad t \mapsto \mathcal{T} \in C^{r \geq 0}(\mathbb{R}) \quad (2.31)$$

con condizioni iniziali (non singolari) $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}(t_0)$, rappresentate da $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(t_0)$. Di questa equazione, la matrice $\Psi : t \mapsto \Psi(t, t_0)$ esprime in particolare la soluzione uscente dal dato $\mathcal{X}_0 = \mathbb{I}$.

Inoltre, la (2.31) è omogenea, e quindi se $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ è soluzione uscente da $\mathbf{X}_0$ e se C è non singolare allora anche $\mathbf{X}(t)C$ è soluzione uscente da $\mathbf{X}_0 C$. Ne segue che per ogni $C \equiv \Phi(t_0) = \Phi_0$ non singolare la $\Phi(t) = \Psi(t, t_0)\Phi_0$ è soluzione non singolare.

Infine, ogni soluzione non singolare della (2.31) è esprimibile in questo modo, infatti anche per essa vale il teorema di unicità, e certo la $\Psi(t, t_0)\mathbf{X}_0$ è soluzione uscente dall'arbitrario dato $\mathbf{X}_0$.

In definitiva, e sempre che si dia senso alla (2.31), si ha che le due equazioni:

$$\dot{x} = \mathcal{T}(t)x \quad \text{con} \quad x_0 \in \mathbb{V}, \quad (2.32)$$

$$\dot{\mathcal{X}} = \mathcal{T}(t)\mathcal{X} \quad \text{con} \quad \mathcal{X}_0 \in \mathbb{L}(\mathbb{V}) \quad (2.33)$$

sono equivalenti nel senso che le soluzioni non banali di questo sono i sistemi fondamentali di quello. Risolvere la (2.32) equivale a trovare l'operatore Ψ che risolve la (2.33). $\square$

Le proprietà che si sono appena riconosciute circa i sistemi fondamentali Φ della (2.32) non sono conseguenze della particolare struttura dell'operatore $\mathcal{T}$ (diagonalizzabile o meno) né del fatto che esso dipenda o meno dal tempo (e cioè che il sistema sia a coefficienti costanti), ma solo del fatto che è lineare. È tuttavia solo nel caso di autonomia che il procedimento di costruzione esplicita dell'operatore di evoluzione (lineare) $\Psi(t, t_0)$ riesce in modo semplice. Nel caso generale infatti, lineare non autonomo: $\dot{x} = \mathcal{T}(t)x$, la determinazione esplicita della matrice $\Psi : t \mapsto \Psi(t, t_0)$ è problema assai arduo, almeno in forma chiusa.

Quando invece l'operatore di campo $\mathcal{T}$, e quindi i coefficienti dell'equazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T} \mathbf{x}$, sono costanti, le matrici $t \mapsto \Phi(t)$ soluzioni della $\dot{\mathcal{X}} = \mathcal{T} \mathcal{X}$ assumono una forma particolarmente significativa.

Nel caso scalare, l'unico operatore che agisce linearmente sui punti della retta e li trasforma in modo da avere campo proporzionale al valore nel punto, ovvero tale che $x(t) = \mathcal{G}^t x \implies \dot{x} = kx$ è l'operatore che moltiplica per la funzione esponenziale: $\mathcal{G}^t \equiv e^{kt}$. Per esso infatti si ha $\frac{d}{dt} \big|_{t=0} (\mathcal{G}^t x) = kx$ o anche $\frac{d}{dt} \mathcal{G}^t = k \mathcal{G}^t$. Si vuole generalizzare questa osservazione al caso $\dim \mathbb{V} = n$, e chiamare $e^{\mathbf{T}t}$ la matrice $\Psi(t)$ e interpretarla come rappresentazione, nella base in cui $\mathcal{T}$ è rappresentato da $\mathbf{T}$, dell'operatore $\mathcal{G}^t \in \mathbb{L}(\mathbb{V})$. Inoltre si vuole dare senso alla richiesta che questo abbia derivata tale che $\frac{d}{dt} \big|_{t=0} \mathcal{G}^t = \mathcal{T}$, e confermare il fatto che esso appartiene a un gruppo ad un parametro di trasformazioni lineari invertibili: $\mathcal{G}^{t+\tau} = \mathcal{G}^t \mathcal{G}^\tau$. Solo in tal caso esso potrà essere la soluzione uscente dalle condizioni iniziali $\mathcal{X}(0) = \mathbf{I}$ dell'equazione $\dot{\mathcal{X}} = \mathcal{T} \mathcal{X}$, e quindi essere tale che $\frac{d}{dt} \mathcal{G}^t = \mathcal{T} \mathcal{G}^t$, $\mathcal{G}^0 = \mathbf{I}$. Ciò giustifica indicarlo con $e^{\mathcal{T}t}$, e interpretare come flusso in $\mathbb{L}(\mathbb{V})$ l'espressione $(t, \mathcal{X}) \mapsto G(t, \mathcal{X}) = e^{\mathcal{T}t} \mathcal{X}$.

Esempio pilota. Si consideri il caso $\dim = 2$. Sia $\mathcal{T}$ un operatore costante e con autovalori entrambi reali e distinti. Dette $\mathbf{P}$ la matrice individuata dagli autovettori di $\mathcal{T}$ ed $\mathbf{E}_h^i(t) = e^{\lambda_{(i)} t} \delta_h^i$ (non sommare su i) si riconosce facilmente che la matrice che rappresenta l'operatore $\mathcal{G}^t$ è la matrice

$$\Psi(t) = \mathbf{P} \mathbf{E}(t) \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1}. \quad (2.34)$$

Ne segue che la soluzione generale può essere scritta come $\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \mathbf{c}$ con $\Phi(t) = \mathbf{P} \mathbf{E}(t) \mathbf{P}^{-1} \mathbf{C}$, ove $\mathbf{C} = \Phi_0$ è non singolare e $\mathbf{P}$ è individuata dagli autovettori di $\mathcal{T}$.

L'espressione esplicita (2.34) permette innanzi tutto l'immediato controllo del fatto che $\Psi(t)$ è soluzione della (LO2) uscente dalle condizioni iniziali $\Psi(0) = \mathbf{I}$: basta a tale scopo derivare direttamente (elemento per elemento) la Ψ e ottenere

$$\dot{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}(t) \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{T} \Psi(t).$$

Allo stesso modo essa permette l'immediata verifica della proprietà di gruppo per la famiglia degli evolutori, e cioè la

$$\Psi(t) \Psi(\tau) = \mathbf{P} \mathbf{E}(t) \mathbf{E}(\tau) \mathbf{P}^{-1} = \Psi(t + \tau).$$

In altre parole si riconosce che l'operatore moltiplicativo $\Psi(t)$ rappresentato dalla (2.34) ha tutte le proprietà richieste qui sopra per un possibile operatore $e^{\mathcal{T}t}$: è lineare, è elemento di un gruppo a un parametro, assegna velocità trasformata lineare della posizione secondo la moltiplicazione per $\mathcal{T}$.

In più essa mostra che nella base propria di $\mathcal{T}$, (in quanto esistente), la matrice di $\mathcal{G}^t$ è la matrice diagonale $\mathbf{E}(t) := \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$.

Se allora, formalmente, si definisse

$$e^{\mathbf{\Lambda}t} := \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}, \quad \text{ancora con } \mathbf{\Lambda} := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

essa potrebbe a tutti gli effetti essere considerata come la matrice che rappresenta, in base propria, un operatore avente alcune delle caratteristiche dell'operatore $e^{\mathcal{T}t}$ esponenziale dell'operatore $\mathcal{T}$. Questo anche considerando il fatto che, siccome la base $\{\epsilon_i\}_{i=1, \dots, n}$ propria per $\mathcal{T}$ esiste ed è tale che $\mathbf{\Lambda} \equiv \mathbf{T} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{P}$ se $\epsilon_i = \mathcal{P} e_i$, $i = 1, \dots, n$, allora la $e^{\mathbf{\Lambda}t}$ si trasforma come deve, (si veda la Proprietà 2.2.1)

la matrice $e^{(\mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^{-1})t} \equiv e^{\mathbf{T}t} := \Psi(t) = \mathbf{P} e^{\mathbf{\Lambda}t} \mathbf{P}^{-1}$ che fa evolvere le componenti $\mathbf{x}$ è la $\mathbf{P}$ -trasformata della matrice $e^{\mathbf{\Lambda}t}$ dei vettori espressi mediante le loro componenti in base propria $\xi(t) := \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}(t)$.

□

Tuttavia:

- affinché quella appena data sia una corretta definizione per un operatore esponenziale di un operatore $\mathcal{T}$, cioè non dipenda dal sistema di coordinate;
- affinché sia valida non solo per operatori diagonalizzabili, ma anzi assuma su tutto lo spazio $\mathbb{L}(\mathbb{V})$ le proprietà della funzione esponenziale;

- affinché e^{Tt} rappresenti in $\mathbb{L}(\mathbb{V})$ la soluzione del problema di Cauchy: $\dot{\mathcal{X}} = \mathcal{T}\mathcal{X}$, $\mathcal{X}_0 = \mathbb{I}$,
- affinché sia possibile estendere quanto visto sopra a un numero qualsiasi di dimensioni,

occorre che tale definizione coincida, anche per $\mathbb{L}(\mathbb{V})$ così come è per $\mathbb{R}$, con quella che si ottiene richiedendo che uno sviluppo in serie di potenze $\mathcal{X}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m t^m$, $C_m \in \mathbb{L}(\mathbb{V})$, possa esprimere la soluzione in $\mathbb{L}(\mathbb{V})$ di $\dot{\mathcal{X}} = \mathcal{T}\mathcal{X}$. Dovrà esistere un $\mathcal{C} \in \mathbb{L}(\mathbb{V})$ tale che:

$$\sum_{m=1}^{\infty} m C_m t^{m-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{T} C_m t^m \Rightarrow m C_m = \mathcal{T} C_{m-1} \Rightarrow C_m = \frac{\mathcal{T}^m}{m!} C_0.$$

Se si introduce in $\mathbb{L}(\mathbb{V})$ un criterio di convergenza che renda sensate le operazioni di derivazione e di somma di serie, e lo si usa per dimostrare la sensatezza della: $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathcal{T}^m}{m!}$, e cioè l'esistenza in $\mathbb{L}(\mathbb{V})$ di un operatore $e^{\mathcal{T}} := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathcal{T}^m}{m!}$, si dà significato all'affermazione secondo la quale

$$e^{\mathcal{T}t} := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathcal{T}^m t^m}{m!} \text{ è la soluzione della } \dot{\mathcal{X}} = \mathcal{T}\mathcal{X} \text{ con } \mathcal{X}_0 = \mathbb{I}.$$

Successivamente se ne ricava che, nelle coordinate che danno a $\mathcal{T}$ la matrice $\mathbf{T}$,

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{T}t} \mathbf{x}_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{T}^m t^m}{m!} \mathbf{x}_0 \text{ è la soluzione della } \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T} \mathbf{x} \text{ con } \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Si ottiene lo scopo proposto: o sfruttando il fatto che lo spazio $\mathbb{L}(\mathbb{V})$ degli operatori lineari a valori reali definiti su $\mathbb{V}$ è esso stesso uno spazio vettoriale a dimensione finita (e quindi sommando mediante la convergenza elemento per elemento) ma ciò è poco opportuno dato che gli elementi di $\mathbf{T}^m$ non sono le potenze degli elementi di $\mathbf{T}$, oppure introducendo una norma $\|\mathcal{T}\|$ specifica per lo spazio $\mathbb{L}(\mathbb{V})$, e converrà una norma piuttosto che una metrica giacché lo spazio è lineare. Rispetto ad essa si potranno introdurre le operazioni di limite e di derivazione, e ci si potrà assicurare che la successione $\left\{ \sum_{m=0}^k \frac{\mathcal{T}^m}{m!} \right\}_{k=1,2,\dots}$ ammette limite in $\mathbb{L}(\mathbb{V})$. L'essere $\mathbb{L}(\mathbb{V})$ a dimensione finita assicura l'equivalenza dei due procedimenti.

D'altra parte è certo conveniente, se possibile, introdurre una norma rispetto alla quale $\mathbb{L}(\mathbb{V})$ sia uno spazio completo; in tal modo, infatti, si potrà decidere se il limite della successione esiste e appartiene allo spazio $\mathbb{L}(\mathbb{V})$ solo osservando il comportamento dei numeri $\|\mathcal{S}_k - \mathcal{S}_h\| := \left\| \sum_{m=h}^k \frac{\mathcal{T}^m}{m!} \right\|$, e cioè osservando delle somme finite.

L'essere $\mathbb{L}(\mathbb{V})$ a dimensione finita assicura che tutte le norme definite su di esso sono (uniformemente) equivalenti, ed esso è completo rispetto ad ognuna (si veda: Appendice A.7). Tuttavia la più conveniente, perché di facile interpretazione e uso, è la Norma spettrale, definita su $\mathbb{L}(\mathbb{V})$ da:

$$\|\mathcal{T}\| := \sup_{\|x\|_2=1} \|\mathcal{T}x\|_2.$$

Servendosi poi della disuguaglianza $\left\| \sum_{m=0}^k \frac{\mathcal{T}^m}{m!} \right\| \leq \sum_{m=0}^k \left\| \frac{\mathcal{T}^m}{m!} \right\|$, si osserva che l'assoluta convergenza di una serie ne implica la convergenza; e cioè: la convergenza della serie delle norme degli addendi: $\left\| \frac{\mathcal{T}^m}{m!} \right\|$ implica la convergenza in norma della serie degli addendi: $\frac{\mathcal{T}^m}{m!}$. Ma la prima è una serie di numeri tutti non negativi, quindi per il criterio di Weierstrass essa risulta convergente se tale è una serie di numeri ordinatamente maggiori dei suoi addendi. In tal caso, anzi, la convergenza risulta assoluta e uniforme, e ciò permette di inferire utili conseguenze quali, per esempio, l'esistenza dei prodotti fra serie di operatori:

$$\begin{aligned} \text{dati } \mathcal{A} &:= \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}_k \quad \text{e} \quad \mathcal{B} := \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_k \quad \text{entrambi in } \mathbb{L}(\mathbb{V}) \\ \text{esiste } \mathcal{C} &\in \mathbb{L}(\mathbb{V}) \text{ tale che } \mathcal{C} := \mathcal{A}\mathcal{B} := \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}_k := \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j+l=k} \mathcal{A}_j \mathcal{C}_l. \end{aligned}$$

Ciò è quanto accade nel caso in esame. Essendo $\mathbb{V}$ a dimensione finita, gli operatori in $\mathbb{L}(\mathbb{V})$ sono limitati, ed esiste un numero reale $\tau < \infty$ tale che $\tau = \|\mathcal{T}\|$. Risulta pertanto $\left\| \frac{\mathcal{T}^m}{m!} \right\| = \frac{1}{m!} \|\mathcal{T}^m\| \leq \frac{1}{m!} \|\mathcal{T}\|^m = \frac{\tau^m}{m!}$ la cui serie ha notoriamente somma finita il cui valore è $\exp(\tau)$.

Si garantisce così l'esistenza in $\mathbb{L}(\mathbb{V})$ della somma della serie

$$e^{\mathcal{T}} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{T}^n}{n!}$$

e di questa si indicherà con $e^{\mathcal{T}}$ la matrice che la rappresenta nella stessa base nella quale $\mathcal{T}$ ha matrice $\mathbf{T}$.

N.B. 2.2.1 Per controllo, si può anche operare direttamente sulle matrici:

Proposizione 2.2.1 Siano A, B, C, P matrici reali $(n \times n)$ e P non singolare. Se $B = PAP^{-1}$ allora esiste

$$e^B := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{m!} = P \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!} P^{-1} =: P e^A P^{-1},$$

qualora almeno una delle due serie converga in $\mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione $P(A + C)P^{-1} = PAP^{-1} + PCP^{-1}$, e inoltre $PA^kP^{-1} = (PAP^{-1})^k$. L'uniforme convergenza implica

$$P e^A P^{-1} = P \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m \right) P^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (PAP^{-1})^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} B^m = e^B. \quad \blacksquare$$

Corollario 2.2.1 Ciò conferma che le precedenti definizioni sono ben date e indipendenti dalla base: se in una certa base $\mathcal{T}$ ed $e^{\mathcal{T}}$ sono rappresentati dalle matrici $\mathbf{T}$ ed $e^{\mathbf{T}}$, al cambio di base la trasformata della matrice esponenziale è la matrice esponenziale della trasformata.

È opportuno poi verificare direttamente che l'operatore $e^{\mathcal{T}}$ così definito abbia tutte le proprietà necessarie a poter essere l'evolvente dell'equazione $\dot{x} = \mathcal{T}x$. In particolare, sugli operatori $e^{\mathcal{T}}$ si assicurano le seguenti proprietà.

Proposizione 2.2.2 Se due operatori $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{L}(\mathbb{V})$ “commutano”, e cioè se $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$ allora si ha che

$$e^{\mathcal{B}} \circ e^{\mathcal{A}} = e^{\mathcal{A} + \mathcal{B}}$$

Dimostrazione Stante l'assoluta convergenza si ha che

$$\begin{aligned} & \left(\mathbb{I} + \mathcal{A} + \frac{1}{2!} \mathcal{A}^2 + \dots \right) \cdot \left(\mathbb{I} + \mathcal{B} + \frac{1}{2!} \mathcal{B}^2 + \dots \right) = \\ & = \mathbb{I} + (\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \left(\frac{1}{2!} \mathcal{A}^2 + \mathcal{A}\mathcal{B} + \frac{1}{2!} \mathcal{B}^2 \right) + \dots \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corollario 2.2.2

$$e^{t\mathcal{T}} \cdot e^{\tau\mathcal{T}} = e^{(t+\tau)\mathcal{T}}, \quad t, \tau \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{T} \in \mathbb{L}(\mathbb{V}).$$

Corollario 2.2.3

$$\lim_{h \rightarrow 0} e^{t\mathcal{T}} \left(\frac{1}{h} (e^{h\mathcal{T}} - \mathbb{I}) \right) = e^{t\mathcal{T}} \lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{T} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \mathcal{T}^{m-1} h^{m-1};$$

e siccome la serie a secondo membro è certo (assolutamente) convergente in quanto limitata da $e^{h\mathcal{T}}$, si possono invertire il limite e la somma ottenendo per la serie il valore $\mathbb{I}$, che dimostra la: $d/dt(e^{\mathcal{T}t}) = \mathcal{T}e^{\mathcal{T}t}$. Alternativamente si può sfruttare l'assoluta convergenza delle

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{1}{m!} \mathcal{T}^m t^m = \mathcal{T} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m-1)!} \mathcal{T}^{m-1} t^{m-1}.$$

◇

Riassumendo si è provato che: fissato comunque $\mathcal{T} \in \mathbb{L}(\mathbb{V})$ l'operatore $e^{\mathcal{T}t}$ esiste, è ottenibile come somma della serie: $\sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{T}^m t^m / m!$, è elemento di un gruppo a un parametro di operatori lineari, ed è tale che

$$\frac{d}{dt}(e^{\mathcal{T}t}) = \mathcal{T}e^{\mathcal{T}t} \quad \text{o anche} \quad \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (e^{\mathcal{T}t}) = \mathcal{T}.$$

Ciò conclude il problema della risoluzione di un qualunque sistema di equazioni lineari a coefficienti costanti.

Rimane da risolvere quello di scrivere la matrice esponenziale di un dato operatore *in almeno una base*, magari scelta convenientemente.

Esempio 2.2.2 Se esiste una base $\{\epsilon_i\}_{i=1,\dots,n} = \{\mathcal{P}e_i\}_{i=1,\dots,n}$ rispetto alla quale l'operatore $\mathcal{T}$ è diagonale (reale) e quindi ha matrice $\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, e cioè se $\mathcal{T}$ ha un sistema di autovettori $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ sufficientemente ricco da essere $\mathbb{V} = \text{span} \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ allora è chiaro, per la definizione appena data e l'osservazione: $\mathcal{T}\epsilon = \lambda\epsilon \Rightarrow \mathcal{T}^k \epsilon = \lambda^k \epsilon$, che $e^{\mathcal{T}}$ ha matrice in quella base data da

$$e^{\mathbf{\Lambda}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

e questo conferma la definizione formale data precedentemente. $\square$

Nel seguito sarà assai utile la seguente estensione di tale proprietà.

Nota 2.2.1 Si osservi dapprima che se una matrice (quadrata) $\mathbf{T}$ è diagonale a blocchi:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 & \vdots & 0 \\ \dots & & \dots \\ 0 & \vdots & \mathbf{T}_2 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \mathbf{T}_1 = & n_1 \times n_1 \\ \mathbf{T}_2 = (n - n_1) \times (n - n_1) \end{cases}$$

allora essa è tale da conservare invarianti i due sottospazi $\mathbb{W}_1 = \text{span} \{e_1, \dots, e_{n_1}\}$ e $\mathbb{W}_2 = \text{span} \{e_{n_1+1}, \dots, e_n\}$. Infatti scomponendo il generico vettore $\mathbf{x}$ mediante la

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \mathbf{x}_1 = \sum_{i=1}^{n_1} x^i e_i, \quad \mathbf{x}_2 = \sum_{i=n_1+1}^n x^i e_i,$$

si vede facilmente che

$$\mathbf{T} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 \mathbf{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad \mathbf{T} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{T}_2 \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}.$$

Ne segue in particolare che

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 & \vdots & 0 \\ \dots & & \dots \\ 0 & \vdots & \mathbf{T}_2 \end{pmatrix} \quad \text{implica} \quad \mathbf{T}^k = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1^k & \vdots & 0 \\ \dots & & \dots \\ 0 & \vdots & \mathbf{T}_2^k \end{pmatrix}$$

e quindi, siccome un sottospazio è un sottoinsieme chiuso dello spazio che lo ospita, ed è completo se anche questo lo è, si ha anche

$$e^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} e^{\mathbf{T}_1} & \vdots & 0 \\ \dots & & \dots \\ 0 & \vdots & e^{\mathbf{T}_2} \end{pmatrix}$$

L'essere $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$ complementari in $\mathbb{V}$ e separatamente invarianti non solo rispetto ad $\mathbf{T}$ ma anche rispetto ad $e^{\mathbf{T}}$ (o, meglio, rispetto a $\mathcal{T}$ e ad $e^{\mathcal{T}}$) permette poi di riconoscere che un'analoga scomposizione dell'arbitrario dato iniziale $\mathbf{x}_0$ nei suoi due addendi $\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{1|0} \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{x}_{2|0} \end{pmatrix}$ assicura che l'evoluzione di $\mathbf{x}_0$ sarà, in ogni istante e univocamente, decomponibile nei suoi due addendi $\begin{pmatrix} e^{\mathbf{T}_1 t} \mathbf{x}_{1|0} \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ e^{\mathbf{T}_2 t} \mathbf{x}_{2|0} \end{pmatrix}$. La diagonalizzazione, anche parziale, dell'operatore $\mathcal{T}$ potrà allora essere risolta a passi successivi cercandone (se esistono) in cascata i sottospazi invarianti, e la determinazione della matrice $e^{\mathbf{T}t}$ potrà avvenire per blocchi cercandone l'espressione più conveniente in ciascuno dei suoi sottospazi complementari e invarianti. (In ultima analisi, questa proprietà verrà anche sfruttata per garantire che, in ${}^c\mathbb{R}^n$, un operatore reale conserva invarianti i sottospazi costruiti sulle sole parti reali e parti puramente complesse dei vettori sui quali esso opera). $\triangleright$

In taluni casi (si veda per esempio la Nota 2.2.7 più oltre) non è nemmeno necessario eseguire il calcolo in tutti i suoi dettagli. Può essere infatti sufficiente fare uso della seguente osservazione che si limita a sfruttare l'esistenza dei singoli sottospazi e le proprietà che l'operatore ha in essi e che non dipendono dalla particolare (sotto)-base scelta nei sottospazi in questione.

Osservazione

Riconosciuta l'esistenza di (due) sottospazi $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$ tali che $\mathbb{V} = \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$ e invarianti rispetto a un operatore $\mathcal{T}$, e detta $\mathbf{P}_\sim$ la $\mathcal{E}$ -matrice dell'operatore $\mathcal{P}_\sim$ che cambia la base data: $\mathcal{E} = \{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ in una (qualsiasi) $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}_i\}_{i=1,\dots,n}$ fra quelle tali che $\mathbb{W}_1 = \text{span}\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_{n_1}\}$ e $\mathbb{W}_2 = \text{span}\{\tilde{e}_{n_1+1}, \dots, \tilde{e}_n\}$, mentre la matrice $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{P}_\sim^{-1} \mathbf{T} \mathbf{P}_\sim$ è certo diagonale a blocchi ciò non accade in generale anche alla matrice $\mathbf{T}$. Quest'ultimo fatto, tuttavia, non preclude la possibilità, comunque lecita, di separare un qualsiasi vettore $x \in \mathbb{V}$, e quindi anche x_0 , nella somma

$$x_1|_0 + x_2|_0 := \sum_{h=1}^{n_1} \tilde{x}_1^h \tilde{e}_h + \sum_{h=n_1+1}^n \tilde{x}_2^h \tilde{e}_h = \sum_{h=1}^n x_1^h e_h + \sum_{h=1}^n x_2^h e_h$$

con $x_i|_0 \in \mathbb{W}_i$ $i = 1, 2$, con le $\{\tilde{x}_i^h\}_{h=1,\dots,n}$ tali che le $\tilde{x}_2^1 = \tilde{x}_2^2 = \dots = \tilde{x}_2^{n_1} = 0$, e analogamente le $\tilde{x}_1^{n_1+1} = \tilde{x}_1^{n_1+2} = \dots = \tilde{x}_1^n = 0$, e con le $\{x_i^h\}_{h=1,\dots,n}$ legate alle $\{\tilde{x}_i^h\}_{h=1,\dots,n}$ dalla $\tilde{x}_i^h = (\mathbf{P}_\sim^{-1})_k^h x_i^k$.

In altre parole, è sempre possibile separare uno stesso vettore: x_0 mediante vettori: $x_i|_0 \in \mathbb{W}_i$, $i = 1, 2$, e si ha $\tilde{x}_0 = \tilde{x}_1|_0 + \tilde{x}_2|_0$ (nelle coordinate $\tilde{x}$) ed $x_0 = x_1|_0 + x_2|_0$ (nelle coordinate x). $\square$

La Nota 2.2.1 mostra che tale separazione rimane vera anche per gli evoluti dei vettori $x_i|_0$, che si mantengono indipendentemente e separatamente negli spazi $\mathbb{W}_i$, e ciò è vero a prescindere dalla base scelta.

In particolare, l'espressione in base $\tilde{\mathcal{E}}$ del vettore $x(t)$, e cioè la $\begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\tilde{\mathbf{T}}_1 t} \tilde{x}_1|_0 \\ e^{\tilde{\mathbf{T}}_2 t} \tilde{x}_2|_0 \end{pmatrix}$ diviene, in base $\mathcal{E}$, la seguente

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}_\sim \tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}_\sim \begin{pmatrix} e^{\tilde{\mathbf{T}}_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\tilde{\mathbf{T}}_2 t} \end{pmatrix} \mathbf{P}_\sim^{-1} (\mathbf{x}_1|_0 + \mathbf{x}_2|_0) = e^{\mathbf{T} t} \mathbf{x}_1|_0 + e^{\mathbf{T} t} \mathbf{x}_2|_0$$

ove $\mathbf{x}_i|_0 = (x_i^1|_0, \dots, x_i^n|_0)$, $i = 1, 2$, hanno coordinate generalmente tutte non nulle sebbene, come questa stessa espressione conferma, i due vettori $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ appartengano per ogni t rispettivamente ai (due) sottospazi $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$. Questi sottospazi infatti sono invarianti sia rispetto all'operatore $\mathcal{T}$ che all'operatore $\mathcal{G}^t$, e ciò a prescindere dal particolare sistema di coordinate scelto. $\square$

Il caso che si è esaminato all'inizio del paragrafo ha $\mathbb{W}_i = \text{span}\{\epsilon_i\}$ per $i = 1, 2$, e quindi

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1|_0 + \mathbf{x}_2|_0 = \xi_0^1 \epsilon_1 + \xi_0^2 \epsilon_2 = \xi_0^1 \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1^1 \\ \mathbf{P}_1^2 \end{pmatrix} + \xi_0^2 \begin{pmatrix} \mathbf{P}_2^1 \\ \mathbf{P}_2^2 \end{pmatrix} = \mathbf{P} \boldsymbol{\xi},$$

nella quale: $\mathbf{P}_\sim \equiv \mathbf{P}$ è la matrice della base propria (che quindi ha come colonne gli ϵ_i), e con $\tilde{x}_1|_0 = (\xi_0^1, 0)^T$, e $\tilde{x}_2|_0 = (0, \xi_0^2)^T$. Infatti si ha, per esempio:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{T} t} \mathbf{x}_1|_0 &= \xi_0^1 e^{\mathbf{T} t} \epsilon_1 = \xi_0^1 \mathbf{P} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} \epsilon_1^1 \\ \epsilon_2^1 \end{pmatrix} \\ &= \xi_0^1 \mathbf{P} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \xi_0^1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} \epsilon_1^1 \\ \epsilon_2^1 \end{pmatrix} = e^{\lambda_1 t} \mathbf{x}_1|_0. \end{aligned}$$

Corollario 2.2.1 Se un operatore $\mathcal{T}$ in $\mathbb{L}(\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^{n \geq 2})$ è diagonalizzabile, la soluzione dell'equazione $\dot{x} = \mathcal{T}x$ è esprimibile mediante la

$$x : t \mapsto x(t) = \sum_{k=1}^n \xi_0^k e^{\lambda_k t} \epsilon_k \quad \text{ove} \quad \xi_0^k \in \mathbb{R} \quad \text{per} \quad k = 1, \dots, n;$$

le costanti $\{\xi_0^k\}_{k=1,\dots,n}$ sono le componenti del dato iniziale in base propria: $\boldsymbol{\xi}_0 = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}_0$, e gli $\epsilon_k = \mathbf{P} e_k$ sono gli n autovettori distinti di $\mathcal{T}$. Pertanto: $\mathbb{W}_i := \text{span}\{\epsilon_i\}$, $i = 1, \dots, n$, sono gli n sottospazi invarianti nei quali $\mathbb{V}$ resta diviso da $\mathcal{T}$. Le $\{e\}$ -componenti di $x(t)$ sono esplicitamente date (vedi anche la (2.38) più oltre) da

$$\mathbf{x}(t) = (\mathbf{P} e^{\Lambda t}) \boldsymbol{\xi}_0 = \mathbf{P} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \xi_0^1 \\ \dots \\ e^{\lambda_n t} \xi_0^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \epsilon_1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\lambda_n t} \epsilon_n & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0^1 \\ \dots \\ \xi_0^n \end{pmatrix}.$$

Ulteriore conseguenza della Osservazione

Chiamate: $\mathcal{E} := \{e_1, \dots, e_n\}$ la base data, ed $\mathcal{E} := \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ la base propria (si supponga qui che sia reale) dell'operatore $\mathcal{T}$, si consideri una base $\tilde{\mathcal{E}} := \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ tale che:

$$\begin{aligned}\mathbb{W}_1 &:= \text{span}\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_{n_1}\} = \text{span}\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n_1}\} \\ \mathbb{W}_2 &:= \text{span}\{\tilde{e}_{n_1+1}, \dots, \tilde{e}_n\} = \text{span}\{\epsilon_{n_1+1}, \dots, \epsilon_n\}.\end{aligned}$$

Siano $\mathbf{T}$, $\tilde{\mathbf{T}}$ e $\boldsymbol{\tau}$ la $\mathcal{E}$ -matrice, la $\tilde{\mathcal{E}}$ -matrice, e la $\mathcal{E}$ -matrice dell'operatore $\mathcal{T}$. Siano inoltre:

$\mathcal{P}_\sim$ l'operatore che trasforma la base $\mathcal{E}$ nella $\tilde{\mathcal{E}}$ con $\mathcal{E}$ -matrice $\mathbf{P}_\sim$, (ed $\tilde{\mathcal{E}}$ -matrice: $\mathbf{I}$);

$\mathcal{P}$ l'operatore che trasforma la base $\mathcal{E}$ nella $\mathcal{E}$, con $\mathcal{E}$ -matrice $\mathbf{P}$, (ed $\mathcal{E}$ -matrice: $\mathbf{I}$);

Υ l'operatore che trasforma la base $\tilde{\mathcal{E}}$ nella $\mathcal{E}$, con $\mathcal{E}$ -matrice $\boldsymbol{\Upsilon}$, ed $\tilde{\mathcal{E}}$ -matrice $\tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}$.

Sussistono le:

$$\begin{aligned}\epsilon_h &= \mathcal{P} e_h & \tilde{e}_h &= \mathcal{P}_\sim e_h & \epsilon_h &= \Upsilon \tilde{e}_h & \epsilon_h &= \Upsilon \circ \mathcal{P}_\sim e_h \\ \mathbf{x} &= \mathbf{P} \boldsymbol{\xi} & \mathbf{x} &= \mathbf{P}_\sim \tilde{\mathbf{x}} & \tilde{\mathbf{x}} &= \tilde{\boldsymbol{\Upsilon}} \boldsymbol{\xi} & \mathbf{x} &= \boldsymbol{\Upsilon} \mathbf{P}_\sim \boldsymbol{\xi} = \mathbf{P}_\sim \tilde{\boldsymbol{\Upsilon}} \boldsymbol{\xi}\end{aligned}$$

infatti dalla $\tilde{\boldsymbol{\Upsilon}} = \mathbf{P}_\sim^{-1} \boldsymbol{\Upsilon} \mathbf{P}_\sim$, e dalla: $\mathbf{x} = \mathbf{P}_\sim \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{P}_\sim \tilde{\boldsymbol{\Upsilon}} \boldsymbol{\xi} = \mathbf{P} \boldsymbol{\xi}$ si ricava facilmente che l'operatore $\mathcal{P} = \Upsilon \circ \mathcal{P}_\sim$ ha $\mathcal{E}$ -matrice: $\mathbf{P} = \mathbf{P}_\sim \tilde{\boldsymbol{\Upsilon}} = \boldsymbol{\Upsilon} \mathbf{P}_\sim$ e verifica la $\boldsymbol{\Upsilon}^{-1} \mathbf{P} = \mathbf{P} \tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}^{-1} = \mathbf{P}_\sim$. Inoltre, dalle

$$\mathcal{T} e_h = (\mathbf{P}^{-1})_h^k \mathcal{T} \epsilon_k, \quad \mathcal{T} e_h = (\mathbf{P}_\sim^{-1})_h^k \mathcal{T} \tilde{e}_k,$$

e dalle

$$\mathcal{T} e_h = \mathbf{T}_h^j e_j, \quad \mathcal{T} \epsilon_h = \boldsymbol{\tau}_h^j \epsilon_j, \quad \mathcal{T} \tilde{e}_h = \tilde{\mathbf{T}}_h^j \tilde{e}_j,$$

si ricavano le:

$$\mathbf{T} = \mathbf{P} \boldsymbol{\tau} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}_\sim \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{P}_\sim^{-1} = \mathbf{P}_\sim (\tilde{\boldsymbol{\Upsilon}} \boldsymbol{\tau} \tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}^{-1}) \mathbf{P}_\sim^{-1}.$$

Il fatto che l'operatore Υ trasformi le due sotto basi $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n_1}\}$, $\{\epsilon_{n_1+1}, \dots, \epsilon_n\}$ separatamente in altre due sottobasi: $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_{n_1}\}$ e $\{\tilde{e}_{n_1+1}, \dots, \tilde{e}_n\}$ degli stessi due sottospazi invarianti $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$ rispettivamente fa sì che la matrice $\tilde{\boldsymbol{\Upsilon}} \boldsymbol{\tau} \tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}^{-1}$ sia anch'essa *diagonale a blocchi*.

Corollario 2.2.2 *La matrice dell'operatore di evoluzione di un operatore $\mathcal{T}$ diagonalizzabile (nello spazio reale), e quindi tale che $\boldsymbol{\tau} \equiv \boldsymbol{\Lambda}$, può essere scritta come segue*

$$\mathbf{P} e^{\boldsymbol{\Lambda} t} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}_\sim (\tilde{\boldsymbol{\Upsilon}} e^{\boldsymbol{\Lambda} t} \tilde{\boldsymbol{\Upsilon}}^{-1}) \mathbf{P}_\sim^{-1} = \mathbf{P}_\sim \begin{pmatrix} e^{\tilde{\mathbf{T}}_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\tilde{\mathbf{T}}_2 t} \end{pmatrix} \mathbf{P}_\sim^{-1}.$$

ciò mostra ulteriormente che gli $x_i|_0$, $i = 1, 2$ definiti come sopra, restano separatamente confinati nei due sottospazi $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$.

Per mettere in atto quanto detto sopra, estenderlo al caso degli autovettori complessi, e rendersi conto di come determinare la trasformazione di coordinate ottimale alla risoluzione del problema, verrà qui nuovamente usato come esempio pilota il caso $\dim = 2$.

Esempio 2.2.4 Del sistema $\dot{x} = \mathcal{T} x$ si cercano soluzioni particolari del tipo: $\hat{e}(t) = \xi(t)\epsilon$, con $\xi(t) \in \mathbb{R}$. Per la nota proprietà delle equazioni lineari scalari tali soluzioni dovranno necessariamente essere della forma

$$\hat{e}: t \mapsto \hat{e}(t) = e^{\lambda t} \hat{e}(0) =: e^{\lambda t} \epsilon, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \epsilon \in \mathbb{V}, \quad (2.35)$$

e quindi

$$\hat{e}(t) = e^{\lambda t} \hat{e}(0) =: e^{\lambda t} \epsilon \quad \text{o anche} \quad \begin{pmatrix} \hat{e}^1(t) \\ \hat{e}^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} \hat{e}^1(0) \\ e^{\lambda t} \hat{e}^2(0) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} e^{\lambda t} \epsilon^1 \\ e^{\lambda t} \epsilon^2 \end{pmatrix}.$$

Qualunque sia il sistema di coordinate (e cioè la base $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$) adottato, una tale soluzione è rappresentata da un vettore $\hat{e}(t)$ che evolve in $\mathbb{R}^2$ rimanendo in ogni istante parallelo al vettore $\hat{e}(0) = \epsilon$; in particolare esso risulta identicamente parallelo alla sua velocità, e cioè al suo $\mathcal{T}$ -trasformato. In altre parole, si hanno soluzioni di questo tipo *se e solo se* lo scalare λ e il vettore ϵ sono legati dall'equazione

$$(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) \begin{pmatrix} \epsilon^1 \\ \epsilon^2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ovvero} \quad \epsilon \in \text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda \mathbf{I})$$

e quindi si avranno soluzioni non banali *se e solo se* $\text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda \mathbf{I}) \neq \{0\}$.

Dovrà allora essere

$$\text{Det}(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) =: \lambda^2 - \text{Tr} \lambda + \text{Det} = 0,$$

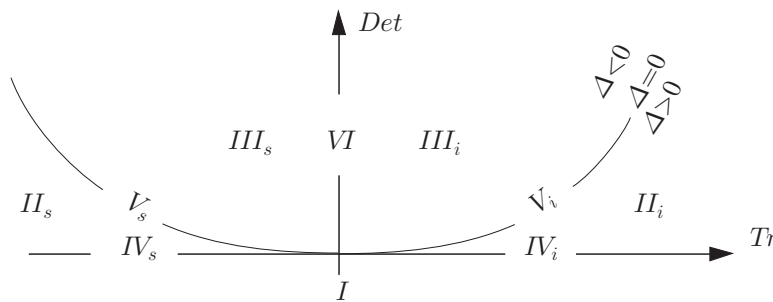
ove: $\text{Tr} :=$ traccia di $\mathcal{T}$, e $\text{Det} := \text{Det } \mathcal{T}$. Seguono

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{Tr}}{2} \pm \sqrt{\frac{\text{Tr}^2}{4} - \text{Det}} =: \frac{1}{2} (\text{Tr} \pm \sqrt{\Delta}), \quad (2.36)$$

e queste, (che nel seguito verranno regolarmente numerate in modo che sia $\Re \lambda_1 \leq \Re \lambda_2$), risulteranno indipendenti dalla particolare scelta della base giacché $\text{Det}(\mathbf{P}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{P}) = \text{Det } \mathbf{T}$.

□

I risultati del precedente esempio possono essere usati come guida per la loro generalizzazione al caso n dimensionale. A tale scopo, si ponga $\Delta := \text{Tr}^2 - 4\text{Det}$. Nel piano (Tr, Det) la curva $\Delta = 0$ è dimensioni ovviamente una parabola. A seconda dei valori dei suoi parametri, l'operatore $\mathcal{T}$ appartiene a una delle dieci zone indicate in figura



Zona I

Sia $\text{Det} < 0$ e quindi $\Delta > 0$. Si hanno due radici reali distinte:
$$\begin{cases} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 > 0. \end{cases}$$

L'operatore $\mathcal{T}$ ammette due autospazi distinti e non vuoti: $\text{span}(\epsilon_i)$, $i = 1, 2$, individuati dai due corrispondenti autovettori ϵ_1 ed ϵ_2 che, essendo fra loro non linearmente dipendenti, possono formare una base nello spazio delle fasi $\mathbb{V}$, attualmente identificato con $\mathbb{R}^2$, e permettono di concludere che (singolarmente) $\text{span}(\epsilon_i) = \text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda_i \mathbf{I})$, $i = 1, 2$.

N.B. 2.2.5 Il risultato che si è visto nell'Esempio 2.0 si estende anche a sistemi di dimensione $n \geq 2$ purché tutti gli autovalori $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ dell'operatore $\mathcal{T}$ siano reali e distinti. Questa è infatti condizione sufficiente (non necessaria) affinché gli autovettori di $\mathcal{T}$ formino una base in $\mathbb{V}$: se un autovettore $\tilde{\epsilon}$, corrispondente a un autovalore $\tilde{\lambda}$, fosse combinazione lineare di altri $k < n$ autovettori, fra loro indipendenti e corrispondenti ad autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tutti diversi da $\tilde{\lambda}$, si avrebbe $(\mathcal{T} - \tilde{\lambda} \mathbf{I})\tilde{\epsilon} = 0 = \sum_{i=1}^k c_i(\lambda_i - \tilde{\lambda})\epsilon_i$, e ciò contraddice l'indipendenza lineare dei k vettori $\{\epsilon_i\}_{i=1, \dots, k}$. Se ne deduce che un operatore reale con tutti gli autovalori reali distinti è diagonalizzabile, e ha $\text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda_i \mathbf{I}) = \text{span}(\epsilon_i)$, $i = 1, \dots, n$, e $\mathbb{V} = \bigoplus_{i=1}^n (\text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda_i \mathbf{I}))$. ◇

Giacché gli autovettori di $\mathcal{T}$ sono abbastanza numerosi da formare una base in $\mathbb{V}$, la matrice $\mathbf{P}$ definita da tali autovettori mediante la: $\epsilon_h =: \mathcal{P}e_h \equiv \mathbf{P}_h^i e_i$, e cioè la matrice $\mathbf{P}_h^i := (\epsilon_h)^i$, può individuare una trasformazione di coordinate (lineare, indipendente dal tempo) $\boldsymbol{\xi} := \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}$. Le $\boldsymbol{\xi}$ sono le componenti in base $\{\epsilon_h\}_{h=1,2}$ di quel vettore che in base $\{e_j\}_{j=1,2}$ ha componenti $\mathbf{x}$. Ad esempio la k -esima ϵ -coordinata del versore ϵ_h vale $(\mathbf{P}^{-1})_i^k \mathbf{P}_h^i = \delta_h^k$.

N.B. 2.2.6 Nel seguito di questo capitolo non si userà alcuna struttura euclidea sullo spazio vettoriale, e i vettori di base non verranno di conseguenza normalizzati. Tutti i risultati saranno validi a meno di una trasformazione omogenea della base che si intende fissata, seppure in modo arbitrario. In tal senso si parlerà "degli n autovettori di $\mathcal{T}$ " invece che: "di n , indipendenti, degli autovettori di $\mathcal{T}$ " (si veda il successivo N.B. 2.2.8). Inoltre, le componenti dei vettori saranno numerate mediante un esponente variabile in $\{1, 2, \dots, n\}$, con $n = \dim \mathbb{V}$, e qualora ripetute (e senza parentesi) in una stessa espressione sottintendono l'operazione di somma (righe per colonne). I deponenti invece sono degli ordinali per i vettori o per i loro coefficienti, mentre il deponente 0 indica il valore relativo al dato iniziale. In tal senso una espressione del tipo $\mathbf{x}_1|_0$ indica il vettore numerico di componenti $(x_1^1|_0, x_1^2|_0, \dots, x_1^n|_0)$ ed esprime il valore $\mathbf{x}_1(t_0)$ dato al vettore x_1 all'istante t_0 . ◇

Si osservi che come versori della nuova base sono stati scelti proprio gli autovettori di $\mathcal{T}$, dunque la matrice nella quale la base $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ trasforma la $\mathbf{T}$ secondo l'espressione $\boldsymbol{\tau} := \mathbf{P}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{P}$ è diagonale per costruzione:

$\boldsymbol{\tau} := \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. In tal modo, l'equivalente equazione diviene (nel caso $\dim \mathbb{V} = 2$)

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\Lambda} \left(\xi^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix},$$

e siccome questa fornisce un sistema di $2 = \dim \mathbb{V}$ equazioni disaccoppiate, se ne conclude che le $\mathcal{E}$ -coordinate ξ evolvono secondo le (non sommare su h)

$$\xi^h(t) = \xi_0^h e^{\lambda_{(h)} t} \quad h = 1, 2.$$

N.B. 2.2.7 (si veda: Appendice A.4 N.B.1.4.15)

Una trasformazione di coordinate lineare, come quella qui usata: $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$, ha $\partial\boldsymbol{\varphi} \equiv \mathbf{P}^{-1}$. Pertanto il campo lineare $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}\mathbf{x}$ si trasforma nel campo $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi}) = \partial\boldsymbol{\varphi} \mathbf{v} \circ \boldsymbol{\varphi}^{-1}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{P}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\xi}$ entrambi corrispondenti al campo $\mathcal{T}\mathbf{x}$.

Resta così provato che l'equazione $\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\xi}$ con $\boldsymbol{\tau} := \mathbf{P}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{P}$ è equivalente, data l'invertibilità della $\mathbf{P}$, all'equazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x}$. $\diamond$

Con l'ipotesi che la matrice $\boldsymbol{\tau}$ sia diagonale: $\boldsymbol{\tau} \equiv \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ risulta facile esprimere l'evoluzione delle coordinate iniziali $\mathbf{x}_0 = \mathbf{P}\boldsymbol{\xi}_0$:

$$\begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} \xi^1(t) \\ \xi^2(t) \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \xi_0^1 \\ e^{\lambda_2 t} \xi_0^2 \end{pmatrix} = \mathbf{P} e^{\boldsymbol{\Lambda} t} \begin{pmatrix} \xi_0^1 \\ \xi_0^2 \end{pmatrix},$$

ove si è posto $e^{\boldsymbol{\Lambda} t} := \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$. Si ha in definitiva

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{P}e^{\boldsymbol{\Lambda} t}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0 =: \boldsymbol{\Psi}(t)\mathbf{x}_0. \quad (2.37)$$

Da questa espressione si vede chiaramente che, in generale, ciascuna delle componenti $x^1(t)$ e $x^2(t)$ contiene sia entrambe le componenti del dato iniziale x_0^1 ed x_0^2 , sia entrambe le funzioni $e^{\lambda_1 t}$ ed $e^{\lambda_2 t}$ che costituiscono l'evolvente $\mathcal{G}^t \equiv \boldsymbol{\Psi}(t)$. Invece, per costruzione, ciò non accade alle componenti $\xi^1(t)$ e $\xi^2(t)$, ciascuna delle quali contenente solo i corrispondenti ξ_0^1 o ξ_0^2 , ed $e^{\lambda_1 t}$ o $e^{\lambda_2 t}$, rispettivamente.

Il caso n -dimensionale con tutti gli autovalori reali distinti è analogo: detta $\mathbf{P}$ la matrice le cui colonne sono gli autovettori di $\mathcal{T}$: $\mathbf{P}_j^i := (\epsilon_j)^i$, si ha

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}e^{\boldsymbol{\Lambda} t}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0 \quad \text{con:} \quad e^{\boldsymbol{\Lambda} t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

L'arbitrarietà del vettore $\mathbf{x}_0$ implica che la (2.38) rappresenta, *in coordinate* e quando tutte le radici dell'equazione secolare sono reali distinte, la soluzione generale $t \mapsto \phi(t, 0, \mathbf{x}_0) \equiv \mathbf{x}(t) = \mathcal{G}^t \mathbf{x}_0$, dell'equazione (2.27).

N.B. 2.2.8 Come si è già accennato, la matrice $\mathbf{T}$ determina univocamente i numeri $\{\lambda_i\}_{i=1, \dots, n}$ (si suppongano distinti fra loro) ma non univocamente la matrice $\mathbf{P}$. Essa però determina univocamente la matrice $\boldsymbol{\Psi}(t) := \mathbf{P}e^{\boldsymbol{\Lambda} t}\mathbf{P}^{-1}$ che esprime nelle coordinate assegnate l'operatore di evoluzione. Infatti se invece di scegliere un insieme di autovettori $\{\epsilon_i\}_{i=1, \dots, n}$ se ne fosse scelto un altro: $\{\tilde{\epsilon}_i := k_{(i)}\epsilon_i\}_{i=1, \dots, n}$, (non sommare su i), si sarebbe trovato che la matrice $\mathbf{P}_{\sim}$ tale che $\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}_{\sim}\tilde{\boldsymbol{\xi}}(t) = \mathbf{P}_{\sim}e^{\boldsymbol{\Lambda} t}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_0 = \mathbf{P}_{\sim}e^{\boldsymbol{\Lambda} t}\mathbf{P}_{\sim}^{-1}\mathbf{x}_0$ ha la forma

$$\mathbf{P}_{\sim} := \mathbf{P}\mathbf{K} := \mathbf{P} \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n \end{pmatrix},$$

infatti $e^{\boldsymbol{\Lambda} t}$ è diagonale sia in base $\{\epsilon_i\}_{i=1, \dots, n}$ che in base $\{\tilde{\epsilon}_i\}_{i=1, \dots, n}$. Pertanto si ha nuovamente

$$\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(t) = \mathbf{P}_{\sim}e^{\boldsymbol{\Lambda} t}\mathbf{P}_{\sim}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{K}e^{\boldsymbol{\Lambda} t}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}e^{\boldsymbol{\Lambda} t}\mathbf{P}^{-1} = \boldsymbol{\Psi}(t).$$

D'altra parte è noto che se più autovettori linearmente indipendenti corrispondono a uno stesso autovalore, risultano autovettori ad esso corrispondenti anche tutte le loro combinazioni lineari, e viceversa. $\diamond$

Si osservi ora che la matrice

$$\Phi(t) := \mathbf{P}e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} \epsilon_1^1 e^{\lambda_1 t} & \epsilon_2^1 e^{\lambda_2 t} \\ \epsilon_1^2 e^{\lambda_1 t} & \epsilon_2^2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \epsilon_1 & \vdots \\ e^{\lambda_2 t} \epsilon_2 & \vdots \end{pmatrix}$$

ha per colonne i vettori (di funzioni) $\{\hat{\epsilon}_i : t \mapsto \hat{\epsilon}_i(t) = e^{\lambda_i t} \epsilon_i\}_{i=1,2}$ (si veda la (2.35)) essi stessi soluzioni della (2.26) in quanto evoluti (paralleli) degli autovettori ϵ_1, ϵ_2 . Di conseguenza, come si è visto, il vettore $\mathbf{x}(t)$ resta espresso dalla somma

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}e^{\Lambda t} \xi_0 = \xi_0^1 e^{\lambda_1 t} \epsilon_1 + \xi_0^2 e^{\lambda_2 t} \epsilon_2 = \xi_0^1 \hat{\epsilon}_1(t) + \xi_0^2 \hat{\epsilon}_2(t)$$

e questa mostra che i due vettori $\{\hat{\epsilon}_i(\cdot)\}_{i=1,2}$ rappresentati da $\{\hat{\epsilon}_i(\cdot)\}_{i=1,2}$ formano una base *nello spazio delle soluzioni*. Essa, anzi, è una base ben speciale: è infatti costituita da vettori che evolvono rimanendo identicamente paralleli a se stessi (si veda la (2.35)).

In modo analogo, si nota che le colonne della matrice

$$\Psi(t) := \mathbf{P}e^{\Lambda t} \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \epsilon_1^1 e^{\lambda_1 t} & \epsilon_2^1 e^{\lambda_2 t} \\ \epsilon_1^2 e^{\lambda_1 t} & \epsilon_2^2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1^1 & \epsilon_2^1 \\ \epsilon_1^2 & \epsilon_2^2 \end{pmatrix}^{-1}$$

sono formate dagli evoluti $\{\hat{\epsilon}_i(t)\}_{i=1,2}$ delle particolari condizioni iniziali $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e quindi dei vettori ϵ_1 ed ϵ_2 .

Stante il fatto che $\mathbf{P}$ ed $e^{\Lambda t}$ hanno rango massimo, tali vettori rimangono linearmente indipendenti in ogni istante se tali sono stati all'istante iniziale, ed è $\text{Det } \Psi(t) = \text{Det } e^{\Lambda t} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \neq 0$ per qualsiasi t . D'altronde l'indipendenza lineare per ogni t delle colonne della $\Psi(t)$ è un'immediata conseguenza del teorema di unicità della soluzione di (2.26). Sono però solo gli $\{\hat{\epsilon}_i(t)\}_{i=1,2}$ che, durante l'evoluzione, mantengono il parallelismo con i loro dati iniziali.

Queste considerazioni permettono di considerare conclusa la determinazione di una matrice per $e^{\mathcal{T}}$ qualora l'operatore $\mathcal{T}$ sia diagonalizzabile in $\mathbb{R}^n$, anche se con autovalori molteplici. Inoltre, e sempre in tal caso, permette di riconoscere esplicitamente nell'operatore di evoluzione $\mathcal{G}^t$ le caratteristiche di operatore esponenziale del suo generatore $\mathcal{T}$, attribuendogli inoltre nella base data la forma esplicita

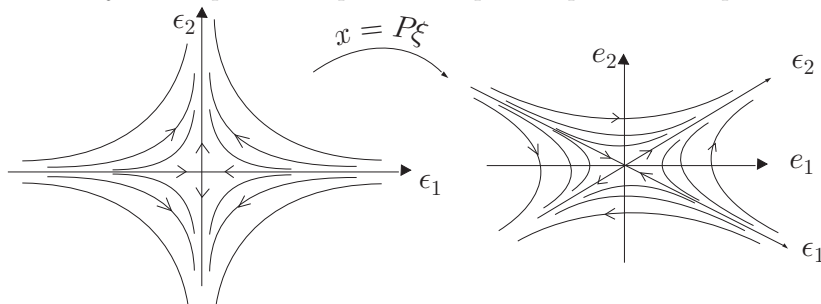
$$\Psi(t, t_0) \equiv \Psi(t - t_0, 0) = e^{\mathbf{T}(t-t_0)} = \mathbf{P} e^{\Lambda(t-t_0)} \mathbf{P}^{-1}, \quad t_0 \text{ arbitrario in } \mathbb{R}$$

ove $\{\epsilon_i =: \mathcal{P}e_i\}_{i=1, \dots, n}$ sono gli n autovettori reali indipendenti di $\mathcal{T}$.

È ormai agevole concludere lo studio della prima delle zone considerate all'inizio del paragrafo per il caso $\dim \mathbb{V} = 2$, e cioè $\text{Det} < 0$, $\Delta > 0$. Per disegnare il diagramma di fase si osserva che essendo $\mathcal{P}$ invertibile esso trasforma spazi trasversali in spazi trasversali, e quindi trasforma il diagramma standard di $\begin{pmatrix} \xi^1(t) \\ \xi^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \xi_0^1 \\ e^{\lambda_2 t} \xi_0^2 \end{pmatrix}$ in quello (omeo- e anzi diffeo-morfo) delle $\begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix}$ senza mutarne le caratteristiche topologiche. Il diagramma quindi consiste in quattro semirette distinte uscenti dall'origine, e in tutte le traiettorie che sono deformazioni (lineari) dei semi-archi di iperboli

$$\frac{\xi^1(t)}{\xi_0^1} = \left(\frac{\xi^2(t)}{\xi_0^2} \right)^k, \quad k := \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0;$$

secondo quanto si è detto nel § II.3 un punto di equilibrio di questo tipo è un esempio di *Sella standard*.



Esempio 2.2.9 Discutere la linearizzata del pendolo fisico conservativo:

$$\ddot{q} = -\sin q, \quad (q_0, \dot{q}_0) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R},$$

nell'intorno del punto $(\pi, 0)$.

L'equazione equivale alla: $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$; pertanto la sua linearizzata nel punto $\mathbf{x}_e = (\pi, 0)$ è

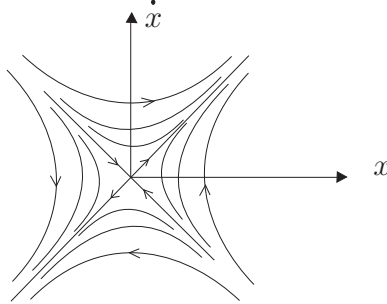
$$\partial \mathbf{v}(x_e, y_e) = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\cos x & 0 \end{array} \right) \Big|_{\mathbf{x}_e} \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Segue $\lambda^2 = 1$ e cioè $\lambda_{1,2} = \pm 1$ da cui, detto $\boldsymbol{\epsilon} \equiv \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, si ha

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ s_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} r_1 \\ s_1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} s_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} r_1 \\ s_1 \end{pmatrix} \implies r_1 = -s_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 \\ s_2 \end{pmatrix} = + \begin{pmatrix} r_2 \\ s_2 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} s_2 \\ r_2 \end{pmatrix} = + \begin{pmatrix} r_2 \\ s_2 \end{pmatrix} \implies r_2 = +s_2;$$

quindi in un intorno di $(\pi, 0)$ si ha il seguente diagramma, come d'altronde già visto nel Cap.II.



□

Esempio 2.2.10 $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 4x - 2y \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 - (-1)\lambda + (-2 - 4) = 0 \implies \lambda_{1,2} = (-3; 2).$$

Ancora con la notazione $\boldsymbol{\epsilon} \equiv \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$, si ha

$$r_1 + s_1 = -3r_1 \implies \boldsymbol{\epsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad r_2 + s_2 = 2r_2 \implies \boldsymbol{\epsilon}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P} e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \boldsymbol{\epsilon}_1 & e^{\lambda_2 t} \boldsymbol{\epsilon}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{2t} \\ -4e^{-3t} & e^{2t} \end{pmatrix};$$

e quest'ultima viene applicata sul vettore $\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}$ soluzione di $\mathbf{P} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

□

Esempio 2.2.11

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Si trovano $\lambda_{1,2,3} = 1, 2, -1$. Poi, dalla seconda colonna segue $\boldsymbol{\epsilon}_2 = \mathbf{e}_2$ e dalla terza $\boldsymbol{\epsilon}_3 = \mathbf{e}_3$. Per determinare $\boldsymbol{\epsilon}_1$ si ha

$$\begin{cases} x = x \\ x + 2y = y \\ x - z = z \end{cases} \quad \text{e questa dà} \quad \boldsymbol{\epsilon}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Infine, è conveniente chiamare ξ_0, η_0, ζ_0 le tre componenti in base propria del dato iniziale, e usare la

$$\mathbf{P} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\xi_0 \\ -2\xi_0 + \eta_0 \\ \xi_0 + \zeta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad \text{per ricavare} \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

Zone II_i e II_s

L'operatore $\mathcal{T}$ di campo dell'equazione (2.26) abbia $\text{Det} > 0$ e ancora $\Delta > 0$. Ne seguono, anche in questo caso, autovalori reali distinti: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(Tr \pm \sqrt{\Delta})$. Essi però hanno ora lo stesso segno, e cioè quello della traccia che è non nulla. Infatti $\text{Det} > 0 \Rightarrow Tr^2 = \Delta + 4\text{Det} > \Delta > 0$. I due autospazi individuati dai due autovettori ϵ_1 ed ϵ_2 : $\text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda_{(i)} \mathbf{I})$, $i = 1, 2$, sono anche in questo caso certamente non coincidenti, e pertanto formano una base nello spazio $\mathbb{V}$. Tutte le considerazioni fatte per il caso precedente rimangono valide nel caso attuale salvo la forma delle traiettorie. Nella base propria esse sono date, oltre che dalle quattro semirette $\xi_0^1 \vee \xi_0^2 = 0$, dai rami delle "parabole"

$$\frac{\xi^1}{\xi_0^1} = \left(\frac{\xi^2}{\xi_0^2} \right)^k, \quad k := \frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 0,$$

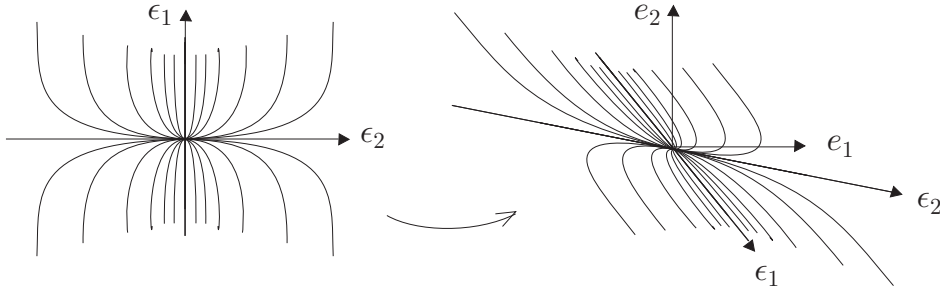
che ovviamente passano per l'origine e che in essa risultano tangenti all'asse ϵ_1 (o ϵ_2) qualora sia $k < 1$ (o, rispettivamente, $k > 1$), e quindi

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 = Tr > 0 \quad \text{in } II_i &\Rightarrow 0 < \lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow \text{tangenza lungo } \epsilon_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = Tr < 0 \quad \text{in } II_s &\Rightarrow \lambda_1 < \lambda_2 < 0 \Rightarrow \text{tangenza lungo } \epsilon_2; \end{aligned}$$

la tangenza cioè si ha lungo l'autovettore corrispondente all'autovalore di minimo modulo. Un punto di equilibrio di questo tipo si chiama

Nodo stabile se $\Re \lambda < 0$ e Nodo instabile se $\Re \lambda > 0$;

e non può presentarsi in sistemi che siano conservativi (si veda oltre).



Esempio 2.2.12 L'oscillatore lineare fortemente smorzato:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x = 0, \quad (x_0, \dot{x}_0) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{equivalente a} \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

L'equazione $\lambda^2 - (-k)\lambda + 1 = 0$ fornisce $\Delta = k^2 - 4 > 0$ se $|k| > 2$. Sia, per esempio, $k = 3 + \frac{1}{3}$. Se ne ricava: $\lambda_{1,2} = (-3; -\frac{1}{3})$; $\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\epsilon_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ e quindi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{P} e^{\Lambda t} \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-t/3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \end{pmatrix}.$$

Dal diagramma di fase si vede subito che l'oscillatore fortemente smorzato ha al più una inversione di moto.

Si può anche osservare che le seconde componenti dei versori di base $\{\epsilon_i\}_{i=1,2}$ sono λ_i -volte le prime (cosa questa già accaduta nell'Esempio 2.2 e che dipende dalla provenienza del sistema da una equazione di ordine superiore).

È facile riconoscere che lo stesso diagramma di fase si ottiene per la soluzione locale nell'intorno della posizione di equilibrio (stabile) di un pendolo fisico fortemente smorzato. □

Zone III_i e III_s

L'operatore $\mathcal{T}$ di campo dell'equazione (2.26) abbia ancora Traccia non nulla, ma ora sia $\Delta < 0$, e quindi $Det > 0$. Ne seguono due autovalori complessi coniugati:

$$\begin{cases} \mu := \alpha + i\beta \\ \bar{\mu} := \alpha - i\beta \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \beta := \frac{1}{2}\sqrt{-\Delta} = \sqrt{Det - Tr^2/4} > 0 \\ \alpha := Tr/2 \neq 0, \end{cases}$$

e quindi $\mathcal{T}$ non ha autovettori in $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^2$.

Siano ${}^c\mathcal{T}$ e ${}^c\mathbb{V}$ i complessificati di $\mathcal{T}$ e di $\mathbb{V}$ rispettivamente, (si veda il successivo N.B.2.2.13 oppure l'Appendice A.8). Siano ϵ_μ ed $\bar{\epsilon}_\mu \equiv \bar{\epsilon}_\mu$ i due autovettori di ${}^c\mathcal{T} \in \mathbb{L}({}^c\mathbb{V})$, senz'altro $\mathbb{C}$ -linearmente indipendenti e fra loro complessi coniugati, che corrispondono in ${}^c\mathbb{V}$ ai due autovalori μ e $\bar{\mu}$. Sia $\mathcal{P}_\sim \in \mathbb{L}(\mathbb{V})$ l'operatore che trasforma i vettori della base $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ nei due vettori $\{x_\mu, y_\mu\}$, restrizione allo spazio reale $\mathbb{V}$ dei loro due complessificati definiti da

$$x_\mu := \frac{1}{2}(\epsilon_\mu + \bar{\epsilon}_\mu) \quad \text{ed} \quad y_\mu := \frac{i}{2}(\epsilon_\mu - \bar{\epsilon}_\mu). \quad (2.39)$$

La $\mathcal{E}$ -matrice di $\mathcal{P}_\sim$ è data da

$$\mathbf{P}_\sim := \begin{pmatrix} x_\mu & y_\mu \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \Re \epsilon_\mu & -\Im \epsilon_\mu \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

I vettori x_μ e y_μ sono in $\mathbb{V}$, e di certo linearmente indipendenti e reali giacché $\beta \neq 0$. Data la loro indipendenza lineare, e cioè dato che $\mathbf{P}_\sim$ è non singolare, la coppia $\{x_\mu, y_\mu\}$ può essere assunta come base: $\tilde{\mathcal{E}}$ nel piano $\mathbb{V}_\mu := \mathbb{R}\text{-span}\{x_\mu, y_\mu\}$. In tal modo un vettore x le cui $\mathcal{E}$ -componenti sono (x^1, x^2) avrà $\tilde{\mathcal{E}}$ -componenti date da $\begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} := \mathbf{P}_\sim^{-1} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$. Il sistema coniugato dell'iniziale sistema (2.26) è allora

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} := \mathbf{P}_\sim^{-1} \mathbf{T} \mathbf{P}_\sim \begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{T}} \begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

ed è anche

$$\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{\Upsilon}} \mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{\Upsilon}}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = {}^{\mathbb{R}}\mu$$

ove, indicando con ${}^c\tilde{\mathcal{E}} \equiv \{{}^c x_\mu, {}^c y_\mu\}$ la base complessificata della $\tilde{\mathcal{E}} \equiv \{x_\mu, y_\mu\}$, si hanno le

$$\tilde{\mathbf{\Upsilon}} \text{ la } \tilde{\mathcal{E}}\text{-matrice } \tilde{\mathbf{\Upsilon}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & +i \end{pmatrix} \text{ dell'operatore } \Upsilon \text{ tale che: } \{\epsilon_\mu, \bar{\epsilon}_\mu\} = \Upsilon \{{}^c x_\mu, {}^c y_\mu\},$$

$$\tilde{\mathbf{T}} \text{ la } \tilde{\mathcal{E}}\text{-matrice (reale) di } {}^c\mathcal{T}: \quad \tilde{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Lambda} \text{ la } \mathcal{E}\text{-matrice: } \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \bar{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix} \text{ di } {}^c\mathcal{T},$$

$$\mathbf{T} \text{ la } \mathcal{E}\text{-matrice (reale) di } \mathcal{T}: \quad \mathbf{T} = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}_\sim \tilde{\mathbf{\Upsilon}} \mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{\Upsilon}}^{-1} \mathbf{P}_\sim^{-1},$$

N.B. 2.2.13 Infatti: le $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$, se considerate numeri complessi a parte immaginaria nulla, sono anche le componenti (reali) nella base ${}^c\tilde{\mathcal{E}} \equiv \{(1+i0)x_\mu, (1+i0)y_\mu\} \subset {}^c\mathbb{V}$ del vettore reale $x \equiv x + i0 \in {}^c\mathbb{V}$ che in base ${}^c\tilde{\mathcal{E}} := \{(1+i0)e_1, (1+i0)e_2\} \subset {}^c\mathbb{V}$ ha componenti $(x^1, x^2) \in \mathbb{C}^2$. Inoltre, stante la definizione (2.39) dei due vettori x_μ e y_μ , esistono:

Υ invertibile, tale che $\mathcal{E} \equiv \{\epsilon_\mu, \bar{\epsilon}_\mu\} = \Upsilon {}^c\{x_\mu, y_\mu\} \equiv \Upsilon {}^c\tilde{\mathcal{E}}$, con $\tilde{\mathcal{E}}$ -matrice $\tilde{\mathbf{\Upsilon}}$ ed $\mathcal{E}$ -matrice $\mathbf{\Upsilon} = \mathbf{P}_\sim \tilde{\mathbf{\Upsilon}} \mathbf{P}_\sim^{-1}$;

$\mathcal{P}$ invertibile, tale che $\{\epsilon_\mu, \bar{\epsilon}_\mu\} = \mathcal{P} {}^c\{e_1, e_2\}$ con $\mathcal{E}$ -matrice: $\mathbf{P}$;

$\mathcal{P}_\sim$ invertibile, tale che $\{x_\mu, y_\mu\} = \mathcal{P}_\sim \{e_1, e_2\}$ con $\mathcal{E}$ e ${}^c\mathcal{E}$ -matrice: $\mathbf{P}_\sim$.

Pertanto

$$\bullet \quad \mathcal{P} = \Upsilon \circ \mathcal{P}_\sim \text{ ha } \mathcal{E} \text{ ed } {}^c\mathcal{E}\text{-matrice } \mathbf{P} = \mathbf{\Upsilon} \mathbf{P}_\sim = \mathbf{P}_\sim \tilde{\mathbf{\Upsilon}};$$

- il generico vettore $x \in {}^c\mathbb{V}$ reale, e quindi tale che $\bar{x} = x$, ammette le seguenti rappresentazioni cartesiane

$$x = {}^c x = x^{1c} e_1 + x^{2c} e_2 = \tilde{\xi} x_\mu + \tilde{\eta} y_\mu \quad (2.42)$$

$$= \frac{1}{2} (\tilde{\xi} + i\tilde{\eta}) \epsilon_\mu + \frac{1}{2} (\tilde{\xi} - i\tilde{\eta}) \bar{\epsilon}_\mu =: \xi^1 \epsilon_\mu + \xi^2 \bar{\epsilon}_\mu \quad (2.43)$$

$$=: \frac{1}{2} z \epsilon_\mu + \frac{1}{2} \bar{z} \bar{\epsilon}_\mu \equiv \Re e (z \epsilon_\mu) , \quad (2.44)$$

e quindi tali che

$$\tilde{\xi} = P^{-1} x = \tilde{\Upsilon} \xi , \quad \text{e} \quad z \equiv \Re e z + i \Im m z := \tilde{\xi} + i\tilde{\eta} .$$

Si osservi che siccome la base ${}^c\mathcal{E} \subset {}^c\mathbb{V}^2$ è composta da vettori reali (in quanto a parte immaginaria nulla) un vettore x è reale se e solo se ha in essa componenti reali: $x = x^i {}^c e_i = \bar{x} = \bar{x}^i {}^c e_i$ e, analogamente, un vettore $y = -\bar{y}$ implica $\overline{{}^c\mathcal{T}y} = {}^c\mathcal{T}y$; pertanto non solo le x ma anche le $\tilde{\xi}$ sono tutte reali;

- in quanto complessificato di un operatore reale $\mathcal{T}$, l'operatore ${}^c\mathcal{T}$ non modifica il carattere, se puramente reale o puramente immaginario, del vettore sul quale opera: $x = \bar{x}$ implica $\overline{{}^c\mathcal{T}x} = {}^c\mathcal{T}\bar{x} \equiv {}^c\mathcal{T}x$ e, analogamente, $y = -\bar{y}$ implica $\overline{{}^c\mathcal{T}y} = -{}^c\mathcal{T}y$;
- indicato con $\mathbb{V}_\mu := \mathbb{R}\text{-span} \{x_\mu, y_\mu\}$ e detto $\mathcal{T}_\mu := {}^c\mathcal{T} \big|_{\mathbb{V}_\mu}$ si ha

$$\begin{cases} \mathcal{T}_\mu x_\mu = {}^c\mathcal{T}_\mu x_\mu = {}^c\mathcal{T} \frac{1}{2}(\epsilon_\mu + \bar{\epsilon}_\mu) = \frac{1}{2}(\mu\epsilon_\mu + \bar{\mu}\bar{\epsilon}_\mu) \\ \quad = +\Re e (\mu\epsilon_\mu) = +\alpha x_\mu + \beta y_\mu \\ \mathcal{T}_\mu y_\mu = {}^c\mathcal{T}_\mu y_\mu = {}^c\mathcal{T} \frac{i}{2}(\epsilon_\mu - \bar{\epsilon}_\mu) = \frac{i}{2}(\mu\epsilon_\mu - \bar{\mu}\bar{\epsilon}_\mu) \\ \quad = -\Im m (\mu\epsilon_\mu) = -\beta x_\mu + \alpha y_\mu . \end{cases}$$

Ciò conferma che se una matrice $\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$ è del tipo particolare: $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \bar{\mu} \end{pmatrix}$ (questo è quanto avviene nella base propria di un operatore ${}^c\mathcal{T}$ reale) allora la matrice $\tilde{\Upsilon}\boldsymbol{\Lambda}\tilde{\Upsilon}^{-1}$ è reale e ha la forma

$$\begin{aligned} \tilde{\Upsilon}\boldsymbol{\Lambda}\tilde{\Upsilon}^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & +i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \bar{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & +i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & i\mu \\ \bar{\mu} & -i\bar{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \tilde{\boldsymbol{T}} . \end{aligned}$$

In definitiva, l'operatore ${}^c\mathcal{T}$, che ha autovalori $\alpha \pm i\beta$ e che in base ${}^c\mathcal{E}$ ha matrice reale $\boldsymbol{T}$, in base ${}^c\tilde{\mathcal{E}} \equiv {}^c\{x_\mu, y_\mu\}$ ha matrice $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, e questa stessa matrice compete all'operatore $\mathcal{T}_\mu$ nella base $\tilde{\mathcal{E}} \equiv \{x_\mu, y_\mu\}$. $\diamond$

Si osservi che il piano (complesso) ${}^c\mathbb{V}_\mu \equiv \mathbb{C}\text{-span} \{x_\mu, y_\mu\}$, coincidente con il piano $\mathbb{C}\text{-span} \{\epsilon_\mu, \bar{\epsilon}_\mu\}$ può essere decomplessificato in uno spazio reale a dimensione quattro, e ha come parte reale lo spazio $\mathbb{V}_\mu \equiv \mathbb{R}\text{-span} \{x_\mu, y_\mu\}$, (e come parte immaginaria $i\mathbb{V}_\mu$). Infatti, se un vettore $\varsigma \in \mathbb{C}^2$ ha espressione $\varsigma = x + iy$ con x, y vettori reali, e se è anche $\varsigma = z_1 x_\mu + z_2 y_\mu$ con $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ e con x_μ e y_μ anch'essi reali, allora si ha necessariamente $x = (\Re z_1) x_\mu + (\Re z_2) y_\mu$ e $y = (\Im z_1) x_\mu + (\Im z_2) y_\mu$. Pertanto, chiamati $z^r := \Re z_1 + i\Re z_2$ e $z^i := \Im z_1 + i\Im z_2$ si nota che $x = \Re(z^r \epsilon_\mu)$ e che $y = \Re(z^i \epsilon_\mu)$, e quindi che $\Im \varsigma = \Re(z^i \epsilon_\mu) \in \mathbb{V}_\mu$.

Tutto ciò mostra che il sottospazio $\mathbb{V}_\mu$ di ${}^c\mathbb{V}_\mu$ formato dalla sole parti reali dei vettori è $\mathcal{T}$ -invariante giacché su di essa agisce (un operatore reale $\mathcal{T}$ rappresentato da) una matrice reale $\tilde{\boldsymbol{T}}$. Esso quindi contiene tutta la dinamica reale la cui forma esplicita si ricava dalla (2.41) scrivendo nella base $\tilde{\mathcal{E}}$ l'espressione esplicita della matrice $e^{\tilde{\boldsymbol{T}}t} = e^{\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}t}$, per esempio mediante la sua stessa definizione:

$$\begin{aligned} e^{\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}t} &= e^{\alpha t} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \frac{\beta^k t^k}{k!} \right) \\ &= e^{\alpha t} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\beta^{2k} t^{2k}}{(2k)!} \mathbb{I} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\beta^{2k+1} t^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

N.B. 2.2.14 Alternativamente, ci si può servire della posizione (2.44) per riconoscere nuovamente che il piano reale $\mathbb{V}_\mu$ è il piano dei vettori (reali) di ${}^c\mathbb{V}$ aventi la forma $x = \frac{1}{2}(z\epsilon_\mu + \bar{z}\bar{\epsilon}_\mu) = \Re e(z\epsilon_\mu)$, con $z = \tilde{\xi} + i\tilde{\eta} \in \mathbb{C}$, e si riconosce che il sistema assegnato fa evolvere le coordinate scalari complesse $z(t)$ e $\bar{z}(t)$ mediante le

$$\dot{z} = \mu z, \quad \dot{\bar{z}} = \bar{\mu} \bar{z}, \quad z_0, \bar{z}_0 \in \mathbb{C}^1.$$

In particolare, ricordando la formula di Gauss per l'esponenziale complesso, ne segue che

$$z(t) = e^{\mu t} z_0 = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) z_0.$$

Da questa è agevole ottenere l'evoluzione di $\Re e(z\epsilon_\mu) = \tilde{\xi}x_\mu + \tilde{\eta}y_\mu = (\Re e z)x_\mu + (\Im m z)y_\mu$; essa è data da $\Re e(z(t)\epsilon_\mu) = \Re e(e^{\mu t}z_0\epsilon_\mu) = \Re e(e^{\mu t}z_0)x_\mu + \Im m(e^{\mu t}z_0)y_\mu$ con

$$\begin{aligned} \Re e(e^{\mu t}z_0) &= e^{\alpha t} \cos \beta t \tilde{\xi}_0 - e^{\alpha t} \sin \beta t \tilde{\eta}_0 \\ \Im m(e^{\mu t}z_0) &= e^{\alpha t} \sin \beta t \tilde{\xi}_0 + e^{\alpha t} \cos \beta t \tilde{\eta}_0. \end{aligned}$$

◇

In entrambi i casi si riconosce che, nella base $\{x_\mu, y_\mu\}$, si ha

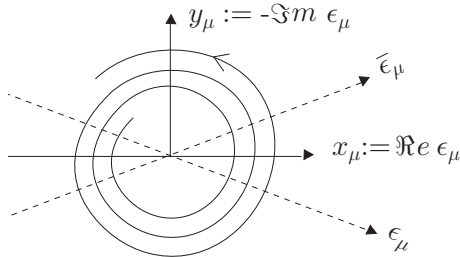
$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi}(t) \\ \tilde{\eta}(t) \end{pmatrix} = e^{\tilde{T}t} \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_0 \\ \tilde{\eta}_0 \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_0 \\ \tilde{\eta}_0 \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \rho_0 \begin{pmatrix} \cos(\beta t + \theta_0) \\ \sin(\beta t + \theta_0) \end{pmatrix}$$

o anche, in coordinate polari $\rho, \theta \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

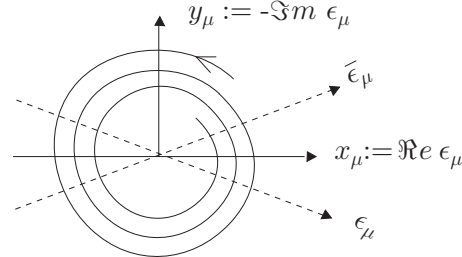
$$\begin{cases} \rho(t) = \rho_0 e^{\alpha t}, \\ \theta(t) = \theta_0 + \beta t. \end{cases}$$

Nel piano (reale) $\mathbb{V}_\mu$ la traiettoria è allora una spirale logaritmica: $\theta - \theta_0 = \frac{\beta}{\alpha} [\ln \rho - \ln \rho_0]$, descritta in senso antiorario, in quanto per definizione è $\beta > 0$. Il caso $\beta < 0$ non è interessante perché comporta solo lo scambio $\mu \rightarrow \bar{\mu}$, e cioè solo una nuova denominazione degli assi. Interessante è invece individuare l'orientamento di $(\Re e \epsilon_\mu, -\Im m \epsilon_\mu)$ rispetto alla coppia (e_1, e_2) per capire se la trasformata secondo la $\tilde{\mathcal{P}}$ di questa spirale conserva il verso antiorario oppure lo inverte. A tale scopo può essere utile all'occorrenza ricordare che ciò accade se, con notazione in $\mathbb{R}^3$, rispettivamente accade

$$(\Re e \epsilon_\mu \wedge (-\Im m \epsilon_\mu))^3 \equiv (\Re e \epsilon_\mu)^1 (-\Im m \epsilon_\mu)^2 - (\Re e \epsilon_\mu)^2 (-\Im m \epsilon_\mu)^1 \geq 0.$$



$III_i : \alpha > 0$



$III_s : \alpha < 0$

Se ne deduce che l'evoluzione $t \mapsto x(t)$ delle coordinate originarie è data da

$$\begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \mathbf{P}_\sim \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \mathbf{P}_\sim^{-1} \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{pmatrix} = \mathbf{P}_\sim e^{\Re \mu t} \mathbf{P}_\sim^{-1} \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{pmatrix},$$

con $\mathbf{P}_\sim$ definita nella (2.40) e $\mu = \alpha + i\beta$ uno dei due autovalori dell'operatore $\mathcal{T}$.

Un punto di equilibrio nel quale l'operatore $\mathcal{T}$ ha autovalori complessi si chiama fuoco o spirale.

N.B. 2.2.15 Si osservi che un metodo semplice per trovare la matrice $\mathbf{P}_\sim$ consiste nel risolvere il seguente sistema rispetto a p_3, p_4 , (dato che il coefficiente b è senz'altro non nullo: si veda la Nota 2.2.4):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

ricavando

$$\begin{cases} a + bp_3 = \alpha + \beta \\ a + bp_4 = \alpha - \beta \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \mathbf{P}_\sim = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ (\alpha - a + \beta)/b & (\alpha - a - \beta)/b \end{pmatrix}.$$

Equivalentemente si può risolvere sul piano complesso la

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = (\alpha + i\beta) \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \quad \text{che dà} \quad s = \left(\frac{\alpha - a + i\beta}{b} \right) r$$

e quindi, per esempio, $\epsilon_\mu = \begin{pmatrix} 1-i \\ (\alpha - a + \beta)/b - i(\alpha - a - \beta)/b \end{pmatrix}$. $\diamond$

Nota 2.2.2 Le considerazioni fatte nel N.B. 2.2.13 sono suscettibili di estensione al caso n -dimensionale quando gli autovalori dell'operatore reale $\mathcal{T}$, siano essi reali o complessi, sono tutti distinti. Infatti secondo quanto si è visto sopra dall'essere x reale ed $\{\epsilon_\mu, \bar{\epsilon}_\mu\}$ complessi coniugati segue che $x = x^1 e_1 + x^2 e_2 = \xi \epsilon_\mu + \bar{\xi} \bar{\epsilon}_\mu$ e ciò implica: $x =: \Re(z \epsilon_\mu)$ con $z := 2\xi = \tilde{\xi} + i\tilde{\eta}$ e con $\begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\xi} \end{pmatrix} = \tilde{\Upsilon}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix}$. D'altra parte, ciò sussiste *per ciascuna coppia distinta di autovalori complessi coniugati*. Ne segue che, dette μ_h e $\bar{\mu}_h$, con $h = 1, \dots, \tau$, le coppie di autovalori complessi, e $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, con $k = 1, \dots, \nu$ quelli reali, e quindi con $\nu + 2\tau = n$, si ha la semplice relazione

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\nu} \xi_0^k e^{\lambda_k t} \epsilon_k + \Re \left(\sum_{h=1}^{\tau} z_0^h e^{\mu_h t} \epsilon_{\mu_h} \right),$$

ove $x_0 =: \sum_{k=1}^{\nu} \xi_0^k \epsilon_k + \Re \left(\sum_{h=1}^{\tau} z_0^h \epsilon_{\mu_h} \right)$. $\triangleright$

Nota 2.2.3 Seguendo la traccia vista nell'Esempio 2.1, il problema si sarebbe potuto anche risolvere direttamente in ${}^c\mathbb{V}$, (si veda anche il N.B.2.2.13). Indicate con ${}^c\mathcal{E} := \{(1+i0)e_1, (1+i0)e_2\}$ la base data, con $\mathcal{E} := \{\epsilon_\mu, \bar{\epsilon}_\mu\}$ la base degli autovettori di ${}^c\mathcal{T}$, con $\tilde{\mathcal{E}}$ la base $\{\Re \epsilon_\mu, -\Im \epsilon_\mu\}$, e con $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix}$ la matrice di ${}^c\mathcal{T}$ in base $\mathcal{E}$, per la matrice $\mathbf{T}$ di ${}^c\mathcal{T}$ in base data si ha, con la consueta notazione, $\mathbf{T} = \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1}$, ove: $\mathcal{E} = \mathcal{P} \mathcal{E}$.

Come si è già accennato sopra, l'operazione $\mathcal{P}$ può essere suddivisa in un prodotto di operazioni. Sia Υ l'operatore che diagonalizza in ${}^c\mathbb{V}$ l'operatore ${}^c\mathcal{T}$ a partire dalla $\tilde{\mathcal{E}}$. Essendo l'operatore che estrae i vettori $\{\epsilon_\mu, \bar{\epsilon}_\mu\}$ dai vettori $\{\Re \epsilon_\mu, -\Im \epsilon_\mu\}$, esso ha $\tilde{\mathcal{E}}$ -matrice: $\tilde{\Upsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$. L'operatore Υ^{-1} è allora quello che estrae la parte reale x_μ e l'opposto y_μ di quella immaginaria dei versori della base $\tilde{\mathcal{E}}$; di conseguenza esso ha $\mathcal{E}$ -matrice: $\tilde{\Upsilon}^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & +1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & +i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$.

Corrispondentemente, un vettore (reale) x , che abbia $\tilde{\mathcal{E}}$ -componenti (reali) $\begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} = \mathbf{P}_\sim^{-1} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$, ha anche $\mathcal{E}$ -componenti $\begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\xi} \end{pmatrix}$ tali che

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\xi} \end{pmatrix} = \tilde{\Upsilon}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{\xi} + i\tilde{\eta} \\ \tilde{\xi} - i\tilde{\eta} \end{pmatrix}; \quad \text{o anche} \quad \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \tilde{\Upsilon}^{-1} \mathbf{P}_\sim^{-1} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

dato che la base $\mathcal{E}$ ha i suoi versori l'uno complesso coniugato dell'altro. Pertanto è possibile porre

$$\begin{aligned} x &= \xi \epsilon_\mu + \bar{\xi} \bar{\epsilon}_\mu = \frac{1}{2} [\tilde{\xi}(\epsilon_\mu + \bar{\epsilon}_\mu) + i\tilde{\eta}(\epsilon_\mu - \bar{\epsilon}_\mu)] = \tilde{\xi} x_\mu + \tilde{\eta} y_\mu \\ &=: \frac{1}{2} (z \epsilon_\mu + \bar{z} \bar{\epsilon}_\mu) \equiv \Re(z \epsilon_\mu), \end{aligned}$$

e cioè

$$(x)_{\tilde{\mathcal{E}}} = \begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} = \tilde{\Upsilon} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} =: \tilde{\Upsilon} \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi + \bar{\xi} \\ -i(\xi - \bar{\xi}) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \Re z \\ \Im z \end{pmatrix},$$

provando così che, in tal caso, $\tilde{\xi}$ ed $\tilde{\eta}$ sono entrambe reali. (Si badi che le $\mathcal{E}$ -componenti del vettore x sono $(\xi, \bar{\xi}) \equiv (z/2, \bar{z}/2)$ quando si chiama $z = \tilde{\xi} + i\tilde{\eta}$, essendo $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ le $\tilde{\mathcal{E}}$ -componenti dello stesso vettore x .)

Allo stesso modo si ha

$$\mathbf{T} = \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}_\sim \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{P}_\sim^{-1}, \quad \text{con} \quad \tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\Upsilon} \mathbf{A} \tilde{\Upsilon}^{-1} \equiv \mathbf{P}_\sim^{-1} \mathbf{T} \mathbf{P}_\sim = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Dunque la soluzione resta espressa da

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^1(t) \\ \dot{x}^2(t) \end{pmatrix} = \mathbf{P} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{pmatrix} = \mathbf{P}_\sim \tilde{\Upsilon} \begin{pmatrix} e^{\mu_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\mu_2 t} \end{pmatrix} \tilde{\Upsilon}^{-1} \mathbf{P}_\sim^{-1} \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Va tenuto presente tuttavia che in tal modo si ottengono le componenti di un vettore complesso a parte immaginaria nulla, e che occorre servirsi delle considerazioni sulla evoluzione uscente da condizioni iniziali reali, o alla invarianza separata dei due piani $\mathbb{V}_\mu$ ed $i\mathbb{V}_\mu$ delle parti reale e immaginaria dei vettori in $\mathbb{C}$ -span $\{\epsilon_\mu, \bar{\epsilon}_\mu\}$, per poter ritornare alla sola parte reale di ${}^c\mathbb{V}$.

In modo analogo e sfruttando il fatto che un operatore reale ha complessificato che ammette autovettori a coppie complessi coniugati, si può diagonalizzare in ${}^c\mathbb{R}^n$ un qualunque operatore *semisemplice*, e cioè con autovalori anche non reali purché distinti, mediante un operatore invertibile con matrice $\mathbf{P} = \mathbf{P}_\sim \tilde{\Upsilon}$ con $\mathbf{P}_\sim$ quella che manda la base $\{(1+i0)e_h\}_{h=1, \dots, n}$ nella $\{(1+i0)\epsilon_{\lambda_1}, \dots, (1+i0)\epsilon_{\lambda_k}, \Re \epsilon_{\mu_1}, -\Im \epsilon_{\mu_1}, \dots\}$ e con $\tilde{\Upsilon}$ quella che esprime in tale base la $\{\epsilon_{\lambda_1}, \dots, \epsilon_{\lambda_\nu}, \epsilon_{\mu_1}, \bar{\epsilon}_{\mu_1}, \dots, \bar{\epsilon}_{\mu_\tau}\}$. $\triangleright$

Esempio 2.2.18 $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ x+2y \end{pmatrix}, \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}.$

Essendo $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & +2 \end{pmatrix}$ si ha $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ e quindi $\mu_{1,2} = 1 \pm i$. Ne segue il problema agli autovettori: $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & +2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = (1+i) \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \implies -2s = r + ir \implies \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix}$ da cui $\mathbf{P}_{\sim} = \begin{pmatrix} +1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{P}_{\sim}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & +1 \end{pmatrix}$. Di conseguenza:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Eseguendo il calcolo in ${}^c\mathbb{R}^2$ si verifica che:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{P}_{\sim} \tilde{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}, \\ \mathbf{P}^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & -1+i \\ -i & -1-i \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= e^t \mathbf{P}_{\sim} \left[\tilde{\mathbf{Y}} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}^{-1} \right] \mathbf{P}_{\sim}^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dove $\mathbf{P}_{\sim}^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_0 \\ \tilde{\eta}_0 \end{pmatrix}$ sono le componenti del vettore in base $\tilde{\mathcal{E}}$ e dove

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi}_0 \\ \tilde{\eta}_0 \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{Y}}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_0 \\ \tilde{\eta}_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_0 + i\tilde{\eta}_0 \\ \tilde{\xi}_0 - i\tilde{\eta}_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} z_0 \\ \bar{z}_0 \end{pmatrix}$$

sono le componenti di $\begin{pmatrix} x_0 + i0 \\ y_0 + i0 \end{pmatrix}$ in base $\mathcal{E}$.

Si può controllare esplicitamente che:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} z(t) \\ \bar{z}(t) \end{pmatrix} &= e^t \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_0 \\ \tilde{\eta}_0 \end{pmatrix} = \frac{e^t}{2} \begin{pmatrix} e^{it}(\tilde{\xi}_0 + i\tilde{\eta}_0) \\ e^{-it}(\tilde{\xi}_0 - i\tilde{\eta}_0) \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^t}{2} \begin{pmatrix} (\cos t + i \sin t)(\tilde{\xi}_0 + i\tilde{\eta}_0) \\ (\cos(-t) + i \sin(-t))(\tilde{\xi}_0 - i\tilde{\eta}_0) \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^t}{2} \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_0 \cos t - \tilde{\eta}_0 \sin t + i(\tilde{\xi}_0 \sin t + \tilde{\eta}_0 \cos t) \\ \tilde{\xi}_0 \cos(-t) + \tilde{\eta}_0 \sin(-t) + i(\tilde{\xi}_0 \sin(-t) - \tilde{\eta}_0 \cos(-t)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e che

$$\begin{pmatrix} \Re z(t) \\ \Im z(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{Y}} \begin{pmatrix} z(t) \\ \bar{z}(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_0 \\ \tilde{\eta}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}(t) \\ \tilde{\eta}(t) \end{pmatrix}$$

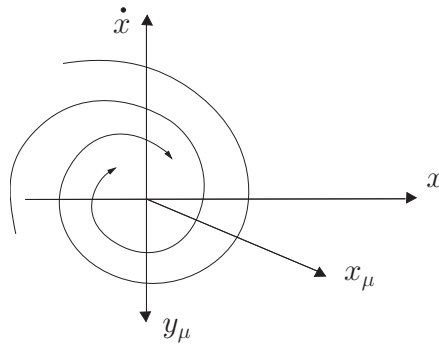
è la somma di due vettori reali $e^t(\tilde{\xi}_0 \cos t - \tilde{\eta}_0 \sin t)x_{\mu} + e^t(\tilde{\xi}_0 \sin t + \tilde{\eta}_0 \cos t)y_{\mu}$. □

Esempio 2.2.19 L'oscillatore armonico debolmente smorzato:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x = 0, \quad x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R}.$$

Sia $|k| < 2$. Si ha $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix}$, con autovalori $\mu_{1,2} = \alpha \pm i\beta := -\frac{k}{2} \pm i\sqrt{1-k^2/4}$. Dalla equazione agli autovettori: $s = (\alpha + i\beta)r$ si ricava $\epsilon_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha + i\beta \end{pmatrix}$, e cioè $\mathbf{P}_{\sim} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix}$. Pertanto, il moto lineare con piccola dissipazione ha un numero infinito di inversioni, infatti la (2.45) fornisce:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha/\beta & -1/\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$



□

Nota 2.2.4 Nel caso di un problema piano, il verso di rotazione si può trovare anche nel seguente modo.

Siano $x, y, r, \varphi \in \mathbb{R}$; la trasformazione $x = r \cos \varphi$ e $y = r \sin \varphi$ dà

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{r^2} (-y\dot{x} + x\dot{y}) = \frac{cx^2 + (d-a)xy - by^2}{r^2} \quad \text{ove} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \mathbf{T}.$$

Dalla $\Delta = Tr^2 - 4Det = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc$ segue che se è $\Delta < 0$ allora è anche $bc < 0$. Siano, per esempio, $b < 0$ e $c > 0$.

Per $y = 0$ è $\dot{\varphi} > 0$; né può annullarsi per alcun $y \neq 0$ perché la condizione $\dot{\varphi} = 0$ implica la $c(x/y)^2 + (d-a)(x/y) - b = 0$ che ha discriminante $(d-a)^2 + 4bc < 0$. Pertanto $\dot{\varphi}$ resta sempre *strettamente positivo* (sotto l'ipotesi $b < 0, c > 0$) e quindi x, y cambiano segno infinite volte. $\triangleright$

Nota 2.2.5 Come si è accennato, l'intero procedimento di risoluzione avrebbe potuto trarre spunto dai risultati visti nel Cap.I. Posto infatti, con $x, y \in \mathbb{R}$, $u := y/x$, si ha $xu' = y' - u$ e la

$$y' = \frac{cx + dy}{ax + by} =: f(x, y)$$

diviene integrabile:

$$\frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Ad esempio nel caso

$$\begin{cases} a = d = \alpha \\ c = -b = \beta \end{cases} \quad \text{e cioè} \quad f(1, u) - u = (1 + u^2)/(\frac{\alpha}{\beta} - u)$$

si ottiene $\frac{\alpha}{\beta} \arctan u - \frac{1}{2} \ln(1 + u^2) - \ln x = cost$ ovvero

$$\ln x^2 + \ln \frac{x^2 + y^2}{x^2} - \frac{2\alpha}{\beta} \arctan \frac{y}{x} = cost,$$

e quindi

$$x^2 + y^2 = cost \cdot e^{2\alpha\theta/\beta}, \quad \theta := \arctan \frac{y}{x}.$$

È chiaro però che in questo modo la complessità del calcolo è molto superiore, anche perché occorre tener presente il cambio di carta ogni volta che la variabile a denominatore si annulla. $\triangleright$

Per esaurire lo studio dei diversi casi che si verificano sul sistema (2.26), al variare dei parametri Tr e Det , rimangono ancora da esaminare i casi non generici.

Zona VI

L'operatore $\mathcal{T}$ di campo nell'equazione (2.26), la cui matrice è $\mathbf{T}$, abbia $Tr = 0$ e $\Delta < 0$; e quindi $Det > 0$. L'operatore $\mathcal{T}$ ha ancora due autovalori complessi coniugati, *ma ora essi hanno entrambi parte reale nulla*:

$$\begin{cases} \mu := +i\beta \\ \bar{\mu} := -i\beta \end{cases} \quad \text{con} \quad \beta := \frac{1}{2}\sqrt{-\Delta} = \sqrt{Det} > 0.$$

Le considerazioni fatte per le Zone III rimangono valide per quanto riguarda la complessificazione e i seguenti risultati algebrici: i due autovettori $\{\epsilon_\mu, \bar{\epsilon}_\mu\}$ individuano il piano reale $\{\frac{1}{2}(\epsilon_\mu + \bar{\epsilon}_\mu); \frac{i}{2}(\epsilon_\mu - \bar{\epsilon}_\mu)\}$ sul quale però ora le traiettorie non sono più trasformate lineari di spirali, bensì di circonferenze concentriche nell'origine, dato che $\alpha = \Re \mu = 0$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\xi}(t) \\ \tilde{\eta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_0 \\ \tilde{\eta}_0 \end{pmatrix}$$

Come si è detto nel § II.3 un tal punto di equilibrio si chiama centro.

Nota 2.2.6 Una trasformazione del tipo $\begin{cases} \xi = q_1 x + q_2 y \\ \eta = q_3 x + q_4 y \end{cases}$ con $x, y, \xi, \eta \in \mathbb{R}$ e con $q_1 q_4 - q_2 q_3 \neq 0$, può essere utile per controllare, mediante l'espressione canonica, che le trasformate lineari delle circonferenze sono ellissi. Infatti la

$$\xi_0^2 + \eta_0^2 = \xi^2 + \eta^2 = (q_1^2 + q_3^2)x^2 + 2(q_1 q_2 + q_3 q_4)xy + (q_2^2 + q_4^2)y^2$$

individua un'ellisse poiché il suo Jacobiano vale $q_1 q_4 - q_2 q_3 \neq 0$; e, d'altra parte,

$$(q_1 q_2 + q_3 q_4)^2 - (q_1^2 + q_3^2)(q_2^2 + q_4^2) = -(q_2 q_3 - q_1 q_4)^2 < 0.$$

Ciò è quanto accade mediante la $\tilde{\xi} = \tilde{P}^{-1}x$ e la soluzione $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}(t)$ che si è appena vista.

Alternativamente, in modo analogo a quanto fatto nella Nota 2.2.5, si sarebbe potuta risolvere la

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\frac{c+du}{a+bu} - u} = \frac{(u + \frac{a}{b})(-1)du}{u^2 - (\frac{d-a}{b})u - \frac{c}{b}}$$

che nella zona IV, e cioè con $\begin{cases} a + d = 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ dà $-\ln x = \frac{1}{2} \ln(u^2 + 2\frac{a}{b}u - \frac{c}{b}) + cost$ ovvero:

$$y^2 + 2\frac{a}{b}xy - \frac{c}{b}x^2 = cost$$

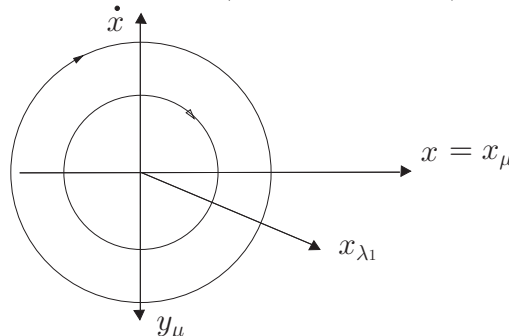
e questa individua un'ellissi dato che $\frac{a^2}{b^2} + \frac{c}{b}$ risulta negativo in conseguenza del fatto che la $a^2 = -ad$ fornisce $a^2 + bc = -Det < 0$ $\triangleright$

Conviene ricordare ancora una volta che nel caso in cui gli autovalori della matrice del campo abbiano parti reali nulle (e immaginarie diverse da zero) la linearizzazione in generale non dà risultati attendibili sul sistema non lineare di partenza. Talvolta però, per esempio nel caso di sistemi conservativi, l'informazione ottenuta dallo studio del sistema lineare è sufficiente a tracciare un corretto diagramma di fase:

Esempio 2.2.23 Discutere la linearizzata del pendolo fisico conservativo:

$$\ddot{q} = -\sin q, \quad (q_0, \dot{q}_0) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R},$$

nell'intorno del punto $(0, 0)$. Il sistema ha: $\partial v(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, e quindi, *localmente*, ha lo "stesso" diagramma di quello che si ottiene in modo esatto mediante la $\dot{x}^2/2 - \cos x = cost$ (si veda anche: Cap.III Esempio 5.1).



□

Zone IV_i e IV_s

Si noti innanzi tutto che in questo caso il rango della matrice $\mathbf{T}$ non è massimo, e quindi ci si deve aspettare un punto di equilibrio diverso dai casi visti: in particolare si vedrà che esso non è isolato.

Si ha $Tr \neq 0$ e $Det = ad - bc = 0$ e quindi $\Delta > 0$: due radici reali distinte: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(Tr \pm \sqrt{Tr^2}) = (0; Tr)$. Gli autovettori si ottengono dalle due relazioni

$$ar_1 + bs_1 = 0 \quad \text{e} \quad ar_2 + bs_2 = (a + d)r_2$$

e quindi

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} b & b \\ -a & d \end{pmatrix}$$

certamente non singolare dato che $Tr = a + d \neq 0$.

N.B. 2.2.24 Se fosse $b = 0$ basterebbe scambiare $x \leftrightarrow y$ ottenendo $\mathbf{T}' = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$ mediante la quale, nell'ipotesi $c \neq 0$, si ottiene $\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} c & c \\ -d & a \end{pmatrix}$ e i seguenti calcoli sarebbero analoghi. D'altra parte il caso $b = c = 0$ verrà esaminato nelle Zone V, se $a = d$, oppure è già noto. $\diamond$

Risulta evidentemente

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{b(a+d)} \begin{pmatrix} d & -b \\ a & +b \end{pmatrix} \quad \text{da cui} \quad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

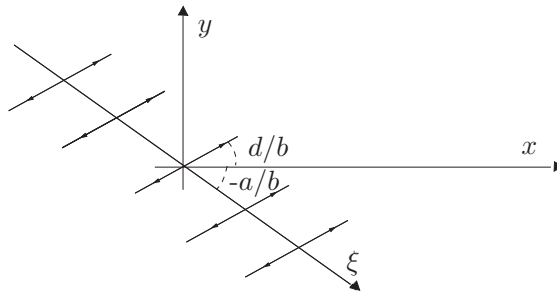
ove si è posto

$$k := (a+d)^{-1}(a^2 + bc + ad + d^2) \equiv (a+d).$$

Pertanto il sistema equivalente è

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k\eta \end{pmatrix}$$

Le rette $\xi = \xi_0$, e cioè le rette $dx - by = cost$ sono senz'altro linee che contengono traiettorie. Queste saranno le due semirette e il punto di equilibrio individuati dalle intersezioni di queste rette con la (unica) $\eta = 0$, ovvero la $ax + by = 0$.



□

Zone V_i e V_s

È questo il caso più difficile, soprattutto se si pensa al caso dei sistemi di dimensioni superiori a due. Nel caso bidimensionale (2.26) si ha $\Delta = 0$ e l'operatore $\mathcal{T}$ ha autovalori (reali) coincidenti: $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda = Tr/2$. D'altra parte, siccome questa λ è soluzione dell'equazione $Det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ se ne conclude che il sistema omogeneo $(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = 0$ ammette soluzioni reali non banali, e quindi che *esiste in $\mathbb{V}$ almeno un autovettore di $\mathcal{T}$: $\epsilon_1 \in Ker(\mathcal{T} - \lambda \mathbf{I}) \setminus \{0\}$.*

Si scelga un qualsiasi ϵ_2 non parallelo a ϵ_1 . Siccome si sta considerando il caso $dim = 2$ si avrà senz'altro

$$\mathcal{T}\epsilon_2 = c_1\epsilon_1 + c_2\epsilon_2$$

I due vettori $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ formano una base in $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^2$ e, rispetto a questa, l'operatore $\mathcal{T}$ ha matrice $\mathbf{T}' = \begin{pmatrix} \lambda & c_1 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$.

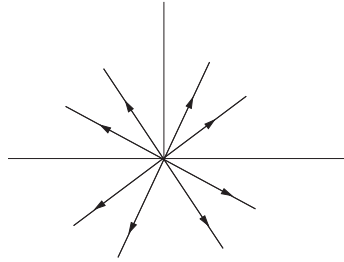
Ma il determinante dell'operatore non dipende dalla base, e quindi

$$\lambda^2 = Det \mathbf{T} = Det \mathbf{T}' = \lambda c_2,$$

il che implica necessariamente $c_2 = \lambda$; (il caso $\lambda = 0$ va trattato direttamente su $\mathbf{T}'\mathbf{x} = 0$).

Sottocaso 1 ϵ_2 sia anch'esso autovettore di $\mathcal{T}$, e cioè $\epsilon_2 \in \text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda \mathbb{I})$ pur non essendo linearmente dipendente da ϵ_1 . Necessariamente $c_1 = 0$, e il $\text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda \mathbb{I})$ coincide con tutto lo spazio delle fasi $\mathbb{V}$. Inoltre la base $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ disaccoppia le due equazioni e siccome la matrice $\mathbb{I}$ commuta con ogni altra, la matrice di $\mathcal{T}$ è in questo caso *diagonale in ogni base*. L'uguaglianza degli autovalori fa sì che il punto di equilibrio sia un particolare nodo: e cioè una *stella*.

Ad esempio con $\lambda > 0$ si ha



Sottocaso 2 $\epsilon_2 \notin \text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda \mathbb{I})$ sebbene appartenente al $\text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda \mathbb{I})^2$.

Infatti, rinominando eventualmente il vettore ϵ_1 con $c_1 \epsilon_1$, la matrice dell'operatore $\mathcal{T}$ in base $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ risulta

$$\mathbf{J} \equiv \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} =: \lambda \mathbb{I}_2 + \mathbf{E}_2, \quad \text{avendo posto} \quad \mathbf{E}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e si ha: $\mathbf{J} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ed $\mathbf{J} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, e quindi:

$$(\mathcal{T} - \lambda \mathbb{I}_2)\epsilon_1 = 0, \quad \text{ed} \quad (\mathcal{T} - \lambda \mathbb{I}_2)\epsilon_2 = \epsilon_1.$$

Da queste si vede subito che

$$\text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda \mathbb{I})^2 = \mathbb{V} \quad \text{mentre è} \quad \text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda \mathbb{I}) \subset \mathbb{V}.$$

In effetti si ha

$$\begin{aligned} \epsilon_2 &\in \text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda \mathbb{I})^2 \setminus \text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda \mathbb{I})^1 \\ \epsilon_1 &\in \text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda \mathbb{I})^1 \setminus \text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda \mathbb{I})^0 \end{aligned}$$

e $\text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda \mathbb{I})$ è l'unico sottospazio di $\mathbb{V}$ che sia $\mathcal{T}$ -invariante.

La matrice $e^{\mathbf{J}t}$ e la matrice $e^{\mathbf{E}_2 t}$ si calcolano agevolmente mediante la definizione stessa di esponenziale di un operatore dopo aver osservato che $\mathbf{E}_2^{n \geq 2} = 0$:

$$e^{(\lambda \mathbb{I} + \mathbf{E}_2)t} = e^{\lambda t} e^{\mathbf{E}_2 t} = e^{\lambda t} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t \right]. \quad (2.46)$$

Un'istruttiva interpretazione del comportamento di un operatore di questo tipo è fornita (si veda: [Arnold 1]), dal seguente:

Esempio 2.2.25 Sia $\mathbb{P}^n([a, b])$ lo spazio n -dimensionale dei polinomi di grado *minore di* n definiti su $[a, b] \subset \mathbb{R}$:

$$p = p(\tau) := \sum_{h=0}^{n-1} \tilde{p}_h \tau^h \quad \begin{cases} \tau \in [a, b] \subset \mathbb{R} \\ p_h \in \mathbb{R}, \quad h = 0, \dots, n-1. \end{cases}$$

Una possibile base per tale spazio è $\{\tilde{\epsilon}_i\}_{i=1, \dots, n} := \{1, \tau, \tau^2, \dots, \tau^{n-1}\}$. Su $\mathbb{P}^n$ si definisca l'operatore

$$\mathcal{N}: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n \quad \text{dato da} \quad \mathcal{N}p := \frac{d}{d\tau} p.$$

L'operatore è evidentemente lineare, ha immagine data da $\mathbb{P}^{n-1}$, ha un solo autovalore e un solo autovettore: $\frac{d}{d\tau} p = \lambda p \iff$

$$\begin{cases} \lambda = 0, \\ p(\tau) = \tau^0. \end{cases} \quad \text{Inoltre (con gli esponenti ad indicare potenze algebriche dello scalare } \tau) \text{ si ha}$$

$$\begin{aligned} \text{Ker } \mathcal{N} &\equiv \text{span}\{\tau^0\} \\ \text{Ker } \mathcal{N}^2 &\equiv \text{span}\{\tau^0, \tau^1\} \\ \text{Ker } \mathcal{N}^3 &\equiv \text{span}\{\tau^0, \tau^1, \tau^2\} \\ &\dots \\ \text{Ker } \mathcal{N}^n &\equiv \text{span}\{\tau^0, \tau^1, \dots, \tau^{n-1}\} \equiv \mathbb{P}^n. \end{aligned}$$

Si vede subito che la base $\{\tilde{\epsilon}_i\}_{i=1,\dots,n}$ non è la più comoda per scrivere la matrice di $\mathcal{N}$. risulta più agevole usare la

$$\{\epsilon_i\}_{i=1,\dots,n} := \left\{ \tau^0, \frac{\tau^1}{1!}, \frac{\tau^2}{2!}, \dots, \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} \right\}, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

infatti si ha

$$\mathcal{N}\epsilon_i \equiv \frac{d}{d\tau} \frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!} = \frac{\tau^{i-2}}{(i-2)!} \equiv \epsilon_{i-1}, \quad \mathcal{N}\epsilon_1 = \frac{d}{d\tau} \tau^0 = 0.$$

Su tale base risulta $p = p(\tau) = p_h \epsilon_h \equiv \sum_{h=0}^{n-1} p_h \frac{\tau^h}{h!}$ e la matrice di $\mathcal{N}$ è

$$\mathbf{E}_n := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 0 & & & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Una matrice $\mathbf{E}_n$ avente questa struttura prende il nome di

Blocco elementare nilpotente di ordine n . Un qualunque operatore che, definito su uno spazio vettoriale $\mathbb{V}$ di dimensione n , abbia rispetto a qualche base matrice data da $\mathbf{E}_n$ prende il nome di **Operatore elementare nilpotente $\mathcal{N}$** di ordine n .

Questa proprietà viene messa chiaramente in luce dalle relazioni

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\epsilon_n &= \epsilon_{n-1} \\ \mathcal{N}^2\epsilon_n &= \mathcal{N}\epsilon_{n-1} = \epsilon_{n-2} \\ &\vdots \\ \mathcal{N}^{n-1}\epsilon_n &= \mathcal{N}\epsilon_2 = \epsilon_1 \\ \mathcal{N}^n\epsilon_n &= \mathcal{N}\epsilon_1 = 0 \end{aligned}$$

le quali implicano che la matrice $(\mathbf{E}_n)^k$ che corrisponde ad $\mathcal{N}^k$ ha la diagonale dei valori non-nulli spostata di k passi “verso Nord-Est” rispetto alla diagonale principale, e che applicando l'operatore $\mathcal{N}$ a un qualunque vettore dello spazio e un numero di volte pari (al più) al suo ordine si ottiene certamente il vettore nullo, mentre esistono certamente vettori x dello spazio per i quali $\mathcal{N}^{n-1}x \neq 0$ (tutti quelli che hanno $x^n \neq 0$). In particolare si ha $\mathcal{N}^k\epsilon_k = 0$ per qualunque $1 \leq k \leq n$ e siccome è $\epsilon_1 = \mathcal{N}^{k-1}\epsilon_k$ si riconosce anche che ciascuno dei versori ϵ_k verifica la

$$\epsilon_k = \mathcal{N}^{n-k}\epsilon_n \quad \text{e quindi} \quad \epsilon_k \in \text{Ker } \mathcal{N}^k \setminus \text{Ker } \mathcal{N}^{k-1} \quad \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

Più in generale, ancora con $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione n , si chiama

Operatore nilpotente di ordine $q \leq n$:= un operatore $\mathcal{N}_q : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ per il quale esistono $q \in \mathbb{N}$ e almeno un $\hat{x} \in \mathbb{V}$ tali che $(\mathcal{N}_q)^{q-1}\hat{x} \neq 0$, ma è $(\mathcal{N}_q)^q x = 0$ per ogni $x \in \mathbb{V}$.

Per un qualsiasi operatore $\mathcal{N}_q$ nilpotente su $\mathbb{V}$ esiste (Teorema di Jordan) una base di $\mathbb{V}$ sulla quale esso ha matrice

$$\mathbf{N}_J := \begin{pmatrix} 0 & \delta_{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{(2)} & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & \delta_{(n-1)} \\ 0 & & & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta_{(k)} \in \{0, 1\}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Il numero q coincide con il massimo numero degli elementi $\delta_{(k)}$ non nulli e adiacenti fra loro, e cioè con la dimensione del più grosso blocco elementare nilpotente contenuto in $\mathbf{N}_J$. Posto infatti $(\mathbf{N}_J)_j^i = \delta_{j-1}^i \delta_j$ (con δ_j^i il simbolo di Kronecker, e non sommare su $j-1$), si ricava sommando su h e non su j :

$$(\mathbf{N}_J)_h^i (\mathbf{N}_J)_j^h = \delta_{h-1}^i \delta_{j-1}^h \delta_{(h-1)} \delta_{(j-1)}, \quad \text{da cui} \quad (\mathbf{N}_J)_j^i = \delta_{j-2}^i \delta_{(j-2)} \delta_{(j-1)}.$$

Esempio (seconda parte) Fissato $t \in \mathbb{R}$, su $\mathbb{P}^n$ si definisca l'operatore

$$\mathcal{H}_t : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n \quad \text{dato da} \quad \mathcal{H}_t p(\tau) := p(\tau + t).$$

Anche $\mathcal{H}_t$ è lineare, infatti

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_t \left(\sum_{h=0}^{n-1} (p_h + q_h) \frac{\tau^h}{h!} \right) &= \sum_{h=0}^{n-1} (p_h + q_h) \frac{(\tau + t)^h}{h!} = \\ &= \sum_{h=0}^{n-1} p_h \frac{(\tau + t)^h}{h!} + \sum_{h=0}^{n-1} q_h \frac{(\tau + t)^h}{h!} = \mathcal{H}_t p(\tau) + \mathcal{H}_t q(\tau). \end{aligned}$$

Si calcoli ora lo sviluppo di Taylor del polinomio $p(\tau + t)$ rispetto al parametro t e di centro il punto τ . Essendo $\left. \frac{d^h}{dt^h} p(\tau + t) \right|_{t=0} = \mathcal{N}^h p(\tau)$ e dato che $\mathcal{N}^n = \mathcal{N}^{n+1} = \dots = 0$ tale sviluppo, in questo spazio, è senz'altro uno sviluppo in somme finite; per cui si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_t p(\tau) &:= p(\tau + t) = \sum_{h=0}^{n-1} \frac{d^h}{dt^h} p(\tau + t) \Big|_{t=0} \frac{t^h}{h!} = \sum_{h=0}^{n-1} \frac{t^h}{h!} \frac{d^h}{d\tau^h} p(\tau) \\ &= \sum_{h=0}^{n-1} \frac{t^h}{h!} \mathcal{N}^h (p(\tau)) = \sum_{h=0}^{n-1} \left(\frac{t^h}{h!} \mathcal{N}^h \right) p(\tau) =: e^{\mathcal{N}t} p(\tau) \end{aligned}$$

Pertanto l'operatore $\mathcal{H}_t : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ coincide con l'esponenziale di $\mathcal{N}t$. La sua matrice, in quella base $\{\epsilon_i\}_{i=1,\dots,n}$ nella quale l'operatore $\mathcal{N}$ ha matrice $\mathbf{E}_n$, sarà $e^{\mathbf{E}_n t}$, e questa la si può ricavare o calcolando direttamente le potenze della matrice $\mathbf{E}_n$, oppure osservando che la sua $(j+1)$ -esima colonna, $j = 0, 1, \dots, n-1$, si può ricavare dalla espressione:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_t\left(\frac{\tau^j}{j!}\right) &= \frac{(\tau+t)^j}{j!} = \sum_{k=0}^j \frac{\tau^k}{k!} \frac{t^{j-k}}{(j-k)!} = \\ &= \sum_{i=1}^{j+1} \frac{\tau^{(i-1)}}{(i-1)!} \frac{t^{j-i+1}}{(j-i+1)!} = \sum_{i=1}^{j+1} \frac{t^{j-i+1}}{(j-i+1)!} \epsilon_i \\ &=: \left(e^{\mathbf{E}_n t}\right)_{j+1}^i \epsilon_i \quad ;\end{aligned}$$

quindi si ha

$$e^{\mathbf{E}_n t} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & & & \ddots & t \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix} = \sum_{h=0}^{n-1} \frac{t^h}{h!} (\mathbf{E}_n)^h .$$

□

A volte, quando si lavora sui polinomi, l'operatore $\mathcal{N}$ mantiene la sua notazione originaria $d/d\tau$ e il suo esponenziale viene scritto con $e^{t \frac{d}{d\tau}}$ (l'operatore di derivazione è il generatore del gruppo delle traslazioni), ma è evidente che se, più in generale, un certo operatore agisce su uno spazio vettoriale $\mathbb{V}$ a dimensione finita n in modo che in qualche base la sua matrice è $\mathbf{E}_n$ allora, come si è già osservato, esso condivide tutte le caratteristiche dell'operatore $\mathcal{N}$ appena visto, e in quella stessa base il suo esponenziale $e^{\mathcal{N}t}$ ha matrice data dalla $e^{\mathbf{E}_n t}$.

In tal modo si è risolto il problema della determinazione della matrice esponenziale di un operatore elementare nilpotente.

Esempio (terza parte)

Si fissi ora un numero reale $\lambda \neq 0$ (o complesso, e allora lo spazio vettoriale qui di seguito è da intendersi complessificato di uno reale) e si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{A}\mathbb{P}_\lambda^n$ dei "quasi-polinomi" di esponente λ e grado minore di n , e cioè funzioni del tipo $e^{\lambda\tau}p(\tau)$ con $p(\tau) \in \mathbb{P}^n$ come sopra. Anche $\mathbb{A}\mathbb{P}_\lambda^n$ è uno spazio a dimensione finita n ; una sua possibile base è

$$\{\epsilon_i\}_{i=1,\dots,n} := \left\{ e^{\lambda\tau}, e^{\lambda\tau} \frac{\tau}{1!}, e^{\lambda\tau} \frac{\tau^2}{2!}, \dots, e^{\lambda\tau} \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} \right\},$$

infatti $e^{\lambda\tau}p(\tau) = 0 \iff p(\tau) = 0 \iff p_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$.

Si consideri su $\mathbb{A}\mathbb{P}_\lambda^n$ l'operatore $\mathcal{T} := \frac{d}{d\tau}$; esso (è lineare ed) ha $\text{Im } \mathcal{T} \subseteq \mathbb{A}\mathbb{P}_\lambda^n$. La sua matrice, nella base indicata, è detta

$$\text{Blocco elementare di Jordan} \quad := \quad \mathbf{J} := \lambda \mathbf{I}_n + \mathbf{E}_n := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

(si noti che in questo spazio, a t e τ fissati, l'operatore $t \frac{d}{d\tau}$ è un operatore lineare a norma limitata, ma non più nilpotente se $\lambda \neq 0$).

Allo stesso modo, si consideri su $\mathbb{A}\mathbb{P}_\lambda^n$ l'operatore (lineare) di traslazione:

$$\mathcal{H}_t \left(e^{\lambda\tau} p(\tau) \right) = e^{\lambda(\tau+t)} p(\tau+t) = e^{\lambda\tau} \left(e^{\lambda t} p(\tau+t) \right) .$$

$\mathcal{H}_t$ manda $\mathbb{A}\mathbb{P}_\lambda^n$ in sé, infatti anche quest'ultimo è un quasi-polinomio in $\mathbb{A}\mathbb{P}_\lambda^n$ e come tale ammette serie di Taylor di punto iniziale τ , convergente assolutamente per ogni t e ogni τ . Pertanto è giustificata la

$$\mathcal{H}_t \left(e^{\lambda\tau} p(\tau) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k}{dt^k} \left(e^{\lambda(\tau+t)} p(\tau+t) \right) \Big|_{t=0} \frac{t^k}{k!} = e^{t \frac{d}{d\tau}} \left(e^{\lambda\tau} p(\tau) \right)$$

e cioè anche qui l'operatore di traslazione $\mathcal{H}_t : \mathbb{A}\mathbb{P}_\lambda^n \rightarrow \mathbb{A}\mathbb{P}_\lambda^n$ è l'esponenziale dell'operatore $t \frac{d}{d\tau}$.

D'altra parte il calcolo di $e^{\lambda(\tau+t)} p(\tau+t)$ è assai agevole:

$$\begin{aligned}e^{\lambda(\tau+t)} p(\tau+t) &= e^{\lambda\tau} e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{n-1} p_j \sum_{k=0}^j \frac{\tau^k}{k!} \frac{t^{j-k}}{(j-k)!} \\ &= \sum_{j=1}^n p_{j-1} \sum_{i=1}^j e^{\lambda t} \frac{t^{j-i}}{(j-i)!} e^{\lambda\tau} \frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!} \\ &=: \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n p_{j-1} (e^{\mathbf{J}t})_{j,i}^i \epsilon_i\end{aligned}$$

Le precedenti considerazioni mostrano esplicitamente che la matrice esponenziale $e^{\mathbf{J}t}$ relativa a un blocco elementare di Jordan $\mathbf{J} = \lambda \mathbf{I}_n + \mathbf{E}_n$ di dimensione n è data da

$$e^{\mathbf{J}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & te^{\lambda t} \\ 0 & \cdots & & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \sum_{h=0}^{n-1} e^{\lambda t} \frac{t^h}{h!} (\mathbf{E}_n)^h.$$

Su questa si può controllare che, siccome $\lambda \mathbf{I}_n \mathbf{E}_n = \mathbf{E}_n \lambda \mathbf{I}_n = \lambda \mathbf{E}_n$, si ha

$$e^{\mathbf{J}t} = e^{(\lambda \mathbf{I}_n + \mathbf{E}_n)t} = e^{\lambda \mathbf{I}_n t} e^{\mathbf{E}_n t}. \quad \square$$

Si ricordino ora i noti risultati della teoria generale degli operatori lineari secondo la quale ciascun arbitrario operatore $\mathcal{T} \in \mathbb{L}(\mathbb{V})$ ammette altrettanti sottospazi $\mathbb{M}_j \subset \mathbb{V}$, $\mathcal{T}$ -invarianti, detti autospazi generalizzati, quanti sono i suoi autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ distinti. Ciascuno degli $\mathbb{M}_j$ ha dimensione pari alla molteplicità algebrica $a(\lambda_j)$ del corrispondente autovalore λ_j , ed è tale che l'operatore $(\mathcal{T} - \lambda_j \mathbf{I})|_{\mathbb{M}_j}$ è nilpotente di ordine $q_j \leq a_j$.

In virtù della Nota che segue l'Esempio 2.0 tali proprietà, unite a quanto fatto nell'esempio appena visto, risolvono la determinazione della matrice esponenziale di un qualsiasi operatore $\mathcal{T}$ *quando sia nota la base che gli assegna la forma di Jordan $\mathbf{T}_J$* ; e cioè, quando sia nota la base che gli assegna una matrice avente non nulli solo dei blocchi elementari di Jordan disposti lungo la diagonale principale.

Esempio 2.2.26 L'oscillatore $\ddot{x} + k\dot{x} + x = 0$ al punto critico: $|k| = 2$.

Si assuma $k = +2$, il caso $k = -2$ essendone diverso solo per il verso con il quale le traiettorie vengono descritte.

All'equilibrio si ha $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ e quindi $\lambda_{1,2} = -1$.

Dalla prima equazione agli autovettori si ricava $\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e cioè un vettore nel $\text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda \mathbf{I})$. Poi, dal fatto che *per qualsiasi* $r, s \in \mathbb{R}$ si ha

$$(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \equiv (r+s) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

si deduce che il $\text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda \mathbf{I})$ ospita solo il versore ϵ_1 e non altri ad esso linearmente indipendenti.

Scelto per esempio come secondo versore di base il vettore $\epsilon_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dalla (2.47) si riconosce che $(\mathcal{T} - \lambda \mathbf{I})\epsilon_2 = \epsilon_1$. Di conseguenza nella base $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ la matrice di $\mathcal{T}$ è proprio il blocco di Jordan $\mathbf{J} = \lambda \mathbf{I}_2 + \mathbf{E}_2$ che implica $(\mathcal{T} - \lambda \mathbf{I})^2 = 0$.

Si ha cioè

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \lambda \mathbf{I}_2 + \mathbf{E}_2.$$

Chiamate ξ, η le componenti del vettore x in base $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, il sistema equivalente alla $\dot{x} = \mathcal{T}x$ nel caso di radice doppia: λ è allora dato da:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \lambda \xi + \eta \\ \dot{\eta} = \lambda \eta. \end{cases}$$

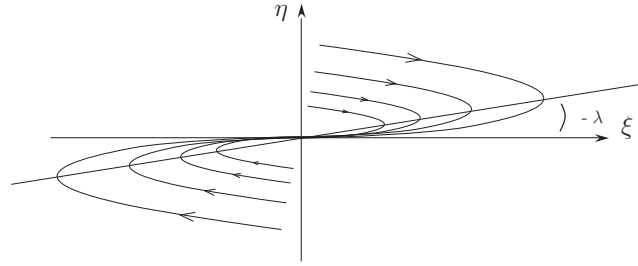
Come già visto nella (2.46) più sopra, in base $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, l'evolvente $e^{\mathcal{T}t}$ ha matrice data da

$$e^{\mathbf{J}t} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{\lambda t} (\mathbf{I}_2 + t \mathbf{E}_2) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \vdots & \\ \epsilon_1 & t\epsilon_1 + \epsilon_2 \\ \vdots & \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

da cui seguono, in particolare, le soluzioni

$$\begin{cases} \xi(t) = e^{\lambda t}(\xi_0 + t\eta_0) \\ \eta(t) = e^{\lambda t}\eta_0 \end{cases} \quad \text{con traiettorie} \quad \begin{cases} \xi = \frac{\eta}{\lambda} \ln \frac{\eta}{\eta_0} + \eta \frac{\xi_0}{\eta_0} \\ \text{oppure} \quad \eta = 0. \end{cases}$$

L'origine è punto di equilibrio dal nome di Nodo improprio.



In definitiva, le oscillazioni lineari al valore critico $k = 2$ sono date da

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = P e^{\lambda t} (\mathbf{I} + t \mathbf{E}_2) P^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix} = P e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

□

Nota 2.2.7 L'osservazione che ha portato alle (2.46), (2.48) si può perfezionare. Si può notare infatti la validità dei seguenti passaggi:

$$P(\mathbf{I} + t \mathbf{E}_2)P^{-1} = \mathbf{I} + t P \mathbf{E}_2 P^{-1} = \mathbf{I} + t (\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I})$$

leciti in quanto l'anti-trasformata di $\mathbf{E}_2 = \mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}_2$, in questo esempio, è proprio la matrice $\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}$ che esprime nella base assegnata l'operatore $\mathcal{T} - \lambda \mathbf{I}$ elementare nilpotente di ordine $q = 2$. ▷

In base alla Nota 2.2.7 la soluzione dell'oscillatore critico è data, *più semplicemente della* (2.49), dalla

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} &= e^{-t} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix} \\ &= e^{-t} \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

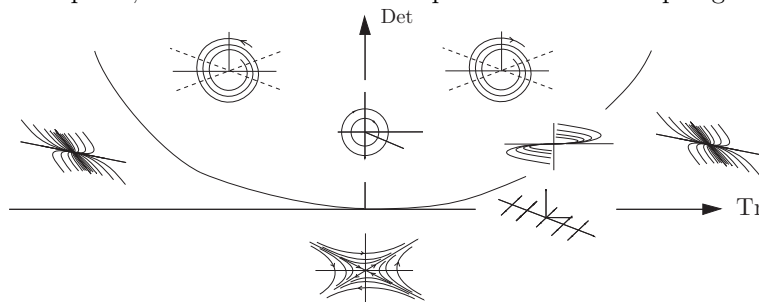
Curiosità: Il versore ϵ_1 coincide con il vettore ϵ_μ del caso $|k| < 2$ quando lo si calcoli per $|k| = 2$, ed è proporzionale a ciò che diviene il versore ϵ_1 del caso $k > 2$ nel limite $k \rightarrow 2$.

Nota 2.2.8 Con lo stesso metodo visto nella Nota 2.2.4, e con $x, y, \varphi \in \mathbb{R}$, si riconosce che $\dot{\varphi} = 0$ per i punti tali che $cx^2 + (d-a)xy - by^2 = 0$, e cioè, siccome qui $\Delta = (a-d)^2 + 4bc = 0$, lungo le due semirette $\frac{x}{y} = -\frac{d-a}{2c}$.

D'altra parte l'autovalore $\lambda = \frac{a+d}{2}$ fornisce per l'autovettore $\epsilon = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ la condizione $cr = \frac{a-d}{2}s$. Se ne ricava che $\dot{\varphi}$ rimane strettamente diverso da zero, (positivo se $c > 0$ e $b < 0$), *salvo che per i vettori paralleli ad ϵ* . ▷

Con tale risultato si esaurisce lo studio dei possibili equilibri per un sistema lineare a coefficienti costanti e dimensione due. Essi possono essere ricordati mediante la figura qui di seguito disegnata sul piano $(\text{Tr } \mathcal{T}, \text{Det } \mathcal{T})$ dell'operatore $\mathcal{T}$ di campo.

In essa i diagrammi indicati sono globali per il sistema lineare; verrà poi ricordato (si veda: § IV.1 teor.2]) che *ad eccezione del caso $\text{Re } \lambda = 0$* essi sono anche “simili”, per ogni t , *ma solo localmente intorno al punto di equilibrio* a quelli del sistema non lineare $\dot{x} = v(x)$ con $v(0) = 0$, $v_*(0) = \mathcal{T}$. In tale affermazione si devono considerare simili i nodi e le spirali; si tratta cioè di una semplice similitudine topologica.



2.3 Sistemi differenziali lineari a coefficienti costanti, in $\mathbb{R}^n$

Lo studio dei sistemi lineari $\dot{x} = \mathcal{T}x$ in spazi reali a dimensione maggiore di due, ma ancora a coefficienti costanti, non presenta difficoltà concettuali, salvo nel caso in cui l'operatore del campo abbia autovalori multipli. Così come si è fatto nel caso bidimensionale, il metodo di risoluzione infatti ricorre alla rappresentazione dei vettori rispetto alla base propria dell'operatore. Quando essa non esista, e cioè quando l'operatore $\mathcal{T}$ non sia diagonalizzabile né semisemplice, è conveniente far uso del teorema di Jordan, il quale dimostra l'esistenza di una base, che verrà nel seguito chiamata anch'essa base propria per l'operatore, rispetto alla quale la matrice $\mathbf{T}$ che gli corrisponde è formata da tutti blocchi elementari di Jordan disposti lungo la diagonale principale, e nulla altrove:

$$\mathbf{T}_J = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 & \vdots & 0 & \vdots & & \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & \vdots & \mathbf{T}_2 & \vdots & & \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ & & & & & \cdots \\ & & & & & \vdots & \mathbf{T}_r \end{pmatrix}$$

con

$$\mathbf{T}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{s_{j-1}+1} & \vdots & 0 & \vdots & & \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & \vdots & \mathbf{J}_{s_{j-1}+2} & \vdots & & \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ & & & & & \cdots \\ & & & & & \vdots & \mathbf{J}_{s_j} \end{pmatrix}$$

nella quale si sono indicati, in modo analogo al precedente paragrafo,

$$\mathbf{J}_{i_j} := \lambda_j \mathbf{I}_{k_{i_j}} + \mathbf{E}_{k_{i_j}} \equiv \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda_j \end{pmatrix}$$

con: $s_0 := 0$, $s_{j-1} := \sum_{h=1}^{j-1} g_h$, $i_j \in \{s_{j-1} + 1, s_{j-1} + 2, \dots, s_{j-1} + g_j =: s_j\}$, con $k_{i_j} \leq q_j \leq a_j$, $j = 1, \dots, r$, e dove (si veda anche l'Appendice A.6 e la Nota 2.3.1 qui di seguito):

- $q_j \leq a_j := a(\lambda_j)$ è l'ordine di nilpotenza dell'operatore $(\mathcal{T} - \lambda_j \mathbf{I})|_{\mathbb{M}_j}$;
- $\mathbf{E}_{k_{i_j}}$ il blocco elementare nilpotente di ordine k_{i_j} ;
- $a(\lambda_j)$ la molteplicità algebrica di λ_j , e cioè la molteplicità dell'autovalore λ_j quale radice dell'equazione $\text{Det}(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) = 0$;
- $a(\mu_j)$ la molteplicità algebrica delle coppie di autovalori $\mu_j, \bar{\mu}_j$ se presenti, e in tal caso le varietà invarianti sono di dimensione due per ciascuna coppia di autovalori complessi coniugati;
- $r \leq n$ il numero totale di autovalori (o coppie di autovalori, se complessi) distinti;
- $g_j = \dim \text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda_j \mathbf{I})$ la molteplicità geometrica di λ_j (o della coppia $\mu_j, \bar{\mu}_j$);
- $g := \sum_{j=1}^r g_j$ il numero totale di autovettori (o coppie di autovettori) distinti;
- $\mathbb{M}_j := \text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda_j \mathbf{I})^{q_j}$ l'autospazio generalizzato corrispondente all'autovalore λ_j (o alla coppia di autovalori $\mu_j, \bar{\mu}_j$);
- $\dim \mathbb{M}_j = \sum_{i_j=s_{j-1}+1}^{s_j} k_{i_j} = a_j = a(\lambda_j)$ (oppure $\dim \mathbb{M}_j = 2a(\mu_j)$ nel caso delle coppie $\mu_j, \bar{\mu}_j$); la matrice $\mathbf{T}_j$ è $(a_j \times a_j)$, e se $\lambda_j \neq 0$ è anche $a_j = \text{Rank } \mathcal{T}_j$;

- almeno uno dei $\mathbf{J}_{i_j}$ nella rappresentazione di Jordan $\mathbf{T}_J$, ha dimensione k_{i_j} uguale al corrispondente q_j .

Nella stessa base l'esponenziale $e^{\mathbf{T}t}$ ha matrice data da

$$e^{\mathbf{T}_J t} = \begin{pmatrix} e^{\mathbf{J}_1 t} & \vdots & 0 & \vdots & \\ \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & \vdots & e^{\mathbf{J}_2 t} & \vdots & \\ \dots & & \dots & & \dots \\ & \vdots & & \vdots & e^{\mathbf{J}_3 t} \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

dove, con $k := k_{i_j}$,

$$e^{\mathbf{J}_{i_j} t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_j t} & te^{\lambda_j t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_j t} & \dots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda_j t} \\ 0 & e^{\lambda_j t} & te^{\lambda_j t} & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & te^{\lambda_j t} \\ 0 & \dots & & 0 & e^{\lambda_j t} \end{pmatrix},$$

oppure, se sono presenti (coppie) di autovalori complessi $\mu, \bar{\mu}$,

$$e^{\mathbf{J}_{i_j} t} = \begin{pmatrix} e^{\Re \mu_j t} & te^{\Re \mu_j t} & \frac{t^2}{2!}e^{\Re \mu_j t} & \dots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\Re \mu_j t} \\ 0_2 & e^{\Re \mu_j t} & te^{\Re \mu_j t} & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & te^{\Re \mu_j t} \\ 0_2 & \dots & & 0_2 & e^{\Re \mu_j t} \end{pmatrix},$$

con $e^{\Re \mu_j t} \equiv e^{\alpha_j t} \begin{pmatrix} \cos \beta_j t & -\sin \beta_j t \\ \sin \beta_j t & \cos \beta_j t \end{pmatrix}$ qualora vengano usate come direzioni proprie le corrispondenti coppie $\{\Re \epsilon_{\mu_j}, -\Im \epsilon_{\mu_j}\}$.

Nota 2.3.1 [importante] Se lo scopo è solo quello di risolvere l'equazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ e non quello di trovare esplicitamente la base propria dell'operatore $\mathcal{T}$, rappresentato dalla matrice $\mathbf{T}$ nell'assegnata base, non conviene eseguire tutto il calcolo necessario ad individuare la base di Jordan. Infatti, dalla teoria è sufficiente estrarre i seguenti risultati (si veda: Appendice A.6, e Nota 2.2.7). $\triangleright$

- Lo spazio vettoriale $\mathbb{V}$ si separa in una somma diretta

$$\mathbb{V} = \mathbb{M}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{M}_r, \quad (3.50)$$

ove gli spazi $\mathbb{M}_j$ e cioè gli autospazi generalizzati sono definiti da

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_j &:= \text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda_j \mathbb{I})^{q_j} \\ 1 \leq q_j \leq a(\lambda_j) &\equiv \dim \mathbb{M}_j \\ \text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda_j \mathbb{I})^{q_j-1} &\subset \text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda_j \mathbb{I})^{q_j} = \text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda_j \mathbb{I})^{q_j+1}; \end{aligned}$$

- l'operatore $(\mathcal{T} - \lambda_j \mathbb{I})$ è nilpotente di ordine q_j su $\mathbb{M}_j$ ed è invertibile sul complementare $\mathbb{V} \ominus \mathbb{M}_j$;
- ciascuno degli $\mathbb{M}_j$ è invariante sia rispetto a $(\mathcal{T} - \lambda_j \mathbb{I})$ che rispetto a $\mathcal{T}$.

Ciò permette di osservare che *per la determinazione della dinamica sono questi sottospazi e non i singoli autovettori generalizzati ad essere gli equivalenti degli autovettori di un operatore diagonalizzabile*. Infatti, così come nel caso di diagonalizzabilità (e cioè di autovalori tutti divisori elementari semplici: $g_j = a_j$ per ciascun $j = 1, \dots, r$) per scrivere la dinamica occorre e basta trovare gli autovettori dell'operatore, per scrivere la dinamica nel caso generale *occorre e basta la conoscenza degli $\mathbb{M}_j$ e di un'arbitraria base $\{\tilde{\epsilon}_{s_{j-1}+i}\}_{i=1, \dots, a_j}$ in essi (e non necessariamente quella di Jordan: $(\mathcal{T} - \lambda_j \mathbb{I})\epsilon_j = \epsilon_{j-1}$)*. Ciò perché una volta individuati per ciascun $j = 1, \dots, r$ gli autospazi generalizzati $\mathbb{M}_j$ e una base in essi, *in virtù della (3.50) ciascun $x \in \mathbb{V}$ ammette un'unica rappresentazione come combinazione lineare di altrettanti vettori: $x_j \in \mathbb{M}_j$, per $j = 1, \dots, r$; e siccome $\mathbb{M}_j$ è un sottospazio $\mathcal{T}$ -invariante, e quindi $\mathcal{T}^k$ -invariante, se un x_0 è in $\mathbb{M}_j$ anche il suo evoluto $e^{\mathcal{T}t}x_0$ sarà in $\mathbb{M}_j$*

Nei dettagli ciò comporta:

- Decomporre il dato iniziale nei suoi addendi, uno per ciascuno degli spazi $\mathbb{M}_j$:

$$x_0 =: \sum_{j=1}^r x_j|_0, \quad x_j|_0 \in \mathbb{M}_j, \quad j = 1, \dots, r.$$

A tale scopo si può cercare la matrice $\mathbf{P}_\sim$ che esprime nella base data: $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ gli r gruppi di vettori: $\{\tilde{\epsilon}_{\sigma_{j-1}+i}\}_{i=1, \dots, a_j}$ tali che: $\sigma_0 := 0$, $\sigma_j = \sigma_{j-1} + a_j$, e $\text{Ker}(\mathbf{T} - \lambda_j \mathbb{I})^{q_j} = \text{span} \{\tilde{\epsilon}_{\sigma_{j-1}+1}, \tilde{\epsilon}_{\sigma_{j-1}+2}, \dots, \tilde{\epsilon}_{\sigma_j}\}$, $j = 1, \dots, r$. Le colonne $\tilde{\epsilon}_h$, $h = 1, \dots, n$, della $\mathbf{P}_\sim$ sono composte dalle $\mathcal{E}$ -componenti dei vettori $\tilde{\epsilon}_h$, determinate in base alle corrispondenti $(n - a_j)$ relazioni lineari su tali $\{e\}$ -componenti che impongono l'appartenenza del j -mo gruppo al sottospazio $\mathbb{M}_j$. Si determinano così le $\{\tilde{e}\}$ -componenti $(\tilde{x}_0^1, \dots, \tilde{x}_0^n)$ dei vettori $x_j|_0 \in \mathbb{M}_j$ mediante la

$$\sum_{j=1}^r x_j|_0 = \sum_{j=1}^r \left(\sum_{h=\sigma_{j-1}+1}^{h_j} \tilde{x}_0^h \tilde{\epsilon}_h \right) = x_0.$$

- Per ciascun $x_j|_0$ fare uso della nilpotenza di $(\mathcal{T} - \lambda_j \mathbb{I})$ su $\mathbb{M}_j$ e dell'identità $e^{\lambda t}x = (e^{\lambda t} \mathbb{I})x = e^{\lambda \mathbf{I} t}x$ per ottenere

$$\begin{aligned} e^{\mathcal{T}t}x_j|_0 &= e^{(\mathcal{T}-\lambda_j \mathbb{I})t}x_j|_0 e^{\lambda_j t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\mathcal{T} - \lambda_j \mathbb{I})^k x_j|_0 e^{\lambda_j t} \\ &= \sum_{k=0}^{q_j-1} \frac{t^k}{k!} (\mathcal{T} - \lambda_j \mathbb{I})^k x_j|_0 e^{\lambda_j t}. \end{aligned}$$

- Ricavare infine

$$\begin{cases} x : t \mapsto x(t) = \sum_{j=1}^r \left[\sum_{k=0}^{q_j-1} \frac{t^k}{k!} (\mathcal{T} - \lambda_j \mathbb{I})^k \right] x_j|_0 e^{\lambda_j t} \\ x_0 =: \sum_{j=1}^r x_j|_0, \quad x_j|_0 \in \text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda_j \mathbb{I})^{q_j} =: \mathbb{M}_j \end{cases} \quad (3.51)$$

Si osservi che se $a_j > 1$ e ciononostante $q_j = 1$, e cioè se $\mathcal{T}$ ha divisori elementari semplici in corrispondenza a λ_j , il vettore $x_j|_0$ risulta anch'esso autovettore di $\mathcal{T}$, in quanto combinazione lineare di più autovettori relativi alla stessa λ_j .

In generale invece, c'è almeno un vettore del tipo

$$x_{q_j}(t) = \left(\frac{t^{q_j-1}}{(q_j-1)!} \epsilon_1^{(j)} + \frac{t^{q_j-2}}{(q_j-2)!} \epsilon_2^{(j)} + \dots + \epsilon_{q_j}^{(j)} \right) e^{\lambda_j t}$$

e cioè il vettore soluzione uscente da $x_{q_j}(0) = \epsilon_{q_j}^{(j)}$ primo vettore di una catena di lunghezza q_j e certamente esistente in $\mathbb{M}_j$. $\square$

In definitiva, per il sistema lineare omogeneo autonomo, dato in coordinate da

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T} \mathbf{x} \quad \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \quad n > 2 \quad (3.52)$$

si ha che:

(•) Se $\text{Det}(\mathcal{T} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ ha tutte le radici $\{\lambda_i\}_{i=1,\dots,n}$ distinte (in $\mathbb{C}^n$), ogni soluzione è del tipo

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{P} e^{\Lambda t} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}_0 = \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \boldsymbol{\epsilon}_1 & \vdots & e^{\lambda_2 t} \boldsymbol{\epsilon}_1 & \vdots & \vdots & e^{\lambda_n t} \boldsymbol{\epsilon}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0^1 \\ \vdots \\ \xi_0^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Più esplicitamente: se $\text{Det}(\mathcal{T} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ ha ν radici reali: $\{\lambda_k\}_{k=1,\dots,\nu}$, e τ coppie di radici complesse: $\{\mu_h, \bar{\mu}_h\}_{h=1,\dots,\tau}$, e quindi $\nu + 2\tau = n$, allora:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \sum_{k=1}^{\nu} \xi_0^k e^{\lambda_k t} \boldsymbol{\epsilon}_k + \Re e \left(\sum_{h=\nu+1}^{\nu+\tau} z_0^h e^{\mu_h t} \boldsymbol{\epsilon}_{\mu_h} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\nu} \xi_0^k e^{\lambda_k t} \boldsymbol{\epsilon}_k + \sum_{h=\nu+1}^{\nu+\tau} \Re e (z_0^h e^{\mu_h t}) \mathbf{x}_{\mu_h} + \Im m (z_0^h e^{\mu_h t}) \mathbf{y}_{\mu_h} = \\ &= \sum_{k=1}^{\nu} \xi_0^k e^{\lambda_k t} \boldsymbol{\epsilon}_k + \sum_{h=\nu+1}^{\nu+\tau} e^{\alpha_h t} \left[(\tilde{\xi}_0^h \cos \beta_h t - \tilde{\eta}_0^h \sin \beta_h t) \mathbf{x}_{\mu_h} + \right. \\ &\quad \left. + (\tilde{\xi}_0^h \sin \beta_h t + \tilde{\eta}_0^h \cos \beta_h t) \mathbf{y}_{\mu_h} \right] \end{aligned}$$

ove le colonne della matrice $\mathbf{P}$ contengono le $\{e\}$ -componenti dei vettori (reali, individuati da $\mathcal{T}$) $\{\boldsymbol{\epsilon}_k\}_{k=1,\dots,\nu}$ e $\{\mathbf{x}_{\mu_h}, \mathbf{y}_{\mu_h}\}_{h=1,\dots,\tau}$; e dove $\{\xi_0^k, \xi_0^h, \eta_0^h\}$ sono le n costanti (scalari) reali arbitrarie (le z_0^h sono complesse) corrispondenti alle condizioni iniziali.

(•) Se $\text{Det}(\mathcal{T} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ ha ν radici reali distinte $\{\lambda_k\}_{k=1,\dots,\nu}$, eventualmente con molteplicità $a(\lambda_k) \geq 1$, e τ coppie di radici complesse distinte $\{\mu_h, \bar{\mu}_h\}_{h=1,\dots,\tau}$, eventualmente con molteplicità $a(\mu_h) \geq 1$, e allora è $\nu + 2\tau = r < n$, ogni soluzione ha la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{P} e^{\mathcal{T} t} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}_0 = \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \boldsymbol{\epsilon}_1^{(1)} & \vdots & e^{\lambda_1 t} (t \boldsymbol{\epsilon}_1^{(1)} + \boldsymbol{\epsilon}_2^{(1)}) & \vdots & e^{\lambda_1 t} (\frac{1}{2} t^2 \boldsymbol{\epsilon}_1^{(1)} + t \boldsymbol{\epsilon}_2^{(1)} + \boldsymbol{\epsilon}_3^{(1)}) & \vdots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0^1 \\ \vdots \\ \xi_0^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

o, più esplicitamente, con $\boldsymbol{\xi}_h(t) = \Re e [\mathbf{I} + t(\mathbf{T} - \mu_h \mathbf{I}) + \dots] \mathbf{z}_h|_0$, etc.,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \sum_{k=1}^{\nu} \mathbf{p}_k(t) e^{\lambda_k t} + \Re e \left(\sum_{h=\nu+1}^{\nu+\tau} \mathbf{z}_h(t) e^{\mu_h t} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\nu} \mathbf{p}_k(t) e^{\lambda_k t} + \sum_{h=\nu+1}^{\nu+\tau} e^{\alpha_h t} \left[\tilde{\boldsymbol{\xi}}_h(t) \cos \beta_h t - \tilde{\boldsymbol{\eta}}_h(t) \sin \beta_h t \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\boldsymbol{\xi}}_h(t) \sin \beta_h t + \tilde{\boldsymbol{\eta}}_h(t) \cos \beta_h t \right] \\ &= \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=0}^{q_j-1} \frac{t^k}{k!} (\mathbf{T} - \lambda_j \mathbf{I})^k e^{\lambda_j t} \mathbf{x}_j|_0 \\ &\quad + \sum_{j=\nu+1}^{\nu+\tau} \Re e \left(\sum_{k=0}^{q_j-1} \frac{t^k}{k!} (\mathbf{T} - \mu_j \mathbf{I})^k e^{\mu_j t} \mathbf{z}_j|_0 \right). \end{aligned}$$

Si nota che i vettori con componenti costanti (reali o complesse) arbitrarie del caso precedente vengono sostituiti da (certe) loro combinazioni polinomiali, di grado minore delle molteplicità algebriche, esse stesse combinate linearmente con coefficienti arbitrari.

Caso particolare è quello di un'unica equazione di ordine n in una variabile scalare $x : t \mapsto x(t)$ e cioè, indicando con $x^{[h]} := \frac{d^h}{dt^h} x$, l'equazione:

$$x^{[n]} + a_1 x^{[n-1]} + \dots + a_{n-1} x^{[1]} + a_n x = 0, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \quad (3.53)$$

Le soluzioni di tale equazione consistono ovviamente in una famiglia di funzioni scalari ma, per poter usare lo studio fatto finora, esse verranno cercate come componenti di vettori funzioni, in effetti speciali vettori: tali da avere le componenti successive uguali alle derivate di quelle precedenti. Posto cioè

$$x^{[h]} =: x^{h+1} : t \mapsto x^{h+1}(t) \in \mathbb{R}, \quad h = 0, \dots, n-1 \quad (3.54)$$

sulle componenti *del vettore* $\mathbf{x}$ si ricava dalla (3.53) la condizione necessaria

$$\dot{\mathbf{x}}^n + a_1 \mathbf{x}^n + \dots + a_{n-1} \mathbf{x}^2 + a_n \mathbf{x}^1 = 0, \quad (3.55)$$

per cui: le funzioni che verificano la (3.53) sono *tutte e sole quelle corrispondenti alla prima componente di un vettore* $\mathbf{x} := (x^1, \dots, x^n) \equiv (x^{[0]}, \dots, x^{[n-1]})$, e cioè $\mathbf{x} : t \mapsto \mathbf{x}(t) \in \mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^n$, che verifica il particolare sistema lineare omogeneo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T} \mathbf{x} \quad \text{ove} \quad \mathbf{T} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & & -a_1 \end{pmatrix}. \quad (3.56)$$

Sistemi di questo tipo formano ovviamente *solo un sottoinsieme* dei possibili sistemi a dimensione n , e quindi essi avranno proprietà speciali e caratteristiche. Per essi, per esempio, il polinomio caratteristico $p_{\mathcal{T}}(\lambda) := \text{Det}(\mathcal{T} - \lambda \mathbf{I})$ ha la speciale forma

$$p_{\mathcal{T}}(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n; \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (3.57)$$

Infatti, se si pretende che il sistema (3.56) abbia soluzioni della forma $\hat{\epsilon} : t \mapsto \hat{\epsilon}(t) = e^{\lambda t} \epsilon$ relative a un vettore $\epsilon \in \mathbb{C}^n$, sulle componenti del vettore $\hat{\epsilon}$ occorre imporre la condizione, proveniente dalla (3.54), $\frac{d}{dt} \hat{\epsilon}^h = \hat{\epsilon}^{h+1}$, per $h = 1, \dots, n-1$, che fornisce le $n-1$ condizioni necessarie

$$\frac{d}{dt} \hat{\epsilon}^1(t) = \lambda \hat{\epsilon}^1(t) = \hat{\epsilon}^2(t), \quad \dots, \quad \frac{d}{dt} \hat{\epsilon}^{n-1}(t) = \lambda \hat{\epsilon}^{n-1}(t) = \hat{\epsilon}^n(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.58)$$

Pertanto le componenti del vettore ϵ (autovettore di $\mathcal{T}$) verificano necessariamente la condizione: $\epsilon = (\epsilon^1, \dots, \epsilon^n) = (1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-1}) \kappa$, con $\kappa \in \mathbb{R}$, e la (3.55) scritta per $\hat{\epsilon}(t)$ fornisce subito la (3.57).

Viceversa, se una $\lambda^\#$ esiste soluzione di $p_{\mathcal{T}}(\lambda) = 0$, allora certo $\mathcal{T}$ ammette in sua corrispondenza almeno un autovettore (magari complesso) ϵ . Data la forma della (3.56), questo risulta tale che *nota la sua prima componente risultano note tutte le altre* e verificanti la relazione (3.58). Ciò implica, in particolare, che *fissato un autovalore* $\lambda^\# \in \mathbb{C}$, *ad esso non possa che corrispondere un solo autovettore*, infatti ogni altro vettore soluzione che si evolva in modo parallelo al dato sarebbe ancora del tipo $e^{\lambda^\# t} \xi_0$ e risulterebbe diverso dal primo per solo un'inessenziale costante moltiplicativa presente in tutte le componenti.

Pertanto *ad ogni autovalore* λ_j *corrisponde un solo blocco elementare di Jordan*: $\mathbf{J}_j = \lambda_j \mathbf{I}_{a_j} + \mathbf{E}_{a_j}$ il quale avrà dimensione *uguale* alla molteplicità algebrica dell'autovalore stesso, e cioè

$$q_j = a(\lambda_j) = \dim \mathbb{M}_j \quad \text{ove} \quad \mathbb{M}_j = \text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda_j \mathbf{I})^{a_j}$$

mentre risulta

$$g(\lambda_j) = 1 = n - \text{rank}(\mathcal{T} - \lambda_j \mathbf{I}).$$

La (3.53) avrà allora soluzioni (facendo le necessarie sostituzioni se qualche autovalore è complesso, e si ricordi che qui la x è scalare) della forma

$$x : t \mapsto x(t) = \sum_{k=1}^r e^{\lambda_k t} \sum_{j=0}^{a_k-1} p_{k,j} t^j$$

nella quale *tutte le n costanti* $p_{k,j}$ *sono scalari arbitrarie*, giacché all'interno dell'autospazio $\mathbb{M}_j$ ogni vettore può essere un'accettabile dato iniziale. La linearità dell'operatore $\mathcal{T}$ implica quindi che *ciascuna* delle funzioni $t^m e^{\lambda_k t}$, $0 \leq m \leq a(\lambda_k)$, sia soluzione particolare dell'equazione. Si noti che queste affermazioni non sono vere per ciascuna delle coordinate, separatamente, del generico vettore soluzione nel caso generale in quanto m può non raggiungere $a(\lambda_k)$.

Il teorema di esistenza e unicità può essere invocato per concludere che:

le n costanti scalari $p_{k,j}$ stabiliscono un isomorfismo fra lo spazio delle soluzioni $\mathbf{x} : t \mapsto \mathbf{x}(t)$ di un'equazione di ordine n quale la (3.53), che è a sua volta isomorfo a quello $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^n$ delle condizioni iniziali, e lo spazio $\mathbb{AP}^n$ somma diretta degli spazi $\mathbb{AP}_{\lambda_j}^{a_j}$ dei quasi-polinomi con esponenti $\lambda_1 t, \dots, \lambda_r t$ e gradi minori di $a(\lambda_1), \dots, a(\lambda_r)$; i quali formano pertanto una base per lo spazio delle soluzioni dell'equazione (3.53).

Anche questa affermazione non è vera per il generico sistema di ordine n ; per esempio una stessa funzione del tipo $ce^{\lambda t}$ può essere soluzione anche di tutte le equazioni “componenti”. Sono infatti, in questo caso, i possibili vettori di base ad essere più diversificati di quelli di una equazione di ordine n , dato che le loro componenti non devono verificare la condizione di compatibilità (3.58).

D'altro canto i vettori soluzione non hanno componenti arbitrarie nello spazio dei quasi-polinomi poiché devono essere ottenuti, mediante una trasformazione invertibile $\mathcal{P}$ determinato da $\mathcal{T}$, combinando linearmente i possibili vettori soluzione $\mathbf{p}_k(t)e^{\lambda_k t}$ che hanno i polinomi $\mathbf{p}_k(t)$ fissati dalle colonne di $\mathbf{P}$ e dalla degenerazione di $\mathcal{T}$. [Se anche tutte le radici sono distinte e ogni componente di ciascun vettore soluzione è del tipo $\sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k t}$ non è vero che ogni n -pla di tali combinazioni lineari è una possibile soluzione del sistema: essa deve essere una $\mathcal{P}$ -trasformata di un vettore del tipo $(\xi_0^1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \xi_0^n e^{\lambda_n t})$ con $\mathcal{P}$ invertibile fissato da $\mathcal{T}$ e $\xi_0^j \in \mathbb{R}$ per $j = 1, \dots, n$. Ad esempio, tutte le componenti potranno essere uguali fra loro: $ce^{\lambda_j t}$ solo se il vettore $(1, \dots, 1)$ è autovettore di $\mathcal{T}$ relativo a λ_j].

Si osservi infine che l'equazione (3.57) determina una sola equazione differenziale di grado n ma certo non un solo sistema di grado n che la ammetta come equazione secolare. Essa infatti determina univocamente le sue radici e la loro molteplicità, ma ciò non è sufficiente a determinare gli autovettori di una delle molte matrici $\mathbf{T}$ con essa compatibili.

2.4 Sistemi differenziali lineari a coefficienti variabili, in $\mathbb{R}^n$

In questo paragrafo verranno innanzi tutto riprese in esame, ed estese, le considerazioni fatte nel § I.5. In quello, per semplicità, si erano considerate solo equazioni scalari del secondo ordine; in questo si vedrà che l'estensione al caso generale n -dimensionale è del tutto naturale e non aggiunge difficoltà concettuali.

Sia I un intervallo chiuso in $\mathbb{R}$. Si considera il sistema

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \mathcal{T}(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \quad \text{o, in coordinate,} \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{T}(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \quad \text{con } \mathbf{y}_0 \in \mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^n, \\ \mathcal{T} : I &\rightarrow \mathbb{L}(\mathbb{V}), \quad \mathbf{b} : I \rightarrow \mathbb{V}, \quad \mathcal{T}, \mathbf{b} \in C^{\ell \geq 1}(I), \quad t_0 \in I \subset \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Le sue soluzioni sono vettori con componenti che in generale non saranno più esprimibili come combinazioni lineari di quasi-polinomi, e le applicazioni di avanzamento non saranno più elementi di un gruppo a un parametro $\{\mathcal{G}^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ di diffeomorfismi dello spazio delle fasi in sé.

Al contrario esse formano una famiglia locale (si veda: Cap.I) di applicazioni $\{\mathcal{G}_{t_0}^t\}_{t_0, t \in I}$, tale che $\mathbf{y} : t \mapsto \mathbf{y}(t) := \mathcal{G}_{t_0}^t \mathbf{y}_0$ è il moto uscente da $\mathbf{y}_0$ all'istante t_0 e che, ove siano definiti, risulti

$$\mathcal{G}_{t_1}^{t_3} = \mathcal{G}_{t_2}^{t_3} \mathcal{G}_{t_1}^{t_2}, \quad t_1, t_2, t_3 \in I.$$

La linearità implica “solo” che, presi comunque $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{llll} \text{se} & y_1 & \text{è soluzione della} & \dot{\mathbf{y}} = \mathcal{T}(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}_1(t) \\ \text{ed} & y_2 & \text{è soluzione della} & \dot{\mathbf{y}} = \mathcal{T}(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}_2(t) \\ \text{allora} & c_1 y_1 + c_2 y_2 & \text{è soluzione della} & \dot{\mathbf{y}} = \mathcal{T}(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}_3(t) \\ \text{con} & \mathbf{b}_3(t) := c_1 \mathbf{b}_1(t) + c_2 \mathbf{b}_2(t). & & \end{array}$$

Ciò prova che lo spazio delle soluzioni dell'equazione (4.59) non è uno spazio lineare.

Si consideri dapprima l'equazione omogenea (già chiamata (2.32) nel § II.2):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{T}(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_0 \in \mathbb{V}, \quad \text{o, in coordinate,} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (4.60)$$

Per essa, invece, ogni combinazione lineare di soluzioni è soluzione.

Sussiste la seguente

Proposizione 2.4.1 (si veda anche: § I.5)

L'intervallo massimale $J_M \supset I$ di definizione della, esistente e unica per ciascun $\mathbf{x}_0$, soluzione della (4.60) è ampio (almeno) quanto quello di regolarità dei coefficienti.

Dimostrazione

- $\|\mathcal{T}(t)\| < c$ per un certo c dipendente da a, b, I , e certamente finito.

- **Lemma** Se $\phi(\tau, t_0, x_0)$ è definita in $[t_0, t] \subseteq I$ allora

$$|\phi(t, t_0, x_0)| \leq e^{c(t-t_0)} |\phi(t_0, t_0, x_0)| .$$

- **Dimostrazione** (del Lemma)

La tesi è vera per $\phi(t, t_0, 0) \equiv 0$. Questa è soluzione; quindi $\phi(t_0, t_0, x_0) \neq 0$ implica $\phi(t, t_0, x_0) \neq 0$, $\forall t \in J_M$.

Si chiami $r^2 : \tau \mapsto |\phi(\tau)|^2 = \langle \phi(\tau, t_0, x_0), \phi(\tau, t_0, x_0) \rangle > 0$, ove il prodotto scalare è, ad esempio, quello che vede la base data come ortonormale. Dall'ipotesi segue che $\ln r(\tau)$ è definita per $\tau \in [t_0, t]$, e in più

$$\left| \frac{d}{d\tau} \ln r^2 \right| = \frac{1}{r^2} \left| \frac{d}{d\tau} r^2 \right| \leq \frac{2}{r^2} |\mathcal{T}\phi| |\phi| = 2 \|\mathcal{T}(t)\| \leq 2c .$$

Se ne deduce che

$$|\ln r^2(t) - \ln r^2(t_0)| \leq 2c |t - t_0| .$$

■

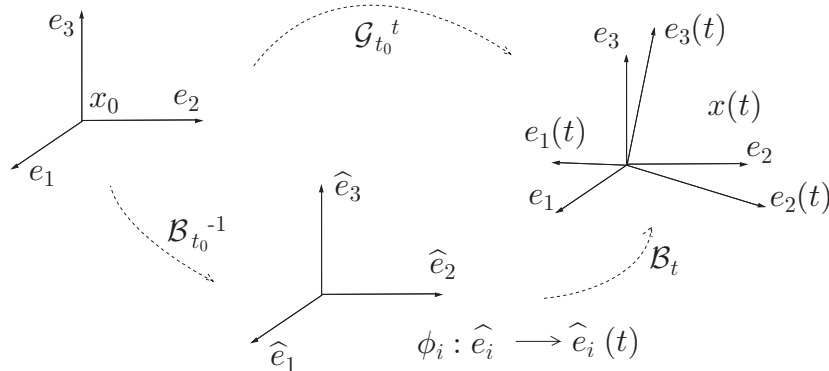
- Il teorema sul prolungamento della soluzione permette di dire che la soluzione è definita almeno fino all'istante t_1 in cui $(t_1, \phi(t_1, t_0, x_0))$ raggiunge la frontiera di un qualsiasi compatto di $\mathbb{R}^{1+n}$ che, contenente (t_0, x_0) , sia contenuto nel dominio D di regolarità del campo. Essendo poi questo lineare nella variabile spaziale x , si ha che D può avere frontiera non vuota *soltanto a causa di limitazioni dovute alla non regolarità dei coefficienti*: $\mathcal{T}(t)$, e quindi certo il dominio D di regolarità del campo contiene una striscia dello spazio delle fasi ampliato di estensione infinita rispetto alla variabile spaziale e contenente il segmento I lungo quella temporale.
- Siano: $|x_0|^2 =: \ell > 0$ ed

$$K := \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n} \mid t \in I; \quad |x|^2 \leq (1 + \varepsilon) \ell e^{2c(b-a)}, \quad \varepsilon > 0 \right\} .$$

Il Lemma afferma che il punto $(t_1, \phi(t_1, t_0, x_0))$ non può essere sulla parete $|x|^2 = (1 + \varepsilon)\ell e^{2c(b-a)}$ del cilindro K , e quindi deve necessariamente essere $t_1 = t$, che è qualunque in I . ■

Una dimostrazione simile ma un pò più laboriosa (si veda: [Hale Cor.I.6.1]) assicura che se I è tale che *entrambe* le funzioni $\mathcal{T}$ e b sono almeno continue su I allora è anche $J_M \supset I$.

Come si è ricordato, in virtù della linearità del campo lo spazio di tutte le possibili soluzioni di (4.60) è uno spazio funzionale lineare: una combinazione lineare di soluzioni è ancora soluzione, ed è uscente da quelle condizioni iniziali che si ottengono operando la stessa combinazione lineare sulle rispettive condizioni iniziali. Tale spazio lineare è in corrispondenza con quello delle fasi $\mathbb{V}$ mediante l'applicazione $\mathcal{B}_t : (C^1(J_M))^n \rightarrow \mathbb{V}$ che associa a una *soluzione* $\phi : J_M \rightarrow \mathbb{V}$ il suo *valore attuale* $x := \phi(t, t_0, x_0) \in \mathbb{V}$. In effetti, per i teoremi visti nel Cap.I, tale corrispondenza è $1 \xleftrightarrow{\mathcal{B}_t} 1$, in quanto l'immagine è tutto $\mathbb{V}$ per il teorema di esistenza, e il Ker è $\{0\}$ perché, per il teorema di unicità, alla condizione iniziale $x_0 = 0$ corrisponde la sola soluzione $\phi(t, t_0, x_0) = 0$; inoltre siccome entrambi gli spazi sono lineari *essa è un isomorfismo*: le combinazioni lineari commutano con l'evoluzione.



Per esprimere la più generale soluzione della (4.60) sarà allora necessario e sufficiente procurarsi una base nello spazio delle soluzioni. Come già fatto per i sistemi lineari a coefficienti costanti (si veda: § II.2), si definisce un:

Sistema fondamentale $\Phi = \{\phi_i\}_{i=1,\dots,n}$ per l'equazione (4.60) := una n -pla di funzioni a valori in $\mathbb{V}$: $\phi_i : t \mapsto x_i = \phi_i(t, t_0, x_i|_0) \in \mathbb{V}$, $i = 1, \dots, n$, che siano soluzioni linearmente indipendenti della (4.60).

Il teorema di esistenza e unicità, ovvero l'esistenza dell'isomorfismo detto, assicura che n -pla di vettori (soluzione) $\{t \mapsto \phi_i(t, t_0, x_i|_0)\}_{i=1,\dots,n}$ uscenti dall'arbitraria n -pla di vettori: $\{x_i|_0\}_{i=1,\dots,n} \subset \mathbb{V}$ purché linearmente indipendenti *forma certamente una base nello spazio delle soluzioni*. Ciò in particolare accade a quella uscente dai versori $\{x_i|_0 := e_i\}_{i=1,\dots,n}$ della base scelta in $\mathbb{V}$; *il problema è determinarli*.

Quando sia noto un sistema fondamentale, e scelta una base in $\mathbb{V}$, si definisce la corrispondente:

Matrice fondamentale per l'equazione (4.60) := la rappresentazione in coordinate di un sistema fondamentale

Φ ; essa pertanto è una matrice $\Phi : t \mapsto \Phi(t, t_0, \Phi_0) \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 \vdots \dots \vdots \phi_n \end{pmatrix}$ avente per colonne i vettori $\phi_i = \phi_i(t, t_0, x_i|_0)$, $i = 1, \dots, n$, rappresentanti in quelle coordinate le funzioni $\{\phi_i\}_{i=1,\dots,n}$. Giacché Φ risolve in $\mathbb{L}(\mathbb{V})$ l'equazione: $\dot{X} = T(t)X$ ed è uscente da un dato Φ_0 non singolare, la matrice Φ verifica in $\mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$ l'equazione

$$\dot{X} = T(t)X, \quad X(t_0) = \begin{pmatrix} x_{1|0} \vdots \dots \vdots x_{n|0} \end{pmatrix} \equiv \Phi_0, \quad (4.61)$$

con $\Phi_0 = \Phi(t_0)$ non singolare. Si ha cioè, (si veda anche: § II.2)

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1(t) \vdots \dots \vdots \dot{\phi}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(t)\phi_1(t) \vdots \dots \vdots T(t)\phi_n(t) \end{pmatrix} = T(t)\Phi(t).$$

L'esistenza dell'isomorfismo detto assicura che per ogni coppia di matrici fondamentali esiste una matrice invertibile C tale che $\Phi_2(t) = \Phi_1(t)C$, e viceversa: se C è costante, non singolare, e se $\Phi_1(t)$ è una matrice fondamentale della (4.60) allora tale è anche la $\Phi_2(t) := \Phi_1(t)C$. In particolare ne segue che: non solo ogni sistema fondamentale della (4.60) forma una matrice soluzione della (4.61), ma, viceversa, ogni soluzione della (4.61) uscente da un dato non singolare è una matrice fondamentale della (4.60). Per ciascuna fissata base si ha quindi che: *tutte e sole le matrici fondamentali della (4.60) sono soluzioni non singolari della (4.61) e sono proporzionali fra loro mediante delle matrici C non singolari*:

$$\Phi_2(t) = \Phi_1(t)C. \quad (4.62)$$

In particolare, per ciascuna scelta della base $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ dello spazio $\mathbb{V}$, e cioè *per ciascuna scelta delle coordinate* si può definire una:

Matrice principale del sistema (4.60) := la matrice $\Psi : t \mapsto \Psi(t, t_0)$ che ha per colonne le soluzioni uscenti dai versori dello spazio, e quindi che vale $\mathbb{I}_n$ nell'istante $t = t_0$.

In quel che segue, salvo contrario avviso, la scelta della base verrà supposta eseguita una volta per tutte e non più modificata. Ciò permetterà di limitare la notazione alle sole componenti.

Ad esempio, nel caso particolare dei coefficienti costanti risulta

$$\Psi(t, 0, \mathbb{I}) = P e^{T_J t} P^{-1} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0) = e^{Tt},$$

e i vettori $\phi_i(t)$ assumono valori in un conveniente spazio di quasi polinomi.

In conclusione, *il vettore*

$$x : t \mapsto x(t) = \Phi(t)c = \sum_{i=1}^n c^i \phi_i(t) \quad (4.63)$$

è la soluzione generale del sistema (4.60) se e solo se i vettori $\phi_i = \phi_i(t, t_0, x_i|_0)$ sono le colonne di una matrice $\Phi = \Phi(t, t_0, \Phi_0)$ che sia la soluzione $\Phi : I \rightarrow \mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$ della (4.61), uscente dalla $\Phi_0 = \begin{pmatrix} x_{1|0} \vdots \dots \vdots x_{n|0} \end{pmatrix}$ scelta non singolare.

Nota 2.4.1 Un sistema fondamentale *non* è una qualunque n -pla di vettori linearmente indipendenti nello spazio funzionale; essa *deve* essere formata da vettori che siano vettori soluzione. Infatti:

Memento 2.4.1 m funzioni vettoriali $\{t \mapsto \psi_i(t)\}_{i=1,\dots,m}$, ciascuna delle quali avente come componenti n funzioni continue su I , si dicono linearmente dipendenti se esistono m costanti reali $\alpha^1, \dots, \alpha^m$ non tutte nulle tali che risulti $\sum_{i=1}^m \alpha^i \psi_i(t) = 0$ per ogni $t \in I$.

Affinché n funzioni vettoriali siano linearmente dipendenti occorre quindi ma non basta che esista qualche istante t^* nel quale i vettori numerici $\{\psi_i(t^*)\}_{i=1,\dots,n}$ siano linearmente dipendenti; né basta a garantire la dipendenza

lineare dei vettori $\{t \mapsto \psi_i(t)\}_{i=1,\dots,n}$ il fatto che sia identicamente nullo il determinante

$$\mathcal{W} : t \mapsto \mathcal{W}(t) := \text{Det} \begin{pmatrix} \psi_1^1 & \psi_2^1 & \cdots & \psi_n^1 \\ \psi_1^2 & \psi_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \psi_1^n & \cdots & & \psi_n^n \end{pmatrix}$$

Esempio: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ pur avendo $\begin{vmatrix} 1 & t \\ 1 & t \end{vmatrix} \equiv 0$ non sono linearmente dipendenti.

Queste condizioni sono invece sufficienti, oltre che necessarie se, in più, si sa che i vettori in questione sono soluzioni di un qualche sistema differenziale del tipo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}(t)\mathbf{x}$, e ciò ancora per l'unicità della soluzione identicamente nulla e per la linearità del sistema. Viceversa in ogni caso basta che i loro valori in un qualche istante $\{\psi_i(t^*)\}_{i=1,\dots,n}$ siano linearmente indipendenti per assicurare l'indipendenza lineare dei vettori $\{t \mapsto \psi_i(t)\}_{i=1,\dots,n}$ $\triangleright$

Nota 2.4.2 Come si è visto, se $\mathbf{T}$ è una matrice costante, o addirittura se ha la forma semplice proveniente da un'equazione di ordine n , la ricerca dei possibili vettori di base è molto facilitata. Con riferimento alla precedente nota, se $\mathbf{T}$ è costante e, per esempio, con autovalori reali distinti, un sistema fondamentale di vettori è certamente dato dagli evoluti $\hat{\mathbf{e}}_h(t) = e^{\lambda_h t} \mathbf{e}_h$. Più in generale, formano un sistema fondamentale gli evoluti

$$t \mapsto \mathbf{x}_h(t) := \mathbf{P} e^{\mathbf{T}t} \boldsymbol{\xi}_h|_0 \quad h = 1, 2, \dots, n,$$

di un sistema di vettori $\{\boldsymbol{\xi}_1|_0, \dots, \boldsymbol{\xi}_n|_0\}$ che sia una base in $\mathbb{R}^n$, per esempio i trasformati dei vettori di base $\mathbf{e}_h = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ (e quindi colonne della matrice $\mathbf{P}^{-1}$). Se poi $\mathbf{T}$ proviene da un'equazione di ordine n (con autovalori λ_h tutti reali distinti) allora si sa in più che la matrice $\mathbf{P}$ deve avere la speciale forma

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1^1 & 0 & & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathbf{P}_n^n \end{pmatrix}$$

ove l'ultima matrice rappresenta un inessenziale coefficiente moltiplicativo.

D'altra parte, l'ipotesi che tutte le $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ siano radici distinte di un'equazione di ordine n a coefficienti costanti implica che il Wronskiano della corrispondente matrice fondamentale sia

$$\mathcal{W}(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix}$$

e quindi

$$\mathcal{W}(0) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

L'essere quest'ultimo diverso da zero è allora equivalente a che le λ siano radici semplici di una equazione di grado n e quindi è sempre non nullo purché le λ siano tutte distinte. $\triangleright$

Si osservi ora che la (4.62) mette in relazione le varie matrici fondamentali della (4.60) con i loro dati iniziali e la matrice principale. Infatti (con t_0 fissato, e per ogni $t \in J_M$) si riconosce che

$$\Phi_1^{-1}(t)\Phi_2(t) = \mathbf{C} = \Phi_1^{-1}(t_0)\Phi_2(t_0), \quad \text{da cui} \quad \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0) = \Psi(t, t_0). \quad (4.64)$$

Quest'ultima esprime la matrice che nelle coordinate scelte su $\mathbb{V}$ rappresenta l'operatore $\mathcal{G}_{t_0}^t$, e implica che $\text{Det } \mathcal{G}_{t_0}^t = \text{Det } \Psi(t, t_0) = \text{Det } \Phi(t) / \text{Det } \Phi(t_0)$. Infatti la $\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{c}$ permette il calcolo di $\mathbf{c} = \Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0$ con $\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(t_0)$, e in virtù della (4.63) la soluzione generale è data da

$$\mathbf{x} : t \mapsto \mathbf{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 \quad \text{ovvero:} \quad \mathbf{x} = \mathcal{G}_{t_0}^t \mathbf{x}_0.$$

Un'altra interpretazione possibile è data dalla $\mathcal{G}_{t_0}^t := \mathcal{B}_t \mathcal{B}_{t_0}^{-1}$ che mostra l'evolutore come prodotto dei due morfismi: quello che dal vettore x_0 fa passare alla soluzione che lo ammette come dato iniziale, e quello che trasforma quest'ultima nel valore che essa assume all'istante t . Si vede comunque che per le equazioni lineari l'evolutore $\mathcal{G}_{t_0}^t$ è un operatore in $\mathbb{L}(\mathbb{V})$ ed è ovvio che esso non dipenda dalla particolare n -pla fondamentale Φ usata.

Nota 2.4.3 Dall'espressione $\Psi(t, t_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$, o meglio dalla $\mathcal{G}_{t_0}^t = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ di cui la prima è la rappresentazione in coordinate, si riconosce immediatamente sui sistemi lineari omogenei la proprietà, conseguenza dell'unicità delle soluzioni, che esprime il determinismo dei sistemi differenziali a campo liscio, e cioè: $\mathcal{G}_{t_1}^{t_3} = \mathcal{G}_{t_2}^{t_3} \mathcal{G}_{t_1}^{t_2}$. Se poi il sistema è anche autonomo allora come già ricordato si ha

$$\Psi(t, t_0) = \mathbf{P} e^{\mathbf{T}t} e^{-\mathbf{T}t_0} \mathbf{P}^{-1} = e^{\mathbf{T}(t-t_0)} = \Psi(t - t_0).$$

▷

Il caso non omogeneo, espresso dalla (4.59), è solo di poco più complicato. Se $\tilde{y} : t \mapsto \tilde{y}(t)$, $\tilde{y}(t_0) = \tilde{y}_0$, è una sua soluzione particolare, allora ogni altra si può esprimere, ed univocamente, mediante la

$$y : t \mapsto y(t) = x(t) + \tilde{y}(t), \quad y(t_0) = y_0 \in \mathbb{V} \quad (4.65)$$

ove $t \mapsto x(t)$ è la soluzione della (4.60) che in t_0 verifica la $x(t_0) = x_0 := y_0 - \tilde{y}_0$. Se in special modo si riesce a trovare come soluzione particolare proprio quella che ha $\tilde{y}(t_0) = 0$ allora la corrispondente x "assorbe" tutte le condizioni iniziali: $x_0 = y_0$ ed è $x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0$ ove $t \mapsto \Phi(t)$ è un qualsiasi sistema fondamentale di soluzioni *del sistema omogeneo associato*: (4.60).

Ciò è quello che si fa regolarmente nel cosiddetto metodo della variazione della costante, che consiste nel cercare la soluzione generale della (4.59) mediante la posizione:

$$y(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)(x_0 + c(t)), \quad \text{con } c(t_0) = 0,$$

esso cioè consiste nel cercare la soluzione particolare della (4.59) sotto la speciale forma $\tilde{y}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)c(t)$, con $c(t_0) = 0$.

Si ricava la condizione necessaria

$$\dot{y}(t) = \dot{\Phi}(t)\Phi^{-1}(t_0)(x_0 + c(t)) + \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\dot{c}(t) = \mathcal{T}(t)y(t) + b(t)$$

che implica $\dot{c}(t) = \Phi(t_0)\Phi^{-1}(t)b(t)$ da cui $c(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t_0)\Phi^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau$ e cioè

$$\tilde{y}(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau.$$

La soluzione $y : t \mapsto y(t) \in \mathbb{V}$ della (4.59) che vale $x_0 = y_0$ in $t = t_0$ è allora data da (salvo esprimere il tutto in coordinate)

$$\begin{aligned} y : t \mapsto y(t) &= x(t) + \tilde{y}(t) \\ &\equiv \underbrace{\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{\Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau}_{\text{risposta della forzante}} \end{aligned} \quad (4.66)$$

Nel caso particolare $\mathbf{T}(t) = \mathbf{T} = \text{cost}$ la (4.66) si specializza nella

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \Phi(t - t_0)\Phi^{-1}(0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)\Phi^{-1}(0)\mathbf{b}(\tau)d\tau \\ &= e^{\mathbf{T}(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{T}(t-\tau)}\mathbf{b}(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Memento 2.4.1 Date m funzioni vettoriali $\{t \mapsto \xi_i(t)\}_{i=1, \dots, m}$, ciascuna delle quali avente come componenti n funzioni continue su I , alcuni autori chiamano Wronskiano della matrice $\Xi : t \mapsto \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \end{pmatrix}$ la funzione $\mathcal{W} : t \mapsto \mathcal{W}(t) := \text{Det } \Xi(t)$; per altri invece il Wronskiano è il determinante che così si ottiene nel caso particolare di una equazione di ordine n , e che quindi proviene da una matrice che ha le righe ciascuna uguale alla derivata della riga precedente. Qui di seguito si userà la prima delle due definizioni.

Se $\Xi = \Xi(t)$ è una matrice fondamentale di un sistema (4.60) allora $\mathcal{W}(t)$ o è identicamente nullo oppure è identicamente non nullo. Infatti $\mathcal{W}(t)$ si annulla o se una delle equazioni è combinazione lineare delle altre, e quindi una coordinata in ogni istante linearmente dipendente dalle altre; oppure se le colonne sono linearmente dipendenti in un certo istante t^* , ed essendo soluzioni di un sistema (4.60) lo rimangono per ogni t .

Proposizione 2.4.1 Se $\Phi : t \mapsto \Phi(t)$ è una matrice fondamentale di un sistema omogeneo (4.60) allora

$$\mathcal{W}(t) = \exp \left(\int_{t_0}^t \text{Tr } T(\tau) d\tau \right) \mathcal{W}(t_0).$$

Dimostrazione Se $\mathcal{W}(t_0) = 0$ le colonne della matrice Φ , e cioè gli n vettori $\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)$ rimangono linearmente dipendenti. Altrimenti, il calcolo del determinante fornisce $\mathcal{W}(t) = \sum_{j=1}^n \phi_j^i(t) M_i^j(t)$, avendo indicato con ϕ_j^i la i -ma componente della j -ma soluzione fondamentale ϕ_j , e con M_i^j il complemento algebrico (o cofattore) di ϕ_j^i nella matrice Φ . Derivando ambo i membri della relazione precedente si può notare che $M_i^j \equiv \partial \mathcal{W} / \partial \phi_j^i$. Si osservi ora che, in qualunque modo $\mathcal{W}$ dipenda da ciascuno dei ϕ_j^i , la derivata $\frac{d}{dt} \mathcal{W}(t)$ non può che essere:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{W} = \sum_{i,j} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \phi_j^i} \dot{\phi}_j^i = \sum_{i,j} M_i^j \dot{\phi}_j^i = \sum_{i,j,k} M_i^j T_k^i \phi_j^k =: \sum_{i,k} T_k^i \mathcal{D}_i^k$$

ove $\mathcal{D}_i^k$ è il determinante della matrice $\Xi_{(i)}^{(k)}$ ottenuta sostituendo nella Φ alla i -esima riga $(\phi_1^i, \dots, \phi_n^i)$ la k -esima $(\phi_1^k, \dots, \phi_n^k)$. Ne segue che gli unici scalari $\mathcal{D}_i^k$ a essere non nulli (in corrispondenza del fatto che la matrice $\Xi_{(i)}^{(k)}$ non ha due righe proporzionali) sono i termini con $k = i$, che quindi valgono $\mathcal{W}$. Per cui si ha

$$\dot{\mathcal{W}}(t) = \sum_{i,k} T_k^i(t) \delta_i^k \mathcal{W}(t) = \sum_i T_i^i(t) \mathcal{W}(t) = \mathcal{W}(t) \text{Tr}(T(t)).$$

Una dimostrazione alternativa usa l'uguaglianza

$$\frac{\mathcal{W}(t)}{\mathcal{W}(t_0)} = \frac{\text{Det } \Phi(t)}{\text{Det } \Phi(t_0)} = \text{Det } \Psi(t, t_0) = \text{Det } \mathcal{G}_{t_0}^t$$

e lo sviluppo: $\Phi(t) = \Phi(t_0 + \Delta t) = \Phi(t_0) + T(t_0)\Phi(t_0)\Delta t + o(\Delta t)$. Queste danno $\Psi(t, t_0) := \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0) = \mathbb{I} + T(t_0)\Delta t + o(\Delta t)$ il cui determinante vale

$$\text{Det } \Psi(t, t_0) = \frac{\mathcal{W}(t)}{\mathcal{W}(t_0)} = \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i \Delta t + o(\Delta t)) = 1 + \text{Tr } T(t_0)\Delta t + o(\Delta t)$$

come si vede facilmente nella base in cui $T(t_0)$ assume la forma triangolare T_J . Ne segue

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} \text{Det } \Psi(t, t_0) = \frac{\dot{\mathcal{W}}(t_0)}{\mathcal{W}(t_0)} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (1 + \text{Tr } T(t_0)\Delta t + o(\Delta t)) = \text{Tr } T(t_0).$$

■

Nota 2.4.4 Il sistema $\dot{\mathbf{y}} + T^*(t)\mathbf{y} = 0$ si dice *aggiunto* del sistema $\dot{\mathbf{x}} = T(t)\mathbf{x}$ quando T e T^* sono le matrici che una stessa base $\{e_k\}_{k=1, \dots, n} \subset \mathbb{V}$ assegna all'operatore $\mathcal{T}$ e, rispettivamente, al suo aggiunto $\mathcal{T}^*$ rispetto a un fissato prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definito su $\mathbb{V}$.

Sul sistema aggiunto è possibile ripetere quanto detto per l'equazione (4.60), e quindi: così come alla (4.60) (con arbitrarie condizioni iniziali) corrisponde l'equazione in $\mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$ data da $\dot{\mathbf{X}} = T \mathbf{X}$ con $\mathbf{X}_0 = \mathbb{I}$, all'equazione aggiunta $\dot{\mathbf{y}} = -T^* \mathbf{y}$ (e arbitrarie condizioni iniziali) corrisponde in $\mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$ il sistema aggiunto $\dot{\mathbf{Y}} = -T^* \mathbf{Y}$ con $\mathbf{Y}_0 = \mathbb{I}$.

Nell'ipotesi che base e prodotto scalare siano tali che $\langle e_h, e_k \rangle = \delta_{hk}$, il sistema aggiunto può anche essere scritto nella forma:

$$\dot{\mathbf{Y}}^T = -\mathbf{Y}^T \overline{T} \quad \text{con} \quad \mathbf{Y}_0^T = \mathbb{I}.$$

Una matrice fondamentale di un tale sistema è una matrice $\mathbf{Y}^T : t \mapsto \mathbf{Y}^T(t)$ che ha le righe soluzioni indipendenti dell'equazione (fra righe)

$$\dot{\mathbf{y}}^T = -\mathbf{y}^T \overline{T}.$$

Limitandosi al caso reale, e chiamate $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}^T$ matrici fondamentali dei due sistemi rispettivamente, si ha allora che esse sono legate dalla relazione

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{Y}^T \mathbf{X}) = \dot{\mathbf{Y}}^T \mathbf{X} + \mathbf{Y}^T \dot{\mathbf{X}} = -\mathbf{Y}^T T \mathbf{X} + \mathbf{Y}^T T \mathbf{X} = 0,$$

dunque: esiste una matrice numerica $\mathbf{C}$ tale che $\mathbf{Y}^T \mathbf{X} = \mathbf{C}^{-1}$, e quindi tale che $\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{C} \mathbf{Y}^T$, e la matrice $\mathbf{C}$ è non singolare perché tali sono entrambe le due matrici.

Viceversa: se $\mathbf{X}$ è una matrice fondamentale per il sistema (4.60) e se $\mathbf{C}$ è numerica non singolare, allora la matrice $\mathbf{Y} := \mathbf{X}^{-T} \mathbf{C}^{-T}$ è matrice fondamentale del sistema aggiunto. Infatti si ha: $\mathbf{Y}^T \mathbf{X} = \text{cost}$ e quindi ne segue $\dot{\mathbf{Y}}^T \mathbf{X} = -\mathbf{Y}^T T \mathbf{X}$ che implica l'asserto, data l'invertibilità della $\mathbf{X}$. In particolare: se $\mathbf{X}$ è una

matrice fondamentale per il sistema (4.60) allora $\mathbf{X}^{-T}$ è matrice fondamentale per il sistema $\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{T}^T \mathbf{y} = 0$, e quindi tale che: $\dot{\mathbf{X}}^{-1} = -\mathbf{X}^{-1} \mathbf{T}$.

Pertanto, ancora con Φ una matrice fondamentale dell'equazione omogenea associata, per la generica equazione lineare non omogenea: $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{T}(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$ si ricava la relazione $\Phi^{-1}\dot{\mathbf{y}} = \Phi^{-1}\mathbf{T}\mathbf{y} + \Phi^{-1}\mathbf{b}$. Questa, sommata alla $\dot{\Phi}^{-1}\mathbf{y} = -\Phi^{-1}\mathbf{T}\mathbf{y}$, fornisce

$$\frac{d}{dt}(\Phi^{-1}\mathbf{y}) = \Phi^{-1}\mathbf{b}$$

che conferma la (4.66):

$$\Phi^{-1}(t)\mathbf{y}(t) = \Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)\mathbf{b}(\tau)d\tau.$$

▷

Un'importante caso particolare è quello (si veda anche: § I.5) di un'equazione scalare di ordine n ; e cioè, con $y : t \mapsto y(t) \in \mathbb{R}$,

$$y^{[n]} + a_1(t)y^{[n-1]} + \dots + a_n(t)y = b(t), \quad a_1, \dots, a_n, b \in C^{\ell \geq 0}(I). \quad (4.67)$$

È questo un sistema non omogeneo con la speciale matrice di campo $\mathbf{T} : t \mapsto \mathbf{T}(t) \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$ come nella (3.56), e termine noto $\mathbf{b} = (0, 0, \dots, 0, b)^T$. Si definisce

Nucleo Risolvente dell'equazione (4.67) := l'elemento $(1, n)$ della matrice $(\Phi(t)\Phi^{-1}(s))$, ove $\Phi : t \mapsto \Phi(t)$ è una matrice fondamentale della equazione omogenea associata (4.60).

Si osservi che il nucleo risolvente e, tramite la (4.66), l'intera soluzione generale dell'equazione completa (4.67) sono, almeno in linea di principio, totalmente determinati *una volta che sia nota la matrice Φ* , problema questo non indifferente e che spesso non è risolubile in forma chiusa.

Dato che l' i -ma colonna della matrice $\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)$ esprime la soluzione dell'equazione omogenea associata che in $t = \tau$ vale $\mathbf{e}_i$, il nucleo risolvente è la soluzione $t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$ tale che $x(\tau) = e_n$. La sua espressione esplicita è

$$(\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau))_n^1 = \frac{1}{\mathcal{W}(\tau)} \text{Det} \begin{pmatrix} x_1(\tau) & \dots & x_n(\tau) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{[n-2]}(\tau) & \dots & x_n^{[n-2]}(\tau) \\ x_1(t) & \dots & x_n(t) \end{pmatrix} \quad (4.68)$$

infatti $(\Phi^{-1})_j^i(\tau) = \mathbf{M}_j^i(\tau)/\mathcal{W}(\tau)$ dà $(\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau))_k^h = \phi_k^h(t)\mathbf{M}_k^m(\tau)/\mathcal{W}(\tau)$, e si ottiene $(\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau))_n^1 = x_m(t)\mathbf{M}_n^m(\tau)/\mathcal{W}(\tau)$ che è proprio lo sviluppo rispetto alla sua ultima riga del determinante nella (4.68).

Esempio 2.4.5 $\ddot{y} = y + b(t)$, con $t_0, y_0, \dot{y}_0 \in \mathbb{R}$.

Si hanno $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$. Risultano, con la stessa notazione usata nella (4.66),

$$\lambda_{1,2} = \pm 1; \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \Phi(t) = \mathbf{P}e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix};$$

$$e^{\mathbf{T}t} = \mathbf{P}e^{\Lambda t}\mathbf{P}^{-1} = \Phi(t) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}.$$

Queste, insieme con la $\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0) = e^{\mathbf{T}(t-t_0)}$, forniscono

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} y_0 \cosh(t-t_0) + \dot{y}_0 \sinh(t-t_0) \\ y_0 \sinh(t-t_0) + \dot{y}_0 \cosh(t-t_0) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \begin{pmatrix} e^{t-\tau} & e^{\tau-t} \\ e^{t-\tau} & -e^{\tau-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b(\tau) \end{pmatrix} d\tau = \int_{t_0}^t \begin{pmatrix} \sinh(t-\tau)b(\tau) \\ \cosh(t-\tau)b(\tau) \end{pmatrix} d\tau.$$

□

Esempio 2.4.6 $\ddot{y} + \omega^2 y = b(t)$, con $t_0, y_0, \dot{y}_0 \in \mathbb{R}$.

Dalle: $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$, con $\mu = \alpha + i\beta \equiv i\omega$, si ha $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ +i\omega & -i\omega \end{pmatrix}$ da cui

$$\Psi(t, 0) = \frac{1}{2\omega} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & = e^{-i\omega t} \\ i\omega e^{i\omega t} & -i\omega e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & -i \\ \omega & +i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{1}{\omega} \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix},$$

e quindi la soluzione è data da:

$$y(t) = x_0 \cos \omega(t-t_0) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega(t-t_0) + \int_{t_0}^t \sin \omega(t-\tau)b(\tau)d\tau.$$

□

Esempio 2.4.7
$$\begin{cases} t^2 \ddot{y} + t \dot{y} - y = u(t) \\ y(1) = 1, \quad \dot{y}(1) = -1 \end{cases} \quad t_0, y_0, \dot{y}_0 \in \mathbb{R}, \quad u \in C^1(\mathbb{R});$$

ovvero $\mathbf{T}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t^{-2} & -t^{-1} \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ u(t)/t^2 \end{pmatrix}$; e risulta $J_M = (0, \infty)$.

Prima parte: l'equazione omogenea associata.

Si suppongano soluzioni del tipo t^α . Dovrà essere $t^2\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} + t\alpha t^{\alpha-1} - t^\alpha = 0$ da cui $\alpha_{1,2} = \pm 1$; pertanto si chiamino $x_1(t) := t$, $x_2(t) := t^{-1}$.

Primo controllo:

$$\mathcal{W}(t) = \begin{vmatrix} t & t^{-1} \\ 1 & -t^{-2} \end{vmatrix} = -2t^{-1} \neq 0 \quad \text{in } J_M.$$

Secondo controllo:

$$\text{Tr } \mathbf{T} = -t^{-1}; \quad \text{e quindi: } \mathcal{W}(t) = c \exp\left(\int^t -t^{-1}\right) \propto t^{-1} = c t^{-1}.$$

Ne segue

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} t & t^{-1} \\ 1 & -t^{-2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Phi^{-1}(t) = \frac{1}{-2t^{-1}} \begin{pmatrix} -t^{-2} & -t^{-1} \\ -1 & t \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t^{-1} & 1 \\ t & -t^2 \end{pmatrix}.$$

Seconda parte: l'equazione completa.

$$\begin{aligned} y(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \Phi(t) \Phi^{-1}(1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \int_1^t \Phi(t) \Phi^{-1}(\tau) \frac{u(\tau)}{\tau^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\tau \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} t & t^{-1} \\ 1 & -t^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \\ &\quad + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \int_1^t \begin{pmatrix} t & t^{-1} \\ 1 & -t^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau^{-1}/2 & 1/2 \\ \tau/2 & -\tau^{-2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\tau \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} t^{-1} \\ -t^{-2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \int_1^t \begin{pmatrix} t & t^{-1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ \tau^2 \end{pmatrix} u(\tau) d\tau \\ &= t^{-1} + \frac{1}{2} \int_1^t u(\tau) (t\tau^{-2} - t^{-1}) d\tau \end{aligned}$$

e nell'integrando si può riconoscere il nucleo: $\frac{u(\tau)}{\tau^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2\tau^{-1} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \tau & \tau^{-1} \\ \tau & t^{-1} \end{vmatrix}$. □

Esempio 2.4.8 $\ddot{x} = t\dot{x}$, con $t_0, x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R}$.

Si ha $\mathbf{T}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix}$. Una soluzione è $\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Un'altra si trova per integrazione semplice: $\mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} \int^t \exp(\sigma/2) d\sigma \\ \exp(t^2/2) \end{pmatrix}$. Queste hanno $\mathcal{W}(t) = e^{t^2}/2 \neq 0$. Segue

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -e^{-t^2/2} \int^t e^{\sigma/2} d\sigma \\ 0 & e^{-t^2/2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Psi(t, t_0) = \begin{pmatrix} 1 & e^{-t_0^2/2} \int_{t_0}^t e^{\sigma/2} d\sigma \\ 0 & e^{(t^2-t_0^2)/2} \end{pmatrix}.$$

□

2.5 La teoria di Floquet

Su uno spazio vettoriale reale $\mathbb{V}$, rappresentato in coordinate da $\mathbb{R}^n$, si consideri l'equazione

$$\dot{x} = \mathcal{Q}(t) x, \quad x_0 \in \mathbb{V}, \quad \mathcal{Q} \in \text{Per}_T(\mathbb{L}(\mathbb{V})), \quad (5.69)$$

ove si è indicata con $\text{Per}_T(\mathbb{L}(\mathbb{V}))$ la famiglia delle funzioni $\mathcal{Q}$ definite su $\mathbb{R}$ e a valori nello spazio $\mathbb{L}(\mathbb{V})$ degli operatori lineari su $\mathbb{V}$, regolari e periodiche di (minimo) periodo T :

$$\mathcal{Q}(t+T) = \mathcal{Q}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{Q}(t_1) \neq \mathcal{Q}(t_2) \text{ se } |t_1 - t_2| < T, \quad \mathcal{Q} \in C^{\ell \geq 1}(\mathbb{R}).$$

Innanzitutto si osservi che *non è detto che le sue soluzioni siano periodiche*; ad esempio: $\dot{x} = (1 + \sin t)x$ ha soluzioni $x(t) = ce^t e^{-\cos t}$ che è periodica solo se $c = 0$.

In virtù del teorema del prolungamento però si può affermare che *le sue soluzioni esistono per ogni t reale*. Ciò inoltre permette, senza ledere la generalità, di fissare come istante di riferimento t_0 un valore arbitrario in $\mathbb{R}$, ad esempio $t_0 = 0$.

Per facilitare lo studio della (5.69) è opportuno premettere il seguente:

Lemma 2.5.1 *Un operatore $\mathcal{C} \in \mathbb{L}(\mathbb{V})$ che abbia non nulli tutti i suoi autovalori $\{\lambda_j \in \mathbb{C}\}_{j=1,\dots,n}$ individua (almeno) un operatore $\mathcal{B} \in \mathbb{L}({}^c\mathbb{V})$ tale che $\mathcal{C} = e^{\mathcal{B}}$.*

Dimostrazione Dato che l'esponenziale di un operatore è già stato definito, sarà lecito mostrare l'esistenza del logaritmo in modo costruttivo e cioè, fissata un'opportuna base, producendo esplicitamente una matrice $\mathbf{B}$ la cui esponenziale è uguale alla matrice $\mathbf{C}$ di $\mathcal{C}$ in quella base, e poi definendo *logaritmo di $\mathcal{C}$* quell'operatore $\mathcal{B}$ che, rappresentato in quella base dalla matrice $\mathbf{B}$ così trovata, è in ogni altra base rappresentato dalla trasformata di questa secondo la $\mathbf{PBP}^{-1}$ (ove $\mathbf{P}$ esprime il cambio di base in $\mathbb{V}$ e, come tale, un'arbitraria trasformazione lineare di coordinate su $\mathbb{V}$).

Che tale definizione per un operatore $\mathcal{B} = \ln \mathcal{C}$ sia ben posta è conseguenza della seguente osservazione:

Siccome per $\mathbf{P}$ arbitraria non singolare si ha $\mathbf{P}^{-1}e^{\mathbf{T}}\mathbf{P} = e^{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{P}}$, se $\mathbf{B}$ è tale che $e^{\mathbf{B}} = \mathbf{C}$ e se $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{PCP}^{-1}$ allora certamente $\tilde{\mathbf{B}} := \mathbf{PBP}^{-1}$ è tale che $e^{\tilde{\mathbf{B}}} = \tilde{\mathbf{C}}$. Occorre tuttavia notare esplicitamente che con tale definizione si rinuncia ad ogni forma di unicità del risultato: ciò che si mostra è l'esistenza di *almeno un $\mathcal{B}$* il cui esponenziale uguaglia l'operatore $\mathcal{C}$ dato: basta che $\mathbf{B}'$ sia tale che $e^{\mathbf{B}'} = \mathbf{I}$ e che $\mathbf{B}\mathbf{B}' = \mathbf{B}'\mathbf{B}$ per riconoscere che $\mathbf{B}$ e $\mathbf{B} + \mathbf{B}'$ hanno lo stesso esponenziale.

A prescindere dal come venga esplicitamente determinato, non lede la generalità cercare un $\mathcal{B}$, del quale sia dato l'esponenziale $\mathcal{C}$, in modo che ne condivida la base propria (di Jordan). Infatti l'esponenziazione di un operatore non ne muta i sottospazi invarianti. In particolare, le (5.70), ..., (5.72) più oltre dimostrano l'esistenza di un $\mathcal{B}$ con gli stessi spazi invarianti e gli stessi autovettori generalizzati di $\mathcal{C}$.

In definitiva sarà sufficiente determinare una matrice $\mathbf{B}$ il cui esponenziale $\mathbf{C}$ abbia forma di Jordan: $\mathbf{C}_J = \text{diag}(\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_r)$ con $\mathbf{J}_j = \lambda_j \mathbf{I}_{q_j} + \mathbf{N}_{q_j}$, ove $\mathbf{N}_{q_j}$ è un nilpotente (non necessariamente elementare) di ordine $q_j \leq a(\lambda_j)$ sull'autospazio generalizzato $\mathbb{M}_j = \text{Ker}(\mathcal{C} - \lambda_j \mathbf{I}_n)^{q_j}$, la dimensione del quale, come è noto, è la molteplicità algebrica $a(\lambda_j)$ dell'autovalore λ_j .

Anzi, siccome ciascuno dei blocchi elementari di Jordan lascia il proprio sottospazio invariante, e siccome $\lambda_j \neq 0$, basterà far vedere che esiste $\mathbf{B}$ tale che $\mathbf{C} = e^{\mathbf{B}}$ per una sola matrice del tipo $\mathbf{C} = \lambda \left(\mathbf{I}_m + \frac{\mathbf{E}_m}{\lambda} \right)$ con $\mathbf{E}_m$ il blocco elementare nilpotente di ordine m .

Si ottiene la tesi, e cioè che

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{I}_m \cdot \left(\mathbf{I}_m + \frac{\mathbf{E}_m}{\lambda} \right) = e^{\mathbf{B}_\lambda} \cdot e^{\mathbf{B}_m} = e^{\mathbf{B}}$$

purché siano valide, in ${}^c\mathbb{R}^m$, le

$$\mathbf{B} := \mathbf{B}_\lambda + \mathbf{B}_m \quad (5.70)$$

$$\mathbf{B}_\lambda := (\ln \lambda) \mathbf{I}_m \quad (5.71)$$

$$\mathbf{B}_m := \ln \left(\mathbf{I}_m + \frac{\mathbf{E}_m}{\lambda} \right) := - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(-\mathbf{E}_m)^j}{j \lambda^j} \quad (5.72)$$

La (5.72) si giustifica osservando che, se si pone $e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ e $\ln(1+x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k}$ (con x qualsiasi tale che $|x| < 1$), allora sussiste l'identità formale

$$\begin{aligned} (1+x) &= \exp \ln(1+x) = \exp \left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \right) = \\ &= 1 + \left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \right)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{3!} \left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \right)^3 + \dots \end{aligned}$$

Data l'assoluta convergenza delle serie qui coinvolte, l'uguaglianza fra primo e secondo membro può essere provata per componenti; e siccome il primo membro ha componenti: $1, 1, 0, 0, 0, \dots$ tali devono essere quelle del secondo membro qualunque sia il valore della indeterminata x , sia che essa appartenga ad $\mathbb{R}$, sia che essa sia tale che: $x^m = x^{m+1} = \dots = 0$, cosa questa che ne trasforma tutte le serie in semplici somme, e toglie quindi ogni dubbio circa la loro convergenza.

D'altra parte, la nilpotenza di $\mathbf{E}_m$ e la commutatività di $\mathbf{E}_m^k$ con $\mathbf{E}_m^h$ permettono la sostituzione di x con $\mathbf{E}_m/\lambda$. Quest'ultimo quindi verifica l'identità

$$\left(\mathbf{I}_m + \frac{\mathbf{E}_m}{\lambda} \right) = \exp(\mathbf{B}_m) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \left(- \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(-\mathbf{E}_m)^j}{j \lambda^j} \right)^k \quad (5.73)$$

Servendosi della (5.73) si prova direttamente che $\mathbf{B}$, definito nella (5.70), verifica la

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{B}^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{(\ln \lambda)^{k-j}}{(k-j)!} \frac{(\mathbf{B}_m)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=j}^{\infty} \frac{(\ln \lambda)^{k-j}}{(k-j)!} \right) \frac{(\mathbf{B}_m)^j}{j!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (\exp \ln \lambda) \frac{(\mathbf{B}_m)^j}{j!} = \lambda \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{B}_m)^j}{j!} = \lambda \left(\mathbb{I}_m + \frac{\mathbf{B}_m}{\lambda} \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Esempio 2.5.1 $\mathbf{C} = \mathbb{I}_2 + \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ implica $\mathbf{B} = \mathbf{B}_2 = \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\square$

Nota 2.5.1 Così come l'operazione di estrazione del logaritmo di un numero complesso $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ non è univoca:

$$\mu = \rho e^{i\theta} \implies \ln \mu = \ln \rho + i(\theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \text{ arbitrario}, \quad (5.74)$$

anche la specifica costruzione del logaritmo di un operatore vista nel precedente lemma non determina un unico $\mathcal{B} = \ln \mathcal{C}$. Ad esempio, in virtù della (5.70), già si vede che ciascuno dei $\ln \mu =: \sigma + i(\theta + 2k\pi)$, $k = 1, 2, \dots$, può essere assunto come autovalore di altrettanti $\mathcal{B}$, tutti aventi lo stesso esponenziale $e^{\mathcal{B}} = \mu \mathbb{I}$ e tali che

$$\mathbf{B} := (\sigma + i\theta) \mathbb{I}_m + \mathbf{B}_m + i 2k\pi \mathbb{I}_m,$$

con $\theta := \text{Arg } \mu$ e $\sigma := \ln |\mu|$.

D'altra parte un qualunque $\mathcal{B}$ che verifica la $e^{\mathcal{B}} = \mathcal{C}$ ha come autovalori numeri il cui esponenziale è necessariamente uno degli autovalori di $\mathcal{C}$, (per convincersene basta restringersi al corrispondente autospazio di $\mathcal{B}$). Ne segue che tutti i $\mathcal{B}$ che hanno uno stesso esponenziale $\mathcal{C}$, hanno anche in comune le parti reali di ognuno dei loro autovalori giacché queste coincidono necessariamente con le parti reali: $\sigma := \ln |\mu|$ dei logaritmi degli autovalori μ di $\mathcal{C}$, e che pertanto risultano univocamente determinate. $\triangleright$

Nota 2.5.2 Se $\mathcal{C}$, che è reale, ha qualche autovalore complesso: $\mu = \alpha + i\beta$ esso ammette come autovalore anche il suo complesso coniugato $\bar{\mu} = \alpha - i\beta$. Ciò permette di assumere che $\mathcal{B}$ sia reale. Per convincersene, si supponga (come già accennato, e senza perdita di generalità) che una tale coppia di autovalori abbia molteplicità geometrica uguale ad uno, molteplicità algebrica $m \geq 1$, e che l'intero $\mathbb{V}$ sia autospazio generalizzato per la coppia $(\mu, \bar{\mu})$. Esiste allora una base reale per $\mathbb{V}$ che dà a $\mathcal{C}$ la matrice $(2m \times 2m)$

$$\begin{pmatrix} {}^{\mathbb{R}}\mu & \mathbb{I}_2 & 0_2 & \cdots & 0_2 \\ 0_2 & {}^{\mathbb{R}}\mu & \mathbb{I}_2 & \cdots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0_2 \\ 0_2 & & & & \mathbb{I}_2 \\ & & & & & {}^{\mathbb{R}}\mu \end{pmatrix}$$

con $\theta := \text{Arg } \mu$, $\sigma := \ln \rho$, $\rho := |\mu|$, ed

$${}^{\mathbb{R}}\mu = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} =: \rho \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} \sigma & -\theta - 2k\pi \\ \theta + 2k\pi & \sigma \end{pmatrix} = e^{{}^{\mathbb{R}}(\ln \mu)}.$$

Nella stessa base si ricava allora, per la matrice $\mathbf{B}$ $(2m \times 2m)$,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} {}^{\mathbb{R}}(\ln \mu) & 0_2 & \cdots & 0_2 \\ 0_2 & {}^{\mathbb{R}}(\ln \mu) & 0_2 & \cdots \\ & & \ddots & \\ & & & {}^{\mathbb{R}}(\ln \mu) \end{pmatrix} + \mathbf{B}_{m,2}$$

e sono reali le matrici

$${}^{\mathbb{R}}(\ln \mu) = {}^{\mathbb{R}}(\ln \rho + i(\theta + 2k\pi)) = \begin{pmatrix} \sigma & -\theta - 2k\pi \\ \theta + 2k\pi & \sigma \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{B}_{m,2} = - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j} {}^{\mathbb{R}}(\mu^{-j}) (-\mathbf{E}_{m,2})^j,$$

nella quale si è fatto uso delle matrici reali, $(2m \times 2m)$,

$$\mathbf{E}_{m,2} = \begin{pmatrix} 0_2 & \mathbb{I}_2 & 0_2 & \cdots \\ 0_2 & 0_2 & \mathbb{I}_2 & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 0_2 \\ 0_2 & \cdots & & 0_2 \end{pmatrix}; \quad {}^{\mathbb{R}}(\mu^{-j}) = \begin{pmatrix} {}^{\mathbb{R}}\mu^{-j} & 0_2 & \cdots & 0_2 \\ 0_2 & {}^{\mathbb{R}}\mu^{-j} & 0_2 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & 0_2 \\ 0_2 & \cdots & & {}^{\mathbb{R}}\mu^{-j} \end{pmatrix}$$

con

$${}^{\mathbb{R}}\mu^{-j} = ({}^{\mathbb{R}}\mu^{-1})^j = \left(\frac{a}{a^2+b^2} \quad \frac{b}{a^2+b^2} \right)^j = \left({}^{\mathbb{R}} \left(\frac{\bar{\mu}}{|\mu|^2} \right) \right)^j.$$

Si osservi inoltre che è opportuno considerare come coppie di autovalori complessi a parte reale nulla le (eventuali) coppie di autovalori negativi, uguali, e di uguali molteplicità. Ad esempio:

$$-\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \pi & 0 \\ 0 & \cos \pi \end{pmatrix} = {}^{\mathbb{R}}(e^{i\pi}) = e^{{}^{\mathbb{R}}(i\pi)} = \exp \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix};$$

tale matrice ha, correttamente, logaritmo reale dato da ${}^{\mathbb{R}}(i\pi) = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$.

Anche più semplicemente si nota che se $\mathcal{C}$ ha autovalori reali e positivi allora $\mathbf{B}$ è reale.

Ciò non accade invece se l'operatore $\mathcal{C}$ ha autovalori negativi, a meno dei casi accennati in quest'ultima osservazione. In tal caso infatti, così come $e^z = -1$ implica $z = i\pi$, la matrice $\mathbf{B}$ relativa al logaritmo di un tale operatore è, in generale, complessa anche se in base reale. In particolare, l'operatore $\mathcal{B}$ può avere qualche autovalore complesso che (non proviene da una coppia di autovalori complessi coniugati $(\mu, \bar{\mu})$ e che) non fa parte di alcuna coppia di numeri complessi coniugati.

Tuttavia, l'essere $\mathcal{C}$ reale assicura non solo che l'operatore $\hat{\mathcal{C}} := \mathcal{C}^2$ è reale, ma in più che quest'ultimo ha autovalori

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} &= \lambda^2 > 0 && \text{reali positivi se } \lambda \text{ era autovalore reale di } \mathcal{C}; \\ \hat{\mu} &= \mu^2 = \rho^2 e^{i2\theta} && \text{se } \mu = \rho e^{i\theta} \text{ era autovalore complesso di } \mathcal{C}, \text{ insieme con} \\ \bar{\mu} &= \bar{\mu}^2 = \rho^2 e^{-i2\theta} && \text{che ne è il corrispondente autovalore coniugato.} \end{aligned}$$

Pertanto, se anche $\mathcal{C}^2$ può avere autovalori reali negativi essi sono presenti a coppie e vale l'osservazione qui sopra.

L'assenza di (un numero dispari di) autovalori negativi per l'operatore $\mathcal{C}^2$ permette di concludere che: se $\mathcal{C}$ è reale esistono non solo una matrice reale $\hat{\mathcal{C}} = \mathcal{C}^2$ che rappresenta $\hat{\mathcal{C}} = \mathcal{C}^2$ nella base in cui $\mathcal{C}$ è rappresentato da $\mathbf{C}$, ma anche una matrice $\hat{\mathbf{B}}$ tale che $e^{\hat{\mathbf{B}}} = \hat{\mathcal{C}} = \mathcal{C}^2$ che può essere scelta reale. La matrice $\hat{\mathbf{B}}$ è data dalla (5.70) con $\hat{\lambda}$ al posto di λ qualora l'autovalore λ di $\mathcal{C}$ sia reale. Qualora invece $\mathcal{C}$ ammetta autovalori complessi coniugati $\mu, \bar{\mu} \in \mathbb{C}$, la matrice $\hat{\mathbf{B}}$ è data dalla

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 {}^{\mathbb{R}}(\ln \mu) & 0_2 & \cdots & 0_2 \\ 0_2 & 2 {}^{\mathbb{R}}(\ln \mu) & 0_2 & \cdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0_2 \\ 0_2 & \cdots & & & 2 {}^{\mathbb{R}}(\ln \mu) \end{pmatrix} + \hat{\mathbf{B}}_{m,2}$$

avendo chiamato $\hat{\mathbf{B}}_{m,2}$ la matrice $\hat{\mathbf{B}}_{m,2} = -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j} (\hat{\mu}^{-j}) (-\mathbf{E}_{m,2})^j$, con $\hat{\mu} := \mu^2$.

In definitiva è lecito assumere che il logaritmo $\hat{\mathbf{B}}$ del quadrato di un operatore reale $\mathcal{C}$ è reale e quindi privo di "frequenze proprie" non multiple di 2π .

Osservazione La matrice $-\mathbb{I}_2$ si può considerare come il quadrato, in $\mathbb{C}\mathbb{R}^2$, non solo degli operatori complessi $+i\mathbb{I}_2$ e $-i\mathbb{I}_2$, ma anche degli operatori reali (entrambi aventi autovalori $\mu = i = e^{i\pi/2}$ e $\bar{\mu} = -i = e^{-i\pi/2}$) che nella base reale di partenza ${}^{\mathbb{C}}\{e_1, e_2\}$ hanno matrici $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. A loro volta, questi secondi hanno rispettivamente matrici $+i\mathbb{I}_2$ e $-i\mathbb{I}_2$ nella base degli autovettori (complessi coniugati) $\{\epsilon_\mu = e_1 - i e_2; \bar{\epsilon}_\mu = e_1 + i e_2\}$.

Corrispondentemente, come si è detto, il logaritmo di $-\mathbb{I}_2$ è (reale e) dato da:

$$\hat{\mathbf{B}} = 2 {}^{\mathbb{R}}(\ln e^{i\pi/2}) = {}^{\mathbb{R}}(i\pi) = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}.$$

▷

È possibile ora enunciare il seguente teorema, valido per sistemi lineari con operatore di campo $\mathcal{Q} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}(\mathbb{V})$ regolare e T-periodico e agente su uno spazio vettoriale reale $\mathbb{V}$, (ma il teorema vale, a fortiori, se $\mathbb{V}$ è complesso), di dimensione $n < \infty$.

Teorema 2.5.1 (di Floquet) *Ogni sistema fondamentale Φ dell'equazione*

$$\dot{x} = \mathcal{Q}(t)x, \quad x_0 \in \mathbb{V}, \quad \mathcal{Q} \in \text{Per}_T(\mathbb{L}(\mathbb{V})), \quad (5.75)$$

può essere espresso, in coordinate, mediante una matrice Φ tale che

$$\begin{aligned} \Phi : t \mapsto \Phi(t) &= \mathbf{P}_\Phi(t) e^{t\mathbf{B}_\Phi} \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^n) && \text{con} \\ \mathbf{P}_\Phi &\in \text{Per}_T(\mathbb{L}(\mathbb{C}^n)) \text{ non singolare,} && \text{e } \mathbf{B}_\Phi \in \mathbb{L}(\mathbb{C}^n) \text{ costante.} \end{aligned}$$

Dimostrazione Sia $\Phi = \Phi(t, t_0, \Phi_0)$ un sistema fondamentale di (5.75) e $\tilde{\Phi} = \Phi(t, t_0, \tilde{\Phi}_0)$ la sua rappresentazione in un arbitrario ma fissato sistema di coordinate. Come già ricordato all'inizio del paragrafo, esso è certo definito su tutto $\mathbb{R}$ ed è quindi possibile calcolarne il valore in $t + T$

$$\Phi(t + T, t_0, \Phi_0) =: \tilde{\Phi}(t, t_0 - T, \Phi_0) =: \tilde{\Phi}(t, t_0, \tilde{\Phi}_0) .$$

D'altra parte, per ipotesi, il sistema Φ è soluzione per ogni $t \in \mathbb{R}$ della (5.75), e sono pertanto valide per ciascun $t \in \mathbb{R}$ le seguenti identità (per semplicità, $\Phi(t, t_0, \Phi_0)$ verrà indicato con $\Phi(t)$)

$$\dot{\Phi}(t) = Q(t)\Phi(t) \quad \text{e} \quad \dot{\Phi}(t + T) = Q(t + T)\Phi(t + T) .$$

Ma $Q(t + T) = Q(t)$, e quindi $\Phi(t + T)$ verifica la stessa equazione (5.75).

Siccome $\Phi(t)$ è non singolare per qualunque t , anche $\Phi(t + T)$ lo sarà, e se ne conclude che $\Phi(t + T)$ individua un altro sistema fondamentale della (5.75): quello che all'istante $t = t_0$ ha matrice

$$\tilde{\Phi}_0 = \Phi(t_0 + T, t_0, \Phi_0) = \tilde{\Phi}(t_0, t_0 - T, \Phi_0) .$$

Esiste quindi una matrice numerica C_Φ che prende il nome di

Matrice monodroma della (5.75) := una matrice $C_\Phi \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\Phi(t + T) = \Phi(t)C_\Phi \quad \text{e quindi} \quad C_\Phi = \Phi^{-1}(t)\Phi(t + T) = \Phi^{-1}(t_0)\Phi(t_0 + T) .$$

Si ponga: $e^{TB_\Phi} := C_\Phi$. Risulta $\Phi(t + T) = \Phi(t)e^{TB_\Phi}$. Tale relazione, moltiplicata (a destra) per la matrice non singolare $e^{-(t+T)B_\Phi} \in \mathbb{C}^{2n}$, fornisce

$$\Phi(t + T)e^{-(t+T)B_\Phi} = \Phi(t)e^{-tB_\Phi} =: P_\Phi(t) \in \mathbb{C}^{2n} . \quad (5.76)$$

Se ne conclude in particolare che è sufficiente conoscere la soluzione Φ in un solo periodo: $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, anche se non periodica, per ricavare la C_Φ e di qui ottenere la soluzione generale, certamente definita su tutto $\mathbb{R}$.

Nota 2.5.3 Entrambe le matrici $C_\Phi(t)$ e $B_\Phi(t)$ dipendono dalla scelta dell'istante t_0 che, benché possa essere scelto ovunque in $\mathbb{R}$, va comunque fissato. Sia per esempio $t_0 = 0$. Esse, inoltre, dipendono dal sistema fondamentale Φ scelto per esprimere la soluzione del sistema (si veda la Nota 2.5.6 più oltre).

Tuttavia né la matrice C_Φ né la B_Φ dipendono dal sistema di coordinate scelto su $\mathbb{V}$. Infatti, una qualsiasi trasformazione di coordinate purché lineare ed indipendente dal tempo: $x' = Px$ con $P \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$ (o al più T -periodica, vedi oltre) agisce sulle matrici fondamentali Φ di uno stesso sistema fondamentale secondo la $\Phi' = P\Phi$; e pertanto si ha $(\Phi')^{-1}(0)\Phi'(T) = \Phi^{-1}(0)P^{-1}P\Phi(T) = C_\Phi$, ovvero: la matrice monodroma C_Φ (e quindi la B_Φ) dipende solo dal sistema fondamentale scelto e non dalla sua rappresentazione.

Viceversa, la P_Φ del Teorema di Floquet (definita nella (5.76)) dipende dal sistema di coordinate scelto su $\mathbb{V}$ e si trasforma, al cambio di base: $\{e' = Pe\}$, come le matrici fondamentali: $P'_\Phi(t) = PP_\Phi(t)$.

Le due matrici $P_\Phi(t)$ e $B_\Phi(t)$ possono essere complesse anche se Φ e Q sono reali, e la matrice B_Φ non è determinata in modo univoco, ma lo è solo il suo esponenziale: $C_\Phi = e^{TB_\Phi}$. $\triangleright$

Nota 2.5.4 Nel caso dei sistemi a coefficienti costanti, e cioè se $Q(t) = T = cost$, si ha $\Phi(t) = \Psi(t)\Phi(0) = e^{Tt}\Phi(0)$, e quindi ogni P_Φ è costante, e ogni B_Φ è simile ad T . Infatti si può sempre porre $e^{Tt}\Phi(0) = \Phi(0)(\Phi^{-1}(0)e^{Tt}\Phi(0)) =: P_\Phi e^{B_\Phi t}$. In particolare B_Φ è la matrice di Jordan T_J se $\Phi(0) \equiv P$ è la matrice individuata dagli autovettori di T e cioè se il sistema fondamentale Φ è quello degli evoluti della base propria di T , e in tal caso si ha che $P_\Phi^{(\epsilon)}(t) = \mathbb{I}$. $\triangleright$

Il teorema di Floquet si può così rileggere: le soluzioni del sistema (5.75) sono le P_Φ -trasformate delle soluzioni di un associato sistema a coefficienti costanti:

$$\dot{\xi} = B_\Phi \xi, \quad \xi_0 \in \mathbb{C}^n. \quad (5.77)$$

Per enunciare in forma più generale questa proprietà si può anche introdurre la seguente relazione di equivalenza fra sistemi a coefficienti T -periodici.

Sistemi periodici equivalenti := due sistemi (5.75)

$$\dot{x} = Q(t)x, \quad x_0 \in \mathbb{V}, \quad Q \in \text{Per}_T(\mathbb{L}({}^c\mathbb{V})) \quad (5.78)$$

$$\dot{\xi} = S(t)\xi, \quad \xi_0 \in \mathbb{V}, \quad S \in \text{Per}_T(\mathbb{L}({}^c\mathbb{V})) , \quad (5.79)$$

che abbiano operatori di campo Q, S periodici dello stesso periodo T , e siano tali da ammettere (in un qualche sistema di coordinate) una coppia di matrici fondamentali: $\Phi : t \mapsto \Phi(t)$ e $\Xi : t \mapsto \Xi(t)$ rispettivamente, che definiscono una stessa matrice monodroma:

$$\Phi^{-1}(0)\Phi(T) = C_\Phi = C_\Xi = \Xi^{-1}(0)\Xi(T) . \quad (5.80)$$

Questa definizione implica che anche gli altri sistemi fondamentali di soluzioni dei due sistemi possono essere resi corrispondenti a coppie: $\Phi^\# = \Phi K$ e $\Xi^\# = \Xi K$ rispettivamente, con $K \in \mathbb{R}^{2n}$ non singolare, e ciascuna coppia individua una stessa matrice monodroma:

$$C_{\Phi^\#} = K^{-1}\Phi^{-1}(0)\Phi(T)K = K^{-1}\Xi^{-1}(0)\Xi(T)K =: C_{\Xi^\#} . \quad (5.81)$$

Lemma 2.5.1 *Due sistemi lineari a coefficienti T -periodici (5.78) e (5.79) sono equivalenti se e solo se esiste un (qualche) operatore non singolare $\mathcal{P}_T \in \text{Per}_T(\mathbb{L}(\mathbb{C}^n))$ tale che $x = P_T(t)\xi$, con $t \in \mathbb{R}$; e cioè se e solo se esiste un gruppo a un parametro di operatori invertibili: $\{\mathcal{P}_T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ anch'esso T -periodico e tale che: $\Phi(t) = \mathcal{P}_T(t)\Xi(t)$; (o anche: ... se e solo se esiste una trasformazione di coordinate lineare e T -periodica che collega i due sistemi).*

Dimostrazione

($\Leftarrow$)

$$\begin{aligned} C_\Phi &= \Phi^{-1}(t)\Phi(t+T) = \Xi^{-1}(t)P_T^{-1}(t)P_T(t+T)\Xi(t+T) \\ &= \Xi^{-1}(t)\Xi(t+T) = C_\Xi . \end{aligned}$$

($\Rightarrow$) La (5.80) implica $\Phi(t+T)\Xi^{-1}(t+T) = \Phi(t)\Xi^{-1}(t) =: P_T(t)$. ■

Scelto un sistema fondamentale Φ per l'equazione (5.78), e fissato il sistema di coordinate, si chiamino C_Φ, B_Φ , e P_Φ le matrici del teorema. Restano garantite le ipotesi del Lemma 2.5.1 nel caso particolare in cui $\mathcal{P}_T$ e Ξ siano rappresentati da P_Φ ed e^{tB_Φ} rispettivamente. Queste infatti verificano la: $\Phi(t) = P_\Phi(t)\Xi(t) \equiv P_\Phi(t)e^{tB_\Phi}$.

In un altro sistema di coordinate: $x' = Px$, come si è visto, non muta la matrice $B'_\Phi = B_\Phi$, e quindi invece dell'operatore B_Φ viene usato l'operatore $B'_\Phi = P^{-1}B_\Phi P$.

La matrice P_Φ cambia come le componenti: $P'_\Phi = PP_\Phi$ e così fanno anche le matrici $\Phi' = P\Phi$ che individuano il sistema fondamentale Φ . Rimane tuttavia vera la relazione:

$$\Phi' = P\Phi = PP_\Phi e^{tB_\Phi} = P'_\Phi e^{tB_\Phi} ,$$

e le matrici Q e $\Psi(t, t_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ si trasformano ancora secondo la: $\Psi' = P\Psi P^{-1}$.

Ciò permette di rifrasedare ulteriormente il teorema di Floquet mediante il:

Corollario 2.5.1 *Il sistema (5.75) è equivalente a un sistema (una famiglia di sistemi) a coefficienti costanti: $\dot{\xi} = B_\Phi \xi$. L'operatore B_Φ è quello che nel prescelto sistema di coordinate ha matrice B_Φ .*

Nota 2.5.5 L'equazione $P_\Phi(t) = \Phi(t)e^{-tB_\Phi}$ implica che P_Φ verifica l'equazione: $\dot{P}_\Phi = QP_\Phi - P_\Phi B_\Phi$. ▷

Come si è visto, anche se la realtà dello spazio $\mathbb{V}$ e dell'operatore di campo $Q(t)$ assicurano che anche il sistema fondamentale Φ e quindi la matrice C_Φ sono reali, ciononostante può accadere che la matrice $B_\Phi := \ln C_\Phi$, e quindi anche P_Φ , siano complesse. Sussiste tuttavia la seguente

Proposizione 2.5.1 *Se $\mathbb{V}$ è reale e quindi isomorfo ad $\mathbb{R}^n$, se l'operatore di campo $Q(t)$ dell'equazione (5.75) è reale, e se esso viene considerato periodico di periodo $\hat{T} := 2T$, allora, qualunque sia il sistema fondamentale scelto Φ , in corrispondenza ad esso possono essere considerate reali: sia la matrice $P_\Phi : t \mapsto P_\Phi(t)$ (considerata $2T$ -periodica) sia la matrice $\hat{B}_\Phi \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$ tale che $e^{2T\hat{B}_\Phi} = C_\Phi^2$.*

Dimostrazione $\mathcal{Q}$ reale e condizioni iniziali reali implicano Φ reale, e questa a sua volta implica C_Φ reale. Inoltre è

$$\Phi(t + \hat{T}) := \Phi(t + 2T) = \Phi(t + T)C_\Phi = \Phi(t)C_\Phi^2 =: \Phi(t)\hat{C}_\Phi.$$

Ne segue che esiste $\hat{B}_\Phi$ tale che $e^{t\hat{B}_\Phi} \equiv e^{2T\hat{B}_\Phi} := C_\Phi^2$; e tale $\hat{B}_\Phi$, come si è visto all'inizio del paragrafo, può essere scelta reale. Inoltre $e^{t\hat{B}_\Phi}$ è l'evolvente di $\dot{\xi} = \hat{B}_\Phi\xi$, che può allora essere considerato come un sistema $2T$ -periodico reale ed equivalente al sistema $2T$ -periodico: $\dot{x} = \mathcal{Q}(t)x$. Dal teorema infine segue che $P_\Phi(t) = \Phi(t)e^{-t\hat{B}_\Phi} = P_\Phi(t + \hat{T})$ è $2T$ -periodica e reale, perché tali sono Φ e $\hat{B}_\Phi$. ■

Nota 2.5.6 Siano Φ e $\Phi^\#$ due qualsiasi matrici fondamentali di una stessa equazione (5.75); e siano $C_\Phi = \Phi^{-1}(0)\Phi(T) =: e^{TB_\Phi}$ e, rispettivamente, $C_{\Phi^\#} = \Phi^{\#-1}(0)\Phi^\#(T) =: e^{TB_{\Phi^\#}}$ le due corrispondenti matrici monodrome. Siccome senz'altro esiste $K \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$ non singolare e tale che $\Phi^\#(t) = \Phi(t)K$, se ne deduce che:

$$C_{\Phi^\#} = \Phi^{\#-1}(0)\Phi^\#(T) = K^{-1}\Phi^{-1}(0)\Phi(T)K = K^{-1}C_\Phi K, \quad (5.82)$$

e cioè: *tutte le matrici $C_\Phi \equiv \Phi^{-1}(0)\Phi(T)$ pur dipendendo dai particolari sistemi fondamentali Φ che le definiscono, sono però simili fra loro. In particolare hanno tutti gli stessi autovalori, mentre hanno come autovettori i K -trasformati degli autovettori.*

La stessa considerazione vale, modulo $2i\pi$, per le matrici B_Φ e $B_{\Phi^\#}$.

Si ricordi, ora, che la matrice principale del sistema (5.75) relativa all'istante t_0 è esprimibile mediante la $\Psi(t, t_0) := \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0) \equiv \Phi(t, t_0, \Phi_0)\Phi_0^{-1}$ che rappresenta nelle coordinate scelte l'operatore di evoluzione $\mathcal{G}_{t_0}^t$ del sistema (5.75). Se allora, nella (5.82) si sceglie $K = \Phi^{-1}(t_0) =: \Phi_0^{-1}$ con t_0 comunque fissato, e si ricorda che $C_\Phi = \Phi^{-1}(t, t_0, \Phi_0)\Phi(t + T, t_0, \Phi_0)$, si riconosce che: *la matrice C_Ψ d'avanzamento di un periodo a partire dall'istante t_0 resta individuata da*

$$\Phi_0 C_\Phi \Phi_0^{-1} = \Psi^{-1}(t, t_0)\Psi(t + T, t_0) = C_\Psi = \Psi(t_0 + T, t_0) = e^{TB_\Psi}.$$

A sua volta, la matrice B_Ψ determina la matrice $P_\Psi(t) = \Psi(t, t_0)e^{-tB_\Psi}$.

Si osservi infine che la legge di composizione: $\Psi(t, t'_0) = \Psi(t, t_0)\Psi(t_0, t'_0) =: \Psi(t, t_0)K$ permette di concludere che la scelta di un altro t'_0 fa mutare la C_Ψ solo all'interno della famiglia della sue equivalenti, e che è unico l'operatore C_Ψ al quale la scelta delle coordinate e dell'istante t_0 danno matrice $\Psi(t_0 + T, t_0)$, con $\Psi(t_0, t_0) = \mathbb{I}$. ▷

Si definiscono

Moltiplicatori (o numeri) caratteristici := gli autovalori $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{C}$, (eventualmente, reali) di una (qualsiasi) delle matrici monodrome della (5.75).

Esponenti caratteristici := i numeri $\eta_h \in \mathbb{C}$, $h = 1, \dots, n$, tali che

$$T\eta_h := \ln \mu_h \equiv \ln |\mu_h| + i(\theta_h + 2k\pi) =: \sigma_h + i(\theta_h + 2k\pi). \quad (5.83)$$

Corollario 2.5.1 Per ciascuno degli autovalori distinti $\mu_1, \dots, \mu_r \in \mathbb{C}$ di una (qualunque) delle matrici monodrome di (5.75): $C_\Phi = \Phi^{-1}(0)\Phi(T)$, esiste (almeno) una soluzione non banale $\hat{\phi}_j: t \mapsto \hat{\phi}_j(t)$ di (5.75) tale che

$$\hat{\phi}_j(t + T) = \mu_{(j)}\hat{\phi}_j(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, r.$$

Tali soluzioni, dette Soluzioni Normali, sono gli equivalenti delle autosoluzioni $\hat{\epsilon}(t) = \xi(t)\epsilon(0)$, con $\epsilon \in \text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda\mathbb{I})$, dei sistemi a coefficienti costanti. Almeno una di esse esiste certamente in ${}^c\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione Sia $\epsilon_\mu \in {}^c\mathbb{R}^n$ un autovettore della C_Φ corrispondente all'autovalore μ . La $\hat{\phi}(t) := \Phi(t)\epsilon_\mu$ è tale che

$$\hat{\phi}(t + T) := \Phi(t + T)\epsilon_\mu = \Phi(t)C_\Phi\epsilon_\mu = \mu\hat{\phi}(t). \quad \blacksquare$$

Se $\mathcal{Q}(t)$ è reale esistono *coppie di soluzioni normali* in corrispondenza a ciascuna coppia di moltiplicatori complessi $\mu, \bar{\mu}$, e quindi coppie di soluzioni reali $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}$ tali che, in $\mathbb{R}\text{-span}\{\Re \epsilon_\mu, -\Im \epsilon_\mu\}$ si ha

$$\begin{cases} \xi(t + T) = \alpha\xi(t) - \beta\eta(t) = e^\sigma (\xi(t) \cos \theta - \eta(t) \sin \theta); \\ \eta(t + T) = \beta\xi(t) + \alpha\eta(t) = e^\sigma (\xi(t) \sin \theta + \eta(t) \cos \theta). \end{cases}$$

In generale, non è detto che le soluzioni normali siano periodiche; lo sono se la corrispondente μ è una qualsiasi radice dell'unità: $\mu^m = 1$, con $m \in \mathbb{N}$, e cioè se $\mu = e^{2i\pi/m}$ con $m \in \mathbb{N}$. La corrispondente soluzione normale è allora periodica di periodo mT .

In particolare si hanno soluzioni T -periodiche se $\mu = 1$ è autovalore della matrice monodroma $\mathbf{C}_\Phi$, ovvero se $\mathbf{C}_\Phi \epsilon_\mu =: e^{T\mathbf{B}_\Phi} \epsilon_\mu = \epsilon_\mu$, e allora

$$\hat{\phi}(t+T) = \Phi(t+T)\epsilon_\mu = \Phi(t)\epsilon_\mu = \hat{\phi}(t),$$

mentre si hanno soluzioni $2T$ -periodiche (e non T -periodiche) se $\mu = -1 \in \text{spect } \mathbf{C}_\Phi$.

Se poi tutti i moltiplicatori caratteristici $\mu_1, \dots, \mu_n$ sono distinti fra loro (o comunque di molteplicità algebrica e geometrica uguali) le matrici $\mathbf{C}_\Phi = e^{T\mathbf{B}_\Phi}$, e quindi anche gli $e^{t\mathbf{B}_\Phi}$, sono diagonalizzabili (in ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^n$). In questo caso: *le soluzioni normali sono sufficienti a formare un sistema fondamentale nello spazio delle soluzioni*. Ciascuna di esse ha la forma

$$\hat{\phi}_h(t) = \mathbf{p}_h(t)e^{t\eta_h}, \quad h = 1, 2, \dots, n, \quad \text{con } \mathbf{p}_h \in \text{Per}_T({}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^n), \quad (5.84)$$

e cioè con $\mathbf{p}_h = \mathbf{p}_h(t)$ un vettore (complesso) T -periodico, e $T\eta_h := \ln \mu_h$. (Basta moltiplicare, come fatto nel Teorema, per $e^{-\eta_h(t+T)}$ la relazione $\hat{\phi}(t+T) = \mu_h \hat{\phi}(t)$). Viceversa, se una qualche soluzione dell'equazione (5.75) ha la forma

$$\hat{\phi}(t) = \mathbf{p}(t)e^{t\eta}, \quad \text{con } \mathbf{p} \in \text{Per}_T({}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^n), \quad \eta \in \mathbb{C},$$

allora essa è normale, ed esiste una qualche $\mathbf{C}_\Phi = e^{T\mathbf{B}_\Phi}$ che ha $\mu = e^{T\eta}$ come autovalore.

Infatti: per il teorema di Floquet si ha $\hat{\phi}(t) = \mathbf{P}_\Phi(t)e^{t\mathbf{B}_\Phi}\mathbf{x}_0$ per qualche $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ed un qualche Φ . D'altra parte l'ipotesi implica $\hat{\phi}(t) = \hat{\phi}(t+T)e^{-T\eta}$; per cui risulta necessariamente

$$\mathbf{P}_\Phi(t)e^{t\mathbf{B}_\Phi}\mathbf{x}_0 = \mathbf{P}_\Phi(t+T)e^{(t+T)\mathbf{B}_\Phi}e^{-T\eta}\mathbf{x}_0 \quad \text{e cioè} \quad \mathbf{P}_\Phi(t)e^{t\mathbf{B}_\Phi} \left[\mathbf{I} - e^{T(\mathbf{B}_\Phi - \eta\mathbf{I})} \right] \mathbf{x}_0 = 0.$$

Ma $\mathbf{P}_\Phi(t)e^{t\mathbf{B}_\Phi}$ è non singolare e $\mathbf{x}_0$ non nullo; quindi $\mathbf{I} - e^{T(\mathbf{B}_\Phi - \eta\mathbf{I})}$ è autovalore di $e^{T(\mathbf{B}_\Phi - \eta\mathbf{I})}$, il che comporta l'esistenza di un (auto)vettore ϵ tale che $e^{T\mathbf{B}_\Phi}\epsilon = e^{T\eta}\epsilon =: \mu\epsilon$, e cioè la tesi.

Nota 2.5.7 Gli esponenti caratteristici $\eta_h := (\ln|\mu_h| + i(\theta_h + 2k\pi))/T$ hanno solo le parti reali univocamente determinate. Essi, come i μ_h , *non dipendono dalla scelta del sistema fondamentale* e, come si è visto nella Nota 2.5.1, ciascuno di essi può essere considerato autovalore di un (qualche) $\mathbf{B}_\Phi$. In loro corrispondenza si hanno le soluzioni normali $\hat{\phi}_h(t) = \Phi(t)\epsilon_h = \mathbf{P}_\Phi(t)e^{t\eta_h}\epsilon_h$.

Si osservi infine che, analogamente al caso dei coefficienti costanti, la periodicità di $\mathbf{Q}(t)$ assicura che ognuna delle matrici $\mathbf{Q}(t)$ ha elementi limitati; e ciò implica che la crescita di ogni soluzione della (5.75) è limitata da una funzione esponenziale, moltiplicata al più per un polinomio a coefficienti T -periodici. Infatti, anche nel caso in cui qualche autovalore avesse molteplicità maggiore di uno, ricorrendo al sistema Φ che ha $e^{t\mathbf{B}_\Phi}$ in forma di Jordan si trova che le matrici $\Phi(t)$ hanno colonne con elementi che sono combinazioni lineari di esponenziali moltiplicati per polinomi in t , a coefficienti T -periodici.

È possibile allora (si veda: Cap V e [Hale § III.11]) associare ad ogni soluzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ un numero λ detto

Esponente di Liapunov della soluzione $:= \lambda := \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |\mathbf{x}(t)|$;

esso ne caratterizza la crescita asintotica in $|t| \rightarrow \infty$. ▷

La proprietà vista in precedenza (si veda la Proposizione 2.4.1 § II.4) circa il Wronskiano di una matrice fondamentale, e cioè la $\mathcal{W}(t) = (Tr \mathbf{Q}(t))\mathcal{W}(t)$, o equivalentemente la $Det \Psi(t, t_0) = \exp \left(\int_{t_0}^t Tr \mathbf{Q}(\tau) d\tau \right)$, dà senz'altro

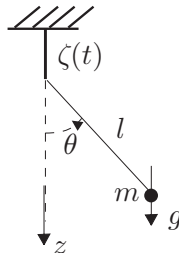
$$\exp \left(\int_0^T Tr \mathbf{Q}(\tau) d\tau \right) = Det \Psi(T, 0) = \frac{Det \Phi(T)}{Det \Phi(0)} = Det \mathbf{C}_\Phi = \mu_1 \cdots \mu_n,$$

ove i moltiplicatori $\mu_1 \cdots \mu_n$ sono gli autovalori di una qualsiasi delle matrici $\mathbf{C}_\Phi := \Phi^{-1}(0)\Phi(T)$. Ne segue

$$\frac{1}{T} \int_0^T Tr \mathbf{Q}(\tau) d\tau = \eta_1 + \dots + \eta_n.$$

Un problema di Meccanica

Si consideri un pendolo semplice libero di oscillare in un piano verticale e vincolato ad un punto di sospensione che si muove di moto periodico su un asse verticale di tale piano con legge nota: $\zeta = \zeta(t) = \zeta(t+T)$.



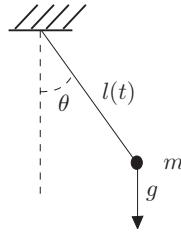
Si hanno

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(t, \theta, \dot{\theta}) &= \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{d}{dt}(\zeta(t) + l \cos \theta) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt}(l \sin \theta) \right)^2 \right]; \\ \mathcal{V}(t, \theta) &= -mg(\zeta(t) + l \cos \theta) + c \\ \mathcal{L}(t, \theta, \dot{\theta}) &= \mathcal{T}(t, \theta, \dot{\theta}) - \mathcal{V}(t, \theta), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &\equiv l\ddot{\theta} + (g - \ddot{\zeta}(t)) \sin \theta = 0.\end{aligned}$$

Supposto che sia $\|\theta\|_{\infty} = \theta_{max} \ll \pi$, e posto $\theta =: \theta_{max} x$, si ricava (si veda: Cap. VI) che l'equazione per x è

$$\ddot{x} + \frac{g - \ddot{\zeta}(t)}{l} x = 0.$$

Ad una equazione della stessa forma si giunge con un sistema che sia il modello per il moto di un'altalena:



per la quale un plausibile schema è quello di un pendolo semplice di lunghezza variabile: $l = l(t) = l(t + T)$ e quindi tale che:

$$\mathcal{T}(t, \theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m \left(\dot{l}^2(t) + l^2 \dot{\theta}^2 \right), \quad \mathcal{V}(t, \theta, \dot{\theta}) = -mgl(t) \cos \theta + c.$$

Ne segue $l(t)\ddot{\theta} + 2\dot{l}(t)\dot{\theta} + g \sin \theta = 0$. Sommando e sottraendo il termine $\ddot{\theta}$, e definendo $x(t) := l(t)\theta(t)$ e $c(t) := \frac{g - \ddot{l}(t)}{l(t)}$, si ricava un'equazione locale di moto simile alla (2.5)

$$\ddot{x} + c(t)x = 0$$

Si noti che se l è T -periodica anche c è T -periodica.

In entrambi i casi l'equazione che si è ottenuta è del tipo

Equazione di Hill:

$$\ddot{x} + (\alpha + q(t))x = 0, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad q \in \text{Per}_T(\mathbb{R}) \quad (5.85)$$

equivalente al sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - q(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =: Q(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad Q \in \text{Per}_T(\mathbb{L}(\mathbb{R}^2)).$$

Di questa si cercano soluzioni *limitate per ogni t* , in quanto si vedrà che *sono anche quelle stabili*. Visto il teorema di Floquet, esse si avranno in corrispondenza a quelle limitate di un certo sistema a coefficienti costanti: $\dot{\xi} = B_{\Phi} \xi$, e quindi necessariamente in corrispondenza ad esponenti caratteristici η_h con $\Re \eta_h \leq 0$ ovvero, essendo $T \Re \eta_h = \ln |\mu_h|$, a moltiplicatori caratteristici che abbiano $|\mu_h| \leq 1$. La condizione però non è sufficiente: qualora si verifichi il caso $\mu_1 = \mu_2 = 1$ occorre l'ulteriore la richiesta che entrambe le soluzioni escano da autovettori e non da autovettori generalizzati, ovvero che l'operatore B_{Φ} abbia in loro corrispondenza divisori semplici.

L'equazione di Hill ha $\text{Tr } Q(t) = 0$, per cui è anche $\text{Det } \Psi(t, 0) = 1$, e quindi

$$\mu_1 \mu_2 = \text{Det } \Psi(T, 0) = 1.$$

Questa è l'unica relazione nota a priori sui moltiplicatori caratteristici, che tuttavia riduce il numero dei parametri del sistema e permette lo svolgimento di una soddisfacente discussione qualitativa.

Qui di seguito verrà esaminato il caso particolare, e più semplice, della

Equazione di Mathieu:

$$\ddot{x} + \left(\alpha + \beta \cos \frac{2\pi t}{T} \right) x = 0, \quad x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (5.86)$$

e cioè una equazione lineare a parametri oscillanti con legge sinusoidale e pulsazione $\omega_{parm} := 2\pi/T$. Il caso della (5.85) è, d'altronde, strettamente simile.

Per il teorema di Floquet, entrambe queste equazioni hanno soluzioni del tipo

$$\begin{aligned} t \mapsto x(t) &= c_1 p_1(t) e^{\eta_1 t} + c_2 p_2(t) e^{\eta_2 t} \\ &= c_1 p_1(t) e^{\sigma_1 t/T} e^{i(\theta_1 + 2k_1 \pi)t/T} + c_2 p_2(t) e^{\sigma_2 t/T} e^{i(\theta_2 + 2k_2 \pi)t/T} \end{aligned}$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, e dove si è usata la notazione

$$T\eta_h = \ln \mu_h = \ln |\mu_h| + i(\theta_h + 2k_h \pi) =: \sigma_h + i(\theta_h + 2k_h \pi), \quad h = 1, 2, \quad k_h \in \mathbb{Z},$$

con le $\mu_{1,2}$ autovalori (ad esempio) di $C_\Psi = e^{T B_\Psi} = \Psi(T, 0)$, e con le $p_{1,2}$ funzioni a valori complessi T -periodiche o eventualmente, se $\eta_1 = \eta_2$, polinomi rispettivamente di ordine zero e uno a coefficienti T -periodici. Anzi, dalla $1 = \mu_1 \mu_2 = e^{T\eta_1} e^{T\eta_2}$ segue la forma speciale per le soluzioni dell'equazione di Mathieu

$$x(t) = c_1 p_1(t) e^{i 2k_1 \pi t/T} e^{(\sigma + i\theta)t/T} + c_2 p_2(t) e^{-i 2k_2 \pi t/T} e^{-(\sigma + i\theta)t/T} \quad (5.87)$$

Si chiami $\varrho(\alpha, \beta) := \text{Tr } \Psi(T, 0) = x_1(T) + x_2(T)$ (evidentemente incognite!). Le $\mu_{1,2}$ sono radici della $\mu^2 - \varrho(\alpha, \beta)\mu + 1 = 0$; esse quindi sono date da $\mu_{1,2} = (\varrho \pm \sqrt{\varrho^2 - 4})/2$. Di conseguenza si riconoscono i seguenti casi:

- $\varrho > +2$. Le due radici $\mu_{1,2}$ sono reali, entrambe positive, diverse fra loro, e almeno una di esse: $\mu_1 > 1$. Ne segue $\theta = 0$ e $\sigma > 0$. La (5.87) diviene pertanto

$$\begin{aligned} x(t) &=: c_1 q_1(t) e^{\sigma t/T} + c_2 q_2(t) e^{-\sigma t/T} & c_{1,2} = \cos t, & \text{con} \\ q_{1,2}(t) &:= p_{1,2}(t) e^{i 2k_{1,2} \pi t/T}, & \text{funzioni } T\text{-periodiche reali.} \end{aligned}$$

Quando i parametri (α, β) danno luogo a questa eventualità, *vi sono soluzioni non limitate e non vi sono soluzioni periodiche*.

- $\varrho < -2$. Le due radici $\mu_{1,2}$ sono reali, entrambe negative: $\mu_h \equiv |\mu_h| e^{i\pi}$, diverse fra loro, e almeno una di esse: $\mu_1 < -1$. Ne segue $\theta = \pi$, e $\sigma > 0$. La (5.87) diviene pertanto

$$\begin{aligned} x(t) &=: c_1 q_1(t) e^{\sigma t/T} + c_2 q_2(t) e^{-\sigma t/T} & c_{1,2} = \cos t, & \text{con} \\ q_{1,2}(t) &:= p_{1,2}(t) e^{i(2k_{1,2} + 1)\pi t/T}, & \text{funzioni } 2T\text{-periodiche reali.} \end{aligned}$$

Anche in questo caso *vi sono soluzioni non limitate e non vi sono soluzioni periodiche*.

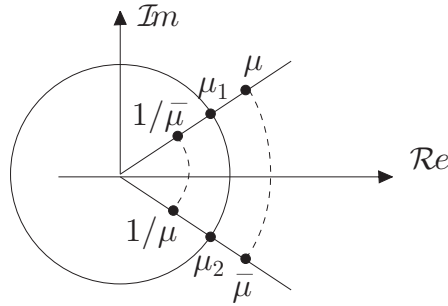
- $\varrho = 2$. Si presenta una radice doppia $\mu_1 = \mu_2 = 1$ e quindi $T\eta_1 = T\eta_2 = 0 + i 2k\pi$. Pertanto, *almeno una soluzione è T -periodica*, e come tale può essere considerata anche $2T$ -periodica, mentre le altre soluzioni sono o non sono anch'esse periodiche a seconda che la $\Psi(T, 0)$ sia $\mathbf{1}$ oppure sia simile a un blocco elementare di Jordan (si può mostrare che per "quasi tutti" i valori dei parametri (α, β) per i quali $\varrho = 2$ le soluzioni sono non periodiche).
- $\varrho = -2$. Si presenta una radice doppia $\mu_1 = \mu_2 = -1 = e^{i\pi}$ e quindi $T\eta_1 = T\eta_2 = 0 + i(2k+1)\pi$. Almeno una soluzione è $2T$ -periodica, e *non può essere considerata* anche T -periodica, mentre le altre soluzioni possono o meno essere $2T$ -periodiche (ma certo non possono essere T -periodiche) a seconda che la $\Psi(T, 0)$ sia $-\mathbf{1}$ oppure simile a un blocco elementare di Jordan; anche qui si può mostrare per quasi tutti i valori dei parametri (α, β) per i quali $\varrho = -2$ esse saranno non periodiche.
- $-2 < \varrho < 2$. Le due radici $\mu_{1,2}$ sono complesse coniugate: $\mu_1 = \bar{\mu}_2 \notin \mathbb{R}$, semplici e diverse fra loro. Insieme con la $\mu_2 = \mu_1^{-1}$ queste forniscono $\mu_1 = \bar{\mu}_1^{-1}$ da cui: $\sigma + i\theta + i 2k\pi = -\sigma + i\theta + i 2k\pi$ con $\theta/\pi \notin \mathbb{Z}$, e quindi: $\sigma = 0$ e $\theta \in (0, \pi)$. Le due radici cadono sul cerchio unitario, fuori dall'asse reale, e simmetriche rispetto ad esso. Posto allora $\omega = \theta/T$ ne segue che $T\eta_{1,2} = 0 \pm i(\omega T + 2k\pi)$ e la (5.87) diviene

$$\begin{aligned} x(t) &=: c_1 q_1(t) e^{i\omega t} + c_2 q_2(t) e^{-i\omega t} & c_{1,2} = \cos t, & \text{con} \\ q_{1,2}(t) &:= p_{1,2}(t) e^{i 2k\pi t/T}, & \text{funzioni (complesse) } T\text{-periodiche.} \end{aligned}$$

Le soluzioni sono tutte limitate, non T -periodiche né $2T$ -periodiche, e neppure periodiche di periodi superiori a $2T$, a meno che sia $\theta = \text{Arg } \mu = 2k\pi/n$, o anche $\omega = (k/n)(2\pi/T)$, con $k, n \in \mathbb{Z}$, $n > 2$. Si hanno cioè due pulsazioni (in generale non razionalmente dipendenti fra loro): la $\omega_{parm} := 2\pi/T$ propria dei coefficienti, e la $\omega := \theta/T$ propria della dinamica.

Il moto è per definizione quasi-periodico.

Osservazione. Se un numero complesso μ , eventualmente a parte immaginaria nulla, ha modulo maggiore di uno, il numero complesso $\bar{\mu}^{-1}$ lo ha senz'altro minore di uno.



Le seguenti considerazioni e definizioni hanno carattere generale e si riferiscono a un qualsiasi sistema lineare a coefficienti periodici.

Sistema reciproco := un sistema $\dot{x} = Q(t)x$, $Q \in \text{Per}_T(\mathbb{L}(\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^n))$ il cui insieme di moltiplicatori caratteristici $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ contiene per ciascun moltiplicatore μ anche il suo reciproco: $\bar{\mu}^{-1} \equiv \mu/|\mu|^2$.

Il corrispondente operatore Q si dice, anch'esso, **Reciproco**.

Esempio 2.5.9 Per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il sistema $\ddot{x} + (\alpha + \beta \cos(2\pi t/T))x = 0$, è reciproco. La matrice $\Psi(T, 0)$ ha infatti dimensione due e autovalori $\mu_1 = \mu_2^{-1}$, e quindi verifica le condizioni di reciprocità sia nel caso in cui essi siano entrambi reali, sia nel caso in cui siano entrambi complessi, coniugati data la realtà della $\Psi(T, 0)$. $\square$

Quando l'operatore di campo $Q : t \mapsto Q(t)$ è reale, anche ogni matrice monodroma $C = e^{TB}$ è reale, ed entrambi μ e $\bar{\mu}$ sono moltiplicatori. La condizione di reciprocità consiste, in questo caso, nel richiedere che l'insieme dei moltiplicatori coincida con l'insieme dei loro inversi, e cioè che e^{TB} ed e^{-TB} abbiano uguali autovalori. Ciò accade per esempio se le corrispondenti matrici $C := e^{TB}$ e $C^{-1} := e^{-TB}$ sono simili, o anche se una delle due è simile alla trasposta dell'altra. Sussiste inoltre il seguente:

Lemma 2.5.1 Sia $Q(t)$ reale, e si indichi con $\Psi : t \mapsto \Psi(t, 0)$ la matrice principale ($\Psi(0) = \mathbf{1}$) del sistema $\dot{x} = Q(t)x$. Se esiste $F \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$ non singolare e tale che:

- (i) $F Q(t) = -Q(-t) F$, $t \in \mathbb{R}$; oppure tale che
 - (ii) $F Q(t) = -Q^T(t) F$, $t \in \mathbb{R}$;
- allora il sistema $\dot{x} = Q(t)x$ è reciproco, in quanto nei due casi detti si ha rispettivamente
- (i') $\Psi^{-1}(-t, 0) F \Psi(t, 0) = F$, $t \in \mathbb{R}$;
 - (i'') $\Psi^T(t, 0) F \Psi(t, 0) = F$, $t \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione Si ricordi (si veda: Nota 2.4.4 § II.4) che, nell'ipotesi che base e prodotto scalare siano tali che $\langle e_h, e_k \rangle = \delta_{hk}$ e detta $Y^T(t)$ la soluzione dell'equazione aggiunta $\dot{Y}^T = -Y^T Q(t)$, sussiste la $Y^T(t)\Psi(t, 0) = \text{cost} = Y^T(t_0)$ quando . In particolare, la matrice $\Psi^{-1}(t, 0)$ verifica tale equazione: $\dot{\Psi}^{-1}(t, 0) = -\Psi^{-1}(t, 0)Q(t)$.

Se sussiste la (i), anche $\Psi^{-1}(-t, 0)F$ è soluzione dell'equazione aggiunta, infatti

$$\dot{\Psi}^{-1}(-t, 0)F = \Psi^{-1}(-t, 0)Q(-t)F = -\Psi^{-1}(-t, 0)FQ(t).$$

Se ne ricava la relazione $\Psi^{-1}(-t, 0)F\Psi(t, 0) = \text{cost} = F$ e questo implica che $\Psi(T, 0)$ e $\Psi(-T, 0)$ sono simili e in particolare che hanno gli stessi autovalori.

In modo analogo, dalla $\dot{\Psi} + T = \Psi^T Q^T$ segue che se sussiste la (ii) allora si ha che

$$\Psi^T(t, 0)F = \Psi^T(t, 0)Q^T(t)F = -\Psi^T(t, 0)FQ(t).$$

Se ne ricava la $\Psi^T(t, 0)F\Psi(t, 0) = \text{cost} = F$. Da qui segue la similitudine fra $\Psi^T(t, 0)$ e $\Psi^{-1}(t, 0)$, e va tenuto presente che una matrice e la sua trasposta hanno gli stessi autovalori. $\blacksquare$

Esempio 2.5.10 Si consideri un (qualsiasi) sistema Hamiltoniano lineare periodico, e cioè

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \\ -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p \partial q} & +\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p \partial p} \\ -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q \partial q} & -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p \partial q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +C & A^{-1} \\ -B & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix};$$

con $\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2}(pA^{-1}p + qBq + 2pCq)$ ed $A, B, C, D \in \text{Per}_T(\mathbb{L}(\mathbb{R}^n))$ regolari e T-periodiche.

Ponendo $x := \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$, e chiamate

$$I := \begin{pmatrix} 0 & +\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} = -I^T = -I^{-1}, \quad H(t) := \begin{pmatrix} B & C \\ C & A^{-1} \end{pmatrix} = H^T(t)$$

e $\mathbf{Q}_H(t) := \mathbf{I} \mathbf{H}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{A}^{-1} \\ -\mathbf{B} & -\mathbf{C} \end{pmatrix}$, tali sistemi si possono porre sotto la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}_H(t) \mathbf{x} = \mathbf{I} \nabla \mathcal{H} \mathbf{x}, \quad \text{con } \mathbf{I} \mathbf{Q}_H(t) = -\mathbf{H}(t) = -\mathbf{Q}_H^T(t) \mathbf{I}.$$

La parte (ii) del Lemma 2.5.1 conferma che $\mathbf{Q}_H$ è reciproca e quindi che la sua matrice principale Ψ_H è $\mathbf{I}$ -ortogonale:

$$\Psi_H^T(t, 0) \mathbf{I} \Psi_H(t, 0) = \mathbf{I}.$$

Una matrice che verifichi quest'ultima condizione, con $\mathbf{I}$ definito come sopra, si dice appartenere al gruppo simplettico reale. Ne segue che: un operatore Hamiltoniano $\mathbf{Q}_H(t)$ lineare e periodico è reciproco, e ha come matrice principale di avanzamento su un periodo $e^{\mathbf{T} \mathbf{B}_H} = \Psi_H(\mathbf{T}, 0)$ una matrice reale simplettica, (e cioè $\mathbf{I}$ -ortogonale). $\square$

In base all'Osservazione fatta più sopra si riconosce che per sistemi (periodici, lineari) reciproci: *le soluzioni sono limitate per $t \rightarrow \pm\infty$ se e solo se tutti i moltiplicatori caratteristici hanno $|\mu| = 1$ e divisori elementari semplici.* D'altra parte si vedrà nel seguito che per sistemi genuinamente lineari, e cioè lineari omogenei, non necessariamente autonomi, (tutte) le soluzioni limitate sono (tutte) stabili, e viceversa. Pertanto si conclude che: *per sistemi reciproci la limitatezza delle soluzioni equivale alla loro stabilità* (semplice, in quanto $|\mu| = 1$). Questa osservazione fa sì che qui di seguito si possa ugualmente parlare di soluzioni stabili, malgrado non se ne sia ancora introdotta la definizione generale, pur di limitarsi alle soluzioni limitate di sistemi reciproci. Anzi, su questi si potrà riconoscere una proprietà anche più forte della stabilità.

Si premetta la seguente nozione, che si riferisce alla stabilità di (tutte) le soluzioni di sistemi lineari a coefficienti regolari e periodici, *diversi da un certo assegnato sistema ma opportunamente "vicini" ad esso.*

Si indichi con $(\mathbb{Q}_T, \|\cdot\|_\infty)$ lo spazio di Banach delle funzioni $\mathbf{Q} \in \text{Per}_T(\mathbb{L}(\mathbb{V}))$ (reali, regolari, T -periodiche, a valori in $\mathbb{L}(\mathbb{V})$) dotato della norma $\|\cdot\|_\infty := \sup_{t \in [0, T]} \|\cdot\|$, ove $\|\cdot\|$ è la norma spettrale.

Lemma 2.5.1 *Per ogni fissato $t \in \mathbb{R}$, il sistema fondamentale $\Psi_{\mathbf{Q}}(t, 0)$ dell'equazione $\dot{x} = \mathbf{Q}(t)x$ è funzione continua di $\mathbf{Q} \in \mathbb{Q}_T$ in quanto lo è la matrice $\Psi_{\mathbf{Q}}(t, 0) \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$*

Dimostrazione Siano $\dot{y}_1 = \mathbf{Q}_1(t)y_1$ e $\dot{y}_2 = \mathbf{Q}_2(t)y_2$. Posto $u := y_1 - y_2$ si ha ovviamente $\dot{u} = \mathbf{Q}_1(t)u + (\mathbf{Q}_1(t) - \mathbf{Q}_2(t))y_2$. Si valuta allora

$$|u(t)| \leq |u_0| + \int_0^t (\|\mathbf{Q}_1(\tau)\| |u(\tau)| + \|\mathbf{Q}_1(\tau) - \mathbf{Q}_2(\tau)\| |y_2(\tau)|) d\tau$$

e mediante la disuguaglianza generalizzata di Gronwall (si veda: Appendice A.9) si ottiene

$$|u(t)| \leq |u_0| \exp \int_0^t \|\mathbf{Q}_1(\tau)\| d\tau + \int_0^t (\|\mathbf{Q}_1(\tau) - \mathbf{Q}_2(\tau)\| |y_2(\tau)|) \left(\exp \int_\tau^t \|\mathbf{Q}_1(\sigma)\| d\sigma \right) d\tau.$$

Quest'ultima, per $u_0 = 0$, $y_0 := y_2|_0$, e $\Psi_{\mathbf{Q}_1}(0) = \Psi_{\mathbf{Q}_2}(0) = \mathbf{I}$ dà

$$|(\Psi_{\mathbf{Q}_1}(t) - \Psi_{\mathbf{Q}_2}(t)) y_0| \leq \left(\exp \int_0^t \|\mathbf{Q}_1(\tau)\| d\tau \right) \cdot \int_0^t \|\mathbf{Q}_1(\tau) - \mathbf{Q}_2(\tau)\| \|\Psi_{\mathbf{Q}_2}(\tau)\| |y_0| d\tau,$$

che implica

$$\|\Psi_{\mathbf{Q}_1}(t) - \Psi_{\mathbf{Q}_2}(t)\| \leq \sup_{\xi \in [0, t]} \|\Psi_{\mathbf{Q}_2}(\xi)\| \left(\exp \int_0^t \|\mathbf{Q}_1(\tau)\| d\tau \right) \cdot \int_0^t \|\mathbf{Q}_1(\tau) - \mathbf{Q}_2(\tau)\| d\tau.$$

Pertanto, siccome è $\int_0^t \|\mathbf{Q}_1(\tau) - \mathbf{Q}_2(\tau)\| d\tau \leq t \|\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2\|_\infty$, a t fissato e per $\|\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2\|_\infty$ convenientemente piccola si ha che $\|\Psi_{\mathbf{Q}_1}(t) - \Psi_{\mathbf{Q}_2}(t)\|$ è arbitrariamente piccola. $\blacksquare$

Corollario 2.5.1 *La matrice monodroma $\mathbf{C}_\Psi = \Psi_{\mathbf{Q}}(\mathbf{T}, 0)$ dell'equazione (5.75) è funzione continua di $\mathbf{Q} \in \mathbb{Q}_T$. Di conseguenza sono continui rispetto a $\mathbf{Q}$ anche la sua traccia: $\text{Tr } \Psi_{\mathbf{Q}}(\mathbf{T}, 0) =: \text{Tr } e^{\mathbf{T} \mathbf{B}_\Psi}$ e i suoi autovalori $\mu_1^{(\mathbf{Q})}, \dots, \mu_n^{(\mathbf{Q})}$.*

Un sistema $\dot{x} = \mathbf{Q}(t)x$ del tipo (5.75), (o il suo operatore $\mathbf{Q} \in \mathbb{Q}_T$), si dicono

Fortemente Stabile su $(-\infty, +\infty)$ *relativamente a un certo sottoinsieme $\mathbf{Q}' \subset \mathbb{Q}_T$ se esiste $\delta > 0$ tale che risultano stabili (tutte) le soluzioni di ogni sistema $\dot{x} = \mathbf{Q}(t)x$ che abbia $\mathbf{Q}' \in \mathbf{Q}'$ e $\|\mathbf{Q} - \mathbf{Q}'\|_\infty < \delta$.* [In particolare, vedi oltre, $\mathbf{Q}$ è fortemente stabile se è stabile e strutturalmente stabile su $(\mathbf{Q}', \|\cdot\|_\infty)$].

Sia $(\mathbb{R}_T, \|\cdot\|_\infty) \subset (\mathbb{Q}_T, \|\cdot\|_\infty)$ lo spazio degli operatori in $\mathbb{Q}_T$ e reciproci.

Teorema 2.5.1 *Se $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_T$ è reciproco e se una sua matrice monodroma $\mathbf{C}_{\mathcal{R}} := \Psi_{\mathcal{R}}(\mathbf{T}, 0)$ ha tutti i moltiplicatori $\{\mu_h^{(\mathcal{R})}\}_{h=1, \dots, n}$ semplici e di modulo unitario: $|\mu_h^{(\mathcal{R})}| = 1$ per ogni $h = 1, \dots, n$, allora $\mathcal{R}$ è (stabile e) fortemente stabile rispetto ad $\mathbb{R}_T$.*

Dimostrazione Sia $\mathcal{R}$ verificante l'ipotesi. È possibile scegliere $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo e, per l'enunciata continuità, determinare in sua corrispondenza un $\delta > 0$ tali che, per ogni $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}_T$ che verifichi $\|\mathcal{R} - \mathcal{Q}\| < \delta$, accada che in ciascun disco sul piano complesso: $\mathcal{B}_\varepsilon(\mu_{\mathcal{R}})$ cade uno e un solo moltiplicatore $\mu_{\mathcal{Q}}$ relativo alla $\Psi_{\mathcal{Q}}(T, 0)$. Ma $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}_T$ implica che anche $\bar{\mu}_{\mathcal{Q}}^{-1}$ è un moltiplicatore, e questo dovrà appartenere a $\mathcal{B}_\varepsilon(\bar{\mu}_{\mathcal{R}}^{-1})$. D'altra parte se $\mathcal{R}$ ha autovalori (semplici e) di modulo unitario si ha $\bar{\mu}_{\mathcal{R}}^{-1} = \mu_{\mathcal{R}}/|\mu_{\mathcal{R}}|^2 = \mu_{\mathcal{R}}$. Per cui, affinché in $\mathcal{B}_\varepsilon(\mu_{\mathcal{R}})$ vi sia *un solo* moltiplicatore $\mu_{\mathcal{Q}}$, è necessario che anche $\mathcal{Q}$ abbia autovalori semplici e tali che $\bar{\mu}_{\mathcal{Q}}^{-1} = \mu_{\mathcal{Q}}$; ciò che implica $|\mu_{\mathcal{Q}}| = 1$ e quindi la stabilità di $\mathcal{Q}$ e la tesi. ■

Corollario 2.5.2 *Nell'ultimo dei casi considerati per i valori dei parametri dell'equazione di Mathieu tale equazione è fortemente stabile rispetto all'insieme $\mathbb{R}_T$. Pertanto se un qualunque sistema in $\mathbb{R}_T$ è prossimo nel senso della $\|\cdot\|_\infty$ a uno di Mathieu che abbia valori dei parametri come nel quinto dei casi considerati sopra, esso ne condivide le proprietà di stabilità.*

Dalle precedenti considerazioni si ricava che, sul piano (α, β) relativo all'equazione di Mathieu, le zone di stabilità e di non stabilità (ovvero di limitatezza o non limitatezza delle soluzioni) sono domini regolari separati fra loro dalle regioni (varietà unidimensionali): $\varrho(\alpha, \beta) = \pm 2$, che contengono i valori di "separazione" corrispondenti a soluzioni, rispettivamente, T-periodiche e 2T-periodiche. In più, le soluzioni T-periodiche e 2T-periodiche possono aversi *solo* in queste regioni, giacché per $|\varrho| > 2$ si hanno $\Re(\ln \mu) \neq 0$, e per $|\varrho| < 2$ si hanno $\Im(\ln \mu) \neq k\pi$.

Per determinare esplicitamente queste zone sarà allora conveniente *imporre l'esistenza* di soluzioni rispettivamente T-periodiche e 2T-periodiche.

Affinché l'equazione di Mathieu $\ddot{x} + (\alpha + \beta \cos(2\pi t/T))x = 0$ abbia come soluzione la funzione $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i 2n\pi t/T}$ è necessario che sia

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-4n^2 \frac{\pi^2}{T^2} c_n + \alpha c_n + \frac{\beta}{2} (c_{n+1} + c_{n-1}) \right] e^{i 2n\pi t/T} = 0,$$

dalla quale segue la successione di condizioni

$$\frac{\beta}{2} c_{n+1} + \left(\alpha - \frac{4n^2\pi^2}{T^2} \right) c_n + \frac{\beta}{2} c_{n-1} = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.88)$$

L'equazione (5.88) è un sistema omogeneo di infinite equazioni. Esso ha soluzione non banale qualora, per $\beta \neq 0$ e $\alpha \neq (2n\pi/T)^2$, sia nullo il

Determinante di Hill:

$$\begin{vmatrix} \ddots & & & & \\ \ddots & \ddots & & & 0 \\ & \gamma_{-2} & 1 & \gamma_{-2} & \\ & & \gamma_0 & 1 & \gamma_0 \\ & & & \gamma_2 & 1 & \gamma_2 \\ 0 & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & \ddots \end{vmatrix} =: \Delta_H = 0$$

$$\text{ove } \gamma_{2n} := \frac{\beta}{2(\alpha - (2n\pi/T)^2)}.$$

Allo stesso modo, affinché $\sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e^{i m\pi t/T}$ sia soluzione, è necessaria la condizione, valida per $\beta \neq 0$, $\alpha \neq (2(n+1)\pi/T)^2$, e con $d_{2n} = 0$,

$$\begin{vmatrix} \ddots & & & & \\ \ddots & \ddots & & & 0 \\ & \gamma_{-3} & 1 & \gamma_{-3} & \\ & & \gamma_1 & 1 & \gamma_1 \\ & & & \gamma_3 & 1 & \gamma_3 \\ 0 & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & \ddots \end{vmatrix} =: \tilde{\Delta}_H = 0$$

$$\text{ove } \gamma_{2n+1} := \frac{\beta}{2(\alpha - 2(n+1)\pi/T)^2}.$$

Sfruttando relazioni di ricorrenza sui troncamenti dei $\Delta_H, \tilde{\Delta}_H$ (si veda: [Jordan]) si riesce, numericamente, a valutare le coppie (α, β) che annullano, in via approssimata, i determinanti di Hill; queste individuano le regioni del piano (α, β) caratteristiche dei valori dei parametri per i quali esistono soluzioni T-periodiche o 2T-periodiche. Per la continuità della traccia $Tr \Psi_Q(T, 0)$ rispetto all'operatore di campo Q , queste zone arrivano a toccare i punti corrispondenti alle soluzioni T-periodiche e 2T-periodiche del "caso limite": $\beta = 0$, e cioè: $\ddot{x} + \alpha x = 0$.

È chiaro che su questo ultimo caso si sa dire tutto: ci sono soluzioni periodiche se α è (reale) positiva; in tal caso esse hanno pulsazione $\omega_{nat} := \omega(\alpha, 0) = \sqrt{\alpha}$, e si ha

$$\Psi_{nat}(t, 0) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\alpha} t & \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sin \sqrt{\alpha} t \\ -\sqrt{\alpha} \sin \sqrt{\alpha} t & \cos \sqrt{\alpha} t \end{pmatrix}.$$

Inoltre: $Tr \Psi_{nat}(T, 0) =: \varrho(\alpha, 0) = 2 \cos \sqrt{\alpha} T$, e quindi $\mu_{1,2}^{nat} = \frac{\varrho}{2} \pm \sqrt{\frac{\varrho^2}{4} - 1} = \cos \sqrt{\alpha} T \pm i \sin \sqrt{\alpha} T$ e ne segue: $\mu_{1,2}^{nat} = e^{\pm i \sqrt{\alpha} T}$.

Esse sono soluzioni T-periodiche, o 2T-periodiche (ma non T-periodiche), se e solo se accade rispettivamente che $\sqrt{\alpha} T$ è un multiplo intero positivo (rispettivamente pari o dispari) di π ; e cioè quando $\omega_{nat} T = 2n\pi$, oppure $\omega_{nat} T = 2(n+1)\pi$, con n in $\mathbb{N}^+$.

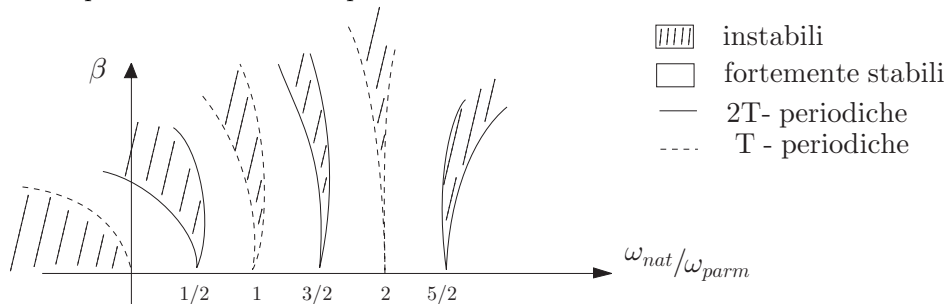
In definitiva, il caso limite $\beta = 0$ ha

$$\begin{cases} \varrho = +2 & \text{per } \omega_{nat} T = 2n\pi, & \text{e cioè } \omega_{nat}/\omega_{parm} = n \\ \varrho = -2 & \text{per } \omega_{nat} T = (2n+1)\pi, & \text{e cioè } \omega_{nat}/\omega_{parm} = (2n+1)/2 \\ \varrho \in (-2, 2) & \text{negli altri casi.} \end{cases}$$

Se ne deduce che i punti dell'asse $\beta = 0$ sono tutti corrispondenti a soluzioni limitate e, come tali, fortemente stabili, qualunque siano le loro condizioni iniziali e in particolare quindi le soluzioni statiche, *salvo quelli in corrispondenza ai valori*

$$\frac{\omega_{nat}}{\omega_{parm}} = n \quad \text{oppure} \quad \frac{\omega_{nat}}{\omega_{parm}} = \frac{2n+1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nell'intorno di tali punti si hanno soluzioni T-periodiche (rispettivamente: 2T-periodiche) insieme a soluzioni non limitate giacché i moltiplicatori sono non semplici.



Si vede quindi che è possibile rendere instabile la posizione di riposo di un'altalena mediante una pur piccola variazione periodica della sua lunghezza (equivalente) purché il periodo dei parametri sia proporzionale a un numero semi-intero di periodi naturali.

Fenomeni di questo tipo sono noti con il nome di Risonanza parametrica, e non vanno confusi con quelli di Risonanza forzata, presente in sistemi non omogenei.

Si possono paragonare questi risultati con quelli (si veda: [Arnold 1]) che si ottengono per l'equazione

$$\ddot{x} + (\omega^2 + \varepsilon^2 \sin t)x = 0$$

qualora si "rettifichi" il campo:

$$(\omega^2 + \varepsilon^2 \sin t) \longrightarrow \begin{cases} \omega_+^2 := (\omega + \varepsilon)^2 & \text{per } t \in (0, \pi], \\ \omega_-^2 := (\omega - \varepsilon)^2 & \text{per } t \in (\pi, 2\pi], \end{cases}$$

e si consideri l'evoluzione $\mathcal{G}_0^{2\pi}$ come composta dalle due $\mathcal{G}_\pi^{2\pi}$ e $\mathcal{G}_0^\pi$. Si ha

$$\mathcal{G}_0^{2\pi} = \begin{pmatrix} \cos \pi\omega_- & \frac{1}{\omega_-} \sin \pi\omega_- \\ -\omega_- \sin \pi\omega_- & \cos \pi\omega_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \pi\omega_+ & \frac{1}{\omega_+} \sin \pi\omega_+ \\ -\omega_+ \sin \pi\omega_+ & \cos \pi\omega_+ \end{pmatrix}$$

che ha traccia tale che

$$|Tr \mathcal{G}_0^{2\pi}| = \left| 2 \cos \pi\omega_+ \cos \pi\omega_- - \left(\frac{\omega_+}{\omega_-} + \frac{\omega_-}{\omega_+} \right) \sin \pi\omega_- \sin \pi\omega_+ \right|.$$

Siccome $\varepsilon \ll 1$ si può porre $\frac{\omega_+}{\omega_-} + \frac{\omega_-}{\omega_+} \simeq 2 + 4\frac{\varepsilon^2}{\omega^2}$, e un semplice calcolo (si veda: [Arnold 1]) assicura che la traccia vale ± 2 a seconda che

$$\omega = n \pm \frac{\varepsilon^2}{n^2} + o(\varepsilon^2) \quad \text{oppure} \quad \omega = n + \frac{1}{2} \pm \frac{\varepsilon}{(n + \frac{1}{2})\pi} + o(\varepsilon).$$

Per la discussione del caso generale dell'equazione di Hill si veda [Hale]. Questa non è comunque concettualmente diversa da quella più semplice vista qui, né dà risultati qualitativamente diversi.

Capitolo 3

Equazioni Differenziali Ordinarie: Metodi Qualitativi

3.1 Il piano delle fasi

Un metodo molto diverso da quelli visti fino ad ora, e particolarmente utile per ottenere risultati qualitativi sulle equazioni differenziali autonome, specialmente se di ordine due, è quello che fa ricorso all'esame del comportamento geometrico delle traiettorie, o meglio della struttura topologica della famiglia delle traiettorie, nello spazio delle fasi.

Sia assegnato un campo autonomo $v : x \mapsto v(x) \in \mathbb{R}^n$, e si consideri il problema

$$\dot{x} = v(x), \quad v \in C^r(D), \quad r \geq 1, \quad \text{e} \quad x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

Verrà dato per scontato il fatto che il campo è regolare su un aperto $D \subset \mathbb{R}^n$ almeno quanto basta per assicurare i teoremi di esistenza, unicità, dipendenza continua dal dato, prolungamento fino alla frontiera di un qualunque compatto contenente il punto iniziale e contenuto in D .

Più in generale, il problema (1.1) può essere pensato con $x_0 \in U \subset \mathbb{M}$, $v(x) \in T_x \mathbb{M}$, e $v \in C^r(U)$, ove $\mathbb{M}$ è una varietà n -dimensionale, ma in tal caso i risultati che si otterranno in questo capitolo si intendono validi limitatamente (si veda Appendice A.4) ad una carta (U, h) , salvo poi estenderli ad altre coordinate.

Si indicherà con $\hat{x} : t \mapsto \phi(t, t_0, x_0) \in \mathbb{M}$, o anche con x stessa, la soluzione massimale della $\dot{x} = v(x)$ che passa per (t_0, x_0) : $\phi(t_0, t_0, x_0) = x_0$.

Detto $(m_1, m_2) =: J_M$ l'intervallo di definizione della ϕ , con l'aggettivo massimale si intende richiamare il fatto che essa non solo è tale che su tutto J_M risulta: $\dot{\phi}(t) = v(\phi(t))$, ma in più che tale identità non può sussistere per alcuna altra funzione con le stesse proprietà della ϕ e definita su un intervallo propriamente contenente J_M .

Nota 3.1.1 Se $\phi : t \mapsto \phi(t, t_0, x_0)$ è soluzione di un'equazione (non autonoma) del tipo $\frac{d}{dt} x = v(t, x)$ con intervallo massimale $J_M = (m_1, m_2)$ allora, fissato un qualsiasi $c \in \mathbb{R}$, è evidente che la funzione

$$\psi : \tau \mapsto \psi(\tau, \tau_0, x_0) := \phi(\tau + c, \tau_0 + c, x_0), \quad \text{con} \quad \tau_0 + c := t_0$$

è soluzione della $\frac{d}{d\tau} x = v(\tau + c, x)$ sull'intervallo $J_M^{(c)} := (\mu_1, \mu_2) := (m_1 - c, m_2 - c)$.

Si ha infatti: $\psi(\tau_0, \tau_0, x_0) := \phi(t_0, t_0, x_0) = x_0$, e

$$\psi'(\tau) = \frac{d}{d\tau} \Big|_{\eta=\tau+c} \phi(\eta) = v(\tau + c, \phi(\tau + c)) = v(\tau + c, \psi(\tau))$$

purché sia $\tau + c \in (m_1, m_2)$, e cioè $\tau \in (m_1 - c, m_2 - c)$. [Si tenga presente la notazione usata: il secondo argomento della funzione ϕ è relativo al parametro il cui valore numerico è stato fissato affinché, quando viene assunto dal primo argomento, il valore della funzione coincide con il terzo argomento]. $\triangleright$

In generale però *questo non implica* che la funzione

$$\psi : t \mapsto \psi(t, \tau_0, x_0) \equiv \phi(t + c, t_0, x_0)$$

sia soluzione *anche dell'equazione* $\frac{d}{dt} x = v(t, x)$.

Viceversa, il calcolo appena eseguito dimostra la

Proposizione 3.1.1 *Se un'equazione ha campo autonomo, e cioè tale che*

$$v(t + c, x) = v(t, x) = v(x) \quad \text{per ogni costante reale } c \text{ e per ogni } t,$$

e se $\phi : t \mapsto \phi(t, t_0, x_0)$ è soluzione dell'equazione $\dot{x} = v(x)$ con intervallo massimale $J_M = (m_1, m_2)$ allora, comunque scelta la costante $c \in \mathbb{R}$, la funzione

$$t \mapsto \psi(t, t_0 - c, x_0) := \phi(t + c, t_0, x_0) \quad (1.2)$$

è soluzione della stessa equazione di cui è soluzione la ϕ , ma ciò solo se si considera $J_M^{(c)} := (m_1 - c, m_2 - c)$ quale intervallo massimale della ψ essendo $J_M := (m_1, m_2)$ quello della ϕ .

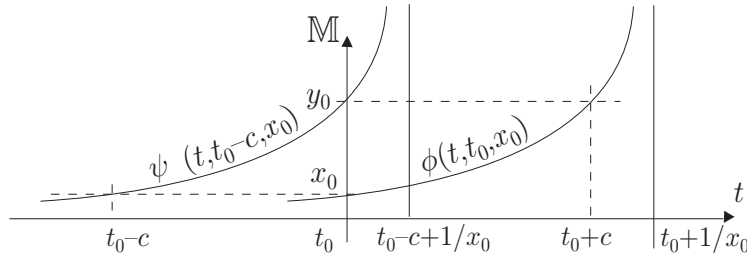
Esempio 3.1.2 $\dot{x} = x^2$, $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 > 0$.

Sia

$$\phi(t_0 + c, t_0, x_0) = \psi(t_0, t_0 - c, x_0) =: \psi(t_0, t_0, y_0) = y_0 ;$$

si ha

$$\begin{aligned} \phi(t, t_0, x_0) &= - \left(t - t_0 - \frac{1}{x_0} \right)^{-1} & \text{su } J_M(x_0) &= (-\infty, t_0 + \frac{1}{x_0}), \\ \psi(t, t_0 - c, x_0) &= - \left(t + c - t_0 - \frac{1}{x_0} \right)^{-1} & \text{su } J_M^{(c)}(x_0) &= (-\infty, t_0 - c + \frac{1}{x_0}). \end{aligned}$$



□

N.B. 3.1.3 Se due soluzioni, qualunque e distinte, ϕ e ψ di un'equazione autonoma sono tali da assumere uno stesso valore $x_0 := \phi(t_0, t_0, x_0) = \psi(t_1, t_1, x_0)$ in due diversi istanti $t_0 \neq t_1$ allora: siccome la $\tilde{\psi}$ definita da $t \mapsto \tilde{\psi}(t, t_1, x_0) := \phi(t + c, t_0, x_0)$ è anch'essa soluzione dell'equazione, e siccome scelto c tale che $t_1 + c = t_0$ si ha $\tilde{\psi}(t_1) = x_0$, dal teorema di unicità si deduce che la ψ è identica alla $\tilde{\psi}$, e cioè che la ψ è necessariamente ottenuta dalla ϕ tramite un semplice incremento dell'ascissa temporale.

Il caso particolare in cui una stessa soluzione (massimale) ammetta uno stesso valore in due diversi istanti, e cioè il caso in cui fin dall'inizio si abbia $\phi \equiv \psi$, verrà esaminato più avanti. ◇

Al variare del valore della costante c in $\mathbb{R}$ si ha evidentemente che le corrispondenti curve integrali sono le traslate le une delle altre lungo l'asse dei tempi. Al variare invece del valore della costante c in $(m_1 - t_0, m_2 - t_0)$, con un fissato t_0 , il punto iniziale varia in tutti i modi possibili lungo una stessa traiettoria.

Per un sistema autonomo la dinamica non dipende dallo specifico valore assunto dalla variabile indipendente, ma solo dalla differenza fra questo e quello iniziale: l'evoluzione di un dato punto è la stessa sia che lo si consideri punto iniziale in un particolare istante sia che lo si consideri tale in un istante che disti dal primo un arbitrario intervallo di durata c .

Le precedenti considerazioni sono equivalenti ad osservare che l'autonomia (e la regolarità) del campo comportano che esso individui una famiglia $\{\mathcal{G}_{t_0}^t\}_{t \in (m_1, m_2)}$ di evolutori $\mathcal{G}_{t_0}^t : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ dati da $\mathcal{G}_{t_0}^t x_0 := \phi(t, t_0, x_0)$, che è un gruppo, locale, ad un parametro. Infatti, ove definiti, gli evoluti di x_0 verificano la

$$\mathcal{G}_{t_0}^{t_0+\tau} x_0 = \mathcal{G}_0^\tau x_0 =: \mathcal{G}^\tau x_0, \quad \text{con } \mathcal{G}^0 = \mathbb{I}, \quad \text{per } \tau \in (m_1 - t_0, m_2 - t_0);$$

in quanto risulta

$$\mathcal{G}_{t_0-c}^\tau x_0 = \psi(\tau, t_0 - c, x_0) = \phi(\tau + c, t_0, x_0) = \mathcal{G}_{t_0}^{\tau+c} x_0 \quad \text{per } \tau + c \in (m_1, m_2).$$

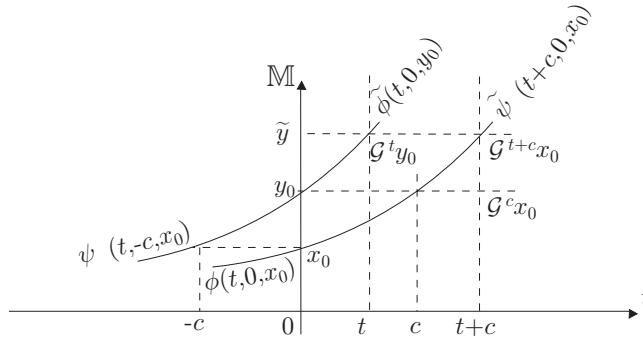
Inoltre, se per un certo $c \in [0, m_2)$ e un certo $t \in [0, m'_2)$ esistono entrambi

$$y_0 = \mathcal{G}^c x_0 = \phi(c, 0, x_0), \quad \text{ed} \quad \tilde{y} = \mathcal{G}^t y_0 = \tilde{\phi}(t, 0, y_0),$$

allora esiste anche $y = \mathcal{G}^{t+c} x_0$ (si hanno cioè $t+c \in [0, m_2)$, e: $-c \in (-m'_1, 0]$) e risulta coincidere con $\tilde{y} = \mathcal{G}^t(\mathcal{G}^c x_0) = \phi(t+c, 0, x_0)$. Infatti la funzione

$$t \mapsto \psi(t, -c, x_0) := \begin{cases} \phi(t+c, 0, x_0) & \text{per } t \in [-c, 0] \\ \tilde{\phi}(t, 0, y_0) & \text{per } t \in [0, m'_2] \end{cases}$$

è soluzione dell'equazione per $t \in [-c, m'_2)$, e vale y_0 per $t = 0$. Ciò mostra che $\psi(t, -c, x_0)$ esiste almeno su $[-c, m'_2)$. Se allora si considera, per $t \in [0, m'_2 + c)$, la funzione $\tilde{\psi} : t \mapsto \tilde{\psi}(t+c, 0, x_0) := \phi(t, -c, x_0)$, si osserva che essa è soluzione dell'equazione e vale y_0 in $t = 0$. Pertanto la $\tilde{\psi}$ necessariamente coincide con la ϕ e ne garantisce la definizione almeno su $[0, m'_2 + c)$.



In definitiva, la soluzione generale di un sistema autonomo verifica la relazione

$$\phi(t+c, 0, x_0) = \phi(t, 0, y_0) = \phi(t, 0, \phi(c, 0, x_0))$$

da intendersi come funzione della sola variabile t , nella quale senza ledere la generalità si è posto $t_0 = 0$ e nella quale c è fissato tale che $\phi(c, 0, x_0)$ esista; (si veda anche [Hirsh Teor. VIII.7.2]).

N.B. 3.1.4 Come si è visto nel N.B. 3.1.3, l'uguaglianza $\phi(t_2) = \psi(t_1)$ implica che le due soluzioni sono diverse solo per una traslazione dell'origine dei tempi. Ne segue che due qualunque moti di un'equazione autonoma che passino per uno stesso punto (anche se in istanti diversi), hanno la medesima traiettoria:

$$\{\phi(t)\}_{t \in (m_1, m_2)} = \{\psi(t)\}_{t \in (m_1-c, m_2-c)}.$$

Per ogni punto dello spazio delle fasi di un sistema autonomo passa quindi una e una sola curva di fase massimale; (questa proprietà è posseduta dalle curve integrali nello spazio delle fasi ampliato, in virtù del determinismo).

Nel seguito quando si dirà traiettoria si intenderà sempre l'immagine di uno qualunque dei moti massimali passanti per uno qualunque dei suoi punti. In tal senso il teorema del prolungamento si può anche ricordare dicendo che: *se una traiettoria è interamente contenuta in un compatto contenuto nel dominio di regolarità del campo allora la funzione moto è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$* , infatti essa risulta definita per ogni $t \in [a, b]$ qualunque siano $a, b \in \mathbb{R}$.

Da ciò segue anche che, a parte possibili differenze nei comportamenti dinamici dovute solo ad una diversa parametrizzazione dell'ascissa temporale rispetto all'ascissa curvilinea lungo la traiettoria, sono le traiettorie nello spazio delle fasi più che le curve integrali in quello ampliato che ben rappresentano l'evoluzione del sistema autonomo, ed è per questo che spesso lo studio di tali sistemi si intende esaurito quando se ne dia il grafico di fase. Occorre tuttavia ricordare che sono le traiettorie, e non altre curve che le contengano, gli oggetti che descrivono il sistema. $\diamond$

Ancora per un sistema autonomo, si consideri ora il caso particolare $\phi = \psi$, e cioè il caso in cui esistano $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tali che risulti $\phi(t_2, 0, x_0) = \phi(t_1, 0, x_0)$. Ne segue che esiste $c \in \mathbb{R}$ per il quale

$$\text{per ogni } t \text{ in } \mathbb{R} \quad \text{si ha:} \quad \phi(t+c, 0, x_0) = \phi(t, 0, x_0).$$

Infatti la funzione

$$t \mapsto \psi(t, -c, x_0) := \phi(t+c, 0, x_0), \quad \text{con} \quad c = t_1 - t_2$$

è soluzione e vale $\phi(t_1)$ in t_1 ; come tale, essa è identica alla $\phi(t, 0, x_0)$.

Se ne deduce che la corrispondente traiettoria, nello spazio delle fasi, necessariamente contiene almeno un arco chiuso, o *curva di Jordan*.

N.B. 3.1.5 Questo caso non si può verificare se la varietà è unidimensionale: infatti affinché la variabile possa riassumere lo stesso valore sarebbe necessario un campo (autonomo) non ad un solo valore. $\diamond$

N.B. 3.1.6 Siccome ϕ è definita in (m_1, m_2) mentre ψ lo è in (m_1-c, m_2-c) e giacché i due intervalli devono coincidere malgrado c sia strettamente positiva, si ha che l'unica possibilità lecita in questo caso è che entrambi gli intervalli coincidano con tutto l'asse reale. In particolare ne segue che se c verifica l'assunto, anche $-c$ lo fa. $\diamond$

N.B. 3.1.7 L'insieme dei possibili numeri c forma un *sottogruppo (additivo)* G di $\mathbb{R}$, ed è un *sottoinsieme chiuso* di $\mathbb{R}$. Infatti $\phi(t + c_1) = \phi(t)$ e $\phi(t + c_2) = \phi(t)$ danno $\phi(t \pm c_1 \pm c_2) = \phi(t)$; e inoltre, siccome ϕ è continua,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t + c_n) = \phi(t + \lim_{n \rightarrow \infty} c_n).$$

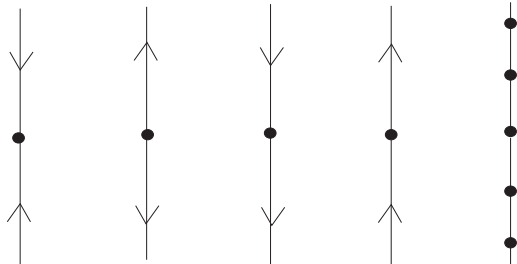
◇

N.B. 3.1.8 Il sottoinsieme degli elementi positivi del sottogruppo ammette un estremo inferiore T detto *Periodo del moto*, che per la chiusura appartiene esso stesso a G , e che non può essere nullo a meno che la funzione ϕ sia la funzione costante. Infatti, se l'estremo inferiore fosse nullo potrebbero esistere $c \in G$ comunque piccoli. Ma, considerato che per ciascun c che appartiene a G anche mc appartiene a G per un qualunque $m \in \mathbb{Z}$, dati arbitrariamente $k, \varepsilon > 0$, potrebbe esistere un elemento $\bar{c} \in G$ tale che $|k - m\bar{c}| < \varepsilon$. La chiusura di G implica che anche k dovrebbe appartenere a G che allora, data l'arbitrarietà di k , dovrebbe coincidere con $\mathbb{R}$. ◇

N.B. 3.1.9 Ogni altro elemento di G è un multiplo intero del periodo T . Infatti se vi fosse un $c \in G$ non multiplo intero di T , esisterebbe $m \in \mathbb{Z}$ tale che $mT < c < (m+1)T$, ovvero tale che $0 < c - mT < T$ malgrado il fatto che anche $c - mT$ debba essere un elemento di G . ◇

N.B. 3.1.10 Il punto precedente esclude che una traiettoria possa ammettere punti doppi o contenere archi che non siano chiusi. In definitiva: *i moti periodici soluzioni di una equazione autonoma sono tutti e soli quelli che ammettono come traiettorie, nello spazio delle fasi, delle curve di Jordan.* ◇

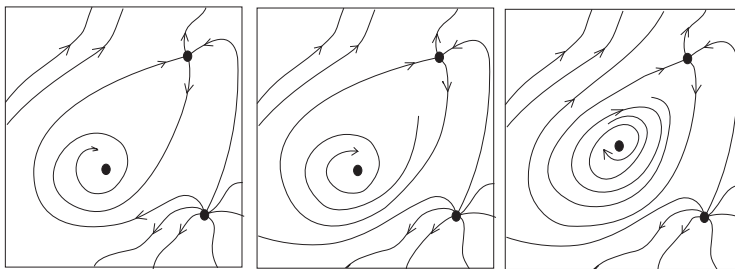
In $\mathbb{R}^1$ la famiglia dei diagrammi di fase è assai esigua; data la ridotta dimensione dello spazio delle fasi, ciascun punto di equilibrio è estremo (non contenuto) di solo due traiettorie, rispetto alle quali esso è: o attrattivo per entrambe ("pozzo"), o repulsivo per entrambe ("sorgente"), o attrattivo per l'una e repulsivo per l'altra ("sella"), a meno che esso sia contenuto in un intervallo fatto tutto da punti di equilibrio.



Questa affermazione, naturalmente, sfrutta il fatto che diagrammi di fase omeomorfi danno identiche informazioni qualitative, a meno di una diversa parametrizzazione delle traiettorie stesse.

Già nel caso di sistemi a due gradi di libertà, invece, l'insieme delle possibili traiettorie è estremamente più ricco. È però vero che *non ogni curva*, anche se regolare, può essere traiettoria di un sistema differenziale regolare. Per esempio un cammino può entrare (o avvicinare) un punto di equilibrio soltanto per $t \rightarrow \infty$ cioè con un "estremo", e più in generale non può tendere verso un punto di una traiettoria (regolare) per alcun $t \rightarrow t_1 < \infty$. Si deve tener presente che un punto di equilibrio è esso stesso una traiettoria, e non appartiene quindi ad alcuna delle eventuali traiettorie che gli si avvicinano.

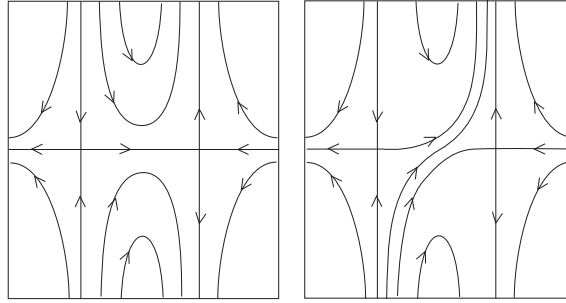
Esempio 3.1.11 Nella figura sono accennati tre diagrammi di fase ottenuti per tre distinti valori di un parametro di controllo di un sistema 2-dimensionale che, malgrado siano localmente uguali, danno luogo a dinamiche totalmente diverse.



□

N.B. 3.1.12 Sulle traiettorie viene generalmente indicato il verso naturale di crescita del parametro tempo, che naturalmente coincide con il verso del vettore tangente $v(x)$ $\diamond$

Esempio 3.1.13 Un caso analogo al precedente:



□

In definitiva, gli elementi con cui si costruiscono i diagrammi di fase in $\mathbb{R}^2$ sono:

- (i) punti, che rappresentano soluzioni di equilibrio;
- (ii) curve semplici chiuse, o *curve di Jordan*, che come si è visto rappresentano moti periodici;
- (iii) archi semplici, che non si intersecano, che possono divergere, oppure che possono incidere (uscenti o entranti) solo in punti necessariamente di equilibrio.

Lo studio dei diagrammi di fase comincia di regola con la ricerca dei punti di equilibrio e con l'esame locale delle traiettorie in prossimità di questi; ciò sempre dal punto di vista qualitativo, e quindi identificando fra loro diagrammi che, seppure diversi, sono tuttavia fra loro omeomorfi, (cfr. oltre). Pertanto generalmente questo studio consiste innanzi tutto nel tracciare, localmente intorno a ciascun equilibrio, il diagramma di fase di un più semplice sistema (possibilmente lineare) che sia "equivalente" a quello dato. Successivamente, con l'aiuto dello studio diretto del campo vettoriale assegnato, si raccordano fra loro i vari diagrammi trovati. Purtroppo questa tecnica non sempre determina il diagramma completo, e si deve far ricorso a teoremi e metodi di natura globale per eliminare le possibili ambiguità. È questa la parte più difficile degli studi qualitativi e per la quale sono spesso utili metodi numerici.

Lo stabilire possibili equivalenze fra flussi è già argomento di profondo interesse (si veda anche l'Appendice A.4). Ad esempio, con equivalenza "topologica" fra due sistemi si intende che esiste un omeomorfismo $f : U \subset \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ che coniuga fra loro due possibili evolutori $\mathcal{G}^t$ e $\mathcal{I}^\tau$ di $\mathbb{M}$ in sé secondo la

$$f^{-1} \circ \mathcal{I}^\tau \circ f = \mathcal{G}^t \quad \text{con } U \ni x_0, \quad t \in N(t_0), \quad \tau = \tau(t, x_0) \text{ invertibile rispetto a } t.$$

In tal caso, le due evoluzioni su $\mathbb{M}$ sono dette *topologicamente equivalenti*: il omeomorfismo f e la funzione invertibile τ assicurano che per ogni $t \in N(t_0)$:

$$\begin{cases} \xi_0 = f(x_0) \\ \tau = \tau(t, x_0) \end{cases} \iff \xi := \mathcal{I}^\tau \xi_0 = f \circ \mathcal{G}^t x_0 \equiv f(x).$$

Più in generale (si veda: [Wiggins 1 p.24; Guckenheimer p.38]) si definiscono:

v, w campi vettoriali C^k -coniugati := due campi per i quali esiste un C^k -diffeomorfismo: $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{L}$ che trasforma le soluzioni ϕ dell'equazione $\dot{x} = v(x)$ nelle soluzioni ψ dell'equazione $\dot{y} = w(y)$ secondo la

$$\psi \circ f = f \circ \phi \quad \text{ovvero} \quad \psi(t, t_0, f(x_0)) = f(\phi(t, t_0, x_0)).$$

A tale proposito, sussiste la

Proposizione 3.1.1 (fondamentale) Siano D un aperto di $\mathbb{M}$, $v : \mathbb{M} \rightarrow T\mathbb{M}$ un campo in $C^r(D)$, ed $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{L}$ un diffeomorfismo C^{r+1} .

Dato comunque $x_0 \in D$, l'equazione $\dot{x} = v(x)$ ha soluzione

$$\phi : I \rightarrow \mathbb{M} \text{ data da: } x = x(t) := \phi(t, t_0, x_0) \text{ su } I \in \mathbb{R} \text{ aperto contenente } t_0,$$

se e solo se posto $w = f_* v|_{f^{-1}}$, l'equazione $\dot{y} = w(y)$ ha soluzione

$$\psi : I \rightarrow \mathbb{L} \text{ data da: } y = y(t) := \psi(t, t_0, y_0) \text{ su } I \in \mathbb{R} \text{ aperto contenente } t_0,$$

ed allora ψ è tale che $\psi(t, t_0, y_0) \equiv f(\phi(t, t_0, f^{-1}(y_0)))$ e $y_0 = f(x_0)$.

Dimostrazione Dato che v è regolare su D , ed f è un diffeomorfismo, si ricavano facilmente i seguenti punti:

- (i) $x \in D \iff f(x) \in \text{int}(f(D))$;
- (ii) $x \in \partial D \iff f(x) \in \partial f(D)$;
- (iii) $K \text{ compatto} \in D \iff f(K) \text{ compatto} \in f(D)$
- (iv) sia $\{\mathcal{G}^t\}_{t \in I}$ la famiglia di evolutori dell'equazione $\dot{x} = v(x)$. Per ciascun $t \in I$ sia $\mathcal{G}^t x_0$ il punto $x = \phi(t, t_0, x_0)$; e sia $y_0 = f(x_0) \in f(D)$ l' f -trasformato di x_0 . L' f -trasformato del punto x è univocamente definito dalla

$$y = f \circ \mathcal{G}^t x_0, \quad \text{e cioè dalla} \quad y = y(t) := f(\phi(t, t_0, f^{-1}(y_0))).$$

Resta in tal modo definita una famiglia $\{\mathcal{I}^t\}_{t \in I}$ di evolutori tali che

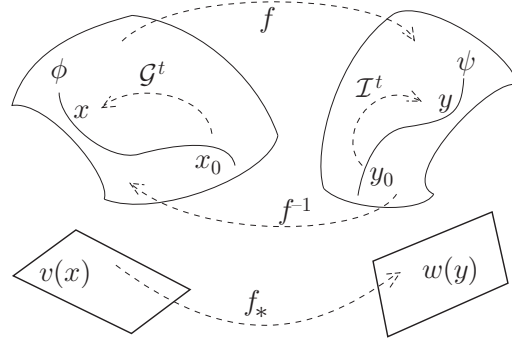
$$\mathcal{I}^t y_0 := y(t) = y := f \circ \mathcal{G}^t \circ f^{-1}(y_0).$$

Il moto $t \mapsto y(t)$ che le corrisponde individua la richiesta soluzione ψ mediante la $\psi(t, t_0, y_0) := y(t)$. Esso infatti verifica la

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathcal{I}^t y_0) &= \frac{d}{dt}(f \circ \mathcal{G}^t x_0) = f_* \frac{d}{dt}(\mathcal{G}^t x_0) = f_* v(\mathcal{G}^t x_0) = \\ &= f_* v(f^{-1}(y)) = w(\mathcal{I}^t y_0); \end{aligned}$$

quindi $\{\mathcal{I}^t\}_{t \in I}$ coincide con l'evoluzione, che sotto tali ipotesi esiste ed è unica, dell'equazione $\dot{y} = w(y)$. (Qui si sono indicati gli evolutori e non le funzioni del tempo solo per motivi di snellezza nella notazione).

- (v) Il viceversa segue dalla invertibilità delle f ed f_* , e cioè dal fatto che f è un diffeomorfismo.



■

N.B. 3.1.14 Si osservi che nella letteratura la notazione f_* può avere significato leggermente diverso da quello qui usato. Di frequente infatti (si veda ad esempio [Abraham-Marsden]) il campo w è di per sé indicato con $f_* v$; l'operazione f_* è allora chiamata “push forward” dal campo v al campo w ed è definita solo per diffeomorfismi f . ◇

Ne segue in particolare che la coniugazione fra due campi v e w è assicurata dall'esistenza di un diffeomorfismo f tale che

$$w(y) = [f_* v(x)]_{x=f^{-1}(y)}.$$

In tal caso, le traiettorie del flusso individuato da v , e in particolare i punti fissi o le orbite periodiche, vengono trasportate dal morfismo f in quelle del flusso di w , o anche: *i due flussi sono C^k -coniugati*.

Più debolmente si possono considerare sistemi che condividono solo le traiettorie nello spazio delle fasi e non anche le curve integrali, o solo luoghi di punti che contengono traiettorie; per essi la parametrizzazione non è la stessa. Come si è accennato si tratta allora solamente di

v, w campi vettoriali C^k -equivalenti := campi vettoriali per i quali accade che

$$\psi(\tau(t, x_0), \tau_0, f(x_0)) = f(\phi(t, t_0, x_0))$$

per un qualche diffeomorfismo $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{L}$ e una qualche funzione $\tau: \mathbb{R} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ monotona rispetto a t (in generale: non decrescente).

In questi casi ad esempio le orbite periodiche, pur essendo conservate, possono non mantenere lo stesso periodo, (si vedano gli esempi più oltre).

v, w campi vettoriali topologicamente equivalenti $:=$ individuano flussi che sono solo topologicamente equivalenti, e cioè la mappa f è un omeomorfismo.

v, w campi vettoriali linearmente equivalenti $:=$ la mappa f è lineare.

N.B. 3.1.15 Nel seguito, quando sia fissato un sistema di coordinate, l'equazione

$$\dot{x} = v(x), \quad (1.3)$$

con campo definito sulla varietà $\mathbb{M}$, e valida nel fibrato tangente $T\mathbb{M}$, verrà generalmente scritta “per coordinate”:

$$\dot{x} = v(x) := \mathcal{X}v(x) \equiv \mathcal{X}[\phi]_x,$$

ed anzi si riserverà la notazione x, v a corrispondenti grandezze scalari: in $\mathbb{R}^1$.

D'altra parte, se nella Proposizione Fondamentale 3.1.1 si intende f come la funzione identità sulla varietà $\mathbb{M}$, rappresentata dalle $h_{(\xi)} \circ (h_{(x)})^{-1}$, e della quale la $\Xi\mathcal{X}^{-1}$ rappresenta la tangente, allora è lecito concludere che il sistema $\dot{x} = v(x)$ resta trasformato nel sistema $\dot{\xi} = \nu(\xi)$ con $\nu(\xi) = \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} v(x) \right]_{x=\xi^{-1}(\xi)}$ *entrambi rappresentanti su due diverse carte la stessa equazione: $\dot{x} = v(x)$*

In definitiva è possibile scegliere, per ciascuna classe di coniugio di campi (secondo la definizione data qui sopra), un solo sistema del tipo (1.3) da trattarsi risolvendo una qualunque delle sue rappresentazioni in coordinate. Tale soluzione va poi interpretata sulla varietà, e trasformata mediante la Proposizione Fondamentale.

In definitiva non è troppo restrittivo pensare al diffeomorfismo f della Proposizione Fondamentale come ad una qualsiasi trasformazione di coordinate fra sistemi del tipo $\dot{x} = v(x)$, e che non lede limitarsi alla notazione per coordinate purché si tenga presente che essa può rappresentare anche intere classi di sistemi. $\diamond$

Nota 3.1.2 Se v e w sono coniugati da un diffeomorfismo f , e se $v(x_0) = 0$, allora la matrice $\partial v(x_0)$ risulta simile alla $\partial w(f(x_0)) := \partial w(y)|_{y=f(x_0)}$. Le due matrici sono solo proporzionalmente simili in caso di semplice equivalenza.

Infatti la (TC') implica: $w(f(x)) = f_* \Big|_x v(x)$ dalla quale si ricava

$$w_* \Big|_{f(x)} f_* \Big|_x = f_{**} \Big|_x v(x) + f_* \Big|_x v_*(x),$$

o anche, in coordinate, $w(f(x)) = \partial f(x)v(x)$ ed

$$\partial w(f(x))\partial f(x) = \partial^2 f(x)v(x) + \partial f(x)\partial v(x).$$

Ne segue che due sistemi con uno stesso punto fisso possono essere C^k -coniugati con $k \geq 1$ *solo se gli autovalori delle linearizzate siano gli stessi*. È questa una richiesta molto forte, in particolare se quelle che si vogliono studiare sono solo le proprietà qualitative del sistema. Per tale tipo di studio è generalmente sufficiente limitarsi a considerare casi di semplice equivalenza topologica. $\triangleright$

Si noti d'altra parte che la condizione di avere uguali gli autovalori delle linearizzate *non* è sufficiente per un C^k -coniugio; occorre infatti che esse condividano anche la ricchezza dei loro rispettivi autospazi.

Esempio 3.1.17 Con $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ si ha che

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \end{cases} \quad \text{è topologicamente equivalente a} \quad \begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

ed entrambi hanno gli stessi autovalori; i due sistemi però *non* sono linearmente (e quindi differenziabilmente) coniugati poiché $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non è simile a $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\square$

Tuttavia si vedrà nel seguito che per la sola equivalenza topologica fra due sistemi lineari che abbiano tutti gli autovalori con *parti reali non nulle* basta che *esse abbiano la stessa segnatura*.

Nei seguenti esempi verrà usata la familiare notazione delle coordinate cartesiane sul piano: $(x, y), (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ e polari: $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^1$.

Esempio 3.1.18 $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x, \end{cases} \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}.$

Sia

$$\mathbf{f} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Come ci si aspetta, si ricava $\partial \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, che dà, in coordinate,

$$\mathbf{w}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \partial \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x+y \\ y-x \end{pmatrix} \quad \text{e quindi} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \xi \\ -\eta \end{pmatrix}.$$

È quindi facile calcolare $\xi(t) = \xi_0 e^{+t}$, $\eta(t) = \eta_0 e^{-t}$, e se ne conclude

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathbf{f}^{-1} \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \xi_0 e^t - \eta_0 e^{-t} \\ \xi_0 e^t + \eta_0 e^{-t} \end{pmatrix}.$$

□

Esempio 3.1.19 $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x, \end{cases} \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}.$

Sia $\mathbf{f} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \arctan \frac{y}{x} \end{pmatrix}$, per $x > 0$ e $\theta \in (-\pi/2, +\pi/2)$.

Dato che $\partial \arctan \alpha = (1 + \alpha^2)^{-1}$, risulta (in coordinate):

$$\partial \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \partial \mathbf{f} \mathbf{v}(\mathbf{f}^{-1}(\rho, \theta)) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \frac{-\sin \theta}{\rho} & \frac{\cos \theta}{\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \sin \theta \\ -\rho \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

da cui, localmente, $\rho(t) = \rho_0$, $\theta(t) = -t + \theta_0$.

Al crescere di t occorrerà cambiare carta. Ad esempio, si può introdurre la coordinata: $\theta_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$ data da $\theta_1 := \arctan -x/y$ per $y > 0$; per cui nel primo quadrante risulta $\theta_1 = \theta - \pi/2$. La $\partial \mathbf{f}$ rimane la stessa e definita; in effetti essa è l'inversa della $\partial \mathbf{f}^{-1} = \frac{\partial}{\partial(\rho, \theta)} \begin{pmatrix} \rho \cos \theta \\ \rho \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$ e cioè della tangente della

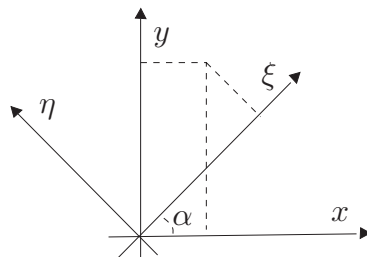
trasformazione $\mathbf{f}^{-1} : \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \theta \\ \rho \sin \theta \end{pmatrix}$ che, per la periodicità delle funzioni seno e coseno, è definita su $(0, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$ ma che è invertibile solo su strisce di larghezza minore di 2π .

La trasformazione prosegue con $\theta_2 := \arctan y/x$ per $x < 0$; e la $\theta_2 = \theta_1 - \pi/2$ può essere usata per definire $\theta = \theta_2 + \pi = \arctan y/x + \pi$ nella striscia $x < 0$. Questa, con la $\theta := \pi/2$ per $x = 0$, genera una corrispondenza continua fra i punti del piano tagliato in $\{x = 0, y < 0\}$ e i valori $\rho \in (0, +\infty), \theta \in (-\pi/2, 3\pi/2)$. (Di qui in poi: se si prosegue si ha la continuità perdendo la biunivocità; se si smette si ha la biunivocità a scapito della continuità). □

Esempio 3.1.20

$$\begin{cases} y = \frac{\eta}{\cos \alpha} + x \tan \alpha \\ \xi = \frac{x}{\cos \alpha} + \eta \tan \alpha \end{cases} \quad \text{con } x, y \in \mathbb{R},$$

e con α fissato e indipendente da t .



La trasformazione è quindi, in coordinate,

$$\ell : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

e pertanto

$$\partial \ell = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

come deve visto che la trasformazione è lineare. $\square$

Nel Capitolo II si è visto come tutti gli esempi qui sopra facciano parte di una stessa forma generale: l'equazione $\dot{x} = \mathcal{T}x$ con $\mathcal{T} \in \mathbb{L}(\mathbb{V})$.

Nota 3.1.3 È bene osservare esplicitamente che non è certo sufficiente che due sistemi abbiano le stesse traiettorie, o addirittura traiettorie che appartengano a medesime curve, per far sì che i sistemi siano coniugati o equivalenti. $\triangleright$

Esempio 3.1.22 (continua l'Esempio 3.1.19).

Si è visto nella prima parte dell'esempio che, (eventualmente cambiando carta per quanto riguarda la definizione della funzione θ) la trasformazione (di coordinate, ma solo se locale)

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan \frac{y}{x} \end{pmatrix} \quad \text{ha} \quad \partial f = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}.$$

Pertanto, l'oscillatore lineare: $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x$, è equivalente a

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \partial f \, v \Big|_{f^{-1}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \frac{-\sin \theta}{\rho} & \frac{\cos \theta}{\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \sin \theta \\ -\rho \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

In modo del tutto analogo, e con la stessa trasformazione f , per i sistemi:

$$\begin{cases} \dot{x} = xy, \\ \dot{y} = -x^2; \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = +y(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = -x(x^2 + y^2); \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = -y/(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = +x/(x^2 + y^2); \end{cases}$$

si ottengono rispettivamente i trasformati:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = 0, \\ \dot{\theta} = -\rho \cos \theta; \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\rho} = 0, \\ \dot{\theta} = -\rho^2; \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\rho} = 0, \\ \dot{\theta} = \rho^{-2}. \end{cases}$$

Si osserva che tutti e quattro tali sistemi hanno traiettorie appartenenti alle circonferenze concentriche $(x^2 + y^2) = (x_0^2 + y_0^2)$. Tuttavia essi non possono certo essere coniugati giacché il secondo ha fissi tutti i punti dell'asse delle y , gli ultimi due hanno periodi dipendenti dal raggio, cioè dalle condizioni iniziali, e l'ultimo ha campo non definito nell'origine.

Può essere interessante notare che le trasformazioni che portano direttamente l'oscillatore armonico lineare negli altri (ancora in coordinate cartesiane) possono tutte essere espresse da

$$h : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(x, y) \cos \varphi(x, y) \\ \rho(x, y) \sin \varphi(x, y) \end{pmatrix}$$

ove $\rho(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$ e dove $\varphi = \varphi(x, y)$ è rispettivamente nei vari casi, e con $\theta := \arctan y/x$:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= \theta(x, y) & \varphi_2(x, y) &= +2 \arctan \left(\frac{\exp(\rho(x, y)\theta(x, y)) - 1}{\exp(\rho(x, y)\theta(x, y)) + 1} \right) \\ \varphi_3(x, y) &= +\rho^2(x, y)\theta(x, y) & \varphi_4(x, y) &= -\rho^{-2}(x, y)\theta(x, y) \end{aligned}$$

con Jacobiani $J = x\partial_y \varphi(x, y) - y\partial_x \varphi(x, y) \equiv \partial \varphi / \partial \theta$ rispettivamente dati da

$$\begin{aligned} J_1(x, y) &= 1 & J_2(x, y) &= \rho(x, y) \cos \varphi_2(x, y) \\ J_3(x, y) &= \rho^2(x, y) & J_4(x, y) &= -\rho^{-2}(x, y) \end{aligned}$$

Per rendersene conto si chiamino

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \\ \arctan \frac{\eta}{\xi} \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan \frac{y}{x} \end{pmatrix},$$

e, scelti due dei quattro sistemi dati, si distinguano come segue:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu^\xi(\xi, \eta) \\ \nu^\eta(\xi, \eta) \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^x(x, y) \\ v^y(x, y) \end{pmatrix}.$$

Si operino poi le due trasformazioni nei corrispondenti due equivalenti sistemi

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^\rho(\rho, \varphi) \\ \omega^\varphi(\rho, \varphi) \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w^r(r, \theta) \\ w^\theta(r, \theta) \end{pmatrix}.$$

Su questi ultimi è agevole determinare la trasformazione $\tilde{f}: \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix}$ tale che

$$\begin{pmatrix} \omega^\rho(\rho, \varphi) \\ \omega^\varphi(\rho, \varphi) \end{pmatrix} = \partial \tilde{f} \begin{pmatrix} w^r(r, \theta) \\ w^\theta(r, \theta) \end{pmatrix} \Big|_{\tilde{f}^{-1}(\rho, \varphi)},$$

e mediante la $\tilde{f}$ determinare la f . Ad esempio mediante il terzo e primo dei casi visti si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\rho^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_r & \rho_\theta \\ \varphi_r & \varphi_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Big|_{\tilde{f}^{-1}(\rho, \varphi)} = \begin{pmatrix} -\rho\theta \\ -\varphi\theta \end{pmatrix}$$

che si risolve nelle $\rho(r, \theta) = \hat{\rho}(r)$ e $\varphi_3(r, \theta) = \rho^2(r)\theta + \hat{\varphi}(r)$. Ne segue, ad esempio,

$$\begin{cases} \xi^2 + \eta^2 = \rho(x^2 + y^2) \\ \arctan \frac{\eta}{\xi} = \rho(x^2 + y^2) \arctan \frac{y}{x} + \varphi(x^2 + y^2) \end{cases}$$

ed il fatto che sia $\dot{r} = 0$ fornisce, ad esempio, $\xi^2 + \eta^2 = x^2 + y^2 = \text{cost}$, insieme con $\xi = \rho \cos \rho^2 \theta$ ed $\eta = \rho \sin \rho^2 \theta$, nelle quali $\rho^2 = x^2 + y^2$ e $\tan \theta = y/x$.

In modo analogo, nel caso (2) si ha $\rho \cos \varphi_3 = \partial \varphi_3 / \partial \theta$, che fornisce $\exp(\rho\theta) = (1 + \tan \varphi_2/2)/(1 - \tan \varphi_2/2)$.

□

Il precedente esempio mostra che trasformare le coordinate dipendenti può non essere il metodo migliore per disegnare un diagramma di fase. Spesso, cambiare parametrizzazione risulta più conveniente.

Esempio 3.1.23 Sia D un dominio di $\mathbb{R}^n$, e sia data, in coordinate, la

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \kappa(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x}_0 \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{v}: D \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \kappa: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

con $\kappa \in C^1(D)$ e $\kappa = 0$ al più nei punti in cui $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$.

Le traiettorie individuate dalla (1.4) sono le stesse di quelle della:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x}_0 \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{v}: D \rightarrow \mathbb{R}^n; \quad (1.5)$$

l'unica loro differenza è che esse corrispondono ad una diversa parametrizzazione. Per rendersene conto, si consideri la soluzione $\phi: t \mapsto \mathbf{x} = \phi(t)$ della (1.5) che vale $\mathbf{x}_0$ in t_0 . L'ipotesi sulla κ permette (in linea di principio) di risolvere la

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\kappa(\phi(t))} \quad \text{ovvero la} \quad \tau - \tau_0 = \int_{t_0}^t \frac{d\eta}{\kappa(\phi(\eta))}$$

nella $t = \beta_{(\mathbf{x}_0)}(\tau) =: \beta(\tau)$. Per esempio, nel caso dell'Es.3.1.22 questo metodo fornisce subito la relazione $\rho \cos \varphi = \partial \varphi / \partial \theta$, in cui θ gioca il ruolo di τ e φ quello di t . È importante osservare che in tal modo è possibile ottenere le soluzioni di (1.4) a partire da quelle di (1.5). Infatti la funzione $\psi := \phi \circ \beta$ è tale che

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{d\phi}{dt} \Big|_{t=\beta(\tau)} \frac{d\beta}{d\tau} = \left[\mathbf{v}(\phi(t)) \kappa(\phi(t)) \right]_{t=\beta(\tau)} = \mathbf{v}(\psi(\tau)) \kappa(\psi(\tau)).$$

Il procedimento poi si può estendere, ad esempio per le curve contenenti più di una traiettoria, nei casi in cui la funzione κ si annulla anche in altri punti oltre che gli equilibri, e ciò pur di suddividere i cammini in archi aventi per estremi le loro intersezioni con la *Superficie singolare* $\kappa(\mathbf{x}) = 0$. (Come si è visto, le funzioni φ_i dell'Esempio 3.1.22 possono anche essere trovate in questo modo, in coordinate polari). □

Un ulteriore caso di trasformazione della variabile indipendente è quello nel quale il sistema iniziale è il (1.5), e quello che viene discusso o risolto è il sistema (1.4) nel quale come funzione κ viene scelta una specifica, comoda, funzione.

È di interesse il caso in cui come funzione κ sia scelta *l'inverso di una delle componenti del campo* $\mathbf{v}$. Nell'ipotesi che in $\mathbf{x}_0$ sia $v^n(\mathbf{x}_0) \neq 0$, si consideri, ad esempio, $\kappa := 1/v^n$. Chiamando anche in questo caso $\phi: t \mapsto \phi(t)$ la soluzione (incognita) della (1.5) tale che $\mathbf{x}_0 = \phi(t_0)$, e $\psi: \tau \mapsto \psi(\tau)$ la soluzione (nota) della (1.4) con $\kappa(\mathbf{x}) := (v^n(\mathbf{x}))^{-1}$, si vede che il legame fra i due sistemi è dato dalla

$$\dot{x}^n(t) = v^n(\phi(t)) =: 1/\kappa(\phi(t)) =: \dot{\tau} \quad \text{ovvero} \quad \frac{dx^n}{d\tau} = 1,$$

$$\text{e quindi dalla} \quad \tau - \tau_0 \equiv x^n - x_0^n =: \int_{t_0}^t v^n(\phi(t')) dt' =: \int_{t_0}^t \frac{dt'}{\kappa(\phi(t'))}.$$

Il procedimento consiste in definitiva nello scegliere una delle componenti della variabile dipendente come indipendente (localmente dove ciò sia possibile: se è $v^n(\mathbf{x}_0) \neq 0$ si può scegliere $x^n(\tau) = \tau + c$, o anche $x^n \equiv \tau$), e fornisce, con la notazione usata in questo esempio, la

Equazione differenziale associata:

$$\frac{dx^i}{dx^n} = \frac{v^i(x^1, \dots, x^n)}{v^n(x^1, \dots, x^n)} \quad \text{con} \quad i = 1, \dots, n-1, \quad \text{e con} \quad \frac{dx^n}{d\tau} = 1. \quad (1.6)$$

Si paragoni questa equazione con la 4.35 del §I.4: il metodo di risoluzione è lo stesso.

Come si è detto, la particolare scelta della n -ma coordinata è conseguenza dell'assunto che nel punto $\mathbf{x}_0$ il campo sia "trasverso" al piano $x^n = x_0^n$, e cioè che sia $v^n(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Tale ipotesi assicura che la (incognita) funzione $\phi^n: t \mapsto x^n = \phi^n(t)$ che, in virtù della (1.5), verifica l'identità: $\phi^n(t) = v^n(\phi(t))$, sia localmente invertibile nella $t = \beta_{(\mathbf{x}_0)}(x^n) =: \beta(x^n)$. Quest'ultima è allora tale che

$$t_0 = \beta(x_0^n) \quad \text{con} \quad 1 = \frac{d\beta}{dx^n} \frac{d\phi^n}{dt} = \frac{d\beta}{dx^n} v^n(\phi(t)).$$

Si ritrova così che la soluzione $\psi = \psi(x^n)$ dell'equazione associata (1.6), tale che $\psi(x_0^n) = \mathbf{x}_0$ e che esiste per l'ipotesi di trasversalità e di regolarità locale vicino a x_0^n , è legata alla soluzione ϕ della (1.5) dalla relazione $\psi = \phi \circ \beta$ e cioè $\psi(x^n) := \phi(\beta(x^n))$; infatti, per costruzione, è $\phi^n(t_0) = x_0^n$, e inoltre

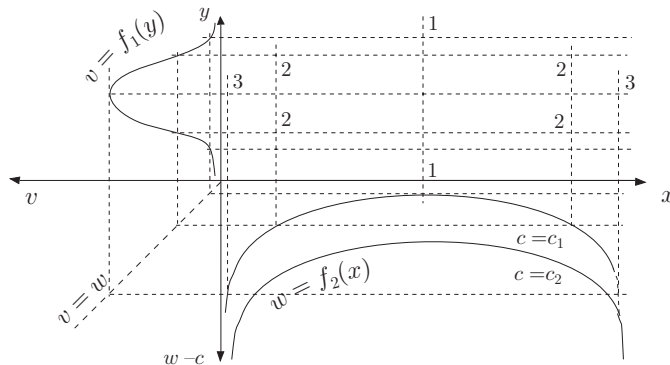
$$\frac{d\psi^i}{dx^n} = \frac{d\phi^i}{dt} \frac{d\beta}{dx^n} = \frac{v^i(\mathbf{x})}{v^n(\mathbf{x})} \Big|_{\mathbf{x}=\phi \circ \beta}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad \frac{d\psi^n}{dx^n} := 1.$$

La curva integrale dell'equazione associata, o parte di essa, coincide con la traiettoria del sistema di partenza (1.5) parametrizzata con x^n . La $x^n \mapsto \psi(x^n)$ è, semplicemente, la rappresentazione cartesiana (locale) della curva $t \mapsto \phi(t)$ soluzione della (1.5).

Ovviamente si deve essere pronti a cambiare i ruoli della x^n con una delle altre quando ci si avvia verso punti in cui $v^n = 0$; inoltre in tal modo si è anche perso l'orientamento sulla traiettoria che va deciso osservando direttamente il verso del vettore $\mathbf{v}(\mathbf{x})$.

I quattro i sistemi dell'Esempio 3.1.22 danno tutti luogo alla stessa Equazione associata, benché con diverse v^n .

Nota 3.1.4 Non ci si deve aspettare che qualora anche si riesca, spesso per pura fortuna, a risolvere implicitamente l'equazione associata (per esempio se $n = 2$ per separazione di variabili) il problema sia risolto esplicitamente. Ciò che infatti si trova è una relazione ad esempio del tipo $f_1(y) = f_2(x) + \text{cost}$ che in generale non si riesce ad esplicitare rispetto ad una delle variabili. Se però ciò che si vuole è solo l'andamento qualitativo di questa funzione, allora può essere d'aiuto il Metodo di Volterra (si veda: [Simmons p.286]), o, meglio, un comodo computer.



▷

Quando invece la funzione $\psi : x^n \mapsto \psi(x^n)$, soluzione dell'equazione associata, sia esplicitamente nota può accadere che sia anche possibile determinare esplicitamente (in linea di principio lo è) la funzione $\phi^n : t \mapsto x^n = \phi^n(t)$. Essa infatti è, necessariamente, soluzione della

$$\dot{x}^n = v^n(\phi(\beta(x^n))) \equiv v^n(\psi^1(x^n), \dots, \psi^{n-1}(x^n), x^n); \quad x^n(t_0) = x_0^n.$$

Quest'ultima, sempre risolubile (in forma implicita) per separazione di variabili, con la sua soluzione $t \mapsto x^n = \phi^n(t)$ (inversa della β) assegna finalmente tutte le altre $x^i = \phi^i(t) \equiv \psi^i(\phi^n(t))$, $i = 1, \dots, n-1$. È questo il caso che si presenta quando una delle equazioni è disaccoppiata dalle altre.

Esempio 3.1.25 $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y(2x - y) \end{pmatrix}, \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}.$

Si può notare che l'equazione associata è una particolare equazione di Riccati, e cioè del tipo: $y' + p(x)y = q(x)y^2 + r(x)$ che in questo caso specifico può addirittura essere risolta analiticamente con il metodo visto nel Capitolo I, (Es.1.4.25). Posto infatti

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = -\frac{y^2}{x^2}$$

una soluzione è senz'altro $y_1(x) = x$. D'altra parte, il metodo visto a suo tempo porta a cercare v tale che $y = y_1 + 1/v$. Si ottiene

$$\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dx} + \frac{2}{vx} = \frac{1}{x^2 v^2} + \frac{2}{vx} \quad \text{e cioè} \quad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x^2}$$

da cui $v(x) = -1/x + 1/k$ per un'opportuna costante $k \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, e quindi

$$y(x) = x + \frac{kx}{x-k} = \frac{x}{1-k/x}.$$

A sua volta, la soluzione della $\dot{x} = x^2$ è nota. Si ricava quindi, se $x_0 \neq 0$,

$$\begin{cases} x(t) = \frac{x_0^2}{1 - x_0(t - t_0)} \\ y(t) = \frac{x_0}{(1 - x_0(t - t_0))(x_0 - k(1 - x_0(t - t_0)))}, \end{cases}.$$

Infine, il caso $x_0 = 0$ va risolto separatamente osservando che la $y(t)$ è allora soluzione della $\dot{y} = -y^2$. Si ricava così $y(t) = y_0/(1 + y_0(t - t_0))$. □

Talvolta, a prescindere dalla sua esplicita risoluzione, il ricorrere all'equazione associata è di aiuto immediato nello studio della geometria del sistema. Ad esempio, il seguente metodo è del tutto diverso dal ricercare la soluzione esatta del problema, come si è fatto nell'esempio precedente, ma raggiunge se non lo stesso risultato almeno una sufficiente idea del come sia tracciato il diagramma di fase del sistema.

A partire dal fatto che $[\phi]_x$ contiene senz'altro $x + vt$, si osserva che: nello spazio delle fasi $\mathbb{M}$, ed in ogni sua rappresentazione in coordinate, le rette parallele al campo dell'equazione associata coincidono con quelle parallele al campo del sistema di partenza e sono pertanto tangenti sia alla curva ϕ che alla curva ψ nel loro (generico) punto $\mathbf{x}$. In particolare, nel caso bidimensionale $\mathbf{x} \equiv (x, y) \in \mathbb{R}^2$, le rette individuate dalla direzione del campo sono quelle con coefficiente angolare $v^x(x, y)/v^y(x, y)$. Si definiscono

Isocline := le curve, nel piano delle fasi $\mathbb{R}^2$, lungo le quali $v^x(x, y)/v^y(x, y) = \text{cost}$.

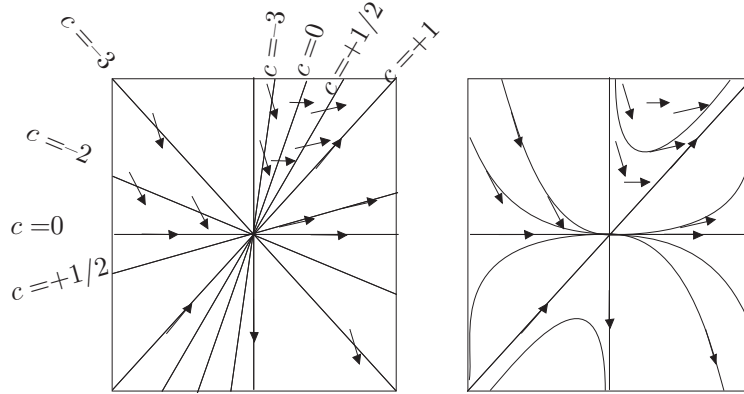
Isocline principali := le curve, nel piano delle fasi $\mathbb{R}^2$, lungo le quali è rispettivamente $v^x(x, y) = 0$ oppure $v^y(x, y) = 0$.

Le intersezioni delle isocline principali sono i punti di equilibrio del sistema.

Esempio 3.1.26 (continuazione dell'Esempio 3.1.25) Si osserva che:

- (i) c'è un solo equilibrio: $(0, 0)$;
- (ii) $\mathbf{v}(x, y) = \mathbf{v}(-x, -y)$ pertanto le traiettorie saranno curve simmetriche rispetto all'origine e basta studiarle nel semipiano $x \geq 0$;

- (iii) l'isoclina $\dot{x} = 0$ è proprio l'asse delle y . Questo potrà allora contenere archi di traiettorie. Anzi, essendo su di esso $\dot{y} = -y^2 \neq 0$ se fuori dell'equilibrio, tale asse è costituito da tre traiettorie, e i due semiasse $|y| > \varepsilon$ sono percorsi in un tempo finito se $\varepsilon > 0$;
- (iv) le altre isocline sono $y(2x - y)/x^2 = \text{cost} =: \tan \theta$, o anche $x^2 - (x - y)^2 = c x^2$ da cui necessariamente $c \leq 1$ e $y = x(1 \pm \sqrt{1 - c})$. Ma c esprime l'inclinazione del campo $\mathbf{v}$ sull'asse delle x . In particolare, $c = 0$ sulle $y = 0$ e $y = 2x$; $c = 1$ su $y = x$; $c = 0.5$ su $y = (1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}})x$; e così via.



Il passaggio poi dalla prima alla seconda di queste figure è conseguenza della proprietà (si veda §3) che, lontano dagli equilibri, il flusso si può “pettinare”.

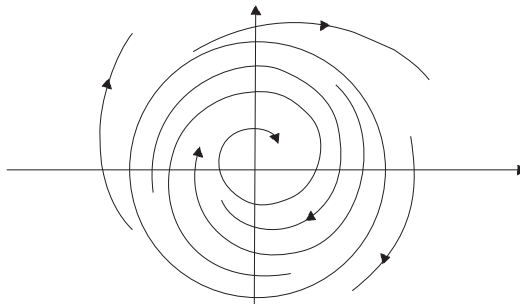
□

Esempio 3.1.27 $\ddot{x} - (x^2 + \dot{x}^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad t_0, x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R}.$

Il sistema equivalente è

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + (x^2 + y^2 - 1)y, \end{cases} \quad \text{con } t_0, x_0, y_0 \in \mathbb{R},$$

e da questa si ha l'equazione associata $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} + x^2 + y^2 - 1$. Ora, siccome $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ ha curve integrali sulle circonferenze con centro nell'origine, si nota che l'equazione data, nell'intorno della curva $x^2 + y^2 = 1$, ha campo come in figura:



□

La cosa si può formalizzare. Sia dato il seguente esempio “accademico”:

Esempio 3.1.28

$$\begin{cases} \dot{x} = +y + (x^2 + y^2 - 1)x, \\ \dot{y} = -x + (x^2 + y^2 - 1)y, \end{cases} \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}.$$

Si osserva che il sistema è della forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = v^x(x, y) - f(x, y)v^y(x, y) =: v_f^x(x, y), \\ \dot{y} = v^y(x, y) + f(x, y)v^x(x, y) =: v_f^y(x, y), \end{cases}$$

e quindi chiamando

$$\tan \theta := \frac{v^y(x, y)}{v^x(x, y)}; \quad \tan \theta_f := \frac{v_f^y(x, y)}{v_f^x(x, y)} \quad \tan \alpha := f(x, y),$$

l'equazione associata risulta

$$\tan \theta_f = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\frac{v^y(x, y)}{v^x(x, y)} + f(x, y)}{1 - f(x, y) \frac{v^y(x, y)}{v^x(x, y)}} = \frac{\tan \theta + \tan \alpha}{1 - \tan \theta \tan \alpha} = \tan(\theta + \alpha).$$

Se, come in questo caso, si conoscono le isocline del sistema “ridotto”

$$\begin{cases} \dot{x} = v^x(x, y) \equiv y \\ \dot{y} = v^y(x, y) \equiv -x \end{cases}$$

è facile ricostruire il campo $\mathbf{v}_f$ del sistema assegnato in quanto esso è “ruotato di α ” rispetto a quello $\mathbf{v}$ del sistema noto. D'altra parte quest'ultima osservazione si sarebbe anche potuta ricavare subito dalla:

$$\begin{pmatrix} v_f^x \\ v_f^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -f \\ f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^x \\ v^y \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\cos \alpha} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^x \\ v^y \end{pmatrix},$$

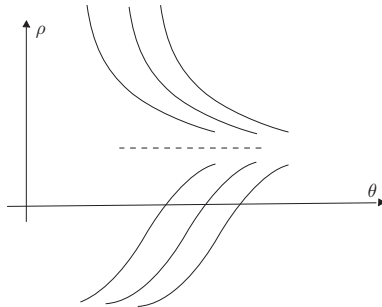
e ciò mostra che il campo è ruotato di $\alpha := \arctan(x^2 + y^2 - 1)$ rispetto alle isocline $y = cx$ e che inoltre esso è allungato di $1/\cos \alpha$.

In questo particolare esempio, il risultato si può ottenere in modo esatto esprimendo il sistema in coordinate polari:

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{\rho} & \frac{\cos \theta}{\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \sin \theta + \rho(\rho^2 - 1) \cos \theta \\ -\rho \cos \theta + \rho(\rho^2 - 1) \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(\rho^2 - 1) \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Si determinano cioè $\theta(t) = -t + c$ e $\frac{d}{dt}\rho^2 = 2\rho^2(\rho^2 - 1)$ da cui

$$-\log(\rho^2) + \log(\rho^2 - 1) = -2(\theta - \theta_0) \quad \text{ovvero} \quad \rho = (1 - ce^{-2\theta})^{\frac{1}{2}},$$

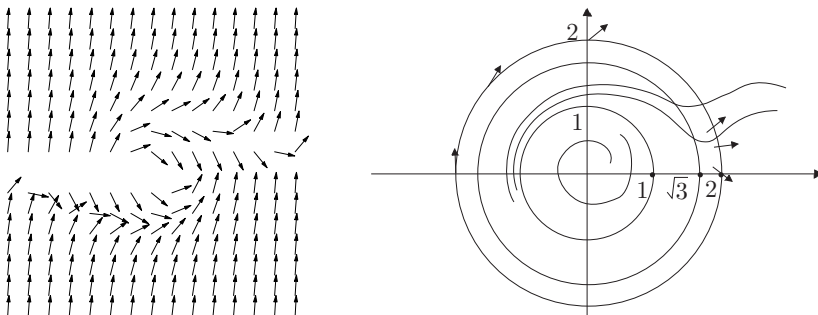


e questo mostra ulteriormente che il diagramma di fase è simile (a meno del verso dei tempi) a quello del precedente esempio. Per entrambi, esso è un “deformato” di quello dell'oscillatore lineare che è, infatti, il sistema ridotto sia dell'uno che dell'altro. $\square$

Per il campo dell'Esempio 3.1.27 si sarebbe ottenuto, in modo analogo,

$$\dot{\rho} = \rho(\rho^2 - 1) \sin^2 \theta; \quad \dot{\theta} = -1 + (\rho^2 - 1) \frac{1}{2} \sin 2\theta,$$

che per $\rho \sim 1$ dà risultati qualitativamente simili:



C:/Mauro/note/testo/cap3/esIII1.eps

Per entrambi questi esempi si ha che la curva $\rho = 1$, e cioè una curva semplice e chiusa, non solo risulta essere una traiettoria ma in particolare è un

Ciclo limite := una traiettoria chiusa e tale che tutte le traiettorie passanti per punti sufficientemente vicini ad essa si avvicinano definitivamente verso di essa per $t \rightarrow +\infty$ oppure (anche) per $t \rightarrow -\infty$. (Una definizione più rigorosa verrà data nel seguito)

3.2 Gli integrali primi

Sia $\mathbb{M}$ una varietà di dimensione n . Siano fissati $x \in \mathbb{M}$ e $v \in T_x \mathbb{M}$ individuata mediante una curva $\phi : I \rightarrow \mathbb{M}$ tale che $\phi(0) = x$ e $\dot{\phi}(0) = v$. Sui funzionali $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ reali, differenziabili nel prefissato punto x , si definisce la:

Derivata direzionale di f nella direzione del vettore v := il valore che la derivata di $f \circ \phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ assume nel punto, e cioè

$$\mathcal{L}_v f \Big|_x := \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f \circ \phi$$

ovvero, in coordinate,

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} h_{(y)} \circ f \circ \phi = \mathcal{Y}[f \circ \phi]_{f(x)} = \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} \cdot v^i = \nabla f(x) \cdot v(x).$$

Tale valore coincide con ciò che si ottiene applicando sul (particolare) vettore $[\phi]_x$ la mappa tangente $f_*|_x$ (che nel caso scalare viene chiamata Gradiente di f), se questa esiste. Tuttavia quando esso viene considerato come valore assunto nel punto $x \in \mathbb{M}$ dalla funzione Derivata direzionale (si veda qui di sotto) è opportuno indicarlo in modo diverso. In effetti esso può perfino essere indicato (si veda [Abraham 2.4.15]) con $df(v)$.

N.B. 3.2.1 Si osservi che quella qui sopra è una estensione del comune concetto di derivata direzionale, in quanto qui non si richiede che il vettore v abbia lunghezza unitaria. Si osservi anche che qualora la f non fosse differenziabile, e cioè (per quanto detto circa l'indipendenza della derivazione dal sistema di coordinate) qualora non esista la $f_*|_x$, tuttavia la $\mathcal{L}_v$ può esistere anche per ogni $v \in T_x \mathbb{M}$. Come è noto, infatti, l'ipotesi di differenziabilità della f non è necessaria per poter definire la derivata direzionale (si veda §III.1 e [Apostol III]). Se però la f è differenziabile esistono le $\mathcal{L}_v f$ per ogni $v \in T_x \mathbb{M}$ ed il loro valore eguaglia il valore $f_* v|_x$. $\diamond$

Più in generale, si consideri assegnato un campo $v : \mathbb{M} \rightarrow T\mathbb{M}$, differenziabile in un aperto $D \subset \mathbb{M}$, che per $x \in D$ assume il valore $v(x) \in T_x \mathbb{M}$. Data una $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(D)$, si definisce la:

Derivata direzionale di f lungo il campo v := la funzione scalare di punto $\mathcal{L}_v f : D \rightarrow \mathbb{R}$ che ad ogni $x \in D$ associa il valore della derivata direzionale di f nella direzione del valore del campo v in x , e cioè relativa al vettore $v(x)$:

$$\mathcal{L}_v f : x \mapsto (\mathcal{L}_v f)(x) \equiv f_* v(x).$$

N.B. 3.2.2 La funzione $\mathcal{L}_v f$ è indipendente dalla particolare scelta della ϕ nel vettore $[\phi]_x$ in quanto, dato un certo sistema di coordinate, il suo valore si esprime con la $\mathcal{L}_v f = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i} v^i$ che non dipende dalla ϕ . Al cambio

di coordinate, sia le $\xi = \varphi^{-1}(x)$ su D sia la $\eta = \eta(y)$ su $\mathbb{R}$, tale valore muta (si veda Appendice A.4 N.B.1.4.15) secondo la:

$\frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \nu^j(\xi)$ essendo $\nu(\xi) = \partial \varphi^{-1} v|_{\varphi(\xi)}$ il trasformato di v . Nelle nuove coordinate il valore di $\mathcal{L}_v f$ è $\mathcal{L}_{\nu} \tilde{f} = \left[\frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x^i} v^i \right]_{x=\varphi(\xi)}$. $\diamond$

N.B. 3.2.3 La funzione $\mathcal{L}_v f$ Derivata direzionale di f è definita sulla varietà $\mathbb{M}$, diversamente dalla f_* che è definita sullo spazio tangente, dalla $\mathcal{L}_v$ che è definita su $C^1(D)$ (cfr. oltre), o dalle $\frac{d}{dt} f \circ \phi$ che sono definite su un qualche intervallo $I \subset \mathbb{R}$.

La f_* è, per ciascun x , un operatore lineare tra $T_x \mathbb{M}$ e $T_{f(x)} \mathbb{L}$ e cioè agisce linearmente sui vettori. La funzione $\mathcal{L}_v f$ non è in generale lineare rispetto ad x ; e, d'altra parte, v è un ben preciso e fissato campo vettoriale. La funzione $\mathcal{L}_v : C^{k \geq 1} \rightarrow C^{k-1}$ è però lineare sulle $f \in C^k$, (e di qui la notazione $\mathcal{L}_v$); inoltre sui prodotti di funzioni agisce come un operatore di Leibniz: $\mathcal{L}_v(fg) = f\mathcal{L}_v g + g\mathcal{L}_v f$ (e di qui il nome di derivata). $\diamond$

N.B. 3.2.4 Come si è detto, fissate le coordinate la $\mathcal{L}_v f$ ha in x valore $(\mathcal{L}_v f)(x) = \sum_{i=1}^m \left(v^i \partial f / \partial x^i \right)(x)$; e cioè, nel sistema di vettori $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x$, la funzione $\mathcal{L}_v : C^\infty \rightarrow C^\infty$ ha componenti date da v^i . In questo senso i campi vettoriali possono essere considerati come degli operatori di derivazione lineari sulle “funzioni prova” $f \in C^\infty$. In tal caso a volte $(\mathcal{L}_v f)(x)$ si indica con $v_x(f)$, o addirittura con $v(f)$, *lineare su f* . $\diamond$

Sia ancora $v : x \in \mathbb{M} \mapsto v(x) \in T_x \mathbb{M}$ un campo vettoriale (autonomo) liscio su un aperto $D \subset \mathbb{M}$. Si definisce: Integrale primo del campo autonomo v := una funzione $\mathcal{F} : x \in D \mapsto \mathcal{F}(x) \in \mathbb{R}$ che sia in $C^1(D)$ e la quale, pur non essendo una funzione costante: $\mathcal{F}(D) = c$, è tale che $\mathcal{L}_v \mathcal{F}(x) = 0$ per ogni $x \in D$.

N.B. 3.2.5 Si noti che l'ipotesi che sia $\mathcal{F} \in C^1(D)$ è molto forte. Sono possibili, e si trovano in letteratura, ipotesi anche più deboli e generali di questa. Tuttavia, per semplicità, nel seguito di queste note si manterrà questa richiesta, seppure leggermente limitativa. $\diamond$

Sia assegnato un campo autonomo v liscio su $D \subset \mathbb{M}$, e si consideri l'equazione $\dot{x} = v(x)$. Se in qualche punto $x \in D$ si ha che $\mathcal{L}_v \mathcal{F}(x) = 0$, allora senz'altro la soluzione ϕ che in t ha valore x e derivata $v(x)$ (che appartiene al vettore v) è tale che $\mathcal{L}_v \mathcal{F}(\phi(t)) = 0$. Quando ciò accade per tutti i punti di D la $\mathcal{L}_{v(x)} \mathcal{F}(x)$ è nulla per ogni $x \in D$, ed allora il campo ammette su D l'integrale primo $\mathcal{F}$. In tal caso, fissato arbitrariamente $x_0 \in D$, e detti $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F}(x_0)$ il valore che la $\mathcal{F}$ assume in x_0 , e $\phi : I \subseteq J_M \rightarrow \mathbb{M}$, $\phi : t \mapsto \phi(t, 0, x_0)$ la soluzione, uscente da x_0 , dell'equazione $\dot{x} = v(x)$, si potrà affermare che sussiste l'uguaglianza

$$(\mathcal{L}_v \mathcal{F})(\phi(t)) \equiv \frac{d}{dt}(\mathcal{F} \circ \phi) \equiv (\mathcal{F}_* v)(\phi(t)) = 0 \quad \begin{array}{l} \text{per ogni } t \in J_M \\ \text{ed ogni } x_0 = \phi(t_0). \end{array}$$

Infatti il valore $\phi(t)$ individua l'evoluto $x = \mathcal{G}^t x_0 \in \mathbb{M}$ del punto x_0 all'istante t , e quindi se per ciascun punto x della traiettoria $\{\mathcal{G}^t x_0\}_{t \in J_M}$ la derivata $\mathcal{L}_v \mathcal{F}|_x$ viene calcolata (ad esempio) mediante la curva $\phi : I \rightarrow \mathbb{M}$, e se così si accade per ogni altro x_0 e corrispondente traiettoria in $\mathbb{M}$, si riconosce che l'uguaglianza detta sussiste lungo *una qualsiasi traiettoria* soluzione dell'equazione considerata.

Se ne conclude che

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_v \mathcal{F})(x) &\stackrel{x \in D}{\equiv} 0, \quad \text{con } \mathcal{F}_* \neq 0, \quad \text{se e solo se} \\ \left((\mathcal{L}_v \mathcal{F}) = \frac{d}{dt}(\mathcal{F} \circ \phi) \right) \Big|_{\substack{\phi(t)=x \\ \dot{\phi}(t)=v(x)}} &= 0 \quad \text{per ogni soluzione } \phi : \phi(t) = x, \\ \text{e quindi} \quad \text{se e solo se} \quad (\mathcal{F} \circ \phi)(t) &= \mathcal{F}(x_0) \quad \text{per ogni } x_0 \in D : \phi(t_0) = x_0. \end{aligned}$$

Memento 3.2.1 Data una qualsiasi funzione $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$, si indica con $f^{-1}(y)$ l'insieme $\{x \in \mathbb{X} \mid f(x) = y\}$. In tal senso, risulta senz'altro $x \in f^{-1} \circ f(x)$ per ogni x sul quale f è definita.

Pertanto, $(\mathcal{F} \circ \phi)(t) = \mathcal{F}_0$ implica che $\phi(t) \in \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}_0)$ per ogni $t \in J_M$, o anche $[\phi]_x \in T_x \{\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}_0)\}$ per ogni $x \in \mathbb{M} \cap \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}_0)$ tale che $x = \phi(t, 0, x_0)$.

In definitiva, la definizione data è equivalente alla:

Integrale primo del campo autonomo v := -2pt una funzione $\mathcal{F} : x \in D \mapsto \mathcal{F}(x) \in \mathbb{R}$ che sia in $C^1(D)$ e la quale, pur non essendo una funzione costante su D : $\mathcal{F}(D) = c$, sia però tale che ne rimane costante il valore $\mathcal{F}(\phi(t))$ assunto lungo ciascuna soluzione del sistema $\dot{x} = v(x)$.

Sussiste cioè il

Teorema di conservazione ogni curva di fase di un sistema $\dot{x} = v(x)$ che ammetta un integrale primo $\mathcal{F}$ necessariamente appartiene (in D) ad una e una sola superficie di livello della $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}(\mathcal{G}_0^t x_0) = \mathcal{F}(x_0) \quad \text{per ciascun } t \in J_M, \quad \text{ed ogni } x_0 \in D.$$

Corollario 3.2.1

$$(\mathcal{L}_v \mathcal{F})(x) \stackrel{x \in D}{\equiv} 0 \quad \text{se e solo se} \quad v(x) \in T_x \{\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}_0)\} \quad \forall x \in \mathbb{M} \cap \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}_0).$$

La seguente osservazione vuole chiarire la notazione.

Si supponga che $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ sia una qualsiasi funzione in $C^1(D)$ tale che per qualche $x_0 \in D \subset \mathbb{M}$ si abbia $f_* v(x_0) = 0$ con $\|f_*\| \|v(x_0)\| \neq 0$. Detta ϕ una delle curve per x_0 che individuano il vettore $v(x_0) := [\phi]_{x_0}$ certo si ha che $[f \circ \phi]_{f(x_0)} = 0$ e quindi che $[\phi]_{x_0} \in T_{x_0} f^{-1}(f_0)$. Tuttavia, ovviamente, ciò non implica $(f \circ \phi)(t) = \text{cost}$. In parole: un vettore ortogonale al gradiente una superficie in un certo suo punto è tangente la superficie senza necessariamente provenire da un moto che si svolga tutto sulla superficie stessa.

Si definisce

Sistema conservativo := un sistema $\dot{x} = v(x)$ che ammette almeno un integrale primo (pleonastici: globale, non banale, indipendente dal tempo).

N.B. 3.2.6 Si osservi che la condizione di esistenza di un integrale primo e la sua definizione sono date direttamente sulla varietà $\mathbb{M}$. Ciò è per rimarcare, in base al N.B. 3.2.2, che *se una funzione $\mathcal{F}$ è tale che $\mathcal{L}_v \mathcal{F} \equiv 0$, ciò sussiste in ogni sistema di coordinate*.

Si può infatti fare la seguente osservazione. Si supponga che, nel sistema di coordinate $h_{(x)}$, la relazione $\mathcal{F} \circ \phi = \mathcal{F}_0$ dia luogo all'identità $\mathcal{F}(\phi(t)) = \mathcal{F}(x_0)$, ove $t \mapsto x = \phi(t)$ è la soluzione in coordinate del sistema $\dot{x} = v(x)$, e si denoti con $\xi = \varphi^{-1}(x)$ una trasformazione di coordinate (differenziabile) per la quale il nuovo sistema di equazioni è $\dot{\xi} = \nu(\xi) := \partial \varphi^{-1} v(x) \big|_{x=\varphi(\xi)}$ di cui è soluzione la $t \mapsto \psi(t, t_0, \xi_0) = \varphi^{-1}(\phi(t, t_0, \varphi(\xi_0)))$. Allora è anche

$$\mathcal{F}(\varphi(\psi(t, t_0, \xi_0))) = \mathcal{F}(\varphi(\xi_0)) \quad \text{per ciascun arbitrario} \quad \xi_0 \in \varphi^{-1}(D).$$

In effetti, la funzione $\widetilde{\mathcal{F}} := \mathcal{F} \circ \varphi$ ha valore costante lungo ciascuna delle soluzioni dell'equazione $\dot{\xi} = \nu(\xi)$ giacché

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bigg|_{\substack{\psi(t)=\nu(\xi) \\ \psi(t)=\xi}} (\mathcal{F} \circ \varphi \circ \psi) &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \nu(\xi) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k} \left(\frac{\partial \xi^k}{\partial x^h} v^h(\varphi(\xi)) \right) \\ &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^h} v^h(x) \bigg|_{x=\varphi(\xi)} = \frac{d}{dt} \bigg|_{\substack{\dot{\varphi}(t)=v(x) \\ \phi(t)=x}} (\mathcal{F} \circ \phi) \bigg|_{x=\phi(\xi)} \end{aligned}$$

Sostanzialmente lo stesso calcolo conferma che se due sistemi sono diffeomorfi secondo un morfismo $\varphi^{-1} : x \in \mathbb{M} \rightarrow \xi \in \mathbb{L}$, e se uno di essi ammette un integrale primo $\mathcal{F}$, allora anche l'altro ammette l'integrale primo: $\widetilde{\mathcal{F}} := \mathcal{F} \circ \varphi$. $\diamond$

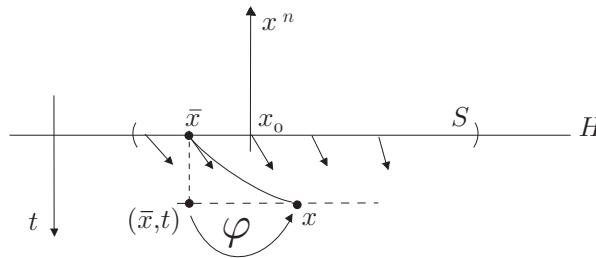
L'esistenza di una o più funzioni integrali non banali dipende naturalmente dalle proprietà globali in D del campo. Le curve di fase hanno in generale una struttura ben più complicata di quella delle linee di livello di una funzione C^1 su tutto D . Questo accade, per esempio, se tutte le traiettorie “entrano” in un punto o si avviano definitivamente verso un qualche sottoinsieme di traiettorie di D ; in tal caso la continuità di $\mathcal{F}$ impone che il valore che $\mathcal{F}$ assume sul punto, o sulle traiettorie in questione, sia lo stesso ovunque in D : se il flusso ammette qualche insieme che globalmente attrae tutte le traiettorie questo non può essere un sistema conservativo.

D'altra parte sussiste il:

Teorema 3.2.1 (rettificazione delle coordinate) ([Arnold 1], [Pontryagin])

Sia dato un sistema autonomo $\dot{x} = v(x)$ con campo v regolare su un insieme aperto D di una varietà n -dimensionale $\mathbb{M}$. Su ogni intorno $U \subset D$ sufficientemente piccolo e non contenente punti di equilibrio è sempre possibile definire $(n-1)$ integrali primi non banali e funzionalmente indipendenti; si parla in tal caso di integrali primi locali.

Dimostrazione Sia $x_0 \in U \subset D \subset \mathbb{M}$ con $v(x_0)$ non banale, e sia data una carta tale che, ad esempio, $v^n(x_0) \neq 0$. Chiamato H il piano $(n-1)$ -dimensionale $x^n = x_0^n$, esiste certamente un aperto $S \subset H \cap U$, e contenente x_0 , che è *trasverso* al campo, e cioè tale che $v(\bar{x}) \notin H$ per alcun $\bar{x} \in S$ (qui si è identificato H con il suo spazio tangente).



Detto $I \subseteq \mathbb{R}$ un intorno di t_0 contenuto nell'intervallo J_M di definizione della soluzione per x_0 , si consideri l'applicazione $\varphi : S \times I \rightarrow \mathbb{M}$ definita dalla $\varphi : (\bar{x}, t) \mapsto x$ con $x = \varphi(\bar{x}, t) := g^t \bar{x}$, o, in coordinate:

$$\begin{aligned} (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^{n-1}, t) &\xrightarrow{\varphi} x := (x^1(t, 0, \bar{x}), \dots, x^n(t, 0, \bar{x})) \\ \text{ove} \quad \bar{x} &:= (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^{n-1}; x_0^n). \end{aligned}$$

La φ è differenziabile se tale è v (cfr. Arnold 1). In particolare essa ha derivata in $(\bar{x}, 0)$ che è rappresentata, nella carta detta, dalla matrice

$$\partial\varphi(\bar{x}, 0) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n-1} & \vdots \\ \dots & \vdots & v(\bar{x}) \\ 0 & \vdots \end{pmatrix}$$

Infatti: indicata con h^i la i -ma funzione coordinata, $i = 1, \dots, n$, per $j = 1, \dots, n-1$ si ha

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} h^i(\mathcal{G}^t \bar{x}) \Big|_{(\bar{x}, 0)} = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} x^i \Big|_{(0, 0, \bar{x})} \right) = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^j} = \delta_j^i.$$

D'altra parte è chiaro che $\partial_t x \Big|_{(\bar{x}, 0)} = v(\bar{x})$.

N.B. 3.2.7 Nel caso non autonomo, detti D l'aperto di regolarità del campo $v(x, t)$ e $U_0 \times I \subset D$ un intorno di (x_0, t_0) , la corrispondente applicazione è $\varphi : \mathbb{M} \times \mathbb{R} \rightarrow D \subseteq \mathbb{M} \times \mathbb{R}$ definita su $U_0 \times I$ da $(\bar{x}, t) \mapsto (\mathcal{G}_{t_0}^t \bar{x}, t)$.

Quest'ultima ha derivata $\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e mostra come il caso autonomo "sopprima" una coordinata: $\bar{x}^n = x_0^n$ e la sostituisca con quella temporale usando in tal modo come spazio delle fasi ampliato quello delle fasi.

Si noti che in entrambi i casi l'applicazione φ non modifica il valore della ascissa t , cosa che fa, invece, l'applicazione $\tilde{\mathcal{G}}_{t_0}^t$ introdotta alla fine del paragrafo I.3: quest'ultima la si ottiene infatti come composizione, a t, t_0 fissati: di quella (banale) che trasforma in $(\bar{x}, t_0)$ il punto (x, t_0) tale che $x = \mathcal{G}_{t_0}^{t_0} \bar{x}$, di quella che lasciando $\bar{x}$ invariato fa evolvere t_0 fino a t , e di questa, infine, che porta $(\bar{x}, t)$ in (x, t) essendo $x = \mathcal{G}_{t_0}^t \bar{x}$.

L'autonomia del sistema fa solo sì che, fissando $\bar{x}$ su un certo insieme trasversale al campo, la t stessa possa essere usata come variabile di stato, e quindi che la mappa φ sia definita nello spazio delle fasi non ampliato: $(\bar{x}, t) \mapsto x$. $\diamond$

Dato che la matrice $\partial\varphi$ trasforma linearmente $e_n := (0, \dots, 0, 1)$ in $v(\bar{x})$, l'operatore $\varphi_* \Big|_{(\bar{x}, 0)}$ del quale la matrice $\partial\varphi$ è la rappresentazione in coordinate trasforma linearmente e_n in $v(\bar{x})$. Inoltre esso è l'identità su $H \equiv T_{\bar{x}} S$, $S \ni \bar{x}$, che è un sottospazio $(n-1)$ -dimensionale di $\mathbb{V} := T_{\bar{x}} \mathbb{M}$ trasverso sia allo $span(e_n)$ che allo $span(v(\bar{x}))$. Ne segue che $\varphi_*(\bar{x}, 0)$ trasforma i sottospazi trasversi $(H, span(e_n))$ nei sottospazi trasversi $(H, span(v(\bar{x})))$. Essendo un operatore lineare con Jacobiano $J = |v^n(\bar{x})| \neq 0$, essa è allora un isomorfismo da $\mathbb{V}$ in sé. In particolare ciò è valido nel punto $(x_0, 0)$. Il teorema del Dini assicura allora che la mappa φ , di cui esso è la derivata, è un diffeomorfismo da $S \times I$ a tutto un intorno $V \subset U \subset \mathbb{M}$ contenente $\mathcal{G}^t x_0$, e ciò comporta che *le curve di fase che passano per i punti di S risultano iniettive su V* e cioè hanno solo la base $\bar{x}$ in comune con S e non hanno punti uniti. Di conseguenza risulta definito, inversamente, a partire da un qualunque $x \in V$ e in modo univoco, il punto

$$\bar{x} \in S = V \cap H \quad \text{tale che} \quad \bar{x} = \bar{x}(x) := \mathcal{G}^{-t(x)} x,$$

ove $t = t(x)$ è il punto in I tale che $x = \mathcal{G}^{t(x)} \bar{x}$. Restano in tal modo definite le funzioni $\xi^i : V \rightarrow \mathbb{R}$ date da

$$\xi = \varphi^{-1} \circ x \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \xi^1(x) := h^1 \circ \bar{x}(x) = \bar{x}^1(x), \\ \dots \\ \xi^{n-1}(x) := h^{n-1} \circ \bar{x}(x) = \bar{x}^{n-1}(x), \\ \xi^n(x) := t(x). \end{cases}$$

Per come sono state costruite, queste funzioni sono un sistema di coordinate su V dette: Coordinate adattate al flusso. Le prime $(n-1)$ coincidono con le coordinate nello spazio H del punto $\bar{x}$, unico punto che nell'aperto S trasversale al campo corrisponde al punto x , e l'ultima rimane ovviamente $t = t(x^1, \dots, x^n)$.

Le coordinate $(\xi^1, \dots, \xi^n) := (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^{n-1}, t)$ hanno la importante e particolare caratteristica di evolvere in modo banalmente semplice: rispetto ad esse il flusso è rettilineo. Infatti l'iniziale sistema $\dot{x} = v(x)$ resta trasformato dal cambio di coordinate $x \mapsto \xi = \varphi^{-1}(x)$ nell'equivalente sistema

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \nu(\xi) \quad \text{con} \quad \nu(\xi) = \partial\varphi^{-1} v \Big|_{x=\varphi(\xi)} = e_n(\xi) \quad \text{e cioè} \\ \dot{\xi}^1 &= 0, \quad \dots, \quad \dot{\xi}^{n-1} = 0, \quad \dot{\xi}^n = 1. \end{aligned}$$

Si osservi che per conoscere esplicitamente le funzioni $\xi^i = \xi^i(x)$, $i = 1, \dots, n$, e cioè la trasformazione φ , occorre conoscere il moto: le funzioni ξ^i per $i \leq (n-1)$ sono quelle che assegnano le $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x)$ e vanno trovate invertendo il sistema $x^j = x^j(t, \bar{x})$, $j = 1, \dots, n$, rispetto a $(t, \bar{x}^1, \dots, \bar{x}^{n-1})$ a fissato $\bar{x}^n = x_0^n$.

Le funzioni $\xi^i = \xi^i(x)$ con $i \leq (n-1)$ sono un esempio di Integrali primi locali, funzionalmente indipendenti per costruzione, ma dallo scarso uso pratico a causa di quest'ultima osservazione.

N.B. 3.2.8 (continuazione del 3.2.6).

Naturalmente, una qualunque funzione $\tilde{\mathcal{F}} \in C^1(V)$ delle $(\xi^1, \dots, \xi^{n-1})$, e cioè indipendente dalla ξ^n , fornisce un altro integrale primo locale. Infatti una tale funzione ha valore costante lungo le soluzioni dell'equazione trasformata, che sono: $\xi^j = \text{cost}$, per $j = 1, \dots, n-1$, ed $\xi^n = t$; quindi la sua rappresentante in coordinate: $F := \tilde{F} \circ \varphi^{-1}$ è integrale primo del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$.

Ragionando nel secondo dei modi visti, e cioè introducendo un diffeomorfismo $x \mapsto \xi = \varphi^{-1}(x)$, si nota che per il sistema trasformato la condizione $\mathcal{L}_v \mathcal{F} = 0$ equivale alla $\mathcal{L}_{e_n}(\mathcal{F} \circ \varphi) = \partial \tilde{F} / \partial \xi^n = 0$, dove $\tilde{F} := F \circ \varphi$ rappresenta la $\mathcal{F} \circ \varphi$ nelle coordinate ξ .

In definitiva, il valore di ogni integrale primo $\mathcal{F}$ si mantiene costante sulla intersezione $\{\xi^1 = \text{cost}\} \cap \dots \cap \{\xi^{n-1} = \text{cost}\}$ delle $n-1$ sottovarietà $\{\xi^i = \text{cost}\}$ adattate al flusso. Tali intersezioni sono le linee $\xi^n = \xi^n(\xi_0^1, \dots, \xi_0^{n-1}, t)$ con tangente nel punto zero il vettore con componenti $v^i(0) = 0$, $i = 1, \dots, n-1$. $\diamond$

La conoscenza di $(n-1)$ integrali primi funzionalmente indipendenti permette di ricondurre alle quadrature la determinazione delle curve integrali del campo. Se infatti si conoscono $n-1$ funzioni $\mathcal{F}^j$ tali che $\mathcal{F}^j(x) = c^j$, $j = 1, \dots, n-1$, si possono ricavare, almeno in linea di principio, ad esempio le prime $n-1$ coordinate in funzione dei parametri $\{c^j\}_{j=1, \dots, n-1}$ e dell'ultima coordinata x^n , e cioè definire n funzioni

$$x^i = \psi^i(x^n; c^1, \dots, c^{n-1}), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad \psi^n = \mathbb{I}_1$$

mediante le quali il sistema dato: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ diviene

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\psi(x^n; c^1, \dots, c^{n-1})) =: \mathbf{w}(x^n).$$

La n -esima di queste equazioni è disaccoppiata dalle precedenti ed è quindi risolubile per quadrature mediante separazione di variabili. Di qui seguono tutte le altre per integrazione semplice. Naturalmente anche la conoscenza di $k < n-1$ integrali primi è d'aiuto: si ottiene infatti un sistema ad un ridotto numero di dimensioni: $n-k$.

Nel caso di campi non autonomi può anche venire introdotta la nozione di *integrali primi dipendenti dal tempo*, che sono poi gli integrali primi del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = v(t, x) \\ \dot{t} = 1, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{M} \times \mathbb{R}$$

e cioè (si veda [Hartman V.12]) funzioni $\mathcal{F} = \mathcal{F}(t, x)$ soluzioni dell'equazione

$$v \cdot \nabla_x \mathcal{F} + \partial_t \mathcal{F} = 0.$$

Localmente ne esistono sempre n indipendenti fra loro. Come accennato nel N.B.3.2.7 ne sono un esempio le funzioni $x_0 = x_0(t, x)$. In tal senso, la ricerca della più generale soluzione dell'equazione $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \nabla \mathcal{F} + \partial_t \mathcal{F} = 0$ “equivale” alla risoluzione della $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = 0$.

Nota 3.2.1 Si osservi che le due precedenti considerazioni implicano che per risolvere almeno in forma implicita il caso non autonomo a dimensione $n = 1$:

$$\frac{dx}{dy} = u(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

basta trovare una funzione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ che si continuerà ad indicare con $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x, y)$ tale che

$$u(x, y) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}(x, y) = 0. \quad (2.7)$$

D'altra parte, con la notazione $u(x, y) =: -\nu(x, y)/\mu(x, y)$, si riconoscerà nella (2.7) la richiesta che sia: $\partial_y \mathcal{F} = (\nu/\mu) \partial_x \mathcal{F} =: \nu \varpi$, e cioè che sussistano

$$\mu(x, y) \varpi(x, y) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}(x, y) \quad \text{e} \quad \nu(x, y) \varpi(x, y) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}(x, y),$$

che come si è visto nel §I.4 è la condizione affinché la forma

$$\varpi \mu \, dx + \varpi \nu \, dy, \quad \text{o anche} \quad \frac{\mu}{\nu} \, dx + dy$$

sia esatta ed ammetta come funzione invariante proprio la $\mathcal{F}$. L'esistenza locale di quest'ultima equivale all'esistenza locale del fattore integrante ϖ e risolve l'equazione in forma implicita assegnando le curve cui devono appartenere le traiettorie di fase di *un possibile* sistema associato, ad esempio:

$$\begin{cases} \dot{x} = v^x(x, y) \\ \dot{y} = v^y(x, y) \end{cases} \quad \text{con} \quad \frac{v^x(x, y)}{v^y(x, y)} := u(x, y) = -\frac{\nu(x, y)}{\mu(x, y)},$$

per il quale la funzione $\mathcal{F}$ è integrale primo locale e indipendente dal tempo.

Si è già detto però che non esistono metodi generali per trovare il fattore integrante così come non ne esistono per trovare gli integrali primi. $\triangleright$

Esempio 3.2.10
$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = y, \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{R};$$

segue $xdy = ydx$ che non ammette integrali primi globali, malgrado localmente equivalga a $d(x/y) = 0$; le traiettorie infatti sono i raggi per l'origine. $\square$

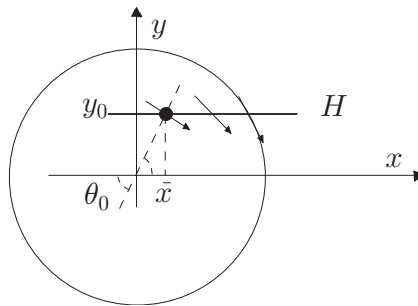
Esempio 3.2.11 Sistemi conservativi di enorme importanza sono i Sistemi Hamiltoniani autonomi, e cioè quelli con $\partial \mathcal{H} / \partial t \equiv 0$:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}}; \quad \text{con} \quad \mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n;$$

un loro integrale primo è certo la funzione $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. $\square$

Esempio 3.2.12 L'oscillatore armonico scalare:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad t_0, x_0, y_0 \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$



Come coordinata h^n si scelga la: $y := \dot{x}$, e lo spazio H sia il piano $y = y_0$. Si ottengono allora (per $\bar{x} \neq 0$)

$$\begin{cases} x = +\bar{x} \cos t + y_0 \sin t \\ y = -\bar{x} \sin t + y_0 \cos t \end{cases} \implies \begin{cases} \cos t = (\bar{x}^2 + y_0^2)^{-1} (+x\bar{x} + yy_0) \\ \sin t = (\bar{x}^2 + y_0^2)^{-1} (-\bar{x}y + xy_0) \end{cases}$$

che (localmente) forniscono

$$\begin{cases} y^1(x) \equiv \bar{x}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - y_0^2} \\ y^2(x) \equiv t(x, y) = \left[\arctan \frac{-\bar{x}y + xy_0}{+x\bar{x} + yy_0} \right]_{\bar{x} = \sqrt{x^2 + y^2 - y_0^2}} \end{cases} \quad (2.9)$$

Si osservi che ad esempio la $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, se intesa come funzione di $\bar{x}$: $r = \sqrt{\bar{x}^2 + y_0^2}$, è anch'essa un integrale primo locale, e che $t = t(x, y)$ è il tempo che, sulla circonferenza passante per $(\bar{x}, y_0)$, è necessario per passare dal punto $(\bar{x}, y_0)$ al punto (x, y) ; infatti, dividendo la seconda delle (2.9) per $\bar{x}x$, si riconosce subito che essa fornisce

$$t = t(x, y) = (\theta_0 - \theta), \quad \text{ove} \quad \begin{cases} \theta_0(x, y) := \arctan \left(\frac{y_0}{\bar{x}} \right), \\ \theta(x, y) := \arctan \left(\frac{y}{x} \right). \end{cases}$$

L'equazione associata all'oscillatore armonico è

$$x' = -y/x \quad \text{ovvero} \quad \frac{d}{dy} (x^2 + y^2) = 0 ,$$

la cui soluzione è

$$y \mapsto x(y) = \sqrt{\bar{x}^2 + y_0^2 - y^2} =: x(y; \bar{x}, y_0) .$$

D'altra parte, ponendo fin dall'inizio

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta_0 - t) \\ y = r \sin(\theta_0 - t) \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} r := \sqrt{\bar{x}^2 + y_0^2} \\ \theta_0 = \arccos \frac{\bar{x}}{r} \cap \arcsin \frac{y_0}{r} \end{cases}$$

si ritrova la relazione già indicata

$$t = \theta_0 - \arcsin \frac{y}{\sqrt{\bar{x}^2 + y_0^2}} = \theta_0 - \theta .$$

Quest'ultima mostra inoltre che la $t = t(x, y)$ si riduce alla $t = \beta_{(x_0)}(y)$ del precedente paragrafo quando si calcoli $t = t(x(y; x_0, y_0), y)$. Infatti lì si considerava la (sola) traiettoria per (l'unico fissato) punto (x_0, y_0) , di equazione $x = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - y^2}$.

Si noti infine che tutto quanto si è detto vale localmente dove le inversioni sono lecite. $\square$

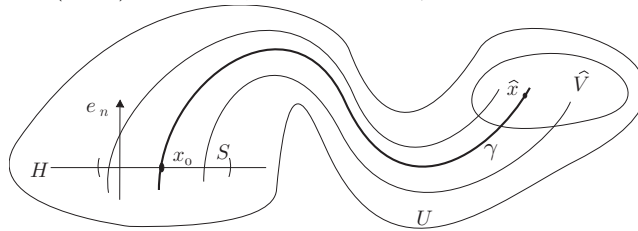
Anche per punti x distanti da H , la funzione $t(x)$ introdotta nel Teorema 1 è una funzione continua fintanto che il flusso è continuo, e in particolare finché non ci sono equilibri; sussiste infatti il seguente

Teorema 3.2.1 ((di primo ritorno)) *Sia dato un sistema autonomo $\dot{x} = v(x)$ con campo v regolare su un insieme aperto D di una varietà n -dimensionale $\mathbb{M}$. Per $x_0 \in D$ e, ad esempio, con $\hat{t} > 0$, sia $t \mapsto \phi(-t, 0, \hat{x})$ la soluzione del sistema tale che $\phi(-\hat{t}, 0, \hat{x}) = \mathcal{G}^{-\hat{t}}\hat{x} = x_0$, e si indichi con γ l'arco di traiettoria $\{\phi(-t, 0, \hat{x})\}_{t \in [0, \hat{t}]}$ che unisce x_0 con $\hat{x}$.*

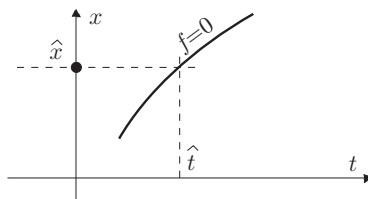
Se esiste un intorno aperto $U \subseteq D$ di γ che non contiene equilibri, esistono: una sezione $S \subset U$, $S \ni x_0$, di dimensione $n-1$ e trasversa a $v(x_0)$, un intorno $\hat{V}$ di $\hat{x}$ contenuto in U , e una funzione $t : \hat{V} \rightarrow \mathbb{R}$ regolare quanto v , tali che $t(\hat{x}) = \hat{t}$ e $\mathcal{G}^{-t(x)}x \in S$ per ogni $x \in \hat{V}$.

Dimostrazione Sia $h : U \rightarrow \mathbb{R}$, $h \in C^1(D)$, tale che $h_*v(x_0) \neq 0$ e cioè tale che il campo sia trasverso al piano $T_{x_0}(h^{-1}(cost))$. Nel caso del teorema appena visto si ha $h \equiv h^n$.

Si ricordi che, per definizione di piano tangente, $h_*[\phi]_x = 0$ con $h_*|_x \neq 0$ se e solo se $[\phi]_x \in T_x\{h^{-1}(cost)\}$. Per cui, quando $h_*v(x_0) \neq 0$, si ha che $H := h^{-1}(cost)$ è (localmente) trasverso a v in $x_0 \in H$, ed equivale a dire che H non è tangente alle superfici equipotenziali di alcun integrale primo (locale) del sistema, o anche che $h \circ \phi$ non è stazionario in x_0 .



La funzione $f : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}$ data da $(t, x) \mapsto f(t, x) := h \circ \mathcal{G}^{-t}x - h(x_0)$ è in $C^1(N(\hat{t}) \times U)$, è tale che $f(\hat{t}, \hat{x}) = 0$, e che $-\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\hat{t}, \hat{x}} = h_*|_{x_0} \dot{\phi}(-\hat{t}) = h_*v(x_0) \neq 0$. Pertanto si può applicare il teorema del Dini, per il quale esiste un intorno $\hat{V} \subset \mathbb{R}^n$, $\hat{V} \ni \hat{x}$, sul quale è definita la funzione $t : \hat{V} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $t \in C^1(\hat{V})$, $t(\hat{x}) = \hat{t}$, ed $f(t(x), x) = 0$ per ogni $x \in \hat{V}$.



Per ogni $x \in \widehat{V}$ si ricava allora $\bar{x} := \mathcal{G}^{-t(x)}x \in H \subset \mathbb{R}^{n-1}$, e qualora $\widehat{V}$ sia abbastanza piccolo addirittura $\mathcal{G}^{-t(x)}x \in S$. Esiste cioè un cilindro di traiettorie con “asse” $\gamma := \{\mathcal{G}^{-t}\widehat{x}\}_{t \in [0, \hat{t}]}$ e “base” contenuta in H , lungo il quale individuare i punti mediante: il punto base $\bar{x} := \mathcal{G}^{-t(x)}x \in H$ e l’ascissa $t = t(x) \in N(\hat{t}) \subset \mathbb{R}$. ■

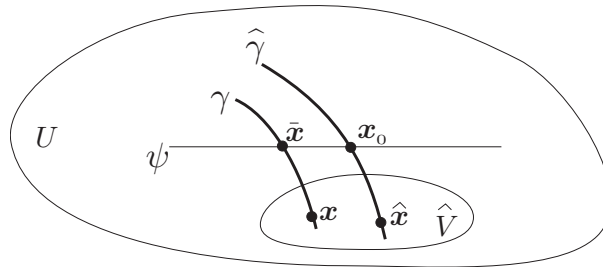
3.3 Il Teorema di Poincaré - Bendixon

La teoria di Poincaré - Bendixon si applica unicamente a sistemi autonomi in dimensione due. Per tali sistemi non solo sussistono tutte le proprietà già valide in $\mathbb{R}^n$, ed anzi molte di queste risultano di assai più facile interpretazione, ma in più essi si giovano di speciali proprietà geometriche valide solo in spazi bidimensionali.

Anche per introdurre la notazione, è opportuno iniziare con l’adattamento al caso $\dim = 2$ del precedente Teorema 1 e, per maggiore semplicità, se ne tratterà direttamente la rappresentazione in coordinate (peraltro arbitrarie).

Proposizione 3.3.1 *Siano D un aperto di $\mathbb{R}^2$, v un campo regolare su D , e $\widehat{\gamma} := \{\phi(-t, 0, \widehat{x})\}_{-t \in I \subset J_M}$ un arco di traiettoria del sistema $\dot{x} = v(x)$. Sia $x = \psi(u)$, con $x \in D$ e $u \in \mathbb{R}$, l’espressione parametrica di una curva ψ regolare su un aperto $U \subseteq D$, e cioè tale che su U risulti $\|D\psi\| \neq 0$. Se $\widehat{\gamma}$ e ψ si intersecano in $x_0 = \phi(-\hat{t}, 0, \widehat{x}) = \psi(u_0)$ e sono ivi trasverse (per cui $v(x_0)$ e $\psi'(u_0)$ sono non paralleli), e se U non contiene equilibri allora: esiste un intorno $\widehat{V}$ di $\widehat{x}$ contenuto in U e due funzioni regolari $t, u : \widehat{V} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che: $t(\widehat{x}) = \hat{t}$, $u(\widehat{x}) = u_0$, e che su $\widehat{V}$ si abbia $\phi(-t(x), 0, x) = \psi(u(x)) = \bar{x}$.*

Si osservi che lo scalare u corrisponde alla n -pla $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^{n-1})$ del teorema 1, nel quale si era posto $\bar{x} := \mathcal{G}^{-t(x)}x$.



Dimostrazione Per $x = \widehat{x}$ l’asserto è vero per ipotesi. Successivamente si osserva che il sistema $\phi(-t, 0, x) - \psi(u) = 0$ ha determinante Jacobiano di rango due in $(\hat{t}, u_0, \widehat{x})$, infatti è

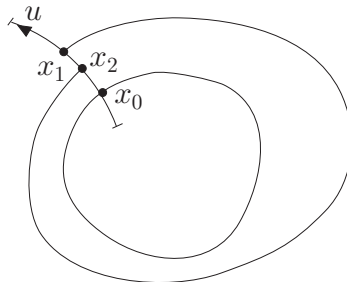
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \phi^1}{\partial t} & -\frac{d\psi^1}{du} \\ \frac{\partial \phi^2}{\partial t} & -\frac{d\psi^2}{du} \end{vmatrix} = |v(x_0) \wedge \psi'(u_0)|.$$

Ne segue che se x è sufficientemente prossimo ad $\widehat{x}$ allora la $\gamma := \{\phi(t, 0, x)\}_{t \in I}$ e la ψ si intersecano necessariamente in $\bar{x}$ prossimo ad x_0 , e le t, u possono essere espresse in funzione del punto x . Inoltre $|t(x) - \hat{t}|$ ed $|u(x) - u_0|$ sono piccoli per $|x - \widehat{x}|$ piccolo, anzi le funzioni t e u sono regolari quanto lo sono le ϕ e ψ .

Nell’Esempio 3.1.18 la ψ è la curva $y = y_0$ sulla quale si è scelto il parametro $u = \bar{x}^1 = x$. ■

Sempre limitandosi a sistemi bidimensionali, si deve esaminare il caso, assai importante anche se particolare, in cui la curva ψ è un segmento (chiuso) e trasverso ad un’orbita γ chiusa percorsa con periodo $T : \phi(t + T) = \phi(t)$, $\forall t \in [0, T]$.

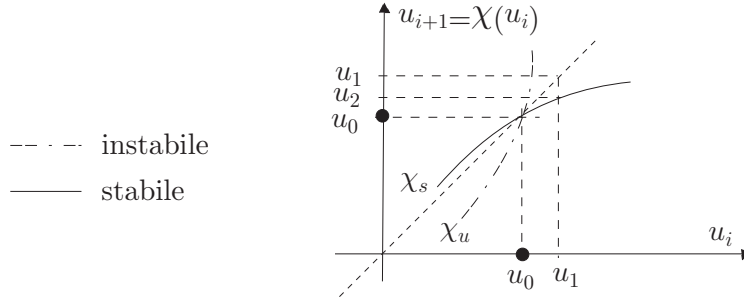
Siccome l’orbita γ interseca in x_0 la sezione ψ negli istanti $t = 0$ e $t = T$, dato $x_1 \in \psi$ sufficientemente vicino a x_0 si avrà che l’orbita uscente da x_1 nell’istante $t_1 = 0$ dovrà intersecare il segmento ψ anche in $t_2 \sim T$ e non in altri istanti intermedi; in più, essa lo dovrà fare in un punto x_2 prossimo ad x_0 data la continuità delle due curve.



Inoltre $u = u(x_2)$, e cioè la coordinata di x_2 lungo ψ , è funzione continua (per il teorema di dipendenza continua) e monotona (per il teorema di unicità e giacché la dimensione dello spazio è due) di $u(x_1)$. In tal modo, dalla $x_2 = \mathcal{G}^{t_2} x_1$ con $t_2 = t(x_1) \sim T$, si ricava $u_2 = \chi(u_1)$ con χ continua, monotona, e tale che $u_0 = \chi(u_0)$. Si definisce:

Ciclo isolato := un'orbita *chiusa* e tale che, detta u_0 la sua intersezione con una qualsiasi sezione ad essa trasversa, si abbia che in un intorno di u_0 l'unica soluzione della $\chi(u) = u$ è u_0 stessa.

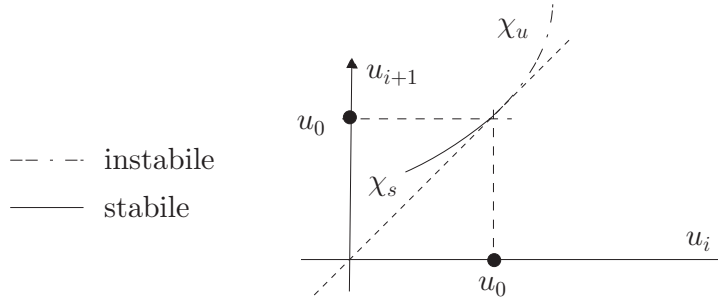
Si supponga che il ciclo in esame sia isolato. Su ciascuno dei due lati di x_0 , localmente lungo ψ , è possibile una sola delle: $\chi(u) < u$ oppure $\chi(u) > u$.



Sul lato di ψ esterno al ciclo sia ad esempio il primo caso, e sia ψ orientata in maniera tale che le $u > u_0$ individuino punti $x \in \psi$ esterni al ciclo. La successione delle u_k definite da $\phi(t_k, x(u_{k-1})) = x_k = \psi(\chi(u_{k-1}))$ è monotona decrescente e inferiormente limitata da u_0 ; e dato che $u_{i+1} = \chi(u_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} u^* = \chi(u^*)$ (necessariamente esistente), per l'unicità locale di u_0 si ha che $u^* \equiv u_0$; inoltre ciò accade qualunque sia $x_1 \in \psi^{(+)} := \{x \in \psi \mid u(x) > u_0\}$ e cioè x_1 esterno al ciclo ma convenientemente vicino ad esso. Pertanto, (cambiando t in $-t$ nell'altro caso: $\chi(u) > u$ e ripetendo il discorso nella parte interna al ciclo e cioè sull'arco $\psi^{(-)} := \{x \in \psi \mid u(x) < u_0\}$) si è provato che:

Per sistemi autonomi a dimensione due ogni orbita chiusa isolata è anche un ciclo limite; inoltre le traiettorie vicine ad esso "spiralizzano" infinite volte.

L'essere γ un ciclo limite, in $\dim=2$ lo si può allora anche controllare mostrando che esiste $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+$ tale che, per ogni x che abbia $\text{dist}(x, \gamma) < \varepsilon_0$ si ha che $\phi(t, x)$ è non periodica.



Ragionamenti qualitativi dello stesso genere di quello appena visto permettono, sempre in dimensione due, di riconoscere la presenza di cicli, come verrà mostrato nel teorema di Poincaré-Bendixon.

Si premettano, innanzi tutto, le seguenti definizioni valide anche a dimensioni superiori.

Punto ω -limite per una traiettoria $\gamma := \{\phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$:= un punto $p \in \mathbb{M}$ per il quale esiste una successione di istanti $\{t_0 = 0, t_1, t_2, \dots\}$ tali che:

$$t_i < t_{i+1}, \quad t_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty, \quad \text{e} \quad \phi(t_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} p.$$

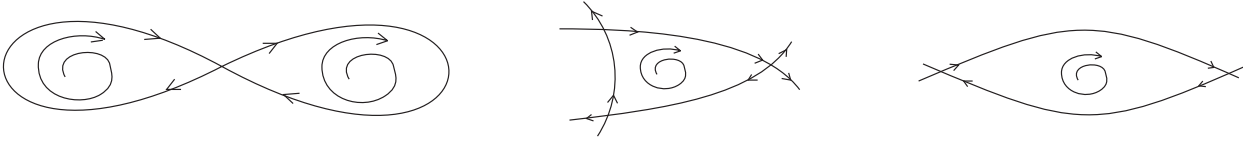
Insieme ω -limite per una traiettoria γ := la totalità dei punti ω -limite per la traiettoria stessa.

N.B. 3.3.1 Se la traiettoria viene indicata con un suo punto x , ad esempio il punto iniziale, si parla di punto ω -limite per x ; l'insieme ω -limite si indica con $\omega(x)$. $\diamond$

N.B. 3.3.2 Non è difficile rendersi conto che la definizione data per l'insieme ω -limite equivale alla $\omega(x) := \bigcap_{\tau \geq 0} [\bigcup_{t \geq \tau} \phi(t, 0, x)]$, ed è quindi l'intersezione totale della chiusura delle code, nel futuro, delle traiettorie. $\diamond$

Quando queste proprietà risultano valide per $t' := -t$ in luogo di $\omega(x)$ si parla di α -limite: $\alpha(x)$. Analoghe evidenti sostituzioni vanno anche fatte, in questo caso, nelle definizioni qui seguenti.

N.B. 3.3.3 Un insieme limite, che sia $\mathcal{O}$ ovvero ω o entrambi (a seconda dei punti x), non è necessariamente costituito da una sola orbita, come si vede dalle seguenti figure:



◇

N.B. 3.3.4 La definizione data alla fine del §2 per un ciclo limite è consistente con il fatto che esso sia un insieme limite. ◇

Insieme positivamente invariante rispetto ad un flusso g := un sottoinsieme

$K \subset \mathbb{M}$ tale che la semiorbita $\gamma^+ := \{g^t x\}_{t \geq 0}$ uscente da un *qualsiasi* punto $x \in K$ è definita per ogni $t \geq 0$ e appartiene all'insieme K .

La definizione di negativa invarianza è analoga.

Insieme invariante rispetto ad un flusso g := un sottoinsieme $I \subset \mathbb{M}$ che è sia positivamente sia negativamente invariante.

Si noti che se il sistema $\dot{x} = v(x)$ che individua il flusso è autonomo, e se $t \mapsto \phi(t, t_0, x_0) \equiv g_{t_0}^t x_0$ è definita per ogni $t \geq t_0$, allora la stessa semiorbita γ^+ è un insieme positivamente invariante, infatti per ogni $y_0 := \phi(t_0 + c, t_0, x_0) \in \gamma^+$ la funzione $t \mapsto \psi(t, t_0, y_0) := \phi(t + c, t_0, x_0)$ è soluzione ed è definita per ogni $t \geq t_0$.

N.B. 3.3.5 Se K è limitato e interno al dominio di definizione del campo, l'essere K positivamente invariante equivale alla condizione: $g_{t_0}^t K \subseteq K$ per ogni $t \geq t_0$. ◇

Insieme attrattivo A_d := un insieme chiuso, invariante, che può essere decomponibile, tale da ammettere un intorno positivamente invariante e del quale contenere l'insieme ω -limite. Esiste cioè un qualche intorno $U \supset A_d$ per il quale: preso comunque $x \in U$ si ha che $\phi(t, 0, x) \in U$ per un qualsiasi $t > 0$, e $\omega(x) \subset A_d$.

Qui con decomponibile si intende che non è necessariamente “non decomponibile”, proprietà questa che si richiede invece agli attrattori, (si veda: Cap. V).

Bacino di attrazione di un insieme attrattivo A_d := l'insieme BA dato da $BA := \cup_{t \leq 0} \phi(t, U)$ ove U è uno qualunque degli interni definiti qui sopra. L'insieme BA è l'unione al variare di $x \in A_d$ dei punti $\hat{x} \in \mathbb{M}$ che hanno $x \in \omega(\hat{x})$.

N.B. 3.3.6 Un bacino di attrazione BA è senz'altro un insieme aperto e invariante. Infatti, per ogni $x \in U$, esiste tutto un intorno $N(x)$ positivamente invariante, per cui dato $y \in N(x)$ si ha non solo che $g^\tau y \in N(x)$ per ogni $\tau \in \mathbb{R}^+$ ma anche, per costruzione, che $\cup_{t \leq 0} g^t y \in BA$ e pertanto $g^{-\tau}(N(x))$ è un aperto contenuto nel bacino. In definitiva, il bacino di attrazione di un A_d coincide con il più grande insieme invariante i punti del quale hanno insiemi ω -limite in A_d . ◇

Corollario 3.3.1 Se lo spazio è connesso esso stesso non può essere unione di due o più bacini di attrazione; inoltre devono esistere soluzioni (sulle frontiere di ciascun bacino) che non sono convergenti verso i punti che attraggono il bacino.

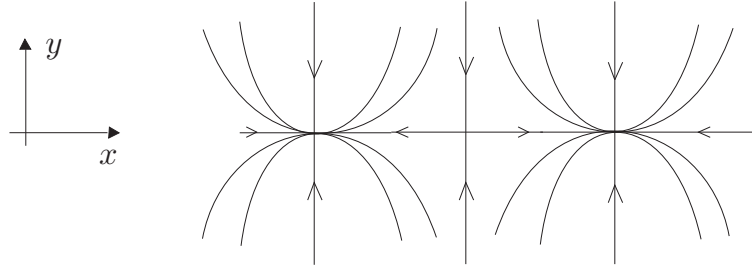
Esempio 3.3.7 (si veda: [Guckenheimer])

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Ne segue

$$\frac{y}{y_0} = e^{-(t-t_0)} = \left(\frac{x_0^2(1-x^2)}{x^2(1-x_0^2)} \right)^{1/2}$$

e si vede che il segmento $[-1, 1] \times \{0\}$ è fatto quasi tutto da punti erratici, è decomponibile nei tre insiemi $[-1, 0) \times \{0\}$, $(0, 0)$, $(0, 1] \times \{0\}$, è attrattivo, e contiene due attrattori: i punti $(\pm 1, 0)$ (si veda oltre per queste definizioni).



□

N.B. 3.3.8 La considerazione fatta a proposito dei valori degli integrali primi si può ora dare in forma generale: un sistema conservativo in dimensione due non può ammettere cicli limite, né insiemi limite, né insiemi attrattivi. ◇

N.B. 3.3.9 I risultati visti per i sistemi bidimensionali si possono rinunciare: un ciclo limite di un sistema bidimensionale è un'orbita chiusa che appartenga, (e quindi coincide, come si vedrà), all'insieme ω -limite o all'insieme α -limite di un qualche punto x esterno al ciclo. Si noti che un ciclo limite può non essere né attrattivo né repulsivo. ◇

Il teorema del prolungamento sui compatti implica poi (si veda: [Hale § I.8]) che per sistemi autonomi di dimensione qualunque $n \geq 1$ sussiste la

Proposizione 3.3.1 Se una semi-traiettoria $\gamma^+ := \{\phi(t, 0, x_0)\}_{t \geq 0}$ di un sistema autonomo appartiene ad un compatto $K \subseteq \mathbb{M}$ per ogni $t > 0$ allora il suo insieme $\omega(x)$, $x \in \gamma^+$, è non vuoto, chiuso, limitato, connesso. Esso, inoltre, contiene intiere le traiettorie uscenti dai suoi punti, ovvero: $\omega(x)$ è un sottoinsieme invariante di K .

Dimostrazione

(•) $\omega(x)$ è chiuso. Infatti: se $\omega(x) \ni \{p_k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \tilde{p}$ esiste una sottosuccessione $\tilde{t}_{k_i} : \phi(\tilde{t}_{k_i}) \xrightarrow{i} \tilde{p}$ e quindi $\tilde{p} \in \omega(x)$. Inoltre, siccome γ^+ appartiene a K che è compatto, si ha che $\tilde{p} \in K$, e che $\omega(x) \subset K$ è limitato.

(•) $\omega(x)$ è connesso. Altrimenti potrebbero esistere due aperti disgiunti U_1 e U_2 tali che $\omega(x) \subset U_1 \cup U_2$, e almeno una successione $\{\phi(t_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ necessariamente contenuta nell'insieme $K \setminus (U_1 \cup U_2)$. Ma questo è compatto e non contiene punti di $\omega(x)$, in contraddizione con l'esistenza di almeno una sottosuccessione $\{\phi(t_{k_i})\}_{i \in \mathbb{N}}$ convergente.

(•) $\omega(x)$ verifica la seguente proprietà. Se $p \in \omega(x)$ allora $\mathcal{G}^t p \in \omega(x)$, $\forall t \in \mathbb{R}$; e cioè: l'intera orbita $\gamma_p := \{\phi(t, 0, p)\}_{t \in \mathbb{R}}$ è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$, e appartiene ad $\omega(x)$. Infatti: se p appartiene ad $\omega(x)$ è anche, necessariamente, $p = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(t_k, 0, x)$. Ma allora, come si è visto, $\phi(t + c)$ è definito per $c > 0$ comunque grande, e appartiene a γ_p . Segue che $\mathcal{G}^{\bar{t}} \phi(t_k)$ è definito per qualunque $\bar{t} > 0$ e quindi, detti $\tilde{x}_k := \mathcal{G}^{\bar{t}} \phi(t_k)$, per il teorema di dipendenza continua si ha che: $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{x}_k = \mathcal{G}^{\bar{t}} p$. Ciò significa che $\phi(t, 0, p)$ esiste per ogni $t > 0$ ed è $\mathcal{G}^t p \in \omega(x)$ per $t > 0$.

D'altra parte, dato $\bar{t} \in [-t_k, 0]$, con $k = 1, 2, \dots$, è anche definito (si veda § III.1) l'evoluto $\mathcal{G}^{\bar{t}} \phi(t_k) = \phi(\bar{t} + t_k)$. Anche per ogni $t < 0$ si ha allora che $\phi(t, 0, p)$ esiste ed è in $\omega(x)$. ■

Con queste premesse si può finalmente enunciare il seguente celebrato teorema valido, *si noti bene*, per sistemi bidimensionali autonomi e almeno Lipschitz: (si veda: [Michel 7.2], o anche [Hartman], [Pontryagin], [Coddington])

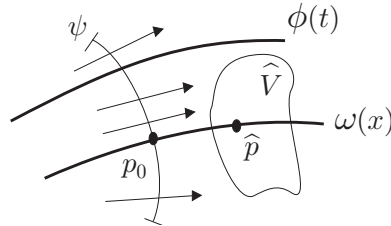
Teorema 3.3.1 ((Poincaré-Bendixon)) Sia D un aperto di una varietà $\mathbb{M}$ bidimensionale; sia v un campo regolare su D , e sia $t \mapsto \phi(t, 0, x)$ la soluzione del sistema $\dot{x} = v(x)$ uscente da $x \in D$.

Se la semiorbita $\gamma^+ := \{\phi(t, 0, x)\}_{t \geq 0}$ è contenuta in un compatto $K \subset \mathbb{M}$ allora il suo insieme ω -limite: $\omega(x)$ o contiene almeno un punto di equilibrio oppure è una (sola) orbita chiusa: γ_0 .

Un enunciato alternativo è ([Hirsh § XI.4]):

Un insieme ω -limite compatto non vuoto di un sistema piano e C^1 , che non contenga equilibri, è un'orbita chiusa γ_0 . Tale orbita chiusa è un ciclo limite per γ^+ , oppure coincide con γ^+ stessa.

Dimostrazione Per la Proposizione che segue, basta notare che se $\omega(x)$ non contiene equilibri, e se $\gamma^+ \not\subset \omega(x)$, allora $\omega(x)$ è un ciclo limite. Siano $p_0 \in \omega(x)$, ϕ non periodica, ψ una sezione chiusa trasversale a $v(p_0)$ e sufficientemente piccola da essere trasversale alle traiettorie in ogni suo punto. È chiaro allora che queste traiettorie la attraversano tutte nello stesso verso.



Visto che p_0 è un punto di $\omega(x) \subset D$ e non di γ^+ , e che ψ è trasversale al campo, si può ricorrere al Teorema 2 nel quale si considerino: come traiettoria di riferimento la traiettoria per p_0 (la quale come si è visto appartiene tutta ad $\omega(x)$), come centro dell'intorno $\widehat{V}$ un punto $\widehat{p} = \mathcal{G}^\delta p_0$, con $\delta > 0$ convenientemente piccolo e, come evoluti di altrettanti punti $\{\bar{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sulla sezione trasversale ψ , una successione $\{\widehat{x}_k := \phi(t_k, 0, x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a $\widehat{p}$. Se ne ricava che esistono infiniti istanti $t_i > t_{i-1}$, con $i = 1, 2, \dots$, tali che i punti $x_i := \phi(t_i, t_{i-1}, x_{i-1})$ sono dei particolari punti $\bar{x}_k \in \psi$ e sono distinti dato che ϕ è non periodica e $\gamma^+ \not\subset \omega(x)$.

Inoltre, per ψ opportunamente piccola, dati due successivi x_i, x_{i+1} possono accadere solo le due eventualità descritte in figura, e ciò perchè p_0 è in $\omega(x)$ e la regione racchiusa dal “segmento” $[x_i, x_{i+1}] \subset \psi$ e dall'arco $\{\phi(t, t_i, x_i)\}_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \subset \gamma^+$ è positivamente invariante:



Si proseguirà qui nel primo di questi casi, ma l'altro si tratta in modo del tutto analogo.

Si vede in definitiva che gli x_i sono ordinati (non solo sulla traiettoria $\gamma := \{\phi(t, 0, x)\}_{t \in \mathbb{R}}$ ma anche) sulla sezione ψ , e quindi sono tutti dallo stesso lato, su ψ , rispetto a p_0 . Inoltre, siccome ψ stesso è chiuso, essi ammetteranno limite: $\tilde{p} \in \psi$. Ma $\tilde{p}$ non può che appartenere a $\omega(x)$, infatti la successione $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ necessariamente tende a infinito [Infatti: se fosse $t_k \rightarrow \tau < \infty$ si avrebbe $\lim \phi(t_i, t_{i-1}, x_{i-1}) = \phi(\tau, \tau, \tilde{p}) = \tilde{p} = \lim x_i$, e quindi $v(\tilde{p}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\phi(\tau) - \phi(t_k)}{\tau - t_k} \right)$ risulterebbe tangente a ψ dando luogo ad una contraddizione.] Pertanto $\tilde{p}$ coincide con p_0 se questo è l'unica intersezione di ψ con $\omega(x)$.

D'altra parte:

Proposizione 3.3.2 *L'insieme ω -limite $\omega(\gamma)$ (compatto non vuoto) di una traiettoria γ di un sistema che verifichi le ipotesi del Teorema 3 non può contenere alcuna traiettoria γ_0 (contenuta in un compatto) che non sia chiusa o che abbia insieme ω -limite $\omega(\gamma_0)$ privo di punti di equilibrio.*

Infatti: se una tale traiettoria γ_0 e l'insieme $\omega(\gamma)$ avessero punti in comune si è visto che tutta l'orbita γ_0 apparterrebbe a $\omega(\gamma)$. Di conseguenza sarebbe possibile trovare una sezione $\widehat{\psi}$ distinta da γ_0 e trasversale ad essa in un punto $\widehat{p} \in \omega(\gamma_0)$, e su di essa si potrebbero trovare i punti $\{\bar{x}_i^0\}_{i \in \mathbb{N}} = \gamma_0^+ \cap \widehat{\psi}$, come fatto precedentemente, che non sono equilibri. Essi però, in tal caso, risulterebbero ciascuno punto di accumulazione di punti $\{x_{i,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ di γ , i quali pertanto darebbero un insieme non ordinato su $\widehat{\psi}$.

Questo ragionamento assicura anche che un insieme ω -limite taglia in al più un punto ogni sua sezione trasversale (e sufficientemente piccola da essere trasversale al campo in ogni suo punto). $\square$

Assumendo che γ_0 sia la traiettoria $\{\phi(t, 0, p_0)\}_{t \geq 0}$ si ha, in particolare che: *giacché la traiettoria γ_0 appartiene ad un insieme $\omega(x)$ non vuoto limitato e senza equilibri, non può che essere chiusa, ed intersecare ψ solo in p_0 .*

Il teorema è dimostrato quando si provi che: *se $\omega(x)$ contiene un'orbita chiusa γ_0 e punti regolari, allora $\omega(x) \equiv \gamma_0$.*

Infatti: se ci fossero altri punti in $\omega(x)$ oltre quelli di γ_0 , non potendo essi essere isolati dato che $\omega(x)$ è connesso, si avrebbe che γ_0 dovrebbe contenere un loro punto limite sulla cui sezione trasversale si avrebbero le intersezioni di tutta la successione di orbite ad esso convergenti, e comunque tutte appartenenti ad $\omega(x)$ che avrebbe allora molte intersezioni con la sezione trasversale stessa. $\blacksquare$

3.4 La discussione sul piano delle fasi

Si è già detto, e si ritornerà sull'argomento, che l'esistenza di un integrale primo limita drasticamente i possibili aspetti dei diagrammi di fase: per esempio un punto di equilibrio di un sistema conservativo non può appartenere all'insieme ω -limite di un insieme troppo ricco (denso in un aperto che lo contiene) di traiettorie. D'altra parte la sua conoscenza è di tale aiuto che spesso si trascurano volontariamente termini del sistema pur di renderlo conservativo. Purtroppo nel seguire questo procedimento ciò che si ottiene *quasi mai rappresenta bene*, topologicamente, il sistema iniziale, e ciò proprio per le limitazioni di cui sopra.

Verrà qui esaminato il caso dei *Sistemi Meccanici posizionali scalari*

$$\ddot{q} = f(q), \quad q \in \mathbb{L}, \quad \dim \mathbb{L} = 1, \quad f \in C^1(U), \quad U \text{ aperto } \subseteq \mathbb{L}.$$

Identificata con un unico $\mathbb{V} := \mathbb{R}$ la famiglia $\{T_q\mathbb{L}\}_{q \in U}$, e chiamate x e y le coordinate su $U \subset \mathbb{L}$ e $\mathbb{V}$, rispettivamente, il sistema dato può essere localmente descritto da

$$\begin{cases} \dot{x} = v^x(x, y) := y \\ \dot{y} = v^y(x, y) := f(x) \end{cases} \quad \text{con } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D \text{ aperto } \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Un tale sistema è sempre conservativo, infatti senz'altro ammette come integrale primo la funzione *Energia*: $\mathcal{E} \in C^1(D)$ definita da

$$\mathcal{E}(x, y) := \mathcal{T}(y) + \mathcal{V}(x) := \frac{1}{2} y^2 + \int^x (-f(\xi)) d\xi.$$

Per rendersene conto basta calcolare la

$$\mathcal{L}_v \mathcal{E} = v^x \partial_x \mathcal{E} + v^y \partial_y \mathcal{E} = y(-f) + fy = 0.$$

È questo il più facile esempio di sistema hamiltoniano, con $\mathcal{H} = \mathcal{E}$, si ha infatti

$$\begin{cases} \dot{x} = +\partial_y \mathcal{E} \\ \dot{y} = -\partial_x \mathcal{E}. \end{cases}$$

D'altra parte, qui la funzione $x \mapsto \mathcal{V}(x)$ rappresenta un caso particolare (dimensione 1) della funzione energia potenziale $q \mapsto \Pi(q)$ che si definisce per un generico sistema meccanico strettamente conservativo (si veda il §.II.1).

Si esamini dapprima il caso generale di un sistema *bidimensionale* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, conservativo e non necessariamente meccanico. Come tale esso ammette un integrale primo non banale $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x, y)$ e cioè (si veda il § 2) una funzione $\mathcal{F} : D \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $v^x \partial_x \mathcal{F} + v^y \partial_y \mathcal{F} = 0$. La funzione $\mathcal{F}$ assume quindi valore costante lungo ciascuna soluzione del sistema le quali, allora, appartengono alle superfici equipotenziali della $\mathcal{F}$, e cioè agli insiemi di livello $\Gamma_{\mathcal{F}_0} := \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}_0)$. D'altra parte, nell'intorno di ciascun punto $(x, y) \in D$ tale che $\|\nabla \mathcal{F}(x, y)\| \neq 0$, dal teorema della funzione implicita e dal fatto che il sistema è bidimensionale segue che gli insiemi di livello $\Gamma_{\mathcal{F}_0} := \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}_0)$ sono (localmente) *archi semplici e lisci con tangente univocamente definita, e quindi parallela al campo valutato in quel punto*; è infatti $\nabla \mathcal{F} \cdot \mathbf{v} = v^x \partial_x \mathcal{F} + v^y \partial_y \mathcal{F} = 0$. In particolare, nell'intorno di tali punti le equipotenziali hanno tangente parallela all'asse delle x lì dove $\partial_x \mathcal{F} = 0$, e cioè dove un'espressione esplicita $x = x(y)$ cadrebbe in difetto, o parallela all'asse delle y lì dove $\partial_y \mathcal{F} = 0$, e allora è la $y = y(x)$ a non essere definita.

D'altra parte, la regolarità del sistema garantisce che nell'intorno di ogni punto non di equilibrio la soluzione esiste regolare, e siccome essa deve conservare il valore della funzione $\mathcal{F}$, l'arco di traiettoria per quel punto necessariamente *appartiene, e anzi coincide, con l'arco di curva di livello per quel punto*. Anche se cade in difetto la rappresentazione $x = x(y)$ (o la $y = y(x)$) non cade in difetto quella parametrica $(x(t), y(t))$.

Inoltre l'unicità della traiettoria passante per ciascun punto implica che *ciascuna delle linee di livello della funzione $\mathcal{F}$ è formata da archi semplici*, e che questi *si possono incontrare solo nei punti di equilibrio del sistema*. Questi ultimi, infatti, sono gli unici punti che possono corrispondere a punti di non regolarità delle linee $\mathcal{F}(x, y) = \text{cost}$, e cioè punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ nei quali il vettore $\nabla \mathcal{F}$ (che esiste per le ipotesi fatte, si veda il N.B. 3.2.5) è tale che $\|\nabla \mathcal{F}(x, y)\| = 0$.

Le precedenti affermazioni sussistono per un qualsiasi sistema *bidimensionale* conservativo di integrale primo $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x, y)$. Nel *caso particolare*, invece, in cui il sistema è un sistema scalare meccanico conservativo l'integrale primo $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x, y)$ ha la particolare espressione: $\mathcal{E}(x, y) = \mathcal{T}(y) + \mathcal{V}(x) := y^2/2 + \mathcal{V}(x)$. In questo caso la specifica forma di tale funzione permette una discussione dei diagrammi di fase ben più dettagliata di quella fatta finora. Ancora per semplicità, si supponrà $\mathcal{V} \in C^2(D)$.

- (1) Un tale sistema ha equilibri nelle intersezioni di $y = 0$ ed $f(x) = 0$ (isocline principali), e solo in questi punti. Quindi gli equilibri non solo appartengono tutti all'asse delle x ma anche, in quanto zeri della $f = -d\mathcal{V}/dx$, essi corrispondono ai punti di stazionarietà, o: *punti critici*, del potenziale $\mathcal{V}$.
- (2) Sia x_m un punto di minimo relativo proprio della funzione $\mathcal{V} = \mathcal{V}(x)$. Dato che il primo addendo della $\mathcal{E} := \mathcal{T} + \mathcal{V} = y^2/2 + \mathcal{V}(x)$ è essenzialmente positivo, *localmente* le linee di livello $\Gamma_{\mathcal{E}_0}$ sono definite dalla $\mathcal{E}(x, y) = \mathcal{E}_0$ solo per $\mathcal{E}_0 \geq \mathcal{V}(x_m)$. Sia, ad esempio, $x_m = 0$. Non lede la generalità scegliere $\mathcal{V}(0) = 0$ e limitarsi quindi a considerare $\mathcal{E}_0 \geq 0$.

- (3) La regolarità del sistema garantisce che la soluzione $t \mapsto x(t)$ dell'equazione del moto esiste regolare (e conserva il valore della funzione $\mathcal{E}$). Si fissi un (arbitrario) dato iniziale $(x_0, y_0) \in D$, e sia $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}(x_0, y_0)$ il valore della funzione $\mathcal{E}$ nel punto (x_0, y_0) . La soluzione uscente da (x_0, y_0) individua (localmente) un insieme di punti $\{(x(t), y(t))\}_{t \in J_0}$ ove J_0 è un intervallo che contiene t_0 e sul quale la soluzione $t \mapsto x(t)$ è definita. Per la regolarità del moto, tali punti riempiono localmente un arco di linea regolare e questo, come si è detto, *necessariamente appartiene alla linea di livello* $\Gamma_{\mathcal{E}_0}$ definita dalla equazione $\mathcal{E}(x, y) = \mathcal{E}_0$.

D'altra parte, in un qualsiasi punto $(x, y) \in D$ esterno all'asse $y = 0$ si ha $\partial\mathcal{E}/\partial y = y \neq 0$, e quindi in esso si ha $\nabla\mathcal{E} \neq 0$; e anche sull'asse $y = 0$ si ha $\partial\mathcal{E}/\partial x \equiv d\mathcal{V}/dx \neq 0$ a meno che tali derivate siano calcolate in *qualcuno dei punti critici* x_c della funzione $\mathcal{V}(x)$. Se ne traggono i seguenti risultati che specificano quelli del caso generale discusso sopra.

- (3.1) Nell'intorno di punti $(x, y) \neq (x_c, 0)$, e cioè in punti nei quali si ha $|\nabla\mathcal{E}| \neq 0$, il teorema della funzione implicita assicura che *ciascun insieme di livello* $\mathcal{E}(x, y) = \mathcal{E}_0$ *è una linea semplice e liscia*, la cui tangente è univocamente definita e parallela a $(y, f(x))$ in quanto *ortogonale* al vettore (non nullo) $\nabla\mathcal{E} = (\frac{d}{dx}\mathcal{V}(x), y)$. Tali linee contengono, interi, gli archi $\{(x(t), y(t))\}_{t \in J_0}$ corrispondenti a moti con condizioni iniziali (x_0, y_0) scelte su di essi. La tangente a una qualunque di tali linee in un suo qualsiasi punto di regolarità, in quanto parallela a $(y, f(x))$ è parallela alle velocità $(\dot{x}, \dot{y}) \equiv (y(t), f(x(t)))$ assunta all'istante t .
- (3.2) L'unicità della soluzione passante per ciascun dato iniziale implica che le curve $\{(x(t), y(t))\}_{t \in J_0}$ non si possano intersecare. Quindi, le soluzioni sono tutte rappresentazioni parametriche di archi semplici. Questi si possono intersecare (senza essere il prolungamento l'uno degli altri) al più nei punti $(x_c, 0)$. I punti di equilibrio del sistema sono allora necessariamente gli unici punti che possono corrispondere ai punti di non regolarità delle linee $\mathcal{E}(x, y) = \text{cost}$, e cioè i punti $(x_c, 0)$ nei quali $|\nabla\mathcal{E}| = 0$.
- (3.3) Sia $(\bar{x}, 0) \in D$ con $\bar{x}$ non critico per la $\mathcal{V}$ (supposta derivabile due volte). In esso si ha $f(\bar{x}) \neq 0$ e quindi $\nabla\mathcal{E} \neq 0$. Tale stato corrisponde ad un istante di arresto in un punto $\bar{x}$ che non è di equilibrio. Pertanto, pur essendo un punto singolare per la rappresentazione esplicita $y = y(x)$ delle curve di livello $\Gamma_{\mathcal{E}_0}$, esso è invece ordinario sia per quanto riguarda la loro rappresentazione $x = x(y)$, sia per quanto riguarda la rappresentazione parametrica del moto. Sebbene $y(\bar{x})$ risulti nullo, il tempo necessario a raggiungere lo stato $(\bar{x}, 0)$ è finito, e il moto percorre in tale intervallo di tempo l'arco della linea $\Gamma_{\mathcal{E}_0}$ che congiunge (x_0, y_0) con $(\bar{x}, 0)$.

In $(\bar{x}, 0)$ il campo $\mathbf{v} = (0, f(\bar{x}))$ è non nullo, pertanto la traiettoria per $(\bar{x}, 0)$ attraversa l'asse delle x con tangente definita e parallela a quello delle y ; e sempre per il fatto che il punto non è di equilibrio *essa stessa* prosegue nel semipiano opposto, unica per il teorema di unicità dato che $\mathbf{v} \neq 0$. L'istante $\bar{t}$ in cui $x(\bar{t}) = \bar{x}$ e $y(\bar{t}) = 0$ è di arresto per la $x(t)$ ma non lo è per la $\phi(t) = (x(t), y(t))$.

Ancora per il fatto che $\bar{x}$ non è critico per la $\mathcal{V}$, la traiettoria si allontana poi dall'asse delle x tanto più quanto più diminuisce il valore della energia potenziale $\mathcal{V}(x)$ a favore della cinetica.

- (3.4) Congiungendo fra loro i vari segmenti (locali) che vengono in tal modo descritti al variare di t nell'intervallo massimale di definizione, si ha che per ogni fissato $\mathcal{E}_0 := \mathcal{E}(x_0, y_0)$ la corrispondente linea $\Gamma_{\mathcal{E}_0}$ consiste o di archi semplici, o di linee chiuse (non necessariamente regolari). *Ciascuna di tali linee individua, in quanto contiene, l'intera famiglia* $\{x(t), y(t)\}_{t \in J_M}$ dei punti che una qualche soluzione $\phi(t, t_0, \mathbf{x}_0)$, con $\mathbf{x}_0$ tale che $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}(\mathbf{x}_0)$, descrive al variare di $t \in J_M$. Tale soluzione riempie un intero arco regolare della linea $\Gamma_{\mathcal{E}_0}$ ed è individuata da una qualsiasi delle condizioni iniziali che, compatibili con quel valore $\mathcal{E}_0$, appartengono a quello stesso arco della linea $\Gamma_{\mathcal{E}_0}$.

Si noti che altri $\mathbf{x}_0$, pur appartenenti alla stessa linea $\Gamma_{\mathcal{E}_0}$, se non appartengono anche allo stesso arco regolare non individuano la stessa soluzione in esso contenuta. La linea $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$ può infatti contenere anche molte diverse traiettorie, tutte relative a condizioni iniziali che danno luogo allo stesso valore $\mathcal{E}_0$.

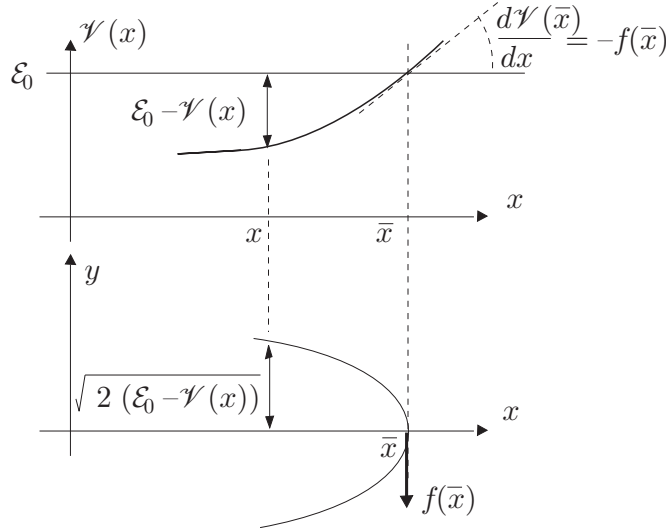
- (4) In particolare, in virtù della speciale forma delle funzioni $\mathcal{T}(x) = y^2/2$ e $\mathcal{E} = \mathcal{E}(x, y)$, qualunque linea $\Gamma_{\mathcal{E}_0}$ (e cioè qualunque sia il valore $\mathcal{E}_0$ che la individua) è composta da due rami *simmetrici rispetto allo scambio*

$y \leftrightarrow -y$ e dai punti nei quali essi raggiungono l'asse $y = 0$. Per ogni x tale che $y(x) \neq 0$, essi consistono evidentemente nei grafici delle due funzioni

$$y(x) = + \sqrt{2(\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(x))} \quad \text{e} \quad y(x) = - \sqrt{2(\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(x))}, \quad (4.10)$$

che, per il punto (3), sono archi regolari.

- (5) I due rami $y(x) < 0$ e $y(x) > 0$ si congiungono in punti $(\bar{x}, 0)$ dove la corrispondente linea $\Gamma_{\mathcal{E}_0}$ raggiunge l'asse $y = 0$. I punti $\bar{x}$ sono quelli nei quali la funzione $\dot{x}(t)$ si annulla e quindi, necessariamente, per essi $\mathcal{V}(x) = \mathcal{E}_0$.



Detti $\bar{x}_{1,2}$ due zeri distinti successivi di $\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(x)$, eventualmente comprendendo $\bar{x}_{1,2} = \infty$, all'interno dei quali risulti: $(\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(x)) > 0$, per ciascuno di essi si danno solo due casi possibili:

- (5.1) la funzione $\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(x)$ si annulla in modo tangente e quindi $\bar{x}_1$ (o $\bar{x}_2$) è anche un punto critico x_c per la $\mathcal{V}(x)$ (massimo locale o flesso), e come tale è di equilibrio per il sistema;
- (5.2) la funzione $\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(x)$ non solo tocca, ma attraversa l'asse $\mathcal{E}_0 = \mathcal{V}(x)$.

Nel primo caso, e cioè se in $\bar{x} \equiv x_c$ la $\mathcal{V}(x)$ è stazionaria, il punto x_c è un punto di equilibrio, e la soluzione non prosegue per il teorema di unicità: la linea di livello $\Gamma_{\mathcal{E}_0}$ può anche proseguire al di là del punto critico, ma i vari rami incidenti il punto corrispondono a soluzioni diverse, nel senso che non si raccordano per tempi finiti, anche se tutte con la stessa energia $\mathcal{E}_0$.

Nel secondo caso, la curva di livello per $(\bar{x}, 0)$ – e la soluzione cui essa corrisponde – attraversa l'asse $y = 0$ con tangente definita e parallela all'asse $x = 0$ giacché la prima componente del vettore tangente è y che è ivi nulla. Sempre per il fatto che il punto non è di equilibrio la stessa soluzione $\phi(t) = (x(t), y(t))$ prosegue nel semipiano opposto descrivendo (localmente) un arco simmetrico a quello ottenuto scambiando $y \leftrightarrow -y$, e si allontana dall'asse delle x tanto più quanto più diminuisce il valore dell'energia potenziale $\mathcal{V}(x)$.

Ancora, per il teorema di unicità relativo al dato iniziale $(\bar{x}, 0)$, la stessa soluzione prosegue nel semipiano opposto fino a raggiungere l'altro punto: $\bar{x}_{1,2}$ nel quale è nuovamente $\mathcal{E}_0 = \mathcal{V}(x)$.

- (6) Fuori dall'asse delle x ciascun ramo di curva di livello individua un unico ramo di soluzione. Queste raggiungono il bordo della striscia $\{(x, y) \mid \bar{x}_1 \leq x \leq \bar{x}_2\}$ soltanto in corrispondenza ai punti $(\bar{x}_{1,2}, 0)$ giacché solo in essi si ha $\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(x) = 0$, (e sempre che essi non siano punti di equilibrio, altrimenti solo la linea di livello li raggiunge, ma non la soluzione).

In entrambi i casi, comunque, ciascuna soluzione appartiene ad una (sola) striscia $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x}_1 \leq x \leq \bar{x}_2\}$, infatti nel primo caso una soluzione non può “attraversare” un punto critico e, nel secondo, la linea di livello non può varcare l'asse $x = \bar{x}$ visto che nell'adiacente striscia si ha $\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(x) < 0$, cosa questa non compatibile con una y reale.

A sostegno e ulteriore specifica della discussione appena fatta, è utile notare che l'equazione $\dot{x} = y$ permette, almeno in linea di principio, di risolvere (totalmente, anche se in forma implicita e per quadrature) l'equazione

assegnata. In particolare, è possibile calcolare il tempo necessario affinché il sistema passi dalla configurazione $\bar{x}_1$ a quella $\bar{x}_2$:

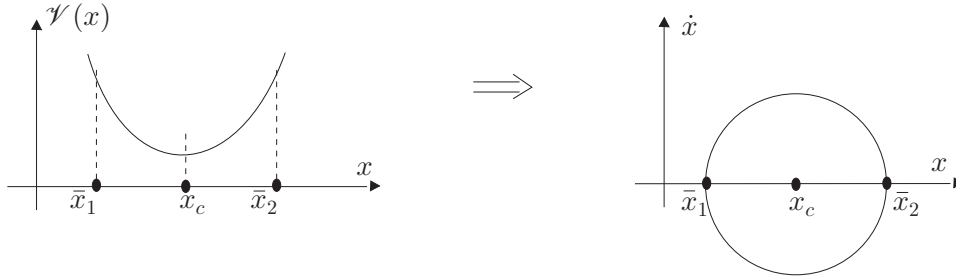
$$T/2 := \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} \frac{d\xi}{\sqrt{2(\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(\xi))}} ,$$

e l'integrale è convergente se $|\bar{x}_{1,2}| < \infty$ e se questi non sono equilibri [infatti, in tal caso, il denominatore è diverso da zero fuori da $\bar{x}_{1,2}$, e siccome $\mathcal{V}'(\bar{x}_{1,2}) \neq 0$, i poli $\bar{x}_1$ ed $\bar{x}_2$ sono solo dell'ordine di $\xi^{-(1/2)}$, e quindi l'integrale (improprio) converge.] L'area racchiusa tra i due rami $y > 0$ e $y < 0$ della traiettoria $\{x(t), y(t)\}_{t \in J}$ è

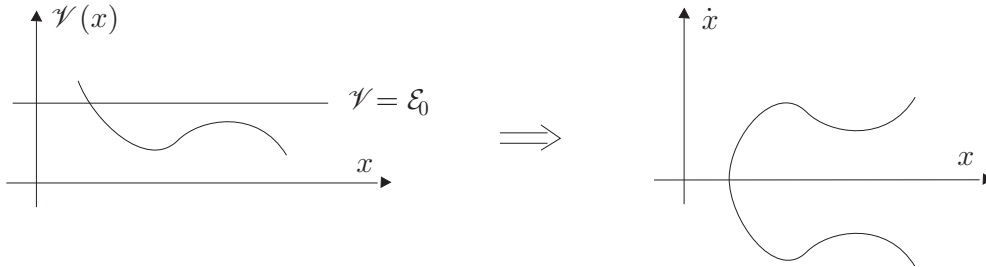
$$S = 2 \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} \sqrt{2(\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(\xi))} d\xi , \quad \text{che implica} \quad T = \frac{dS}{d\mathcal{E}_0} .$$

Se invece una o entrambe le due intersezioni $\bar{x}_{1,2}$ sono di equilibrio, o all'infinito, allora o l'integrale $\int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} d\xi / \sqrt{2(\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(\xi))}$ o la traiettoria stessa sono necessariamente divergenti.

In definitiva, se esistono entrambi $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ tali che $\mathcal{V}(\bar{x}_{1,2}) = \mathcal{E}_0$ con $f(\bar{x}_{1,2}) \neq 0$, e se $\mathcal{V}(x) > -\infty$ per ogni $x \in [\bar{x}_1, \bar{x}_2]$, allora l'equipotenziale $\mathcal{E}(x, y) = \mathcal{E}_0 = \mathcal{V}(\bar{x}_{1,2})$ è una curva chiusa che non contiene equilibri; come tale essa è una traiettoria, percorsa in senso orario, che rappresenta un moto periodico. In particolare, se la traiettoria chiusa racchiude l'origine, e se $\mathcal{V}$ è una funzione pari, allora: $T = 4 \int_0^{\bar{x}} d\xi / \sqrt{2(\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(\xi))}$.



Qualora invece una o entrambe le due radici $\bar{x}_{1,2}$ corrispondano a punti di equilibrio o siano all'infinito, allora risultano necessariamente divergenti o l'integrale $\int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} d\xi / \sqrt{2(\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(\xi))}$ o la traiettoria stessa.



Esempio 3.4.1 Il Pendolo fisico conservativo:

$$\ddot{q} = -k^2 \sin q , \quad (t, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T} .$$

In coordinate: $(q, \dot{q}) \xrightarrow{h} (x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha ovviamente $\Pi(q) \equiv \mathcal{V}(x) = -k^2 \cos x + \tilde{\mathcal{V}}$ e si riconosce che il sistema è Hamiltoniano:

$$\dot{x} = v^x(x, y) = \partial_y \mathcal{E} = y , \quad \dot{y} = v^y(x, y) = -\partial_x \mathcal{E} = -k^2 \sin x ,$$

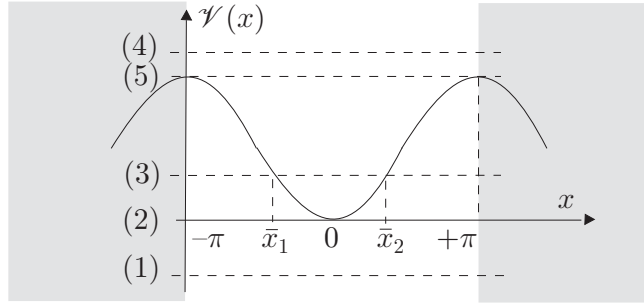
con Hamiltoniana $\mathcal{E}(x, y) := \mathcal{T}(y) + \mathcal{V}(x)$, integrale del moto,

$$\mathcal{E}(x, y) = \frac{1}{2} y^2 - k^2 \cos x + \tilde{\mathcal{V}} = \frac{1}{2} y_0^2 - k^2 \cos x_0 + \tilde{\mathcal{V}} =: \mathcal{E}_0 .$$

Dato il significato della funzione

$$\frac{1}{2k^2} y^2(x) = \frac{1}{k^2} (\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(x)) := \frac{\mathcal{E}_0}{k^2} + \cos x =: \tilde{\mathcal{E}}_0 + \cos x ,$$

i valori della costante $\mathcal{E}_0$, e di conseguenza delle condizioni iniziali, possono essere suddivisi in cinque distinti insiemi:



- (1) È vuoto l'insieme dei dati iniziali per i quali $\tilde{\mathcal{E}}_0 < -1$.
- (2) Se (x_0, y_0) è tale che $\tilde{\mathcal{E}}_0 = -1$, non può che essere $(x_0, y_0) = (x_{c,s}, 0) = (0, 0)$ e la soluzione è la quiete in (x_0, y_0) . Ma $x_{c,s}$ è di minimo per l'energia potenziale $\mathcal{V}(x)$ quindi, per la discussione appena fatta, $(x_{c,s}, 0)$ è un punto circondato da traiettorie chiuse e risulta pertanto di equilibrio stabile, (si veda oltre).
- (3) Se (x_0, y_0) è tale che $\tilde{\mathcal{E}}_0 \in (-1, +1)$ l'equazione (nella variabile $\bar{x}$)

$$\frac{1}{2k^2} y_0^2 - \cos x_0 = \tilde{\mathcal{E}}_0 = -\cos \bar{x}$$

ammette due soluzioni: $\bar{x}_{1,2}$, distinte, simmetriche rispetto all'origine, appartenenti all'intervallo aperto $(-\pi, +\pi)$, e tanto più lontane da essa quanto maggiore è il valore $\mathcal{E}_0$. In tale intervallo, la funzione $x \mapsto \mathcal{V}(x) = -k^2 \cos x$ non ha punti critici diversi dall'origine, e quindi nessuno dei due punti $(\bar{x}_{1,2}, 0)$ è un punto di equilibrio. La traiettoria, attraversando l'asse delle x , lo fa in punti non di equilibrio e quindi essa prosegue nel semipiano in cui $y \equiv \dot{x}$ ha il segno opposto. La coordinata x rimane limitata fra i due valori $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ e la traiettoria è chiusa. In definitiva risulta $\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(x) = k^2(\cos x - \cos \bar{x})$, con $\bar{x}$ una delle radici $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ sopra dette e che individuano l'ampiezza massima dell'oscillazione. Per quanto detto, il moto è periodico di periodo $T = 4 \int_0^{\bar{x}} dx / \left(\sqrt{2(\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(x))} \right)$.

- (4) Se y_0 è così grande che $\tilde{\mathcal{E}}_0 > +1$ allora $|\dot{x}|$ è sempre strettamente positivo, e il moto non ha istanti di arresto: le traiettorie non attraversano mai l'asse delle x e la "striscia" corrispondente a queste condizioni iniziali è tutto il piano. La coordinata x cresce in $\mathbb{R}$, mentre il punto q descrive infinite volte il toro $\mathbb{T}$. In particolare: *La coordinata x cresce non limitata e tale che $x(t+T) = x(t) + 2\pi$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e con $T := \int_0^{2\pi} dx/h(x)$, nella quale si è posto $h(x) = \sqrt{2(\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(x))}$.*

[Infatti: La funzione h è 2π -periodica, mai nulla. Quindi, la $t(x) - t(x_0) = \int_{x_0}^x d\sigma/h(\sigma)$ è funzione monotona ed invertibile. Pertanto si trova

$$t(x+2\pi) - t(x) = \int_x^{x+2\pi} d\sigma/h(\sigma) = \int_0^{2\pi} d\sigma/h(\sigma) =: T$$

ovvero: $t(\theta+2\pi) = t(\theta) + T$, la cui inversa dà $\theta(t+T) = \theta(t) + 2\pi$].

- (5) Se (x_0, y_0) è tale che $\tilde{\mathcal{E}}_0 = +1 = -\cos x_{c,u}$, allora $x_{c,u}$ è un punto critico: di stazionarietà per la funzione $x \mapsto \mathcal{V}(x)$, ma non di minimo; e possono darsi i due sotto-casi:
- (5.1) $(x_0, y_0) = (x_{c,u}, 0)$, e cioè $x_{c,u} = +\pi$, oppure $x_{c,u} = -\pi$ solo fisicamente coincidenti, (e cioè coincidenti solo sul toro $\mathbb{T}$); e allora il moto è la quiete nel punto iniziale $(x_{c,u}, 0)$ che, per la discussione appena fatta, è un punto di equilibrio instabile.
- (5.2) $(x_0, y_0) \neq (x_{c,u}, 0)$ e $y_0 \neq 0$; e allora il moto si svolge lungo la corrispondente (parte di) Separatrice.

A tale proposito si danno le seguenti definizioni:

Separatrice := un luogo di punti di D tali che la dinamica del sistema ha proprietà strutturali del tutto diverse se uscenti da stati iniziali presi da bande opposte di esse per quanto vicini fra loro.

In questo esempio sono separatrici le linee $\mathcal{E}(x, y) = \mathcal{E}(x_{c,u}, 0)$, ove $x_{c,u}$ è un punto di stazionarietà, ma non di minimo, per la $\mathcal{V}(x)$.

Traiettorie eterocline := traiettorie che connettono due punti di equilibrio.

In questo esempio: $(x_{c,u}, 0) := (-\pi, 0)$, e $(x_{c,u}, 0) := (\pi, 0)$, e che quindi verificano la $\frac{1}{2k^2} y^2 - \cos x = +1$.

Traiettorie omocline := traiettorie che connettono uno stesso punto $(x_{c,u}, 0)$ di equilibrio (instabile); si veda l'Esempio 3.4.4.

Il punto (3) può essere ulteriormente approfondito. Si osservi innanzi tutto che il valore indicato per il periodo

$$T = \frac{4}{k} \int_0^{\bar{x}} \frac{dx}{\sqrt{2(\cos x - \cos \bar{x})}}$$

è un valore esatto. Tuttavia può essere di interesse valutarlo in casi particolari nei quali le condizioni iniziali siano speciali. Uno di questi si presenta quando il valore $\bar{x}$ è molto piccolo rispetto al suo possibile massimo: π . In tal caso, dalla

$$\dot{x}(x) = \sqrt{2(\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(x))} = \sqrt{2k^2(\cos x - \cos \bar{x})}$$

e con le seguenti posizioni:

$$\begin{aligned} 2(\cos x - \cos \bar{x}) &= 4 \left(\sin^2 \frac{\bar{x}}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) =: 4 \left(a^2 - \sin^2 \frac{x}{2} \right) =: 4a^2 (1 - \sin^2 \psi), \\ \frac{1}{a} \sin \frac{x}{2} &=: \sin \psi, \quad \frac{1}{2a} \cos \frac{x}{2} dx = \cos \psi d\psi, \quad \frac{dx}{2a\sqrt{1 - \sin^2 \psi}} = \frac{d\psi}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \psi}}, \end{aligned}$$

nell'ipotesi di piccoli valori per l'ampiezza massima $\bar{x}$ dell'oscillazione, e quindi per $a := |\sin \bar{x}/2| \ll 1$, si ottiene successivamente:

$$\begin{aligned} T &= \frac{4}{k} \int_0^{\bar{x}} \frac{dx}{\sqrt{2(\cos x - \cos \bar{x})}} \\ &= \frac{4}{k} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \psi}}, \quad (\text{per la (4.11) qui appresso}); \\ &\simeq \frac{2}{k} \int_0^{\pi} \left(1 + \frac{a^2 \sin^2 \psi}{2} \right) d\psi, \quad (\text{per la (4.12) qui appresso}); \\ &= \frac{2\pi}{k} \left(1 + \frac{a^2}{4} \right), \quad (\text{per la (4.13) qui appresso}); \\ &\simeq \frac{2\pi}{k} \left(1 + \frac{\bar{x}^2}{16} \right), \quad (\text{per la (4.14) qui appresso}), \end{aligned}$$

che, contrariamente a quanto accade per l'oscillatore lineare, evidentemente dipende dall'ampiezza massima dell'oscillazione e cioè dall'energia iniziale.

Nei passaggi qui sopra sono state usate le seguenti relazioni, (delle quali la (4.12) e la (4.14) sono tanto più vere quanto più $\varepsilon > 0$ è vicino allo zero, e quindi, in questo caso, quanto più è piccola l'ampiezza massima dell'oscillazione):

$$\int_0^{\bar{x}} \frac{dx}{\sqrt{4(a^2 - \sin^2 \frac{x}{2})}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \psi}}; \quad (4.11)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon}} \simeq 1 + \varepsilon \left(-\frac{1}{2}(1 - \varepsilon)^{-3/2}(-1) \right) \Big|_{\varepsilon=0} = 1 + \frac{\varepsilon}{2}; \quad (4.12)$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 \psi d\psi = \frac{\pi}{2}; \quad (4.13)$$

$$\sin \varepsilon \simeq 0 + \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{6}. \quad (4.14)$$

Il cosiddetto Integrale ellittico di prima specie che compare nella (4.11), convergente quando $a := |\sin \bar{x}/2| < 1$, si sarebbe potuto esprimere anche con l'aiuto delle funzioni ipergeometriche, (si veda § I.6):

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \psi}} =: K(a) \equiv F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; a^2\right) := \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)_n (1/2)_n}{n! (1)_n} a^{2n}, \quad (4.15)$$

e fornisce il valore esatto del periodo del pendolo fisico $T = 4K(a)/k$. Il valore che si è stimato: $\frac{2\pi}{k} (1 + \bar{x}^2/16)$ ne è una prima approssimazione valida solo nel caso in cui l'ampiezza massima dell'oscillazione: $\bar{x}$ sia piccola (e ciò accade quando è piccola l'energia $\mathcal{E}_0$). In tal caso $\sin \bar{x}/2 \sim \bar{x}/2$ e i primi due termini della serie (4.15) sono $\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\bar{x}^2}{4} \right]$.

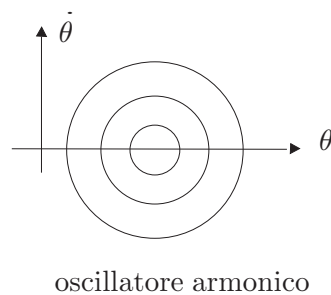
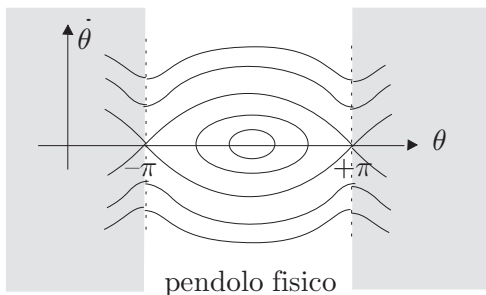
N.B. 3.4.2 Il caso lineare $\ddot{q} = -k^2 q$ (si veda l'Esempio 3.2.12) è ben diverso da questo. Per esso si ha $\mathcal{V}(x) = \frac{k^2}{2} x^2 + \tilde{\mathcal{V}}$ e quindi

$$\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(x) = \frac{1}{2} y_0^2 + \frac{k^2}{2} (x_0^2 - x^2) =: \frac{k^2}{2} (\bar{x}^2 - x^2),$$

che dà

$$T = \frac{4}{k} \int_0^{\bar{x}} \frac{dx}{\sqrt{\bar{x}^2 - x^2}} = \frac{4}{k} \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} = \frac{4}{k} \int_0^{\pi/2} \frac{d \sin \psi}{\cos \psi} = \frac{2\pi}{k}$$

indipendente dall'ampiezza massima e, più generalmente, dai dati iniziali. $\diamond$



□

Esempio 3.4.3 L'equazione di Duffing con potenziale attrattivo debole:

$$\ddot{x} = -k^2x + \varepsilon x^3 \quad \text{con} \quad t_0, x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0.$$

Si ha evidentemente $\mathcal{V}(x) = \frac{k^2}{2}x^2 - \frac{\varepsilon}{4}x^4 + \tilde{\mathcal{V}}$. [è interessante confrontare quest'ultima con lo sviluppo, valido per piccole ampiezze, della precedente energia potenziale: $\mathcal{V}_p(x) = -k^2 \cos x \simeq k^2 \left(-1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!}\right)$. Tuttavia va detto (si veda § VI.2) che la similitudine fra i due sistemi non è sufficiente a provare che l'uno "approssimi" l'altro. Tale approssimazione infatti va esaminata in modo più preciso e solo dopo aver dimostrato che anche per l'equazione di Duffing l'ampiezza massima delle soluzioni che partono vicine all'origine rimane piccola. Solo in tal modo i due sistemi risultano "prossimi", con $\varepsilon = k^2/3!$, e con entrambi i valori che rendono massima la $\mathcal{V}$, e cioè $\sqrt{k^2/\varepsilon} \equiv \sqrt{3!}$ e π , che restano definitivamente lontani dall'insieme dei valori possibili per la x , e cioè l'insieme $|x| \leq \bar{x} \ll 1$].

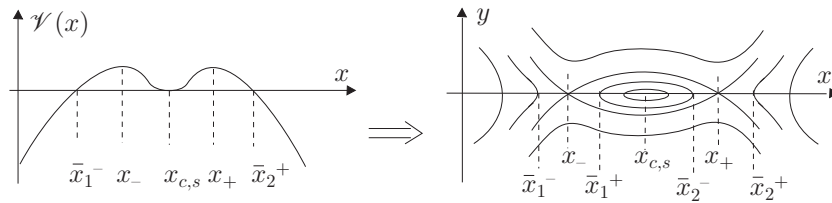
I punti critici sono $x_{c,s} := 0$ e $x_{c,u} = x_{\pm} := \pm\sqrt{k^2/\varepsilon} = \pm\sqrt{6}$, e quindi la separatrice ha equazione:

$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{k^2}{2}x^2 - \frac{\varepsilon}{4}x^4 = \mathcal{E}(x_{\pm}, 0) = \frac{k^4}{4\varepsilon}, \quad \text{con} \quad \tilde{\mathcal{V}} := 0.$$

Essa contiene anche in questo caso due eterocline ma, oltre ad esse e ai due punti di equilibrio, ora contiene anche quattro traiettorie "aperte" verso infinito.

Le varie altre evenienze si presentano a seconda dei diversi valori della costante $\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2}y_0^2 + \frac{k^2}{2}x_0^2 - \frac{\varepsilon}{4}x_0^4$. Esse si possono suddividere nei seguenti casi (sempre con $\tilde{\mathcal{V}} = 0$) e in corrispondenza ad altrettanti gruppi di valori iniziali. Si chiamino $\bar{x}_1^-$ e $\bar{x}_2^+$ la minore e la maggiore delle soluzioni (se reali) della $\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(x) = 0$, e $\bar{x}_1^+ < \bar{x}_2^-$ quelle intermedie (se reali). Si ha:

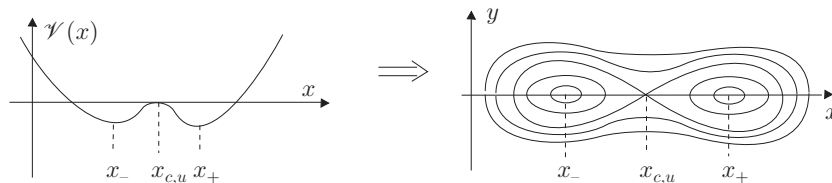
- (1) $\mathcal{E}_0 \in (-\infty, 0)$. In tal caso, se $x_0 < \bar{x}_1^-$ (o, rispettivamente $x_0 > \bar{x}_2^+$) si avrà $x(t) < \bar{x}_1^-$ (oppure $x(t) > \bar{x}_2^+$) per ogni t . Si presentano cioè due famiglie di traiettorie per le quali la x presenta una e una sola inversione di moto.
- (2) $\mathcal{E}_0 = 0$. Lo stesso come (1). In più, se $x_0 = x_{c,s} = 0$, si ha la soluzione $x(t) = x_{c,s}$.
- (3) $\mathcal{E}_0$ un valore nell'intervallo aperto $(0, k^4/4\varepsilon)$. Lo stesso come (1). In più, per condizioni x_0 tali che $x_0 \in (\bar{x}_1^+, \bar{x}_2^-)$, si hanno moti periodici con $x(t) \in (\bar{x}_1^+, \bar{x}_2^-)$, e quindi per essi infinite inversioni di moto.
- (4) $\mathcal{E}_0 > (k^4/4\varepsilon)$. Qualunque sia il valore di x_0 si hanno moti progressivi con nessuna inversione.
- (5) Risultati analoghi all'esempio precedente qualora $\mathcal{E}_0 = k^4/4\varepsilon$.



□

Esempio 3.4.4 L'equazione di Duffing con potenziale a due pozzi:

$$\ddot{x} = +k^2x - \varepsilon x^3 \quad \text{con} \quad t_0, x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0.$$



□

Esempio 3.4.5 L'Equazione del pianeta:

$$\ddot{\rho} - \frac{c^2}{\rho^3} = -\phi(\rho) \quad \text{con} \quad (t_0, \rho_0, \dot{\rho}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$$

Per scrivere tale equazione si è riconosciuto che il moto, nello spazio fisico, di un elemento soggetto ad una forza centrale, in particolare Newtoniana, è piano e tale che $\rho^2 \dot{\theta} = cost =: c$. Infatti: dalla $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{\ddot{OP}} = 0$ se ne trae facilmente la $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{\dot{OP}} = \vec{k}_0 = cost \equiv c\vec{n}$, che fornisce $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OP}(t) = 0$. Pertanto, con la notazione usuale in $\mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{OP} = \rho \vec{\epsilon} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \vec{\epsilon} = +\cos\theta \vec{e}_1 + \sin\theta \vec{e}_2, \\ \vec{\tau} = -\sin\theta \vec{e}_1 + \cos\theta \vec{e}_2, \end{cases}$$

e indicato con $\vec{\epsilon} \times \vec{\tau} = \vec{n}$ il versore rispetto al quale θ è positivo se contato in senso antiorario, ne seguono le

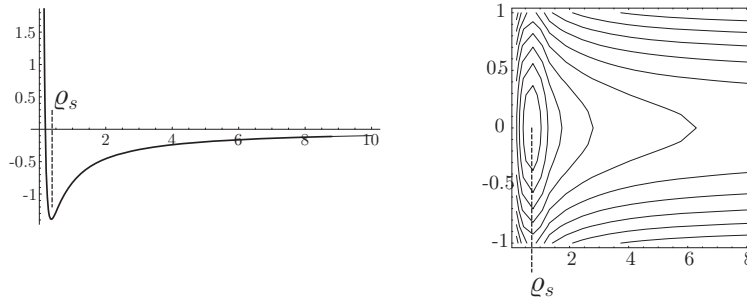
$$\begin{cases} \dot{\vec{\epsilon}} = +\dot{\theta} \vec{\tau} \\ \dot{\vec{\tau}} = -\dot{\theta} \vec{\epsilon} \end{cases} \quad \text{ed} \quad \begin{cases} \overrightarrow{\dot{OP}} = \dot{\rho} \vec{\epsilon} + \rho \dot{\theta} \vec{\tau} \\ \overrightarrow{\ddot{OP}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{\epsilon} + (\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho} \dot{\theta}) \vec{\tau} \end{cases}$$

L'espressione $\vec{f} = -(km/\rho^2) \vec{\epsilon}$ per l'attrazione Newtoniana fornisce quindi, sulla varietà $\mathbb{L} := \mathbb{R}^+$, l'equazione:

$$\ddot{\rho} = -\frac{k}{\rho^2} + \frac{c^2}{\rho^3} \quad \text{che ha} \quad \mathcal{V}(\rho) = +\frac{c^2/2}{\rho^2} - \frac{k}{\rho}.$$

Al crescere dell'energia iniziale si riconoscono, *nello spazio fisico*,

- (1) una traiettoria stazionaria circolare, con $\rho = \rho_{c,s}$, stabile ma non attrattiva;
- (2) traiettorie periodiche descritte con $\dot{\theta} = c/\rho^2$ e comprese fra un afelio e un perielio;
- (3) traiettorie che provenienti dallo spazio vi tornano dopo essere passate all'interno delle possibili orbite stazionarie.



Si osservi che la “quiete” in $\rho_{c,s}$ non individua posizioni di equilibrio!

N.B. 3.4.6 Sia $\rho = \rho(t)$ funzione a valori reali, T -periodica mai nulla; risulta T -periodica e mai nulla anche la funzione $\dot{\theta}(t) = c/\rho^2(t) =: \lambda(t)$; entrambe definite per ogni $t \in \mathbb{R}$. Pertanto, la funzione $\theta(t) - \theta_0 = \int_{t_0}^t \lambda(\sigma) d\sigma$ è funzione monotona crescente, invertibile, e tale che

$$\theta(t) - \int_{t_0}^t \lambda(\sigma) d\sigma = \theta(t_0) - \int_{t_0}^{t_0} \lambda(\sigma) d\sigma \quad \text{per ogni } t_0 \in \mathbb{R}.$$

Da questa si ricava, scegliendo in particolare $t_0 = t + T$, la

$$\theta(t + T) = \theta(t) + \int_t^{t+T} \lambda(\sigma) d\sigma. \quad (4.16)$$

Ma è

$$\int_t^{t+T} \lambda(\sigma) d\sigma = \int_t^0 \lambda(\sigma) d\sigma + \int_0^T \lambda(\sigma) d\sigma + \int_T^{t+T} \lambda(\sigma) d\sigma,$$

e la periodicità di λ impone che sia $\int_T^{t+T} \lambda(\sigma) d\sigma = \int_0^T \lambda(\sigma) d\sigma$; pertanto si ha

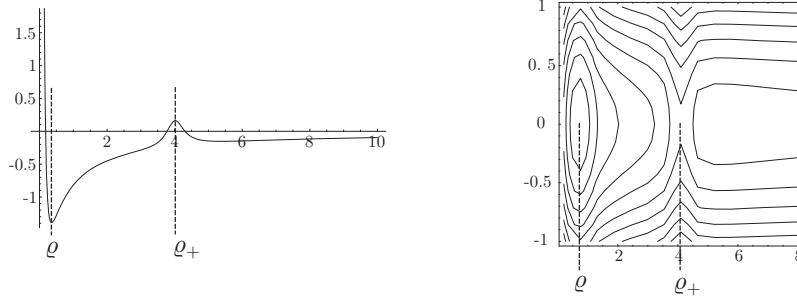
$$\int_t^{t+T} \lambda(\sigma) d\sigma = \int_0^T \lambda(\sigma) d\sigma =: \tilde{\Theta}.$$

Dalle (4.16) segue $\theta(t + T) = \theta(t) + \tilde{\Theta}$, e da questa la

$$t(\theta) + T = t(\theta + \tilde{\Theta}) \quad \text{con} \quad \tilde{\Theta} := \int_0^T \lambda(\sigma) d\sigma. \quad (4.17)$$

Tuttavia la grandezza $\tilde{\Theta}$ potrebbe non essere commensurabile con π . Ciò implica che l'essere ρ una funzione T -periodica, e il sussistere della legge delle aree, *non bastano ad assicurare che il moto (fisico) sia periodico*. Infatti, dalla 2π -periodicità del versore $\vec{u}$ segue che se $\tilde{\Theta}/2\pi$ non è un numero razionale, certo non può esistere alcun tempo finito dopo il quale la traiettoria (nello spazio fisico) si possa chiudere. Se invece esistono $n, m \in \mathbb{N}$ tali che $\tilde{\Theta} = \int_0^T \lambda(\sigma) d\sigma = 2\pi \frac{n}{m}$ allora le due condizioni precedenti implicano il chiudersi della traiettoria e la periodicità del moto. Si può dimostrare che questo è ciò che in effetti accade ai moti di un corpo soggetto ad una forza di tipo gravitazionale. $\diamond$

Qualora, a causa di eventuali altri effetti secondari da parte del resto del sistema gravitazionale, a questo schema si aggiunge un termine del tipo $\mathcal{V}_{ep}(\rho) = \frac{\varepsilon^2 \rho}{\varepsilon + (\rho - \rho_+)^2}$, con $\varepsilon > 0$, si ottiene un sistema con traiettorie come le (1), (2), (3) e in più: (4) traiettorie che tornano allo spazio dopo essere passate all'esterno delle possibili orbite stazionarie; (5) un'orbita stazionaria (circolare) instabile e tre (aperte) che le sono asintotiche.



□

Allo scopo di studiare il comportamento dei sistemi conservativi nell'intorno dei loro punti di equilibrio è conveniente premettere (si veda: [Arnold 1]) la seguente discussione:

Lemma 3.4.1 (di Hadamard) Sia $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\kappa \in C^{r \geq 1}(N(0))$, e $\kappa(0) = 0$. Per ciascun $x \in N(0)$ si può porre

$$\kappa(x) = \int_0^x \kappa'(\xi) d\xi = \int_0^1 x \kappa'(tx) dt =: x\rho(x) \quad \text{con} \quad \rho \in C^{r-1}(N(0)).$$

In particolare si ha che $\rho(0) = \kappa'(0) \equiv \int_0^1 \kappa'(0) dt$.

Sia $\mathcal{V} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{V} \in C^{r \geq 2}(N(0))$, e si assuma che essa rappresenti una funzione energia potenziale $\mathcal{V}(x) = -\int^x f(\xi) d\xi$ di un sistema: $\ddot{x} = f(x)$. Si assuma anche che essa abbia un punto di stazionarietà il quale, senza ledere la generalità, si porrà nell'origine; si abbia cioè $\mathcal{V}(0) = \mathcal{V}'(0) \equiv f(0) = 0$. Si ponga poi:

$$\mathcal{V}(x) = \int_0^1 x \mathcal{V}'(tx) dt, \quad \text{insieme con} \quad \mathcal{V}'(tx) = \int_0^1 t x \mathcal{V}''(\sigma tx) d\sigma.$$

Per ogni $x \in N(0)$ risulta pertanto

$$\mathcal{V}(x) = x^2 \varphi(x) := x^2 \int_0^1 t \int_0^1 \mathcal{V}''(\sigma tx) d\sigma dt,$$

ed è $\varphi \in C^{r-2}(N(0))$ con

$$\varphi(0) = \int_0^1 t \left(\int_0^1 \mathcal{V}''(0) d\sigma \right) dt = \mathcal{V}''(0) \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \mathcal{V}''(0).$$

Sia $\mathcal{V}''(0) \neq 0$; il punto di equilibrio $x_e = (0, 0)$ dell'equazione $\ddot{x} = f(x)$ si definisce allora *di equilibrio regolare* o *iperbolico*, e la funzione $x \mapsto f(x) = -\mathcal{V}'(x)$ risulta (nulla in zero ed) invertibile in un conveniente intorno $N(0)$.

Si osservi, a questo riguardo, che i risultati che seguono sono validi *localmente*, ma ciò solo nella misura in cui è locale l'invertibilità della f e cioè la permanenza del segno della $\mathcal{V}$; l'intorno $N(0)$ non è necessariamente "piccolo", ed i risultati non sono tanto più veri quanto più $N(0)$ è piccolo, come viceversa accade nel caso dei procedimenti di linearizzazione.

Sotto le dette ipotesi, e posto

$$\sigma := \operatorname{sign} \varphi(0) = \frac{\mathcal{V}''(0)}{|\mathcal{V}''(0)|},$$

si osserva innanzi tutto che la funzione

$$\xi^2 : x \mapsto \xi^2(x) := 2\sigma\mathcal{V}(x) \equiv 2\sigma x^2\varphi(x)$$

è continua, nulla in $x = 0$, e positiva in $N(0) \setminus \{0\}$. In secondo luogo, si riconosce facilmente che la funzione

$$\xi : x \mapsto \xi(x) := x\sqrt{2\sigma\varphi(x)} \equiv (\operatorname{sign} x) \sqrt{2\sigma\mathcal{V}(x)}$$

ha lo stesso segno della x ed è derivabile e invertibile in $N(0)$. Essa infatti, e altrettanto accade alla $\sigma\mathcal{V}' = -\sigma f$, ha derivata strettamente positiva:

$$\frac{d\xi}{dx} = \begin{cases} (\operatorname{sign} x) \frac{d}{dx} \sqrt{2\sigma\mathcal{V}(x)} = \frac{\sigma\mathcal{V}'(x)}{(\operatorname{sign} x) \sqrt{2\sigma\mathcal{V}(x)}} = \frac{-\sigma f(x)}{\xi(x)} & \text{per } x \neq 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi(x) - \xi(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{2\sigma\varphi(x)}}{x} = \sqrt{\sigma\mathcal{V}''(0)} & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

N.B. 3.4.7 Dato che $(\operatorname{sign} x) \sigma \mathcal{V}'(x) = |\mathcal{V}'(x)|$, risulta:

$$\frac{d\xi}{dx} = \sqrt{\frac{(\mathcal{V}'(x))^2}{2\sigma \int_0^x \mathcal{V}'(\xi) d\xi}} \xrightarrow{0} \left[\sqrt{\frac{\mathcal{V}'(x)\mathcal{V}''(x)}{\sigma\mathcal{V}'(x)}} \right]_0 = \sqrt{\sigma\mathcal{V}''(0)}$$

◇

Posto allora $U := N(0, 0)$, la trasformazione

$$\psi^{-1} : U \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{data da} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\psi^{-1}} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x\sqrt{2\sigma\varphi(x)} \\ y \end{pmatrix}$$

rappresenta un diffeomorfismo locale di classe C^{r-2} : $\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow W \subset \mathbb{R}^2$, con W a sua volta aperto e contenente l'origine $(0, 0)$. Infatti ψ^{-1} trasforma $(0, 0)$ in $(0, 0)$, e ha derivata non singolare in $(0, 0)$, in quanto vale

$$\partial\psi^{-1}(0, 0) = \left(\begin{array}{cc} \partial_x \xi & \partial_y \xi \\ \partial_x \eta & \partial_y \eta \end{array} \right) \Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma\mathcal{V}''(0)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, in base al N.B. 3.2.6, il sistema trasformato è ancora conservativo con energia potenziale data da

$$\tilde{\mathcal{V}}(\xi) = \mathcal{V}(x(\xi)) = \sigma \frac{\xi^2}{2}.$$

Alternativamente, ci si può servire della $\partial\psi^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} -\sigma f(x)/\xi(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ per calcolare il campo $\nu(\xi) := \partial\psi^{-1} \mathbf{v}|_{x=\psi(\xi)}$ e riconoscere che

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ f(x) \end{pmatrix} \quad \text{è equivalente a} \quad \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma\eta/\xi \\ 1 \end{pmatrix} f(x(\xi)),$$

per il quale è facile constatare che

$$\mathcal{L}_\nu \left(\frac{\eta^2}{2} + \sigma \frac{\xi^2}{2} \right) = \left(\eta - \sigma^2 \xi \frac{\eta}{\xi} \right) f(x(\xi)) \equiv 0.$$

Si osservi che il sistema equivalente, non lineare, ha la stessa equazione associata del sistema (lineare)

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= +\eta \\ \dot{\eta} &= -\sigma\xi \end{aligned}$$

e quindi (si veda l'Esempio 3.1.22) ha localmente le stesse traiettorie di questo.

Si noti anche che la linearizzazione adopera la variabile $\xi^{lin} := x\sqrt{\sigma\mathcal{V}''(0)}$.

In definitiva in U , e cioè localmente vicino ad un punto di equilibrio regolare $x_e =: (x_c, 0)$, le curve di livello della $\mathcal{E}(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \mathcal{V}(x)$ sono diffeomorfe a:

(i) *Ellissi*: $\frac{\eta^2}{2} + \frac{\xi^2}{2} = \mathcal{E}_0$ se $\mathcal{V}''(0) > 0$, e cioè se $x_c = x_{c,s} = 0$ è un punto di *minimo relativo proprio* per $\mathcal{V}(x)$;

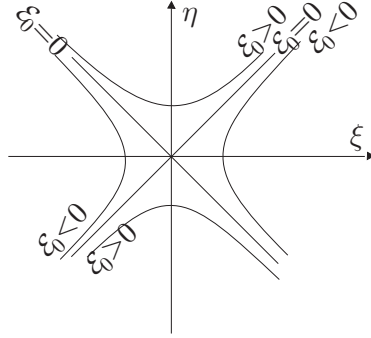
(ii) *Iperboli*: $\frac{\eta^2}{2} - \frac{\xi^2}{2} = \mathcal{E}_0$ se $\mathcal{V}''(0) < 0$, e cioè se $x_c = x_{c,u} = 0$ è un punto di *massimo relativo proprio* per $\mathcal{V}(x)$.

Nel secondo caso gli asintoti dell'iperbole sono individuati dalla relazione:

$$\partial\psi^{-1} \Big|_0 \begin{pmatrix} u_{\pm} \\ w_{\pm} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e quindi dalla} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|\mathcal{V}''(0)|}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\pm} \\ w_{\pm} \end{pmatrix}.$$

Ne segue che essi hanno equazione

$$\pm \sqrt{\mathcal{V}''(0)} u_{\pm} = w_{\pm} \quad \text{ovvero} \quad y = \pm \sqrt{|\mathcal{V}''(x_{c,u})|} (x - x_{c,u}).$$



N.B. 3.4.8 Il risultato (i) conferma il più generale:

Un sistema conservativo bidimensionale ha periodiche tutte le orbite vicine ad un punto di equilibrio stabile isolato. Quest'ultimo prende il nome di Centro.

Infatti: (si veda: [Hale p.177]) sia $U := N(0,0)$ un intorno di $(0,0)$ tale che $[U] \setminus \{(0,0)\}$ non contiene equilibri. Data la stabilità, esiste un altro intorno U' tale che $(0,0) \in U' \subset U$ e che $[U]$ contiene l'insieme ω -limite di ogni punto $x \in U'$. Per il teorema di Poincaré-Bendixon ciascuno di tali insiemi ω -limite è un'orbita periodica o contiene il punto $(0,0)$. La conservatività, d'altra parte, esclude che possa essere un ciclo limite o che l'origine possa essere attrattivo. $\diamond$

N.B. 3.4.9 Se $\mathcal{V}$ è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è inferiormente limitata, non lede la generalità supporla ovunque positiva o nulla, e quindi ogni valore $\mathcal{E}_0 + \mathcal{V}_0 = \mathcal{E}_0$ risulta positivo o nullo. Si supponga che la soluzione sia definita per $|t - t_0| \leq \tau \in \mathbb{R}$. In virtù della $y = \pm \sqrt{2(\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(x))}$ si ha allora che per $|t - t_0| \leq \tau$ risulta anche $|y(t)| \leq \sqrt{2\mathcal{E}_0}$. Pertanto $|x(t) - x_0| \leq \sqrt{2\mathcal{E}_0}|t - t_0| \leq \sqrt{2\mathcal{E}_0}\tau$, in quanto è $|\int_{t_0}^t \dot{x}(\rho) d\rho| \leq \int_{t_0}^t |y(\rho)| d\rho$. Il teorema del prolungamento sui compatti garantisce allora che la soluzione $t \mapsto x(t)$ è definita e limitata per ogni $t \in \mathbb{R}$. Il risultato sulla limitatezza si può anche estendere al caso: $\mathcal{V}$ definita e inferiormente limitata su $D \subset \mathbb{R}$ connesso. $\diamond$

N.B. 3.4.10 Ancora nel caso (i), sia $x_{c,s}$ il punto di minimo per $\mathcal{V}$, e si chiami $\mathcal{V}_s$ il valore minimo $\mathcal{V}(x_{c,s}) \geq 0$. Per $\mathcal{E}_0$ sufficientemente prossimo a $\mathcal{V}_s$ l'area della corrispondente curva di fase, (che è diffeomorfa alla circonferenza $\xi^2 + \eta^2 = 2\mathcal{E}_0$) è prossima a

$$S(\mathcal{E}_0) = \frac{\pi(\sqrt{2\mathcal{E}_0})^2}{\det(\partial\psi|_{x_{c,s}})} = \frac{2\pi\mathcal{E}_0}{\sqrt{|\mathcal{V}''(x_{c,s})|}}.$$

Pertanto il periodo delle piccole oscillazioni intorno ad una posizione di equilibrio stabile è dato da $T = 2\pi/\sqrt{|\mathcal{V}''(x_{c,s})|}$. Per il pendolo, $\mathcal{V}'' = k^2 \cos x$ implica $T = 2\pi/k$. $\diamond$

Si osservi che il caso (ii) è un caso particolare, in quanto il sistema ha dimensione due ed è $x_e := (x_{c,u}, 0)$, della più generale definizione che qui segue e che è valida per sistemi di dimensione $n \geq 2$.

Sella standard := un punto di equilibrio x_e , isolato sulla varietà delle fasi $\mathbb{M}$, che ammette un intorno $N(x_e) \subseteq \mathbb{M}$ nel quale si possono definire due sottovarietà (non vuote) W_{loc}^s, W_{loc}^u con le seguenti caratteristiche:

(i) W_{loc}^s, W_{loc}^u sono trasversali in x_e , e lo sono in modo tale che

$$W_{loc}^s \cap W_{loc}^u = \{x_e\}; \quad T_{x_e} W_{loc}^s \oplus T_{x_e} W_{loc}^u = T_{x_e} \mathbb{M};$$

(ii) W_{loc}^s è positivamente invariante, W_{loc}^u è negativamente invariante, ovvero:

$$\begin{cases} x \in W_{loc}^s \Rightarrow \mathcal{G}^t x \in W_{loc}^s & \text{per ogni } t \geq 0, \\ x \in W_{loc}^u \Rightarrow \mathcal{G}^t x \in W_{loc}^u & \text{per ogni } t \leq 0, \end{cases}$$

(iii) W_{loc}^s (rispettivamente W_{loc}^u) è l'unico sottoinsieme di $N(x_e)$ che sia positivamente (risp. negativamente) invariante, e cioè ogni orbita uscente da punti non appartenenti a W_{loc}^s (rispettivamente W_{loc}^u) esce prima o poi da $N(x_e)$, (risp. proviene dal complementare di $N(x_e)$); in sintesi:

$$\begin{cases} \mathcal{G}^t x \in N(x_e), \quad \forall t > 0 & \Rightarrow x \in W_{loc}^s, \\ \mathcal{G}^t x \in N(x_e), \quad \forall t < 0 & \Rightarrow x \in W_{loc}^u, \end{cases}$$

(iv) il punto x_e è l'insieme ω -limite della W_{loc}^s e l' α -limite della W_{loc}^u ; e cioè

$$\begin{cases} x \in W_{loc}^s \Rightarrow \mathcal{G}^t x \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} x_e, \\ x \in W_{loc}^u \Rightarrow \mathcal{G}^t x \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} x_e, \end{cases}$$

Più in generale, si chiama:

$$\text{Sella } (k) := \text{un punto di equilibrio } x_e \in \mathbb{M} \text{ tale che: } \begin{cases} k &= \dim W_{loc}^u \\ n - k &= \dim W_{loc}^s \end{cases}$$

con $k \geq 0$, e dove $n = \dim N(x_e) \geq 2$ è la dimensione della varietà delle fasi $\mathbb{M}$.

Si noti che le due varietà sono *locali*; risultano infatti definite (come grafico di *funzioni* regolari di punti nei corrispondenti spazi $\mathbb{E}_s$ ed $\mathbb{E}_u$) solo su $N(x_e)$.

Nel Cap. II si è visto che per un campo lineare: $T(x - x_e)$, con $T \in \mathbb{L}(\mathbb{V})$, il punto di equilibrio x_e è una sella (k) quando l'operatore T ha autovalori tutti con parti reali non nulle e, di queste, k positive ed $n - k$ negative. Nel Cap. IV si ricorderà (teorema di *persistenza delle selle* o della varietà stabile) che ciò accade anche per punti di equilibrio di sistemi non lineari (autonomi) se aventi derivata $v_*(x_e)$ con le stesse proprietà enunciate per l'operatore T .

Si definiscono poi le corrispondenti varietà globali (non necessariamente sottovarietà regolari di $\mathbb{M}$) prolungando l'unione delle traiettorie uscenti dai punti di quelle locali, considerati come punti iniziali:

$$\begin{aligned} W^u(x_e) &= \cup_{t \geq 0} \mathcal{G}^t(W_{loc}^u(x_e)) \\ W^s(x_e) &= \cup_{t \leq 0} \mathcal{G}^t(W_{loc}^s(x_e)). \end{aligned}$$

Esempio 3.4.11 $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = x^3 - y, \end{cases} \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}.$

Si ha subito $x(t) = x_0 e^t$ e quindi

$$y(t) = e^{-t} \left(\int_0^t x_0^3 e^{4\sigma} d\sigma + y_0 \right) = \frac{1}{4} x_0^3 e^{3t} + \left(y_0 - \frac{1}{4} x_0^3 \right) e^{-t}.$$

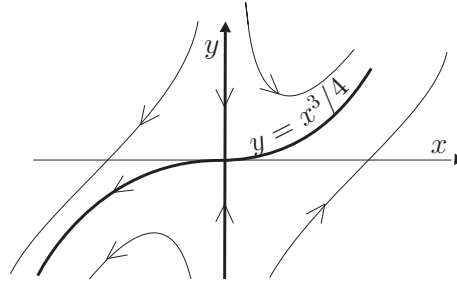
Pertanto: $W_{loc}^s \{(x, y) \mid x = 0\}$ e $W_{loc}^u = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{4} x^3\}$. Infatti:

$$\begin{aligned} x_0 = 0 &\Rightarrow x(t) = 0, & \text{ed } y_0 = \frac{1}{4} x_0^3 &\Rightarrow y(t) = \frac{1}{4} x^3(t); \\ x_0 \neq 0 &\Rightarrow x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty, & \text{ed } y_0 \neq \frac{1}{4} x_0^3 &\Rightarrow y(t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} \infty; \\ x_0 = 0 &\Rightarrow (x^2 + y^2) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0, & \text{ed } y_0 = \frac{1}{4} x_0^3 &\Rightarrow (x^2 + y^2) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Anzi le due varietà trovate in questo esempio sono globali, in quanto definite ovunque e verificanti (i)–(iv) anche fuori da $N(0, 0)$. Come si è accennato, la parte lineare del sistema ha anch'essa due varietà (anzi due spazi) trasversali nel punto di equilibrio: $\mathbb{V}^s = \{(x, y) \mid x = 0\}$, e $\mathbb{V}^u = \{(x, y) \mid y = 0\}$; quest'ultimo è tangente, nell'equilibrio, alla W_{loc}^u del sistema non lineare e in questo senso, per $\|x\|$ convenientemente piccoli, può essere considerata come deformata della W_{loc}^u del sistema.

Si può notare che il sistema è hamiltoniano con $\mathcal{H} = \mathcal{H}(x, y) := xy - \frac{1}{4}x^4 + c$ pur non essendo un sistema meccanico con l'hamiltoniana canonica $\mathcal{H} = \mathcal{T} + \mathcal{V}$.

Quelle in figura sono le linee $\mathcal{H} = \text{cost}$



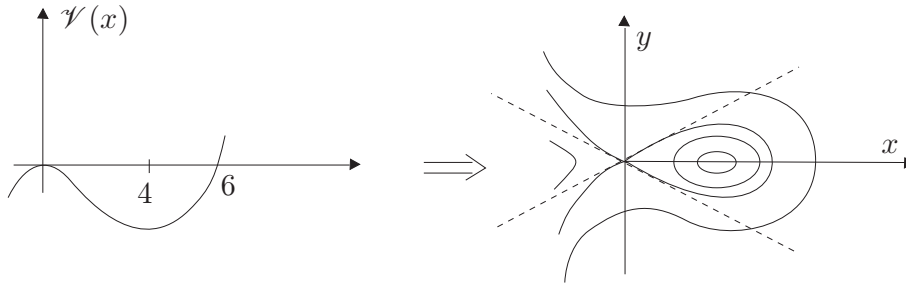
□

Esempio 3.4.12 $\ddot{x} = 24x - 6x^2$, $t_0, x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R}$,

(si veda: [Andronov p.34]), ovvero:

$$\begin{cases} \dot{x} = v^x(x, y) := y \\ \dot{y} = v^y(x, y) := 24x - 6x^2 \end{cases}$$

Gli equilibri sono $(0, 0)$ e $(4, 0)$; il potenziale $\mathcal{V}(x) = -12x^2 + 2x^3 + \tilde{\mathcal{V}}$, e la separatrice per $(0, 0)$: $\frac{1}{2}y^2 + (-12x^2 + 2x^3) = 0$.



La separatrice è costituita da quattro orbite, tutte di periodo infinito, delle quali una: l'*omoclina* è la traiettoria che parte e arriva in $(0, 0)$. I moti uscenti da condizioni iniziali all'interno dell'omoclina sono tutti periodici. Le traiettorie vicine all'omoclina hanno periodi

$$T = 2 \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} \frac{dx}{\sqrt{2(\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(x))}} \simeq 2 \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} \frac{dx}{\sqrt{12x^2 - 2x^3}} = 2 \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} \frac{dx}{2x\sqrt{6-x}},$$

purché siano $\bar{x}_1 \simeq \varepsilon$, $\bar{x}_2 \simeq 6 - \varepsilon$, con $0 < \varepsilon \ll 1$. Le traiettorie vicine all'equilibrio: $x = 4$ hanno invece periodo T stimato da $T \simeq 2\pi/\sqrt{|\mathcal{V}''(4)|} = 2\pi/\sqrt{24}$.

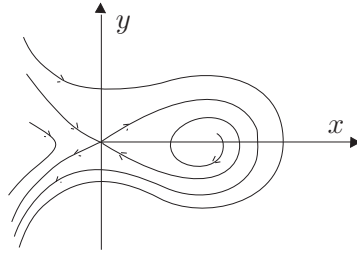
□

Esempio 3.4.13 $\begin{cases} \dot{x} = -4x + y + x^2 \\ \dot{y} = (1/6)y - 6x(x-4), \end{cases} \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}.$

Posto $f := 1/6$, e chiamato (v^x, v^y) il campo dell'Esempio 3.4.12, si nota che quello del presente esempio si può riscrivere nella forma

$$\begin{cases} \dot{x} = v^x(x, y) - f v^y(x, y) := y - f \cdot (24x - 6x^2), \\ \dot{y} = v^y(x, y) + f v^x(x, y) := (24x - 6x^2) + fy. \end{cases}$$

In modo analogo a quanto fatto nell'Esempio 3.1.28, si riconosce che il sistema ha campo ruotato di $\theta_f = \arctan \frac{1}{6}$ rispetto a quello definito nel precedente esempio. I cammini chiusi di quello sono quindi trasversi ai cammini di questo e individuano regioni positivamente o negativamente invarianti a seconda del verso del campo, e cioè a seconda del segno di f . Nel caso $f > 0$ si ha:



le traiettorie subiscono una “corrente al traverso” diretta verso quelle traiettorie dell'Esempio 3.1.25 che hanno energia maggiore. Viceversa, come verrà dimostrato più diffusamente nel seguito, nella regione in cui queste ultime curve sono tutte cicli non isolati, si ha che le traiettorie del presente esempio contraggono e spiralizzano verso il punto di equilibrio da esse racchiuso.

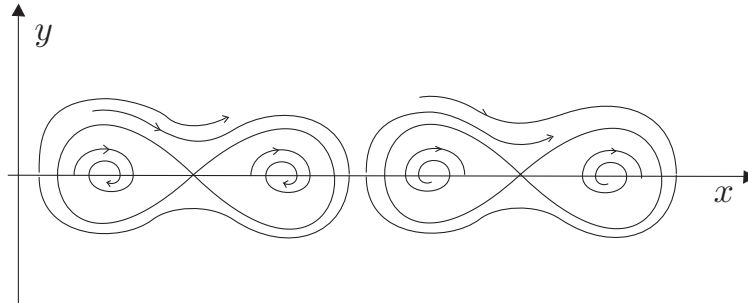
□

Esempio 3.4.14
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 8x - 8x^3, \end{cases} \quad t_0, x_0, y_0 \in \mathbb{R}.$$

Come si è già visto questa è una particolare equazione di Duffing, con potenziale $\mathcal{V}(x) = -4x^2 + 2x^4 + \tilde{\mathcal{V}}$ e separatrice $\frac{1}{2}y^2 - 4x^2 + 2x^4 = 0$ (si veda l'Esempio 3.1.20). Essa può allora servire di “riferimento” per l'equazione, con $\mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \mu \left(\frac{1}{2}y^2 - 4x^2 + 2x^4 \right) (8x - 8x^3) \\ \dot{y} = (8x - 8x^3) + \mu \left(\frac{1}{2}y^2 - 4x^2 + 2x^4 \right) y \end{cases} \quad (4.18)$$

Infatti, stante il fatto che la funzione $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - 4x^2 + 2x^4$ è integrale primo del sistema assegnato, e che è ad esso che il sistema (4.18) si riduce quando il dato (x_0, y_0) è tale che $\mathcal{F}(x_0, y_0) = 0$, l'omoclina $\mathcal{F}(x, y) = 0$ è costituita da traiettorie anche di (4.18); per esse la $\mathcal{F}$ è un *invariante*. Pertanto, per $\mu > 0$, e rispettivamente $\mu < 0$, si hanno i due seguenti casi:



in cui appare evidente l'esistenza di insiemi limite che non sono cicli limite.

Un altro esempio dello stesso tipo è $\ddot{x} + (x^2 + \dot{x}^2 - 1)\dot{x} + x = 0$, in cui si ha

$$\mathcal{E}(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad \mathcal{L}_v \mathcal{E}(x, \dot{x}) = -\dot{x}^2(x^2 + \dot{x}^2 - 1).$$

Si hanno orbite (entranti) uscenti dalle circonferenze con centro in $(0, 0)$ solo se si è (all'esterno) all'interno del cerchio unitario. La circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, che è una orbita possibile, risulta così un ciclo limite. □

In effetti, negli ultimi due esempi si è considerato il campo assegnato come “variato” di un campo conservativo. Si è già detto che questo metodo è spesso usato per intuire in primissima approssimazione l'andamento del diagramma di fase:

Esempio 3.4.15 $\ddot{x} + \kappa(x, \dot{x}) + g(x) = 0, \quad t_0, x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R},$

e si assuma che κ non contenga termini additivi dipendenti solo dalla x . Si ponga, “arbitrariamente”,

$$\mathcal{E}(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int^x g(\xi) d\xi, \quad y := \dot{x}.$$

In generale questa funzione non è un integrale primo; infatti $\mathcal{L}_v \mathcal{E} := y \partial_x \mathcal{E} + (-\kappa - g) \partial_y \mathcal{E} = -y \kappa(x, y) \neq 0$. Tuttavia è talvolta possibile stimare il segno della $\mathcal{L}_v \mathcal{E}$ in particolari regioni dello spazio delle fasi, e da ciò risalire,

conoscendo la forma delle equipotenziali $\mathcal{E}(x, y) = cost$, al diagramma di fase del sistema (non conservativo) assegnato. Dalla definizione di $\mathcal{L}_v \mathcal{E}$ si deduce infatti (si veda anche § IV.2) che nei punti in cui è $\mathcal{L}_v \mathcal{E} > 0$, le linee di flusso del sistema non conservativo sono trasverse (e quindi attraversano) le linee $\mathcal{E} = cost$, puntando verso la regione nella quale le altre equipotenziali corrispondono a valori della costante *maggiori* di quello in esame. $\square$

Un procedimento analogo si può seguire con sistemi del tipo:

Esempio 3.4.16
$$\begin{cases} \dot{x} = y + \varepsilon f_1(x, y) \\ \dot{y} = g(x) + \varepsilon f_2(x, y), \end{cases} \quad t_0, x_0, y_0 \in \mathbb{R},$$

con $\varepsilon \ll 1$, $f_{1,2} \in C^{r \geq 1}(D)$, $g \in C^1$.

Si ponga anche in questo caso $\mathcal{E}(x, y) := \frac{1}{2}y^2 - \int^x g(\xi) d\xi$. Si ricava facilmente: $\mathcal{L}_v \mathcal{E} = \varepsilon(f_2 y - f_1 g)$, il che mostra, come c'era da aspettarsi, che il divario fra l'arbitrario sistema "conservativo" e quello assegnato è piccolo quanto più è piccolo ε . $\square$

I precedenti esempi tuttavia dimostrano palesemente che *non è detto che due sistemi con campi "vicini" abbiano anche diagrammi di fase "simili"*. Per convincersene ulteriormente, si considerino ancora i seguenti tre esempi.

Esempio 3.4.17
$$\ddot{x} + \mu|\dot{x}| \dot{x} + x = 0, \quad t_0, x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R}, \quad \mu > 0.$$

Con $\mathcal{E}(x, y) := \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ risulta $\mathcal{L}_v \mathcal{E}(x, y) = -|y|^3 \mu \leq 0$. Si ha allora che, per quanto piccolo sia il valore di μ , le traiettorie sono trasversali non uscenti dalle circonferenze con centro l'origine. In effetti sono entranti ovunque ad eccezione dei punti sull'asse delle x , nei quali esse sono tangenti alle circonferenze. Ma allora, siccome questi non sono equilibri, il teorema di unicità assicura che la stessa traiettoria prosegue nel semipiano opposto e, per continuità, non può che definitivamente entrare nella circonferenza cui era tangente sull'asse. Inoltre la traiettoria non può terminare in alcun punto diverso dall'origine, perché è definita e finita per ogni t . Pertanto è non vuoto il suo insieme ω -limite. D'altra parte non può ammettere un ciclo limite, perché non essendo le circonferenze orbite possibili si avrebbero delle curve chiuse almeno parzialmente uscenti da qualche circonferenza. Una dimostrazione più semplice e generale verrà data nel capitolo sulla stabilità, (si veda: [Hale cap. X Teor 1.3]).

In definitiva il punto di equilibrio attrae tutte le orbite, così come le respingerebbe se fosse $\mu < 0$, e ciò a prescindere dal suo valore assoluto, seppur piccolo.

Il metodo però non permette di stabilire il numero di giri che la traiettoria compie intorno al punto fisso. $\square$

Esempio 3.4.18 Il pendolo con attrito.

$$\ddot{q} = -k^2 \sin q - \mu \dot{q} \quad (t_0, q_0, \dot{q}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}, \quad \mu > 0.$$

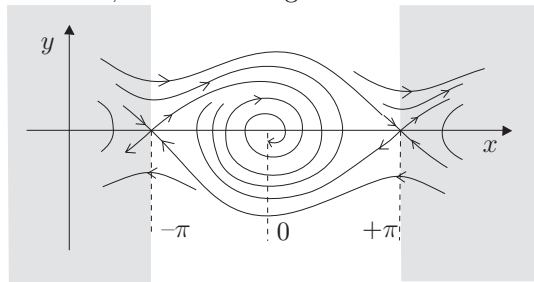
Scelte delle coordinate tali che $(q, \dot{q}) \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$, e posto

$$\mathcal{E}(x, y) := \frac{1}{2}\dot{x}^2 - k^2 \cos x + \tilde{\mathcal{V}},$$

si ha:

$$\mathcal{L}_v \mathcal{E}(x, y) = (k^2 \sin x) \dot{x} + \dot{x}(-k^2 \sin x - \mu \dot{x}) = \mu \dot{x}^2 \leq 0.$$

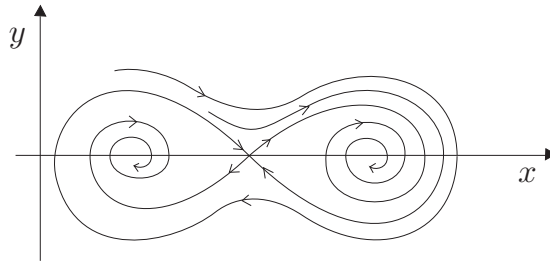
Questa proprietà, come si vedrà nel citato teorema di stabilità, è sufficiente anche in questo caso a dimostrare che il diagramma del pendolo fisico si modifica, e diviene il seguente:



$\square$

Esempio 3.4.19 L'equazione di Duffing smorzata.

$$\ddot{x} = k^2 x - x^3 - \delta \dot{x}, \quad \text{con} \quad \delta > 0.$$



□

È chiaro che, malgrado tali accorgimenti, non sempre la discussione è agevole:

Esempio 3.4.20 $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \quad t_0, x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R},$

Siano $g(x)$ dispari, $xg(x) > 0$ se $x \neq 0$, $f(x)$ pari e tale che $f(0) < 0$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} +\infty$.

Un caso particolare ne è la preclara

Equazione di Van der Pol: $\ddot{x} + e(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$, con $t_0, x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R}$, ed $e > 0$.

Se fosse $f = 0$, siccome la g è dispari il suo integrale è pari, e si avrebbe con semplicità che: $\mathcal{E}(x, y) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \int^x g(\xi)d\xi$ ha equipotenziali diffeomorfe ad ellissi o a curve chiuse regolari. Con $f \neq 0$, invece, si ha $\mathcal{L}_v \mathcal{E}(x, \dot{x}) = -f(x)\dot{x}^2$ che, nelle ipotesi dette, risulta negativo fuori da una certa *striscia* $(-\tilde{x}, \tilde{x})$ e positivo in una qualche altra *striscia* interna ad essa. Pertanto anche se le curve $\mathcal{E} = cost$ sono chiuse, l'informazione fornita dalla funzione $\mathcal{E}$ e dal segno della sua derivata direzionale non basta a trarre conclusioni sull'andamento delle traiettorie. (Diverso sarebbe il caso in cui fosse $f = f(x, \dot{x})$ con f positiva fuori da qualche rettangolo contenente l'origine, e negativa dentro, sul quale magari poter usare il teorema di Poincaré-Bendixon). Nelle ipotesi dette si ha infatti bisogno di un teorema specifico, e affatto banale: il teorema di Lienard, [Guckenheimer Cap.II], [Jordan], per provare che questa equazione ammette un (solo) ciclo limite purché la funzione $\int^x f(\xi)d\xi$ (che è dispari) si annulli (solo) nei punti $\{-a, 0, +a\}$, con $a > \tilde{x}$.

Questo particolare esempio comunque verrà ripreso nel seguito e discusso anche con altri metodi.

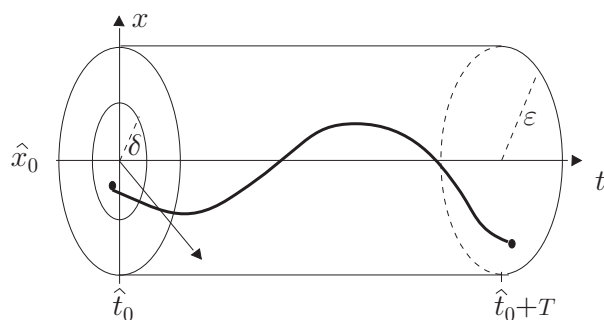
□

Capitolo 4

Cenni di stabilità

4.1 La stabilità lineare

Le possibili forme di stabilità relative ad *una qualche* soluzione di un sistema del tipo $\dot{x} = v(t, x)$ con campo liscio in un aperto $D \in \mathbb{R} \times \mathbb{M}$ sono molteplici. Nessuna di esse però va confusa con la proprietà di dipendenza continua rispetto alle condizioni iniziali, che risulta posseduta *da ogni soluzione regolare* di un tale sistema. Il teorema di dipendenza continua infatti, (si veda Cap.I, teor.3) si applica ad ogni soluzione $\hat{x} : t \mapsto \hat{x}(t) := \phi(t, \hat{t}_0, \hat{x}_0)$ uscente da condizioni iniziali $(\hat{t}_0, \hat{x}_0) \in D$ e, sotto l'ipotesi che questa esista fino all'istante $\hat{t}_0 + T < \infty$, esso non solo assicura l'esistenza almeno fino allo stesso istante $\hat{t}_0 + T$ di ogni altra soluzione $x : t \mapsto x(t) := \phi(t, t_0, x_0)$ abbia condizioni iniziali (t_0, x_0) vicine alle $(\hat{t}_0, \hat{x}_0)$, ma in più assicura la vicinanza di $x(t)$ ad $\hat{x}(t)$ per ciascun t in $[\hat{t}_0, \hat{t}_0 + T]$. Tutto questo però *per tempi non superiori al prefissato valore $\hat{t}_0 + T$* . Di conseguenza, se anche la soluzione di riferimento $\hat{x}$ fosse definita *per ogni t* , si deve *comunque* fissare la lunghezza T , arbitraria ma finita, dell'intervallo di definizione, anche se solo per poter assicurare l'esistenza fino a $\hat{t}_0 + T$ della soluzione “variata” $t \mapsto x(t)$.

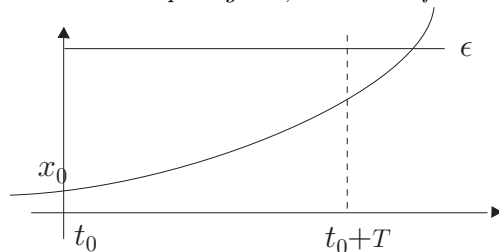


Esempio 4.1.1 $\dot{x} = x^2$ con $x_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 = \hat{t}_0 = \hat{x}_0 = 0$.

La soluzione $t \mapsto \hat{x}(t) := \phi(t, 0, 0) = 0$ esiste per ogni $t \in \mathbb{R}$. D'altra parte, siccome il campo è liscio, la generica soluzione

$$t \mapsto x(t) := \phi(t, 0, x_0) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$$

esiste localmente, unica, continua rispetto a t, x_0 . Tuttavia essa non esiste *per ogni t* : fissato T comunque grande, e supposto $x_0 > 0$, essa è definita in $[0, T]$ *solo se* $\frac{1}{x_0} > T$. Inoltre, essendo monotona crescente rispetto a t , essa assume valore massimo in $t = T$. Ma la relazione $\frac{c}{1 - cT} < \varepsilon$ equivale alla $c < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon T}$, (se $cT < 1$ ed $\varepsilon > 0$), per cui se $x_0 < \delta(\varepsilon) := \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon T}$ il punto $x(t) := \phi(t, 0, x_0)$ è sì ε -vicino ad $\hat{x}(t) = 0$, e quindi x ed $\hat{x}$ vicine nella norma ad esempio del sup, *ma ciò non è vero per ogni t , bensì solo fino al prefissato valore T* .



□

In definitiva la continuità rispetto ai dati iniziali risulta dare informazioni significative solo per tempi finiti, e cioè informazioni “locali” in t ; (naturalmente la qualità di tali informazioni e la durata degli intervalli dipende dal sistema in esame e dalla particolare soluzione prescelta, ma sono comunque informazioni esclusivamente locali).

L'esame globale rispetto a t dei divari fra le soluzioni, e del come essi dipendano dalle condizioni iniziali, è argomento della stabilità (rispetto alle condizioni iniziali).

Si noti che la stabilità è una proprietà del tutto eccezionale per una soluzione: quasi sempre i sistemi non lineari mostrano una sensibile dipendenza dalle condizioni iniziali, come si vedrà nel seguito.

In tutto questo capitolo si supporranno assegnati sistemi del tipo $\dot{x} = v(t, x)$ con campi $v : (t, x) \mapsto v(t, x)$ lisci su $[\hat{t}_0, \infty) \times \mathbb{M}$ per un qualche $\hat{t}_0 \in \mathbb{R}$. Inoltre si supporrà che la soluzione di riferimento sia definita per ogni $t > \hat{t}_0$. Infine si assumerà fissata una metrica su $\mathbb{M}$, ricavata per esempio a partire da una norma: $|\cdot|$ definita sullo spazio $\mathbb{R}^n$, che localmente rappresenta $\mathbb{M}$, quando si sia scelta una carta $(U, h_{(x)})$ (vedi Appendice II). La rappresentazione in coordinate definirà anche le differenze fra i punti su $\mathbb{M}$.

Una prima forma di stabilità che si adatta bene ai sistemi autonomi, o all'equazione variazionale di un sistema autonomo calcolata rispetto ad una soluzione di riferimento $\hat{x}$ che sia periodica [Coddington 13.2], è la Stabilità orbitale, e cioè puramente geometrica. In particolare, quindi, essa trova la sua utilità per lo studio della stabilità di soluzioni di equilibrio e di cicli limite

N.B. 4.1.2 Fintanto che per valutare la stabilità di una soluzione $\hat{x}(t) = \phi(t, \hat{t}_0, \hat{x}_0)$ dell'equazione: $\dot{x} = v(t, x)$ ci si serve del valore del divario puntuale: $|x(t) - \hat{x}(t)|$ fra essa ed una sua "variata": $x(t) = \phi(t, t_0, x_0)$, è chiaro che lo studio della stabilità su $[\hat{t}_0, \infty)$ della soluzione $\hat{x}(t)$ è del tutto equivalente a quello della stabilità *della soluzione nulla* della seguente equazione, *nella variabile* $u := x - \hat{x}(t)$,

$$\dot{u} = v(t, \phi(t, \hat{t}_0, \hat{x}_0) + u) - v(t, \phi(t, \hat{t}_0, \hat{x}_0)) =: w(t, u). \quad (1.1)$$

Infatti studiare l'andamento di $|x(t) - \hat{x}(t)|$ equivale a studiare quello di $|u(t) - 0|$.

Da un lato, il campo w dell'equazione (1.1) è generalmente altrettanto complicato di quello dell'equazione di partenza; ed inoltre, siccome esso dipende dal dato $(\hat{t}_0, \hat{x}_0)$, il risultato che così si ottiene si può applicare al solo divario $x(t) - \hat{x}(t)$, e cioè allo studio della stabilità della sola specifica soluzione $\hat{\phi} : t \mapsto \phi(t, \hat{t}_0, \hat{x}_0)$.

Dall'altro, per enunciare i vari teoremi sulla stabilità è spesso più conveniente riferirsi ad equazioni scritte nella forma (1.1), [ed in più questo modo di riscrivere il problema è già a metà strada nell'uso dello sviluppo di Taylor...]. Pertanto, in generale, gli enunciati dei teoremi sono relativi *alla stabilità della soluzione nulla* $t \mapsto \phi(t, \hat{t}_0, \hat{x}_0) = \phi(t, \hat{t}_0, 0) = 0$ (che si suppone esistere per ogni t a partire almeno da $\hat{t}_0$) dell'equazione

$$\dot{x} = v(t, x), \quad v \in C^{\ell \geq 1}(D), \quad D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{M} \text{ aperto}, \quad v(t, 0) = 0, \quad \text{per } t \geq \hat{t}_0.$$

Tuttavia ciò non avviene, in particolare, per la seguente forma di stabilità, che viene valutata a partire da una forma di divario diversa da quello detto sopra. Per essa, verrà data la definizione di stabilità relativa ad *una qualsiasi soluzione*, non necessariamente la quiete). $\diamond$

N.B. 4.1.3 Generalmente si è interessati a studiare la stabilità "in avanti", e cioè per tempi t successivi ad un certo prefissato t_0 . È pertanto naturale fare riferimento alle

$$\text{Semiorbite} := \gamma^+ = \gamma^+(t_0, x_0) := \{\phi(t, t_0, x_0)\}_{t \geq t_0}.$$

A questo proposito si ricordi che la loro appartenenza ad un insieme compatto dello spazio delle fasi $\mathbb{M}$ è condizione sufficiente affinché la corrispondente soluzione $t \mapsto \phi(t, t_0, x_0)$ di un'equazione autonoma esista per ogni $t > t_0$, (vedi la seconda proposizione del §III.4). Tuttavia può essere di interesse anche lo studio della stabilità di soluzioni le cui semiorbite γ^+ siano non limitate, e la cui esistenza globale sia quindi provata in altro modo. $\diamond$

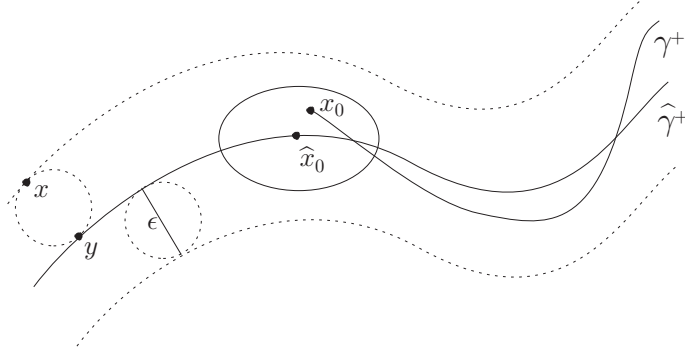
Fissata una distanza nello spazio delle fasi $\mathbb{M}$, ad esempio la distanza euclidea standard, per ogni $\varepsilon > 0$ resta definito un intorno $B_\varepsilon(\widehat{\gamma}^+)$ della semiorbita $\widehat{\gamma}^+ := \{\phi(t, \hat{t}_0, \hat{x}_0)\}_{t \geq \hat{t}_0}$ mediante la:

$$B_\varepsilon(\widehat{\gamma}^+) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, \widehat{\gamma}^+) < \varepsilon\},$$

ove si è indicata con $d : \mathbb{M} \times 2^{\mathbb{M}} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, data da $d(x, \Gamma) := \inf_{y \in \Gamma} d(x, y)$, la distanza di un punto $x \in \mathbb{M}$ da un insieme Γ dello spazio delle fasi.

Si definisce:

Stabile secondo Poincaré (o orbitalmente) := una soluzione $\hat{x} : t \mapsto \hat{x}(t) := \phi(t, \hat{t}_0, \hat{x}_0)$, esistente per ogni $t \geq \hat{t}_0$, e la cui semi-orbita $\widehat{\gamma}^+ := \{\phi(t, \hat{t}_0, \hat{x}_0)\}_{t \geq \hat{t}_0}$ è tale che, dato $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta(\varepsilon) > 0$ per il quale la soluzione $x : t \mapsto x(t) := \phi(t, t_0, x_0)$ uscente da un qualsiasi $x_0 \in B_\delta(\hat{x}_0)$ esiste per ogni $t > t_0$ ed ha semiorbita $\gamma^+ := \{\phi(t, t_0, x_0)\}_{t \geq t_0}$ contenuta in $B_\varepsilon(\widehat{\gamma}^+)$.

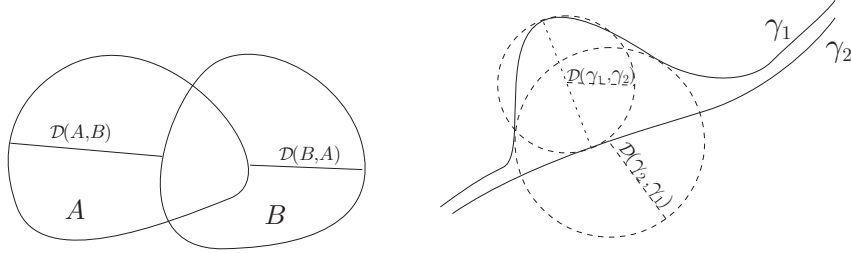


In questa definizione, gli istanti t_0 e $\hat{t}_0$ hanno il solo scopo di individuare l'insieme $B_\delta(\hat{x}_0)$ e quindi le semiorbite γ^+ ed $\widehat{\gamma}^+$; in più, nel caso di sistemi autonomi, essi possono essere fissati arbitrariamente.

Le condizioni richieste dalla definizione data si possono agevolmente verificare se si introduce la seguente nozione di Divario fra due insiemi

$$\mathcal{D}(A, B) := \sup_{x \in A} d(x, B) := \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y), \quad A, B \in 2^{\mathbb{M}}.$$

N.B. 4.1.4 Si noti l'asimmetria della funzione $\mathcal{D}$: generalmente $\mathcal{D}(A, B) \neq \mathcal{D}(B, A)$ e ciò implica che $\mathcal{D}$ non sia una distanza, (potrebbe esserlo l' $\inf\{\mathcal{D}(A, B), \mathcal{D}(B, A)\}$). Essa inoltre è diversa da altre, più usuali, nozioni di divario fra insiemi. Ad esempio due rette non parallele hanno $\mathcal{D} = \infty$ anche nel caso in cui esse siano incidenti.



◇

Affinché $\widehat{\gamma}^+$ sia orbitalmente stabile deve avvenire che, dato ε esista δ tale che

$$x_0 \in B_\delta(\hat{x}_0) \implies \mathcal{D}(\gamma^+, \widehat{\gamma}^+) < \varepsilon,$$

e quindi che per ogni $x \in \gamma^+$ si abbia $d(x, \widehat{\gamma}^+) < \varepsilon$, ciò che comporta l'esistenza di almeno un $\hat{x} \in \widehat{\gamma}^+$ tale che $\hat{x} \in B_\varepsilon(x)$.

Per verificare tale condizione, dato $x_0 \in B_\delta(\widehat{\gamma}^+)$ ed assegnate le due curve γ^+ e $\widehat{\gamma}^+$ ad esempio in forma parametrica e tale da preservare il verso dei tempi crescenti: $x = x(t)$, $\hat{x} = \hat{x}(\tau)$, si dovrà innanzi tutto trovare, per ciascun t , il valore

$$\Delta(t) := \inf_{\tau > \hat{t}_0} d(x(t), \hat{x}(\tau)) \equiv \inf_{\tau > \hat{t}_0} |x(t) - \hat{x}(\tau)|,$$

e poi, di questo, calcolare il sup per $t > \hat{t}_0$. A tale scopo, se possibile, potrà essere utile trovare: $\tau = \tau(t)$ tale che

$$\frac{d}{d\tau}(x(t) - \hat{x}(\tau))^2 = 0 \quad \text{o anche} \quad \left(\frac{d}{d\tau}\hat{x}(\tau)\right) \cdot (x(t) - \hat{x}(\tau)) = 0,$$

e cioè quel valore per il quale il vettore differenza $x(t) - \hat{x}(\tau)$ risulta ortogonale alla tangente a $\widehat{\gamma}$ (e non a γ) nel punto $\hat{x}(\tau(t))$. Successivamente, occorre controllare che:

$$\mathcal{D}(\gamma^+, \widehat{\gamma}^+) \equiv \sup_{t > \hat{t}_0} \Delta(t) = \sup_{t > \hat{t}_0} |x(t) - \hat{x}(\tau(t))| \quad \text{sia minore di } \varepsilon.$$

N.B. 4.1.5 In breve: la definizione di stabilità orbitale è equivalente alla:

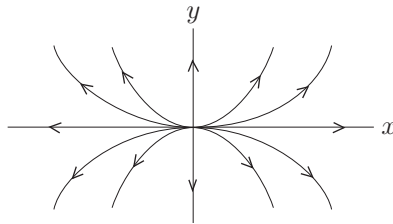
$$x_0 \in B_\delta(\widehat{\gamma}^+) \implies \gamma^+ \in B_\varepsilon(\widehat{\gamma}^+).$$

◇

I seguenti esempi si riferiscono ad equazioni autonome in $\mathbb{R}^2$; in essi si indicherà con $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ il vettore in $\mathbb{R}^2$ che, rispetto all'assegnata base, ha componenti $x, y \in \mathbb{R}$. Si indicherà poi con $t \mapsto \hat{\mathbf{x}}(t) := \boldsymbol{\phi}(t, 0, \hat{\mathbf{x}}_0)$ la soluzione di riferimento (non necessariamente nulla) della quale si studierà la stabilità orbitale, con la particolare scelta $t_0 = 0$.

Esempio 4.1.6 $\dot{\mathbf{x}} := \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ ay \end{pmatrix} =: \mathbf{v}(\mathbf{x})$; $\mathbf{x}_0 := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $a > 0$.

Le soluzioni sono: $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_0 e^t \\ y_0 e^{at} \end{pmatrix}$. Si consideri $\hat{\mathbf{x}}_0 = \begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ con $\hat{x}_0 > 0$. Risulta $\hat{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \hat{x}_0 e^t \\ 0 \end{pmatrix}$, e quindi $\widehat{\gamma}^+ = \{(\hat{x}, y(\hat{x})) \mid \hat{x} \geq \hat{x}_0, \hat{y} = 0\}$. Si consideri poi la la semi traiettoria che evolve da un generico $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ con $x_0 > 0$. Posto $c := y_0/x_0^a$ essa ha equazione $\gamma^+ = \{(x, y) \mid x > x_0; y = cx^a\}$. Per ciascuna curva di tale famiglia risulta $\inf_{\hat{x} \geq \hat{x}_0} |\mathbf{x}(x) - \hat{\mathbf{x}}(\hat{x})| = |cx^a|$ e quindi si vede che, dato $\varepsilon > 0$, non esiste alcun $\delta > 0$ tale che $|x_0 - \hat{x}_0| < \delta$ possa implicare $|cx^a| < \varepsilon$ per ogni $t > 0$ (e cioè per ogni $x > x_0$).



□

Esempio 4.1.7 $\dot{\mathbf{x}} := \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$; $\mathbf{x}_0 := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} r_0 \cos \varphi_0 \\ r_0 \sin \varphi_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Le soluzioni sono: $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} +r_0 \cos(t - \varphi_0) \\ -r_0 \sin(t - \varphi_0) \end{pmatrix}$. Si consideri $\hat{\mathbf{x}}_0 := \begin{pmatrix} \hat{r}_0 \cos \hat{\varphi}_0 \\ \hat{r}_0 \sin \hat{\varphi}_0 \end{pmatrix}$; le curve γ^+ e $\widehat{\gamma}^+$ sono circonferenze concentriche. In base alla ortogonalità dei raggi alle circonferenze, la funzione $\tau = \tau(t)$ è quella per la quale si ha $t - \varphi_0 = \tau(t) - \hat{\varphi}_0$ e quindi

$$\sup_{t>0} |\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(\tau(t))| = \left| \begin{pmatrix} (r_0 - \hat{r}_0) \cos(t - \varphi_0) \\ (r_0 - \hat{r}_0) \sin(t - \varphi_0) \end{pmatrix} \right| = |r_0 - \hat{r}_0|$$

che è indipendente da t . Basta allora porre $|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0| < \varepsilon$ per riconoscere che la soluzione $\hat{\mathbf{x}}$ (che, si noti, è qualsiasi) è orbitalmente stabile. □

Esempio 4.1.8 $\dot{\mathbf{x}} := \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +y(x^2 + y^2) \\ -x(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$; $\mathbf{x}_0 := \begin{pmatrix} r_0 \cos \varphi_0 \\ r_0 \sin \varphi_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Le soluzioni sono: $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} +r_0 \cos(r_0^2 t - \varphi_0) \\ -r_0 \sin(r_0^2 t - \varphi_0) \end{pmatrix}$. Si consideri $\hat{\mathbf{x}}_0 := \begin{pmatrix} \hat{r}_0 \cos \hat{\varphi}_0 \\ \hat{r}_0 \sin \hat{\varphi}_0 \end{pmatrix}$; le curve γ^+ e $\widehat{\gamma}^+$ sono circonferenze concentriche. In base alla ortogonalità dei raggi alle circonferenze si ha $r_0^2 t - \varphi_0 = \hat{r}_0^2 \tau(t) - \hat{\varphi}_0$ e quindi

$$\sup_{t>0} |\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(\tau(t))| = \left| \begin{pmatrix} (r_0 - \hat{r}_0) \cos(r_0^2 t - \varphi_0) \\ (r_0 - \hat{r}_0) \sin(r_0^2 t - \varphi_0) \end{pmatrix} \right| = |r_0 - \hat{r}_0|$$

che è indipendente da t . Basta allora porre $|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0| < \varepsilon$ per riconoscere che la soluzione $\hat{\mathbf{x}}$ (che è qualsiasi) è orbitalmente stabile. □

Esempio 4.1.9 $\dot{\mathbf{x}} := \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{x}_0 := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Le soluzioni sono: $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} ct + x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Si consideri $\hat{\mathbf{x}}_0 := \begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \end{pmatrix}$; le curve γ^+ e $\widehat{\gamma}^+$ sono rette parallele. Affinché $\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(\tau(t))$ sia ortogonale a tali rette è necessario che $ct + x_0 = c\tau(t) + \hat{x}_0$ e cioè $\inf_{\tau} |\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(\tau)| = |y_0 - \hat{y}_0|$ che è indipendente da t . Basta allora porre $|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0| < \varepsilon$ per riconoscere che la soluzione $\hat{\mathbf{x}}$ (che è qualsiasi) è orbitalmente stabile. □

Esempio 4.1.10 $\dot{\mathbf{x}} := \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{x}_0 := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Le soluzioni sono: $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} y_0 t + x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Si consideri $\hat{\mathbf{x}}_0 := \begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \end{pmatrix}$; le curve γ^+ e $\widehat{\gamma}^+$ sono rette parallele. Affinché $\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(\tau(t))$ sia ortogonale a tali rette è necessario che $y_0 t + x_0 = \hat{y}_0 \tau(t) + \hat{x}_0$ e cioè $\inf_{\tau} |\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(\tau)| = |y_0 - \hat{y}_0|$ che è indipendente da t . Basta allora porre $|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0| < \varepsilon$ per riconoscere che la soluzione $\hat{\mathbf{x}}$ (che è qualsiasi) è orbitalmente stabile. $\square$

Esempio 4.1.11 $\dot{\mathbf{x}} := \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ +y \end{pmatrix}$; $\mathbf{x}_0 := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

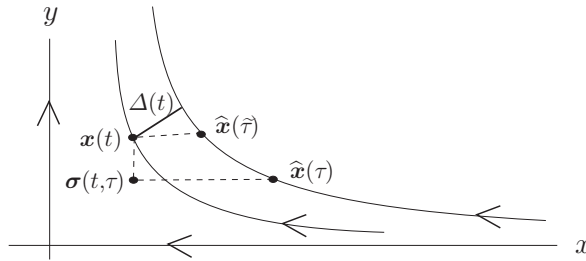
Le soluzioni sono: $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_0 e^{-t} \\ y_0 e^{+t} \end{pmatrix}$, e si hanno $\gamma^+ = \left\{ (x, y) \mid \frac{x}{x_0} = \frac{y_0}{y} \right\}$, oppure uno dei quattro semiasse coordinati. Si noti che le x decrescono al crescere del tempo. Si consideri $\hat{\mathbf{x}}_0 := \begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{y}_0 \end{pmatrix}$, per esempio nel primo quadrante. Anche se si usa la coordinata x come parametro per esprimere le traiettorie, la distanza

$$\Delta(x) = d(\mathbf{x}(x), \widehat{\gamma}^+) = \inf_{\hat{x} < \hat{x}_0} \sqrt{(x - \hat{x})^2 + \left(\frac{y_0 x_0}{x} - \frac{\hat{y}_0 \hat{x}_0}{\hat{x}} \right)^2}$$

non ha una espressione agevole. Conviene ricorrere alla disuguaglianza triangolare con un terzo punto; ad esempio con $\sigma(t, \tau) := \begin{pmatrix} x(t) \\ \hat{y}(\tau) \end{pmatrix}$. Ciò equivale a riconoscere che la norma del valore assoluto è maggiore o uguale di quella euclidea, e permette di ottenere:

$$\begin{aligned} \Delta(t) := \inf_{\tau \geq 0} |\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(\tau)| &\leq \inf_{\tau \geq 0} (|\mathbf{x}(t) - \sigma(t, \tau)| + |\sigma(t, \tau) - \hat{\mathbf{x}}(\tau)|) \\ &\leq \inf_{\tau \geq 0} (|y(t) - \hat{y}(\tau)| + |x(t) - \hat{x}(\tau)|). \end{aligned}$$

Successivamente si osserva che l' $\inf_{\tau \geq 0}$ è a sua volta minore o uguale del particolare valore che si ottiene calcolando l'argomento per un opportuno valore di $\tau \geq 0$, per esempio quella che si ottiene scegliendo $\tilde{\tau}$ tale che $y_0 e^t = \hat{y}_0 e^{\tilde{\tau}}$, e cioè $\tilde{\tau}(t) = t + \ln(y_0/\hat{y}_0)$, [ovvero anche $\hat{x}(x) = \hat{y}_0 \hat{x}_0 x / (y_0 x_0)$ purché y_0 abbia lo stesso segno di $\hat{y}_0$]. Si ottiene così $\Delta(t) \leq |x(t) - \hat{x}(\tilde{\tau}(t))| = \left| x_0 e^{-t} - \frac{\hat{x}_0 \hat{y}_0}{y_0} e^{-t} \right|$, ovvero $\Delta(x) = \left| \left(1 - \frac{\hat{y}_0 \hat{x}_0}{y_0 x_0} \right) x \right|$. Queste ultime decrescono al crescere di t . Ne segue che tutte le traiettorie sono orbitalmente stabili ad eccezione di quelle contenute nella retta $y = 0$, ed in particolare che è instabile la quiete nell'origine.



$\square$

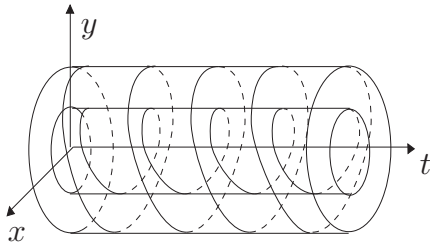
Esempio 4.1.12 $\dot{\mathbf{x}} := \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +y - x \sin \sqrt{x^2 + y^2} \\ -x - y \sin \sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$; $\mathbf{x}_0 := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

In coordinate polari si ha che

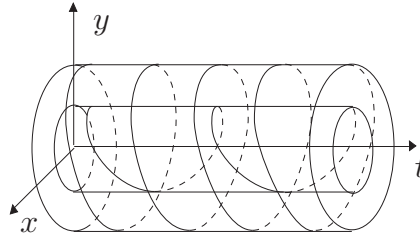
$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\rho^2) = -\rho^2 \sin \rho \quad \frac{d}{dt} \theta = -1,$$

pertanto $\dot{\rho}$ cambia segno per $\rho = k\pi$, con $k \in \mathbb{N}$, il che significa che si hanno cicli limite per questi valori di ρ ; essi saranno stabili se k è pari, ed instabili se k è dispari; tutte le altre traiettorie sono orbitalmente stabili. $\square$

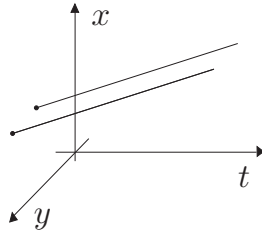
Si esaminino ora i seguenti grafici, nello spazio delle fasi ampliato, relativi ai precedenti esempi.



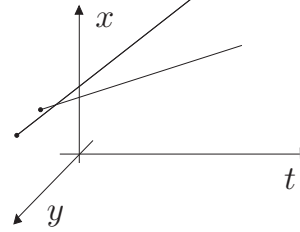
Esempio 3



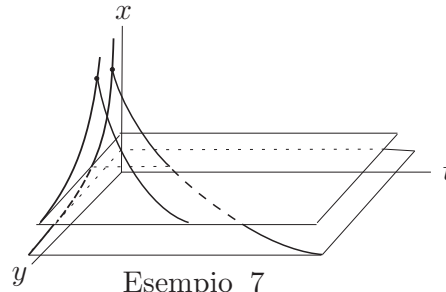
Esempio 4



Esempio 5



Esempio 6



Esempio 7

È facile convincersi che la stabilità orbitale è per molti aspetti troppo debole. Se si vuole che i punti rappresentativi di $\mathbf{x}(t)$, $\hat{\mathbf{x}}(t)$, e cioè *due stati relativi ad un medesimo istante*, siano vicini fra loro e che ciò accada *in ogni medesimo istante* è necessario ricorrere ad una forma più forte di stabilità.

Esempio 4.1.13 (continua l'esempio 4.1.8)

$$\dot{\mathbf{x}} := \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +y(x^2 + y^2) \\ -x(x^2 + y^2) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x}_0 := \begin{pmatrix} r_0 \cos \varphi_0 \\ r_0 \sin \varphi_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Le soluzioni sono: $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} +r_0 \cos(r_0^2 t - \varphi_0) \\ -r_0 \sin(r_0^2 t - \varphi_0) \end{pmatrix}$. Si consideri $\hat{\mathbf{x}}_0 := \begin{pmatrix} \hat{r}_0 \cos \hat{\varphi}_0 \\ \hat{r}_0 \sin \hat{\varphi}_0 \end{pmatrix}$ e si scelgano, per semplicità, $\hat{\varphi}_0 = 0 = \varphi_0$. Ne segue che il divario fra i due stati relativi ad un medesimo istante è dato da

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)| &= \left| \begin{pmatrix} +r_0 \cos r_0^2 t - \hat{r}_0 \cos \hat{r}_0^2 t \\ -r_0 \sin r_0^2 t + \hat{r}_0 \sin \hat{r}_0^2 t \end{pmatrix} \right| \\ &= \sqrt{|(r_0 - \hat{r}_0)^2 + 2r_0 \hat{r}_0 (1 - \cos(r_0^2 - \hat{r}_0^2)t)|} \end{aligned}$$

che è dipendente da t . Se ne conclude che per riuscire a limitare il divario per $t > 0$ e considerare $\hat{\mathbf{x}}$ stabile *non basta* porre $|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0| < \varepsilon$, a meno che sia $r_0 = \hat{r}_0$. In ogni altra eventualità, infatti, per piccolo che sia il divario iniziale $|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0|^2$ dopo un tempo sufficientemente lungo: $T \sim \pi(r_0^2 - \hat{r}_0^2)^{-1}$, esso diviene dell'ordine di grandezza di $(r_0 + \hat{r}_0)^2$. Ciò può essere accettabile solo se $\hat{r}_0 \sim 0$ e cioè se si studia la stabilità della soluzione identicamente nulla. $\square$

Questo comportamento è ben diverso da quello dell'oscillatore armonico lineare (Esempio 3) per il quale la frequenza non dipende dalle condizioni iniziali; è invece analogo a ciò che accade per il pendolo fisico. Analogamente, per l'Esempio 5 si ha $|\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)| = |\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0|$, mentre per l'Esempio 6 è

$$|\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)| = \sqrt{(y_0 - \hat{y}_0)^2(1 + t^2) + 2(x_0 - \hat{x}_0)(y_0 - \hat{y}_0)t + (x_0 - \hat{x}_0)^2}$$

che cresce con il tempo a meno che $y_0 = \hat{y}_0$. Ciò avviene anche nell'Esempio 7:

$$|\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)| = \sqrt{(x_0 - \hat{x}_0)^2 e^{-2t} + (y_0 - \hat{y}_0)^2 e^{2t}}.$$

Allo scopo di formalizzare queste osservazioni, si consideri un sistema $\dot{x} = v(t, x)$ con $v : (t, x) \mapsto v(t, x)$ liscio in $D \in \mathbb{R} \times \mathbb{M}$, e, come si è accennato, si fissi una norma: $|\cdot|$ sullo spazio $\mathbb{R}^n$ che localmente rappresenta $\mathbb{M}$. Si definisce

Stabile, secondo Liapunov, su $[t_0, \infty)$:= una soluzione $\hat{x} : t \mapsto \hat{x}(t) := \phi(t, t_0, \hat{x}_0)$ avente intervallo di definizione $J_M(\hat{x}) \supseteq [t_0, \infty) \cup [t_0, \infty)$ e tale che, dato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta(\varepsilon, t_0)$ per il quale $x_0 \in B_\delta(\hat{x}(t_0))$ implica che

$$\begin{cases} \phi(t, t_0, x_0) \text{ esiste per ogni } t > t_0, & \text{ed è tale che} \\ \sup_{t \geq t_0} |\phi(t, t_0, x_0) - \phi(t, t_0, \hat{x}(t_0))| < \varepsilon. \end{cases} \quad (1.2)$$

Questa stabilità è più forte di quella precedente, infatti:

$$\begin{aligned} \text{Liapunov} &:= \sup_t |x(t) - \hat{x}(t)| < \varepsilon && \text{implica} \\ \text{Poincaré} &:= \sup_t \inf_\tau |x(t) - \hat{x}(\tau)| < \varepsilon \end{aligned}$$

N.B. 4.1.14 Si osservi che la stabilità non dipende da t_0 nel senso che: se $\hat{x} : t \mapsto \hat{x}(t) = \phi(t, t_0, \hat{x}_0)$ è stabile su $[t_0, \infty)$ allora lo è anche su $[t'_0, \infty)$, sempre che essa sia definita nell'intervallo fra i due istanti t_0, t'_0 . In altre parole: se esiste $\delta := \delta(\varepsilon, t_0)$ tale che $|x_0 - \hat{x}(t_0)| < \delta$ implica la (1.2), allora per ogni $t'_0 \in J_M(\hat{x})$ esiste il corrispondente $\delta' := \delta'(\varepsilon, t'_0)$ che assicura in t'_0 una condizione analoga alla (1.2). Infatti, siccome $|t_0 - t'_0| < \infty$, la continuità delle applicazioni d'avanzamento rispetto al dato iniziale x'_0 e la loro compositività: $\mathcal{G}_{t'_0}^t = \mathcal{G}_{t_0}^t \mathcal{G}_{t'_0}^{t_0}$ assicurano l'esistenza di un δ' tale che $|x'_0 - \hat{x}(t'_0)| < \delta'$ implica $|x_0 - \hat{x}(t_0)| < \delta$ ed $|x(t) - \hat{x}(t)| < \varepsilon$ per ogni t fra i due istanti t'_0 e t_0 , (con $t'_0 \leq t_0$).

Pertanto la definizione di stabilità su $[t_0, \infty)$ equivale alla richiesta che la (1.2) sussista per un qualsiasi arbitrario $t_0 \in J_M(\hat{x})$. $\diamond$

N.B. 4.1.15 La stabilità alla Liapunov è la *continuità nel punto* $t_0, \hat{x}_0(t_0)$, ed *uniforme rispetto a* $t \in [t_0, +\infty)$, della corrispondenza $(t_0, x_0) \mapsto \phi(t, t_0, x_0)$; [o anche: l'equicontinuità su $[t_0, \infty)$ della famiglia di funzioni $\phi = \phi(t, \cdot, \cdot)$]. $\diamond$

N.B. 4.1.16 Nessuna soluzione degli Esempi 6 e 7 è stabile. Solo la soluzione nulla dell'Esempio 4 è stabile. Tutte le soluzioni degli Esempi 3, 5, 8 sono stabili fatta eccezione, per quest'ultimo, per quelle con dati sulle traiettorie $\hat{r}_0 = (2k+1)\pi$. $\diamond$

N.B. 4.1.17 Neanche la soluzione nulla dell'equazione $\dot{x} = x^2$ (vedi: [Esempio 1]) è stabile. $\diamond$

N.B. 4.1.18 Il sistema dell'Esempio 4 può essere scritto:

$$\begin{aligned} \text{sia come } \begin{cases} \dot{\rho} = 0 \\ \dot{\phi} = \rho^2 \end{cases} & \text{ con } \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \arctan y/x \end{cases} \\ \text{sia come } \begin{cases} \dot{\rho} = 0 \\ \dot{\theta} = 0 \end{cases} & \text{ con } \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = (\arctan y/x) - \rho^2 t \end{cases} \end{aligned}$$

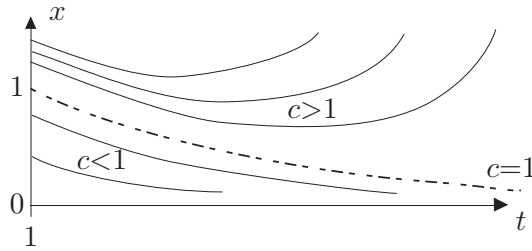
In questo secondo sistema di coordinate, naturalmente, l'equazione è del tipo dell'Esempio 5 e si ha pertanto stabilità, ma non così nelle coordinate $(x, y), (\rho, \phi)$. Se però la trasformazione di coordinate non dipende dal tempo e se la metrica si trasforma in modo uniformemente continuo, la stabilità si conserva nell'intersezione delle due carte. $\diamond$

Tuttavia può accadere che $\delta' = \delta(\varepsilon, t'_0) \neq \delta(\varepsilon, t_0)$, e può perfino succedere che $\delta(\varepsilon, t'_0) \rightarrow 0$ per $t'_0 \rightarrow \infty$. È noto il seguente

Esempio 4.1.19 La famiglia delle soluzioni di una equazione differenziale in $\mathbb{R}$ sia data da

$$\phi(t, 1, x_0) = \frac{c}{t} e^{(c^2-1)t},$$

con $c = c(x_0)$ tale che: $x_0 = ce^{(c^2-1)} \in \mathbb{R}$. L'equazione è $\dot{x} = (c^2 - 1 - 1/t)x$, $t \geq 1$.



La soluzione $t \mapsto \hat{x}(t) = 0$ uscente dal valore $c = 0$ ha “vicino” a sé, rispettivamente per $|c| < 1$ e per $|c| > 1$, sia soluzioni x tali che $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0$, sia soluzioni per le quali $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = +\infty$. Il valore $\delta(\varepsilon, t_0)$, che garantisce la prima eventualità purché sia $x_0 \in B_\delta(0)$, è senz’altro non maggiore di 1 per $t_0 = 1$, ma deve essere non maggiore di $1/t_0$ per $t_0 > 1$, né basta che sia minore di ε , con $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere ma fissato. $\square$

Qualora sia possibile fissare definitivamente un qualche intervallo $[\beta, \infty) \subseteq J_M(\hat{x})$ sul quale la funzione $\delta(\varepsilon, \cdot)$ ammetta estremo inferiore positivo, la $\hat{x}$ risulta verificare la seguente definizione:

Uniformemente stabile su $[\beta, \infty)$:= una soluzione $t \mapsto \hat{x}(t) := \phi(t, \hat{t}_0, \hat{x}_0)$ che sia stabile su $[\beta, \infty) \subseteq J_M(\hat{x})$, e per la quale è possibile fissare il δ della stabilità indipendente dal particolare istante t_0 , purché questo sia in $[\beta, \infty)$.

È chiaro che per sistemi autonomi (che sono invarianti per traslazioni sull’asse dei tempi) se una soluzione è stabile essa sarà anche uniformemente stabile.

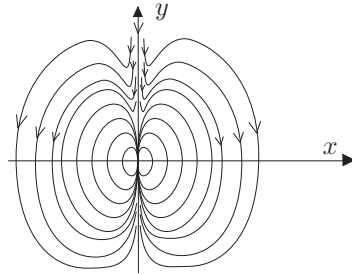
Asintoticamente stabile su $[t_0, \infty)$:= una soluzione $t \mapsto \hat{x}(t) := \phi(t, \hat{t}_0, \hat{x}_0)$ che oltre che essere stabile è anche tale da essere attrattiva.

Essa cioè è tale che, dato $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta(\varepsilon, t_0)$ per il quale $|x_0 - \hat{x}(t_0)| < \delta$ implica che $\phi(t, t_0, x_0)$ esiste per ogni $t > t_0$ ed è tale che

$$\begin{cases} \sup_{t \geq t_0} |\phi(t, t_0, x_0) - \phi(t, t_0, \hat{x}(t_0))| < \varepsilon, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |\phi(t, t_0, x_0) - \phi(t, t_0, \hat{x}(t_0))| = 0. \end{cases}$$

Anche in questo caso, se δ può essere scelto indipendente da t_0 , la asintotica stabilità è detta uniforme.

N.B. 4.1.20 Il seguente diagramma di fase mostra un esempio di punto di equilibrio attrattivo ma non stabile; esso quindi non è asintoticamente stabile. Ciò può avvenire però solo per sistemi non lineari.



◇

Degli Esempi 2-8 visti precedentemente solo le soluzioni con $r \neq (2k+1)\pi$ dell’Esempio 8 sono asintoticamente stabili.

N.B. 4.1.21 Per un sistema autonomo la stabilità della quiete in una posizione di equilibrio coincide con la stabilità orbitale: infatti il parametro τ può sempre essere scelto uguale a t dato che $\hat{x}(\tau(t)) = \hat{x}(t) = x_e$. Pertanto, per esempio nel caso $\dim = 2$, la stabilità dell’origine può essere “letta” dal diagramma di fase: un centro è stabile ma non asintoticamente; un nodo o un fuoco sono asintoticamente stabili o non sono stabili; una sella non è stabile. In ogni caso la stabilità è anche uniforme, data l’autonomia. $\diamond$

Come si è detto nel N.B.1, studiare la stabilità della $t \mapsto \hat{x}(t) := \phi(t, \hat{t}_0, \hat{x}_0)$ equivale a studiare la stabilità della soluzione nulla dell’equazione:

$$\dot{u} = v(t, \phi(t, t_0, \hat{x}(t_0)) + u) - v(t, \phi(t, t_0, \hat{x}(t_0))), \quad u := x - \phi(t, t_0, \hat{x}(t_0))$$

e si noti che la stabilità di $u(t, t_0, x_0 - \hat{x}(t_0)) = 0$ è la stessa, in generale, della sola soluzione $\hat{x}$ dalla quale si era partiti.

Viceversa per i *sistemi lineari*, e cioè sistemi del tipo:

$$\dot{y} = \mathcal{T}(t)y + b(t), \quad \mathcal{T}(t) \in \mathbb{L}(\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^n), \quad \mathcal{T}, b \in C^{r \geq 0}(\mathbb{R}),$$

(anche se non necessariamente “genuinamente” lineari, e cioè omogenei) sussistono le seguenti proposizioni:

Proposizione 4.1.1 *La stabilità della soluzione nulla dell'equazione omogenea associata: $\dot{x} = \mathcal{T}(t)x$ è la stessa di ogni altra soluzione del sistema, sia omogeneo che non omogeneo.*

Non così per la limitatezza delle soluzioni. Ad esempio, si veda oltre, un sistema lineare non omogeneo (e cioè un sistema non “genuinamente” lineare) può avere soluzioni non limitate e ciononostante stabili; si veda l'esempio 1.5 più sopra.

Dimostrazione Nel caso lineare il sistema $\dot{u} = v(t, \hat{y}(t) + u) - v(t, \hat{y}(t))$, che assegna la stabilità della (generica) soluzione $\hat{y}$, non dipende dalla soluzione $\hat{y}$ scelta, e cioè dai particolari $(\hat{t}_0, \hat{y}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{M}$. Infatti, detta $y = \hat{y} + u$ la soluzione variata della $\hat{y}$, per la funzione u si ha la

$$\dot{u} = v(t, \hat{y}(t) + u) - v(t, \hat{y}(t)) = \mathcal{T}(t)\hat{y}(t) + \mathcal{T}(t)u + b(t) - \mathcal{T}(t)\hat{y}(t) - b(t) = \mathcal{T}(t)u,$$

e ciò a prescindere non solo da quale sia $\hat{y}$, soluzione di $\dot{y} = \mathcal{T}(t)y + b(t)$, ma anche da $b = b(t)$. Se ne deduce che la stabilità della soluzione nulla di quest'ultima è quella della (arbitraria) soluzione $\hat{y}$ dell'equazione non omogenea. ■

Solo per sistemi lineari quindi si può parlare di stabilità del sistema e non solo di una sua specifica soluzione. Si ricordi, a questo proposito, che per essi l'avere soluzioni definite per ogni t è una diretta conseguenza della regolarità per $t \rightarrow \infty$ dei coefficienti, cosa questa che nel seguito verrà sempre supposta.

N.B. 4.1.22 [continuazione del N.B.4.1.2] In riferimento a quanto si è già accennato nel N.B.4.1.2, si osservi che la precedente proposizione è vera solo in quanto questo tipo di stabilità è costruito valutando il divario isocrono $|y(t) - \hat{y}(t)|$. L'esempio 1.7, infatti, mostra che ciò non avviene nel caso della stabilità orbitale. ◇

Per il sistema genuinamente lineare $\dot{x} = \mathcal{T}(t)x$, $x_0 \in \mathbb{V}$, (a dimensione finita: $\mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^n$) si hanno i seguenti criteri di stabilità (vedi: [Hale §III.2]).

Sia $\Phi : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{L}(\mathbb{V})$ un sistema fondamentale dell'equazione assegnata; si indichi con $\|\mathcal{T}(t)\|$ la norma spettrale di $\mathcal{T}(t)$, e con $\|\cdot\|_\infty$ la norma “del sup” sulle funzioni definite su $[t_0, \infty)$ ed a valori in uno spazio normato. Si definisce

$$\|\mathcal{T}\|_\infty := \sup_{t \geq t_0} \|\mathcal{T}(t)\|.$$

Si ricordi poi che in uno spazio vettoriale a dimensione finita quale è $\mathbb{L}(\mathbb{V})$ e quelli ad esso isomorfi (fra i quali è quello delle soluzioni dell'equazione $\dot{X} = \mathcal{T}(t)X$) tutte le norme sono equivalenti fra loro. Pertanto un eventuale cambio di base può cambiare (quando non ortogonale) il valore numerico della norma di un operatore, ma non può mutarne le proprietà di limitatezza.

Osservazione.

La limitatezza di una (qualsiasi) matrice fondamentale $\|\Phi\|_\infty \leq \kappa < \infty$ equivale alla limitatezza di ogni soluzione del sistema.

Infatti la condizione è certo sufficiente. Viceversa, se per ogni x_0 finito si ha che $\|x\|_\infty$ è finito, e cioè se per ciascun $x_0 \in \mathbb{V}$ la condizione $|x_0| \leq \ell_1 < \infty$ è sufficiente ad assicurare che per ogni $t \geq t_0$ si ha

$$|x(t)| \equiv |\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0| \leq \ell_2 \quad \text{per qualche } \ell_2 < \infty,$$

allora per ogni $|x_0|/\ell_1 = |x_0|/\ell_1 =: |\xi| \leq 1$ si ha $|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\xi| \leq \ell_2/\ell_1$ per ogni $t \geq t_0$. Ne segue $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\| \leq \ell_2/\ell_1$ per ogni $t \geq t_0$ e quindi (moltiplicando per $\|\Phi(t_0)\|$) se ne ricava la $\|\Phi\|_\infty \leq \|\Phi(t_0)\| \ell_2/\ell_1$ in virtù della $\|\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\| \leq \|\mathcal{T}_1\| \cdot \|\mathcal{T}_2\|$.

Proposizione 4.1.1 *Il sistema $\dot{x} = \mathcal{T}(t)x$, $x_0 \in \mathbb{V}$, ed in particolare la soluzione nulla del sistema, è (almeno) stabile su $[t_0, \infty)$ se e solo se, detto Φ un suo sistema fondamentale, esiste $0 < \kappa_0 < \infty$ tale che $\|\Phi(t)\| \leq \kappa_0$ per ogni $t \in [t_0, \infty)$.*

Ovvero: *un sistema lineare omogeneo (e cioè genuinamente lineare) ha soluzioni (tutte) stabili se e solo se (tutte) limitate.*

Dimostrazione

($s \Rightarrow l$) Per ipotesi esiste $\delta(\varepsilon, t_0)$ tale che $|x_0| < \delta$ implica $|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0| < \varepsilon$ per ogni $t \geq t_0$. Una dimostrazione analoga a quella fatta nell'Osservazione qui sopra, con $\ell_1 \equiv \delta$ ed $\ell_2 \equiv \varepsilon$, fornisce $\kappa_0 := \|\Phi(t_0)\| \varepsilon / \delta$.

($s \Leftarrow l$) Se $\|\Phi\|_\infty < \kappa_0$, per $t \geq t_0$ si ha $|x(t)| \leq \|\Phi(t)\| \|\Phi^{-1}(t_0)\| |x_0| \leq \kappa_0 \|\Phi^{-1}(t_0)\| |x_0|$, e quest'ultimo è minore di ε purché sia $|x_0| < \delta(\varepsilon, t_0) := \|\Phi^{-1}(t_0)\|^{-1} \varepsilon / \kappa_0$. Si osservi che può essere $\|\Phi^{-1}(t_0)\|^{-1} \ll \|\Phi(t_0)\|$. ■

In effetti si è mostrato che l'esistenza di una conveniente $\kappa_0 = \kappa_0(t_0)$, che renda vera la condizione

$$\sup_{t \geq t_0} \|\Psi(t, t_0)\| \equiv \sup_{t \geq t_0} \|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\| \leq \kappa_0(t_0),$$

equivale alla stabilità. Ne segue che:

Proposizione 4.1.2 *Il sistema $\dot{x} = \mathcal{T}(t)x$, $x_0 \in \mathbb{V}$, è uniformemente stabile su $[\beta, \infty)$ se e solo se esiste $\tilde{\kappa} = \tilde{\kappa}(\varepsilon, \beta) > 0$ tale che $\|\Psi(t, \sigma)\| = \|\Phi(t)\Phi^{-1}(\sigma)\| \leq \tilde{\kappa}$ per t, σ tali che $\beta \leq \sigma \leq t$.*

Dimostrazione

($us \Rightarrow \tilde{\kappa}$) Come nella Osservazione, si ricava $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(\sigma)\| \leq \varepsilon / \delta$.

($us \Leftarrow \tilde{\kappa}$) Come nella Proposizione 1 si può ottenere facilmente la stima $|x(t)| \leq \tilde{\kappa}|x_0|$ per t e t_0 arbitrari purché $\beta \leq t_0 \leq t$. ■

Proposizione 4.1.3 *Il sistema $\dot{x} = \mathcal{T}(t)x$, $x_0 \in \mathbb{V}$, è asintoticamente stabile su $[t_0, \infty)$ se e solo se esistono: una $\kappa_0 = \kappa_0(\varepsilon, t_0) > 0$ tale che $\|\Phi(t)\| \leq \kappa_0$ per ogni $t \geq t_0$ ed inoltre, dato comunque $\eta > 0$, esiste $T = T(\eta, t_0) > 0$ tale che $\|\Phi(t)\| < \eta$, purché $t \geq t_0 + T(\eta, t_0)$.*

Dimostrazione Come sopra, notando che la condizione implica la stabilità. ■

Proposizione 4.1.4 *Il sistema $\dot{x} = \mathcal{T}(t)x$, $x_0 \in \mathbb{V}$, è uniformemente ed asintoticamente stabile su $[\beta, \infty)$ se e solo se esistono $\kappa(\varepsilon, \beta) > 0$ ed $\alpha(\varepsilon, \beta) > 0$ tali che*

$$\|\Phi(t)\Phi^{-1}(\sigma)\| \leq \kappa e^{-\alpha(t-\sigma)} \quad \text{per } \beta \leq \sigma \leq t.$$

Dimostrazione

($ua \Leftarrow \kappa, \alpha$) Per la Proposizione 2, il sistema è uniformemente stabile, con $\tilde{\kappa} = \kappa$. Esiste quindi il $\delta(\varepsilon, \beta) = \varepsilon / \kappa$ della uniforme stabilità. Sia $|x_0| < \delta$. Per ipotesi risulta

$$|x(t)| = |\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0| \leq \kappa e^{-\alpha(t-t_0)} \delta$$

per $t \geq t_0 \geq \beta$. Dato $\eta > 0$ piccolo a piacere, è allora sufficiente che sia $t - t_0 \geq T$ con T tale che $\kappa e^{-\alpha T} \delta := \eta$, per ottenere che: $|x(t)| \leq \eta$.

($ua \Rightarrow \kappa, \alpha$) Per ipotesi, esiste $\delta(\varepsilon, \beta) > 0$ tale che: $t \geq t_0 \geq \beta$ ed $|x_0| < \delta$ implicano $|x(t)| < \varepsilon$. Inoltre, dato comunque $\eta > 0$ esiste $T(\varepsilon, \eta, \beta)$ per il quale $t \geq t_0 + T$ implica $|x(t)| < \eta$. Mediante quest'ultima stima, e procedendo come nella Osservazione, con $\ell_1 = \delta$ ed $\ell_2 = \eta$ si ottiene la valutazione $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\| \leq \eta / \delta$ purché $t \geq t_0 + T$, e non lede la generalità supporre $\eta / \delta < 1$. La condizione di uniformità, e cioè l'indipendenza di δ e di T da t_0 , garantisce poi che:

- $\|\Psi(\sigma + T, \sigma)\| = \|\Phi(\sigma + T)\Phi^{-1}(\sigma)\| \leq \eta / \delta$ per qualunque $\sigma \geq \beta$;
- esiste ed è finito, anche se può essere grande, $\tilde{\kappa}(\varepsilon, \beta) > 0$ tale che: $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(\sigma)\| < \tilde{\kappa}$ per ogni $t \geq \sigma \geq \beta$.

Si pongano α e κ tali che $\eta/\delta =: e^{-\alpha T}$, $\tilde{\kappa} =: \kappa e^{-\alpha T}$; e sia $m \in \mathbb{N}$ tale che $t - t_0 \in [mT, (m+1)T]$. Risulta, con $\sigma := t_0 + (m-1)T$,

$$\begin{aligned} \|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\| &\leq \|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0 + mT)\| \|\Phi(t_0 + mT)\Phi^{-1}(t_0)\| \\ &\leq \tilde{\kappa} \|\Phi(t_0 + mT)\Phi^{-1}(t_0)\| \\ &=: \tilde{\kappa} \|\Phi(\sigma + T)\Phi^{-1}(\sigma)\Phi(\sigma)\Phi^{-1}(t_0)\| \\ &\leq \tilde{\kappa}\eta/\delta \|\Phi(t_0 + (m-1)T)\Phi^{-1}(t_0)\| \\ &\leq \dots \\ &\leq \tilde{\kappa} \left(\frac{\eta}{\delta}\right)^m = \tilde{\kappa}(e^{-\alpha T})^m =: \kappa(e^{-\alpha T})^{m+1} \leq \kappa e^{-\alpha(t-t_0)}. \end{aligned}$$

In breve: l'evoluzione contrae, quindi dopo una durata T si ha una riduzione valutabile con $\|\Phi(\sigma + T)\Phi^{-1}(\sigma)\| \leq \eta/\delta$, e questo è uniforme, cioè accade definitivamente per $\sigma \geq \beta$, e senza che δ dipenda da σ . Se allora si misura l'ascissa temporale t a passi T , e si sceglie α tale che $\eta/\delta =: e^{-\alpha T}$, si ha che la crescita della norma, essendo limitata da $\tilde{\kappa}(\eta/\delta)^m$, è valutabile da $\tilde{\kappa} =: \kappa e^{-\alpha T}$ nell'intervallo $[t_0 + mT, t]$, e da m fattori $e^{-\alpha T}$ su $[t_0, t_0 + mT]$. Al crescere di m si descrive tutto $\mathbb{R}$. T dipende dalla velocità di convergenza fissata da η e non da t_0 . L'andamento esponenziale proviene dalla struttura di prodotto delle Φ . ■

Nel caso particolare di sistemi lineari a coefficienti costanti: $\dot{x} = \mathcal{T}x$, dalle Proposizioni precedenti si deduce che:

$$\dot{x} = \mathcal{T}x \text{ è stabile (almeno) se e solo se } \begin{cases} \Re \lambda \leq 0 & \text{per ogni } a\text{-valore di } \mathcal{T} \\ \Re \lambda = 0 & \text{solo con divisori semplici} \end{cases}$$

$\dot{x} = \mathcal{T}x$ è asintoticamente stabile se e solo se $\Re \lambda < 0$ per ogni a -valore di $\mathcal{T}$;

tutto ciò in modo uniforme, data l'autonomia.

Le precedenti considerazioni mostrano che la stabilità di $\dot{y} = \mathcal{T}(t)y + b(t)$ è determinata dalla sua parte omogenea, e quindi prescinde dal termine forzante, anche se questo dovesse portare a soluzioni *non limitate*, vedi l'Esempio 5 per il quale il sistema omogeneo è $\dot{x} = 0$, ed è quindi stabile. Diverso è invece il caso dell'Esempio 6 nel quale il sistema è già omogeneo, ma la radice $\lambda = 0$ ha (molteplicità due e) divisori *non semplici*. Se ne deduce, ad esempio, che il moto di un elemento materiale pesante libero nel vuoto *non è stabile*.

Sono stabili, se $\omega^2 > 0$, tutte le soluzioni dell'equazione $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$ pur potendo risuonare. Viceversa l'equazione di Hill: $\ddot{x} + (c + p(t))x = 0$ con p periodica, che è omogenea, ha soluzioni stabili (almeno) se e solo se sono limitate; anzi, l'essere reciproco dà l'impossibilità di avere le soluzioni che siano asintoticamente stabili, e pertanto per l'equazione di Hill la stabilità semplice equivale alla limitatezza delle soluzioni.

Proposizione 4.1.5 Se $\dot{x} = \mathcal{T}(t)x$, $x_0 \in \mathbb{V}$, è uniformemente stabile su $[\beta, \infty)$, e se $\int_{\beta}^{\infty} \|\mathcal{B}(t)\| dt < \infty$ con $\mathcal{B}: t \mapsto \mathcal{B}(t) \in \mathbb{L}(\mathbb{V})$, $\mathcal{B} \in C([\beta, \infty))$, allora $\dot{x} = (\mathcal{T}(t) + \mathcal{B}(t))x$ è anch'esso uniformemente stabile su $[\beta, \infty)$.

Dimostrazione Indicando con Φ un qualsiasi sistema fondamentale del sistema (omogeneo) ridotto $\dot{x} = \mathcal{T}(t)x$ si ha

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\mathcal{B}(\tau)x(\tau)d\tau;$$

pertanto, per ipotesi, esiste $\kappa = \kappa(\beta) < \infty$ tale che ($t_0 \geq \beta$)

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \kappa|x_0| + \int_{t_0}^t \kappa \|\mathcal{B}(\tau)\| |x(\tau)| d\tau \leq \quad (\text{Gronwall}) \\ &\leq \kappa|x_0| \exp \int_{\beta}^t \kappa \|\mathcal{B}(\tau)\| d\tau \leq \kappa_1 < \infty. \end{aligned}$$

■

Esempio 4.1.23 $\ddot{x} - e^{-t}\dot{x} + x = 0$, $x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R}$, è del tipo visto nella Proposizione con $\mathcal{T}$ rappresentato da $\mathcal{T}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi con $\lambda_{1,2} = \pm i$, semplici. $\mathcal{T}$ è uniformemente stabile e quindi l'intera equazione, giacché $\|\mathcal{B}(t)\| = |e^{-t}|$. □

N.B. 4.1.24 Il teorema non si può applicare nel caso dell'equazione di Mathieu (§ II.5). Infatti benché la parte costante sia uniformemente stabile, per essa risulta $\int_{t_0}^{\infty} |\cos \omega t| dt = \infty$. Per analogo motivo, il teorema non si può applicare nemmeno al caso $\ddot{x} - \frac{2}{t} \dot{x} + x = 0$, $x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R}$, giacché $\int_{\beta}^{\infty} \frac{2}{t} dt = \infty$ anche se $\beta > 0$. In effetti anche quest'ultima equazione, lineare omogenea, ha soluzioni non limitate: $x(t) = \sin t - t \cos t$ e quindi non stabili. $\diamond$

Proposizione 4.1.1 Se $\dot{x} = \mathcal{T}(t)x$, $x_0 \in \mathbb{V}$, è uniformemente ed asintoticamente stabile su $[\beta, \infty)$, se $\int_{\beta}^t \|\mathcal{B}(\tau)\| d\tau < \chi(t - t_0) + \sigma$ per certi σ, χ dipendenti, al più, da β , e se $\kappa(\beta)$ ed $\alpha(\beta)$ in $\mathbb{R}^+$ tali che $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\| \leq \kappa e^{-\alpha(t-\tau)}$ verificano $\alpha > \kappa\chi$, (ove Φ è un sistema fondamentale del sistema (omogeneo) ridotto: $\dot{x} = \mathcal{T}(t)x$), allora $\dot{x} = (\mathcal{T}(t) + \mathcal{B}(t))x$ è anch'esso uniformemente ed asintoticamente stabile su $[\beta, \infty)$.

Questo è il caso, ad esempio, se $\mathcal{T}$ e $\mathcal{B}$, entrambi costanti, sono tali che $\Re \lambda^{(\mathcal{T})} < 0$ e che $\|\mathcal{B}\| < \|\mathcal{T}\|_{\mathbb{B}, \max}$, con $\mathbb{B}$ la base ε -quasi propria di $\mathcal{T}$. Allora si ha $\chi = \|\mathcal{B}\|$.

Dimostrazione Per l'uniforme ed asintotica stabilità di $\dot{x} = \mathcal{T}(t)x$ si ha:

$$|x(t)| \leq \kappa e^{-\alpha(t-t_0)} |x_0| + \int_{t_0}^t \kappa e^{-\alpha(t-\tau)} \|\mathcal{B}(\tau)\| |x(\tau)| d\tau,$$

ponendo allora $z(t) := e^{\alpha t} |x(t)|$ si ha, per il Lemma di Gronwall,

$$z(t) \leq z_0 \kappa \exp \left(\kappa \int_{t_0}^t \|\mathcal{B}(\tau)\| d\tau \right) \leq z_0 \kappa \exp (\kappa \chi (t - t_0) + \kappa \sigma),$$

da cui

$$|x(t)| \leq |x_0| \kappa \exp (-(\alpha - \kappa \chi)(t - t_0) + \kappa \sigma).$$

■

Contrariamente ai casi visti, nei quali le equazioni esaminate erano lineari, lo studio della stabilità della soluzione nulla di un generico sistema non lineare

$$\dot{x} = v(t, x), \quad x \in \mathbb{M}, \quad v(t, 0) = 0, \quad \forall t \geq t_0$$

è notevolmente più difficile.

Il seguente teorema (vedi: [Hale §III.2]) è una estensione del celebrato:

Teorema 4.1.1 (1° teorema di Liapunov sulla stabilità lineare) Sia $\mathcal{T} : t \mapsto \mathcal{T}(t) \in \mathbb{L}(\mathbb{V} \equiv T_0 \mathbb{M})$, $\mathcal{T} \in C^0([\beta, \infty))$.

Sia $\dot{x} = \mathcal{T}(t)x$, $x_0 \in \mathbb{V}$, uniformemente ed asintoticamente stabile su $[\beta, \infty)$.

Se $h \in C^0([\beta, \infty) \times N(0))$ è tale che $\lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{|h(t, x)|}{|x|} = 0$ uniformemente per $t \in [\beta, \infty)$, e cioè: se, dato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta_{(h)} = \delta_{(h)}(\varepsilon, \beta) > 0$ tale che quando $|x| < \delta_{(h)}$ e $t \geq \beta$ accade che $|h(t, x)| < \varepsilon |x|$, allora: la soluzione nulla di $\dot{x} = \mathcal{T}(t)x + h(t, x)$ esiste per $t \geq \beta$ ed è uniformemente ed asintoticamente stabile su $[\beta, \infty)$.

Dimostrazione Per ipotesi esistono $\alpha, \kappa > 0$, dipendenti al più da β e dalle tolleranze $\tilde{\varepsilon}$ richieste dalla stabilità del sistema omogeneo ridotto $\dot{x} = \mathcal{T}(t)x$ (del quale si è chiamato Φ un sistema fondamentale), tali che $\|\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\| \leq \kappa e^{-\alpha(t-\tau)}$. Ciò permette la stima

$$|x(t)| \leq \kappa e^{-\alpha(t-t_0)} |x_0| + \int_{t_0}^t \kappa e^{-\alpha(t-\tau)} |h(\tau, x(\tau))| d\tau.$$

Si fissi ora $\varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}$ tale che $\alpha > \kappa \varepsilon$, e sia $|x_0| < \delta_{(h)}(\varepsilon, \beta)$. Sia poi $t > t_0$ l'estremo superiore degli istanti $\tau \in [t_0, t]$ per i quali $|x(\tau)| < \delta_{(h)}$, (e quindi certamente $|h(\tau, x(\tau))| < \varepsilon |x(\tau)|$). Si ha

$$|x(t)| \leq \kappa e^{-\alpha(t-t_0)} |x_0| + \int_{t_0}^t \kappa e^{-\alpha(t-\tau)} \varepsilon |x(\tau)| d\tau.$$

Applicando anche qui il Lemma di Gronwall su $z(t) := e^{\alpha t}|x(t)|$ si ottiene

$$z(t) \leq z(t_0)\kappa \exp \int_{t_0}^t \varepsilon \kappa d\tau \quad \text{e cioè} \quad |x(t)| \leq \kappa e^{-\alpha(t-t_0)}|x_0|e^{\varepsilon\kappa(t-t_0)}$$

Ma è stato fissato $\alpha - \varepsilon\kappa > 0$ e quindi, purché si scelga $|x_0| < \min \{\delta_{(h)}/\kappa, \delta_{(h)}\}$, risulterà senz'altro $|x(t)| < \delta_{(h)}$ e ciò per ogni $t > t_0$. Il teorema del prolungamento implica infine l'esistenza della soluzione per ogni $t > t_0$. ■

N.B. 4.1.25 Il risultato è locale in x nel senso che la stabilità che si dimostra è solo quella della soluzione nulla del sistema. Inoltre si osservi che la richiesta proprietà di stabilità è stata qui mostrata usando come tolleranza sul dato iniziale quel $\delta_{(h)}$ per il quale $|h(t, x)| < \varepsilon|x|$. Tale $\delta_{(h)}$ va paragonato con le tolleranze δ_ε richieste per la stabilità. ◇

N.B. 4.1.26 È valido anche il seguente enunciato (vedi: [Cesari § 6.2]) Se h è tale che $|h(t, x)| < |c(t)||x|$ con $\int_{\beta}^{\infty} |c(t)|dt < \infty$ allora l'origine è uniformemente stabile per $\dot{x} = \mathcal{T}(t)x$ e la soluzione nulla di $\dot{x} = \mathcal{T}(t)x + h(t, x)$ è uniformemente stabile; essa inoltre è anche asintoticamente stabile se tale era la soluzione nulla di $\dot{x} = \mathcal{T}(t)x$. ◇

N.B. 4.1.27 Le proprietà richieste alla funzione h affinché sussista il precedente teorema sono *più forti* di quelle che sono senz'altro garantite dal teorema della media quando il campo $\mathcal{T}(t)u + h(t, u)$ viene calcolato a partire da un generico $v = v(t, x)$, $v \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{M}) \cap C^1(\mathbb{M})$, mediante le:

$$\begin{cases} u := x - \hat{x}, & u_0 = (x_0 - \hat{x}_0) \\ w(t, u) := v(t, \hat{x}(t) + u) - v(t, \hat{x}(t)) =: \mathcal{T}(t)u + h(t, u), \\ \mathcal{T}(t) = v_*(t, \hat{x}(t)) \equiv w_*(t, 0), \\ h(t, u) := w(t, u) - w_*(t, 0)u. \end{cases}$$

Infatti, in tal caso, sulla funzione h si sa solo che $|h(t, u)| = o(|u|)$ limitatamente ai compatti $\beta \leq t \leq T < \infty$.

Vi sono però degli importanti casi in cui la h ottenuta in tal modo riesce a verificare le ipotesi necessarie a che il teorema sussista. In particolare, esse sussistono se la parte lineare di un sistema a campo liscio e autonomo ha punto di equilibrio che è un pozzo, in tal caso risulta un pozzo anche il punto di equilibrio del sistema non lineare.

Inoltre, esse sussistono quando sia il campo v che la soluzione $\hat{x}$ sono costanti o periodiche. Tuttavia, se il campo della linearizzata è costante e la soluzione di riferimento periodica, il fatto che essa ammetta $n - 1$ moltiplicatori negativi (oltre a quello nullo relativo alla soluzione periodica) non garantisce l'asintoticità alla Liapunov, ma solo quella orbitale: la soluzione variata tende alla $\hat{x}$ ma con uno sfasamento finito ([Coddington § 13.2]). ◇

Divagazione

Quest'ultima considerazione si può perfezionare. Verrà qui accennato (seguendo Arnold 1) il caso dei sistemi lineari a coefficienti costanti, e richiamati due importanti risultati sui non lineari. Il metodo di dimostrazione è di tipo "diretto" (vedi oltre).

Punto n° 1. Qualunque sia l'operatore $\mathcal{T} \in \mathbb{L}(\mathbb{V})$, esso ammette una base ε -quasi propria reale nella quale $\mathcal{T}$ ha matrice: $\mathcal{T}_\varepsilon := \begin{pmatrix} \mathbf{J}_\varepsilon^{(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{J}_\varepsilon^{(k)} \end{pmatrix}$ ove le varie $\mathbf{J}_\varepsilon^{(h)}$ sono del tipo (rispettivamente nel caso di autovalori reali o complessi)

$$\begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} {}^{\mathbb{R}}\mu & \varepsilon \mathbb{I}_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon \mathbb{I}_2 \\ 0 & & & {}^{\mathbb{R}}\mu \end{pmatrix}$$

con $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere, λ autovalore reale, $\mu =: \alpha + i\beta$ autovalore complesso dell'operatore $\mathcal{T}$, e con ${}^{\mathbb{R}}\mu := \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$. Essa si ottiene dividendo ciascun versore della base di Jordan per il numero ε^k essendo k l'indice di "livello" dell'autovettore generalizzato nella catena di Jordan cui esso appartiene: k è massimo per gli autovettori, e vale zero per i vettori iniziali delle catene nel $\text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda_j \mathbb{I})^{q_j}$.

In tal modo ciascun blocco di Jordan

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

resta trasformato, mediante la matrice

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \ddots & & & 0 \\ & 1/\varepsilon^2 & & \\ & & 1/\varepsilon & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

nel blocco:

$$\mathbf{J}_\varepsilon = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{J} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

e per lo stesso motivo le coordinate si trasformano secondo la $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}$.

Curiosità: si riscaldano le autocoordinate generalizzate rispetto alle autocoordinate in senso inverso a quello nel quale la matrice $e^{\mathbf{T}t}$ le amplifica moltiplicandole per i polinomi nella variabile t . La coordinata contenente il polinomio di grado k viene moltiplicata per ε^k . Le nuove coordinate risultano “quasi” disaccoppiate e le traiettorie “quasi” rettificare.

Punto n° 2. Chiamata $\mathbb{B} := \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ la base definita nel punto precedente, essa è tale che $(\mathcal{K}_{\mathbb{B}})_{hk} = \langle \epsilon_h, \epsilon_k \rangle_{\mathbb{B}} = \langle e_h, e_k \rangle = \delta_{hk} = \boldsymbol{\kappa}_{hk}$. Rispetto ad essa la $\mathbb{B}$ -lunghezza di x risulta

$$r^2 = r^2(x) := \langle x, x \rangle_{\mathbb{B}} = \sum_{i=1}^{\nu} (\xi^i)^2 + \sum_{i=\nu+1}^{\nu+\tau} (\tilde{\xi}^i)^2 + (\tilde{\eta}^i)^2$$

ove (vedi Cap II) si intendono presenti ν autosoluzioni reali $\{\lambda_j\}_{j=1, \dots, \nu}$ e τ coppie di autosoluzioni complesse $\{\mu_h, \bar{\mu}_h\}_{h=\nu+1, \dots, \nu+\tau}$, e quindi $\nu + 2\tau = n$, non tutte necessariamente distinte; e dove si sono indicate con $(\xi^1, \dots, \xi^\nu)$ le $\mathbb{B}$ -componenti (reali) di x nello $\text{span}\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_\nu\}$ dei (nuovi) autovettori generalizzati relativi agli autovalori reali, e con $\{(\tilde{\xi}^k, \tilde{\eta}^k)\}_{k=\nu+1, \dots, \nu+\tau}$ le $\mathbb{B}$ -componenti (reali) di x nella parte reale $\mathbb{R}\text{-span}\{x_\mu, y_\mu\}$ dello span complesso dei (nuovi) autovettori generalizzati $\{\epsilon_{\mu_k}, \bar{\epsilon}_{\mu_k}\}_{k=\nu+1, \dots, \nu+\tau}$ relativi alle coppie autovalori complessi coniugati.

Ne segue che, per costruzione, le $\mathbb{B}$ -coordinate di $\mathcal{T}x$ sono della forma, ad esempio,

$$\left(\mathcal{T}x \right)_{\mathbb{B}} = (\lambda_1 \xi^1 + \varepsilon \xi^2, \lambda_1 \xi^2 + \varepsilon \xi^3, \dots, \lambda_1 \xi^{q_1}, \dots, (\alpha_1 \tilde{\xi}^1 - \beta_1 \tilde{\eta}^1), (\beta_1 \tilde{\xi}^1 + \alpha_1 \tilde{\eta}^1), \dots)$$

e quindi la forma quadratica $\mathcal{Q}_\varepsilon(x) := \langle x, \mathcal{T}x \rangle_{\mathbb{B}}$ è esprimibile mediante la

$$\mathcal{Q}_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_{(i)} (\xi^i)^2 + \sum_{i=\nu+1}^{\nu+\tau} \Re \mu_{(i)} \left((\tilde{\xi}^i)^2 + (\tilde{\eta}^i)^2 \right) + O(\varepsilon)$$

Punto n° 3. Le forme quadratiche su $\mathbb{R}^n$: $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) \equiv \sum_{h,k} x^h \mathbf{B}_{hk} x^k$, (ove $\mathbf{B}_{hk}$ è una matrice simmetrica reale $n \times n$) sono funzioni continue. Ciò comporta che: *le Forme quadratiche non degeneri*, cioè quelle con rango massimo (ed uguale ad n), *sono un insieme aperto* nello spazio delle $\mathcal{Q}$ reso metrico ad esempio dalla norma: $\|\mathcal{Q}\| := \max_{h,k} |\mathbf{B}_{hk}|$. In particolare è aperto il loro sottoinsieme di quelle di segno definito. [Infatti: sia ad esempio $\mathcal{Q}$ definita positiva. È strettamente positivo il valore $m := \min_{\|\mathbf{x}\|=1} |\mathcal{Q}(\mathbf{x})|$. Se allora $\|\mathcal{Q}' - \mathcal{Q}\| < \eta < m/n^2$, sulla superficie della sfera unitaria si ha $|\mathcal{Q}'(\mathbf{x}) - \mathcal{Q}(\mathbf{x})| < n^2 \eta < m$ e quindi anche $\mathcal{Q}'$ è definita positiva. La separazione di $\mathbb{R}^n$ nei due sottospazi sui quali $\mathcal{Q}$ è separata in parte positiva e parte negativa garantisce l'asserto].

Pertanto se

$$\mathcal{Q}_0(\boldsymbol{\xi}) := \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_{(i)} (\xi^i)^2 + \sum_{i=\nu+1}^{\nu+\tau} \Re \mu_{(i)} \left((\tilde{\xi}^i)^2 + (\tilde{\eta}^i)^2 \right)$$

ha segno definito, si può scegliere ε tanto piccolo da far sì che anche la $\mathcal{Q}_\varepsilon$ qui sopra sia di segno definito, e del medesimo segno di quello di $\mathcal{Q}_0$.

Punto n° 4. Dal Punto 3 segue che se esistono $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tali che: $c_1 < \Re \lambda < c_2 < 0$ per tutti gli autovalori (reali o complessi) di $\mathcal{T}$, non solo risulta definita negativa la forma $\mathcal{Q}_0$, ma lo è anche la $\mathcal{Q}_\varepsilon$.

Posto: $r^2 := \langle x, x \rangle_{\mathbb{B}}$, dall'uguaglianza $\frac{d}{dt} r^2 := \mathcal{L}_{\mathcal{T}x}(r^2) = 2\langle x, \mathcal{T}x \rangle_{\mathbb{B}} = 2\mathcal{Q}_\varepsilon(x)$ si deduce che le soluzioni dell'equazione $\dot{\xi} = \mathcal{T}_\varepsilon \xi$ rappresentano quelle di $\dot{x} = \mathcal{T}x$ e verificano la stima

$$c_1 r^2 \leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} r^2 \leq c_2 r^2 < 0 \quad \text{che implica} \quad e^{c_1 t} |x_0|_{\mathbb{B}} \leq |x(t)|_{\mathbb{B}} \leq e^{c_2 t} |x_0|_{\mathbb{B}}.$$

In tal modo, mediante la norma $\|\mathcal{T}\|_{\mathbb{B}, \max} := \max_{i,j} (\|\mathcal{T}_{\varepsilon_j^i}\|)$, ove $\mathbb{B}$ è la base ε -quasi propria per $\mathcal{T}$, (e quindi gli $\mathcal{T}_{\varepsilon_j^i}$ sono gli elementi della matrice $\mathcal{T}_\varepsilon$ introdotta al Punto 1), si ottiene la stima $\|e^{t\mathcal{T}}\|_{\mathbb{B}, \max} \leq e^{c_2 t}$. In particolare ciò mostra che le costanti κ ed α viste nel teorema 1 sono, per il caso $\mathcal{T}(t) = \text{cost}$ ed in questa norma, rispettivamente 1 e $-c_2$.

Si noti che la relazione sulle $\mathbb{B}$ -lunghezze: $|x(t)|_{\mathbb{B}} < |x_0|_{\mathbb{B}}$, valida come si è visto per $t > 0$ e perché $c_2 < 0$, può non essere vera, per ogni $t > 0$, sulle lunghezze nella base originaria.

Punto n° 5. L'ipotesi $c_1 < \Re \lambda < c_2 < 0$ comporta che la funzione $\ln r^2(x) \equiv \ln \langle x, x \rangle_{\mathbb{B}}$ sia monotona decrescente in quanto con derivata minore di $2c_2 < 0$. Pertanto, qualunque sia il punto $x(t_0) = \tilde{x}_0$, esiste ed è unico l'istante $\tau \in \mathbb{R}$ in cui la traiettoria $\widetilde{\gamma} := \{\tilde{x}(t) := \phi(t, t_0, \tilde{x}_0)\}_{t \in \mathbb{R}}$ è tale da avere $r^2(\tilde{x}(\tau)) = \langle \tilde{x}(\tau), \tilde{x}(\tau) \rangle_{\mathbb{B}} = 1$. Si ha cioè che ogni traiettoria non banale attraversa, in uno ed un solo suo punto: x_0 , la superficie sferica S di centro il punto di equilibrio $x = 0$ e raggio $r = 1$, (in coordinate $\mathbb{B}$).

Punto n° 6. I due sistemi $\dot{x} = \mathcal{T}x$, ed $\dot{\xi} = -\xi$, entrambi lineari, ammettono una funzione $f: x \mapsto \xi = f(x)$ che ne coniuga i flussi. Essa è definita dalla

$$f(e^{Tt}x_0) := e^{-t\mathbf{I}} f(x_0), \quad f(0) = 0, \quad \xi_0 := f(x_0) := x_0,$$

ove x_0 è un qualunque punto della superficie sferica S . Inoltre, f è un omeomorfismo, esso infatti è un “morfismo” per quanto detto al punto precedente e per il teorema di esistenza ed unicità, ed è un “omeo” per il teorema di dipendenza continua.

[Il fatto che nell'origine si perda la differenziabilità impedisce alla f di essere un “diffeo” di rettificazione (radiale). Si ricordi a questo proposito che $\xi = x^a$ con $a \neq 1$ non è una trasformazione di coordinate in quanto o la funzione o la sua inversa sono non differenziabili in zero].

Il non essere f un diffeomorfismo conferma il fatto che né la medesima segnatura degli autovalori degli operatori di campo, e nemmeno i medesimi autovalori, bastano ad assicurare l'equivalenza (differenziale e quindi lineare) tra due sistemi $\dot{x} = \mathcal{T}_1 x$ ed $\dot{x} = \mathcal{T}_2 x$, $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathbb{L}(\mathbb{V})$, per la quale è necessaria la similitudine fra le rispettive matrici. [Infatti (vedi anche [Arnold 1 §21]) i due sistemi sono linearmente coniugati quando sono trasformati da un isomorfismo non singolare, e cioè quando esiste $H \in \mathbb{L}(\mathbb{V})$ invertibile e tale che $H e^{\mathcal{T}_1 t} H^{-1} = e^{\mathcal{T}_2 t}$].

Punto n° 7. L'esistenza dell'omeomorfismo f comporta che il sistema dato risulti topologicamente coniugato al sistema “rettificato”: $\dot{\xi} = -\xi$, e ciò, data la sua linearità, in modo globale nello spazio delle fasi. A sua volta ciò implica facilmente che una qualsiasi coppia di sistemi $\dot{x} = \mathcal{T}_1 x$ ed $\dot{x} = \mathcal{T}_2 x$, $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathbb{L}(\mathbb{V})$, sono (globalmente) topologicamente coniugati quando hanno (la stessa dimensione e) $\Re \lambda < 0$ per ogni loro autovalore λ .

Punto n° 8. Ricordando la definizione di sella- k si noti che per un sistema lineare $\dot{x} = \mathcal{T}x$ l'origine è una sella- k quando l'operatore $\mathcal{T}$, avendo tutte le parti reali degli autovalori non nulle, ne ammette di esse $k \geq 0$ positive. In tale eventualità esiste un operatore invertibile $P \in \mathbb{L}(\mathbb{V})$ (e siano $\mathbf{T}$ e $\mathbf{P}$ le matrici di $\mathcal{T}$ e di P , rispettivamente, nella $\{e\}$ -base data) tale che $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}^+ & 0 \\ 0 & \mathbf{T}^- \end{pmatrix}$ con $\mathbf{T}_+$ una matrice $k \times k$ con tutti gli autovalori aventi $\Re \lambda > 0$, ed $\mathbf{T}_-$ una matrice $(n-k) \times (n-k)$ con tutti gli autovalori aventi $\Re \lambda < 0$. In particolare $\mathbf{P}$ può coincidere con la $\{e\}$ -matrice della base ε -quasi propria vista nel Punto 1.

Dette $\xi = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$ le coordinate in tale base ed $\mathbf{x}$ quelle nella base data, è evidente che lo spazio lineare

$$\mathbb{V}_+ := \left\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \mathbf{P}\xi_+, \quad \xi_+ = (\xi^1, \dots, \xi^k, 0, \dots, 0)^T \right\}$$

è un sottospazio k -dimensionale di $\mathbb{V}$, invariante rispetto all'operatore $\mathcal{T}$ (varietà instabile del punto di equilibrio), ed analogamente lo è lo spazio $\mathbb{V}_-$ complementare di $\mathbb{V}_+$. Ma per il Punto 7 esistono due omeomorfismi f_- ed f_+ , definiti su $\mathbb{V}_-$ ed $\mathbb{V}_+$ rispettivamente, che coniugano il sistema dato con uno avente matrice $\begin{pmatrix} \mathbf{I}_k & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_{n-k} \end{pmatrix}$; e ciò implica che

se due sistemi lineari hanno, entrambi, autovalori aventi k parti reali positive ed $n-k$ negative, e cioè se per entrambi l'origine è una sella- k con lo stesso k , allora essi sono topologicamente coniugati.

Viceversa, sempre che il punto x_e sia iperbolico, e cioè tale che tutti gli autovalori dell'operatore $\mathcal{T}$ hanno parti reali non nulle, sussiste anche l'affermazione inversa: se i due flussi *lineari* sono coniugati l'omeomorfismo di coniugio conserva il limite per $t \rightarrow \infty$ e (quindi) conserva i sottospazi $\mathbb{V}^+$, $\mathbb{V}^-$, varietà stabile ed instabile dei due sistemi, e cioè trasforma in modo biunivoco e bicontinuo ciascuno di essi nel suo corrispondente senza pertanto mutare la struttura di sella- k .

Punto n° 9. Definendo gli intorno degli operatori lineari mediante la norma $\|\cdot\|_{\mathbb{B}, \max}$ vista sopra, si ha che *nello spazio $\mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$ l'insieme degli operatori semisemplici* ($:=$ diagonalizzabili nel campo complesso) *non è, ma contiene un insieme denso e aperto in $\mathbb{L}(\mathbb{V})$.* Analoga proprietà è posseduta dall'insieme degli operatori che hanno tutti gli autovalori diversi fra loro. In effetti è denso e aperto l'insieme degli operatori che hanno tutti gli autovalori diversi fra loro e con $\Re \lambda \neq 0$.

[Si ricordino le definizioni di: Insieme denso, la sua chiusura contiene lo spazio; e di Insieme aperto, è fatto tutto da punti interni. Pertanto, se un insieme è denso ed aperto, in un qualsiasi intorno di un punto che non appartiene all'insieme si trovano punti dell'insieme, i quali sono contenuti in intorni fatti tutti da punti dell'insieme, e ciò preclude al complementare di essere denso. Pertanto: se un insieme di punti di uno spazio metrico ne contiene uno denso ed aperto, o più debolmente, ne contiene uno Insieme residuo (e cioè un'intersezione numerabile di insiemi densi ed aperti) si dice che quell'insieme è un Insieme generico nello spazio ospite. Ad esempio, gli operatori lineari con $\Re \lambda \neq 0$ sono generici in $\mathbb{L}(\mathbb{V})$].

Ciò che si è fatto vedere sopra è che i sistemi lineari autonomi con $\Re \lambda \neq 0$ (e quindi genericamente in $\mathbb{L}(\mathbb{V})$) si possono raggruppare in classi di equivalenza ciascuna delle quali costituita dai sistemi che hanno una sella dello stesso ordine, e che pertanto sono topologicamente coniugati gli uni con gli altri; essi inoltre si possono considerare variati, l'uno rispetto all'altro, mediante perturbazioni lineari autonome tali da non modificare la segnatura delle $\Re \lambda$.

Si chiama: *persistenza delle selle- k relativamente ad una famiglia F di campi* il fatto che un certo punto x_e non solo sia di equilibrio per una qualunque delle equazioni $\dot{x} = f(x)$, con f in F , ma in particolare che esso *sia una sella- k* , per uno (stesso) k . Come si è visto, tale persistenza (ed in più l'esistenza del coniugio fra i flussi) sussiste relativamente a campi lineari autonomi ed aventi le $\Re \lambda$ tutte non nulle e con la stessa segnatura.

In tal senso si ha che nodi e fuochi, purché con le stesse caratteristiche di stabilità, sono “indistinguibili”.

Punto n° 10. La persistenza delle selle- k vale, ben più in generale, anche relativamente a campi non lineari (e perfino non autonomi) purché con parte lineare $v_*(x_e)$ avente autovalori con $\Re \lambda \neq 0$ (o, se periodica, con esponenti caratteristici: $\Re \eta \neq 0$), e parte perturbativa continua, anche non lineare purché opportunamente piccola. Per completezza viene qui richiamato, [Hale §III.6], l'enunciato del teorema di persistenza delle selle- k (o della “varietà stabile”) valido per sistemi autonomi con campo almeno differenziabile e punto di equilibrio iperbolico.

Sia $\eta : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\eta(0) = 0$, continua, non decrescente; e sia

$$Lip(\eta) := \left\{ h \in C^0(\mathbb{C}^n) \mid \begin{array}{l} h(0) = 0, \quad \text{ed} \\ |h(x) - h(y)| < \eta(\tau)|x - y|, \quad \text{per ogni } |x|, |y| \leq \tau \in \mathbb{R}^+ \end{array} \right\}$$

[La condizione è verificata se $h \in C^1$ con $h_*(0) = 0$, ed è più forte di quella di Lipschitz semplice, per la quale basta che sia $\eta = cost$. Quest'ultima a sua volta, quando $h(0) = 0$, implica ma non equivale alla $|h(x)| \leq cost |x|$. Entrambe, salvo per il comportamento tangente delle varietà, sono sufficienti al teorema. La condizione $h(x) = o(|x|)$ è anche lei meno forte della $Lip(\eta)$ perché implica $|h(x)| < \eta(\tau)|x|$ ma non lo estende alle coppie x, y ; con essa il comportamento tangente si riesce a provare, ma non è più garantita la condizione sulle dimensioni.]

Teorema 4.1.1 *Sia dato un sistema $\dot{x} = \mathcal{T}x$, con $x_0 \in \mathbb{V}$, che abbia una sella- k nell'origine. Allora, per ogni $h \in Lip(\eta)$, il sistema $\dot{x} = \mathcal{T}x + h(x)$*

(i) *ha anch'esso una sella- k nell'origine;*

(ii) *ammette due varietà differenziabili W_{loc}^s, W_{loc}^u , trasversali nell'origine, di dimensioni $n - k$ e k rispettivamente:*

$$W_{loc}^s = \{(x, f^s(x))\}_{x \in N(0) \cap \mathbb{V}^s} \quad \text{ed} \quad W_{loc}^u = \{(x, f^u(x))\}_{x \in N(0) \cap \mathbb{V}^u}$$

entrambe grafico di altrettante funzioni differenziabili $f^s : \mathbb{V}^s \rightarrow \mathbb{R}^k$ ed $f^u : \mathbb{V}^u \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ definite rispettivamente sui due sottospazi invarianti $\mathbb{V}^s$ ed $\mathbb{V}^u$ con i quali il sistema lineare ripartisce $\mathbb{V} \equiv T_0\mathbb{M}$;

(iii) *le due varietà sono rispettivamente tangenti ai corrispondenti autospazi del sistema lineare;*

(iv) *esistono certi $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}^+$ per i quali*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall x_0 \in W^s & \text{si ha che } |x(t)| \leq \kappa_1 e^{-\kappa_2 t} |x_0|, \quad \forall t \in [0, +\infty) \\ \forall x_0 \in W^u & \text{si ha che } |x(t)| \leq \kappa_1 e^{+\kappa_2 t} |x_0|, \quad \forall t \in (-\infty, 0] \end{array} \right.$$

(v) le due varietà sono invarianti (rispettivamente nel verso $t > t_0$ e $t < t_0$) giacché:

$$\begin{cases} \forall x_0 \notin W^s & \text{si ha che } |x(t)| \notin N(0), \quad \text{per qualche } \bar{t} < +\infty, \\ \text{for all } x_0 \notin W^u & \text{si ha che } |x(t)| \notin N(0), \quad \text{per qualche } \bar{t} > -\infty. \end{cases}$$

N.B. 4.1.28 Un enunciato simile sussiste anche per sistemi del tipo $\dot{x} = Q(t)x + q(t, x)$ con $q \in C^{\ell \geq 1}(\mathbb{R} \times \mathbb{V})$ opportunamente piccola e $Q \in \text{Per}_T(\mathbb{L}(\mathbb{V}))$ un campo regolare, T -periodico, e con tutti gli esponenti caratteristici aventi parti reali non nulle. In tal caso la persistenza della selle avviene sul sistema P_Φ -equivalente (vedi: §II.5): $\dot{\xi} = \mathcal{B}_\Phi \xi + \varphi(t, \xi)$ con $\xi := P_\Phi^{-1}x$, $P_\Phi \in \text{Per}_T(\mathbb{L}(\mathbb{V}))$ e $\varphi(t, \xi) := P_\Phi^{-1}(t) q(t, P_\Phi(t)\xi)$. $\diamond$

N.B. 4.1.29 Si noti che, nell'ipotesi che $h \in C^1$, la condizione $h = o(|x|)$ non è troppo restrittiva purché $\|h_*\| \xrightarrow{|x| \rightarrow 0} 0$, e ciò equivale ad assumere che la parte lineare del campo sia tutta rappresentata dall'operatore $\mathcal{T} := v_*(0)$. Se questo è il caso esiste $\delta > 0$ tale che $|x| < \delta$ implica che $(\mathcal{T} + h_*)$ ha la stessa segnatura di $\mathcal{T}$ e pertanto per il teorema del Dini esiste un unico $x_0 = x_0(h)$ tale che $\mathcal{T}x_0 + h(x_0) = 0$. Si può quindi porre $x = x_0(h) + u$ ed ottenere

$$\dot{u} = (\mathcal{T} + h_*(x_0))u + \mathcal{T}x_0 - h_*(x_0)u + h(x_0 + u) =: \mathcal{B}u + g(u)$$

ove $\mathcal{B} := \mathcal{T} + h_*(x_0)$ ha la stessa segnatura di $\mathcal{T}$ e $|g(u)| := \mathcal{T}x_0 - h_*(x_0)u + h(x_0 + u) = o(|u|)$. In definitiva se $h = o(|x|)$ non lede la generalità supporre $x_0(h) = 0$ ed $h(x_0) = 0$. $\diamond$

Punto n° 11. A prescindere dall'esistenza e dalle proprietà geometriche degli insiemi invarianti, è poi di enorme importanza il fatto che: genericamente, l'approssimazione lineare è (localmente) topologicamente equivalente all'equazione non lineare autonoma da cui essa proviene.

Sussiste a tale proposito il seguente importante risultato generale.

Teorema 4.1.1 (Grobman-Hartman) (si veda: [Hartman IX 7.1])

Sia $v : x \in \mathbb{M} \rightarrow v(x) \in T_x \mathbb{M}$ un campo regolare con $v(x_e) = 0$.

Se $\mathcal{T} := v_*(x_e)$ ha tutte le $\Re \lambda \neq 0$ allora esiste, su un conveniente $N(x_e)$, un omeomorfismo che trasforma le orbite del sistema $\dot{x} = v(x)$, [o meglio della sua equazione alle variazioni: $\dot{u} = v_*(x_e)u + h(u)$ relativa alla quiete in x_e] in quelle del sistema variazionale $\dot{x} = v_*(x_e)(x - x_e)$ e che preserva l'orientamento sulle traiettorie [il verso dei t crescenti], ed anzi la parametrizzazione: l'equazione alle variazioni e l'equazione linearizzata sono, localmente, C^0 -coniugate.

Esempio 4.1.30 Van Der Pol: $\ddot{x} + e(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$, con $x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R}$, $e < 0$.

L'equazione, equivalente al sistema $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x - e(x^2 - 1)y \end{pmatrix}$ ha punto fisso $x_e = (0, 0)$ ed in esso ha linearizzata data da

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \left\{ \begin{array}{l} Tr < 0 \\ Det > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{asintotica ed uniforme stabilità.}$$

Infatti si hanno $\lambda_{1,2} = \frac{e}{2} \pm \sqrt{\frac{e^2}{4} - 1}$ e pertanto $\Re \lambda < 0$. (Su questa equazione, tramite il teorema di Lienard, si era solo potuto riconoscere l'esistenza di almeno un ciclo limite instabile, vedi Es. III 4.14). $\square$

Esempio 4.1.31 Pendolo smorzato $\ddot{x} + \kappa \dot{x} + \sin x = 0$, con $x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R}$.

L'equazione ha il punto $x_e = (0, 0)$ fisso, ed in esso linearizzata data da

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \left\{ \begin{array}{l} Tr < 0 \\ Det > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{asintotica ed uniforme stabilità.}$$

Si noti che per ottenere questo risultato occorre che la costante $\kappa > 0$, per quanto piccola, sia maggiore di zero, infatti non vale l'enunciato alternativo del N.B. 14. Anche il Teorema 2, se $\kappa = 0$, non dice nulla neanche circa la semplice stabilità. $\square$

Viceversa sussiste il seguente teorema di instabilità, (la dimostrazione del quale è ancora di tipo “diretto”, vedi oltre)

Teorema 4.1.1 (si veda: [Coddington §13.1.2])

Siano $\mathcal{T} \in \mathbb{L}(\mathbb{V})$, $T \in \mathbb{R}$, ed $h \in C^0([T, \infty) \times N(0))$, tale che $h(t, x) = o(|x|)$, (o, più debolmente, $\exists \kappa > 0$: $|h(t, x)| \leq \kappa|x|$ per $|x|$ piccoli e $t \geq 0$, ed inoltre: $\forall \varepsilon_1 \exists \delta_1, T$: $|h(t, x)| \leq \varepsilon_1|x|$ per $|x| < \delta_1$ e $t \geq T$).

Se l'operatore $\mathcal{T}$ ha anche un solo autovalore con $\Re \lambda > 0$ allora: la soluzione nulla del sistema $\dot{x} = \mathcal{T}x + h(t, x)$, $x_0 \in N(0)$, $\mathcal{T} \in \mathbb{L}(\mathbb{V})$ è instabile.

Dimostrazione Sia $\mathbb{B}$ la base ε -quasi propria dell'operatore $\mathcal{T}$ individuato dalla matrice $\mathbf{T}$, e sia $\mathbf{P}$ la matrice che trasforma la base data nella base $\mathbb{B}$, e che quindi trasforma $\mathbf{T}$ nella matrice $\mathbf{T}_\varepsilon$ (vedi Punti 1 e 8). Siano $\mathbb{V}_+$ ed $\mathbb{V}_-$ (con $\dim \mathbb{V}_+ =: k \geq 1$) i due sottospazi $\mathcal{T}$ -invarianti sui quali la restrizione di $\mathcal{T}$ ha matrici $\mathbf{T}_+$ ed $\mathbf{T}_-$ rispettivamente, con autovalori: $\Re \lambda > 0$ e $\Re \lambda \leq 0$ rispettivamente. Sia $\mathbf{h}(t, \mathbf{x})$ il rappresentante di $h(t, x)$ in $\{e\}$ -coordinate, e sia $\mathbf{b}(t, \boldsymbol{\xi}) := \mathbf{P}^{-1}\mathbf{h}(t, \mathbf{P}\boldsymbol{\xi})$. Ne risulta che il sistema localmente equivalente a quello dato è

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{P})\boldsymbol{\xi} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{h}(t, \mathbf{P}\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{T}_\varepsilon\boldsymbol{\xi} + \mathbf{b}(t, \boldsymbol{\xi}), \quad (1.3)$$

la cui parte lineare ha le prime (ad esempio) k coordinate che evolvono in $\mathbb{V}_+$ secondo la $e^{\mathbf{T}_+t}$, e le altre $(n-k)$ in $\mathbb{V}_-$ secondo la $e^{\mathbf{T}_-t}$. Esso infatti si può pensare scritto, mediante le $\boldsymbol{\xi}^+ \equiv (\xi^1, \dots, \xi^k)$ ed $\boldsymbol{\xi}^- \equiv (\xi^{k+1}, \dots, \xi^n)$, come segue

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\xi}}^+ \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_+ & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}^+ \\ \boldsymbol{\xi}^- \end{pmatrix} + \mathbf{b}(t, \boldsymbol{\xi}).$$

Detta $\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(t)$ una generica soluzione del sistema (1.3) si pongano

$$\begin{cases} r_+^2(t) := \langle x(t), x(t) \rangle_{\mathbb{B}} \Big|_{x \in \mathbb{V}_+} = \sum_{i=1}^k (\xi^i(t))^2 \\ r_-^2(t) := \langle x(t), x(t) \rangle_{\mathbb{B}} \Big|_{x \in \mathbb{V}_-} = \sum_{i=k+1}^n (\xi^i(t))^2. \end{cases}$$

Infine, si scelga $c_+ > 0$ tale che $c_+ < \Re \lambda$ per tutti gli autovalori di $\mathbf{T}_+$. Fissato $\varepsilon_1 \ll c_+$, siano δ_1 e T tali che se $t > T$ e $|\boldsymbol{\xi}| < \delta_1$ allora $|\mathbf{b}(t, \boldsymbol{\xi})| \leq \varepsilon_1|\boldsymbol{\xi}|$. In tali condizioni si ha $\left| \sum_{i=1}^k \xi^i b^i \right| \leq r_+|\mathbf{b}| \leq \varepsilon_1 r_+|\boldsymbol{\xi}| \leq \varepsilon_1 r_+(r_+ + r_-)$ per cui, procedendo come ai Punti 2 e 4 si ottiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} r_+^2 = \sum_{i,j=1}^k \xi^i \delta_{hi} \mathbf{T}_+^i \xi^j + \sum_{i=1}^k \xi^i b^i \geq c_+ r_+^2 - o(\varepsilon) - \varepsilon_1 r_+(r_+ + r_-)$$

che implica la stima $\dot{r}_+ \geq \frac{1}{2} c_+ r_+ - \varepsilon_1 r_-$. Allo stesso modo si ricava (per $c_- = 0$) la stima $\dot{r}_- \leq \varepsilon_1(r_+ + r_-) + o(\varepsilon)$.

Ne segue che è possibile scegliere ε tanto piccolo da rendere valida la

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(r_+ - r_-) &\geq \left(\frac{1}{2} c_+ - \varepsilon_1 \right) r_+ - 2\varepsilon_1 r_- - o(\varepsilon) \geq \frac{1}{4} c_+(r_+ - r_-), \quad \text{da cui} \\ r_+(t) - r_-(t) &\geq [r_+(T) - r_-(T)] e^{c_+(t-T)/4}. \end{aligned}$$

Si ragioni ora per assurdo. Se la soluzione nulla fosse stabile, esisterebbe $\delta(\delta_1)$ tale che ogni soluzione con $r_+(T) + r_-(T) < \delta$ per $t = T$ dovrebbe avere $r_+(t) + r_-(t) < \delta_1$ per ogni $t > T$. Di queste se ne potrebbe scegliere una con $r_-(T)$ convenientemente piccolo: $0 < r_-(T) \leq r_+(T)/2$. Tuttavia, la stima trovata implica che per essa risulterebbe $r_+(t) \geq r_-(T) e^{c_+(t-T)/4}$, che cresce oltre δ_1 . ■

Il risultato si estende al caso periodico: $\mathcal{T} : t \mapsto \mathcal{T}(t) \in \text{Per}_T(\mathbb{L}(\mathbb{V}))$ pur di sostituire gli autovalori $\lambda_{(i)}$ con gli esponenti caratteristici $\eta_{(i)}$.

I precedenti teoremi hanno un immediato riscontro, ad esempio, in equazioni di tipo meccanico. Per semplicità si assumerà anche qui la metrica banale.

Esempio 4.1.32 Con $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ si consideri l'equazione

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \quad \mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^n), \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, 0) = 0. \quad (1.4)$$

ovvero

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}(\mathbf{u}) := \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbf{u}_0 := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}.$$

L'equazione ha linearizzata in $\mathbf{u}_e := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_e \\ 0 \end{pmatrix}$ data da:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_n \\ \partial_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, 0) & \partial_{\mathbf{y}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{x}_e \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} =: \partial \mathbf{v}(\mathbf{u}_e) (\mathbf{u} - \mathbf{u}_e). \quad (1.5)$$

Siano $\{\ell_j\}_{j=1, \dots, 2n}$ i $2n$ autovalori di $\partial \mathbf{v}(\mathbf{u}_e)$, e cioè le $2n$ radici (nel campo complesso) dell'equazione secolare: $\text{Det}(\ell^2 \mathbb{I}_n - \partial_{\mathbf{y}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, 0) - \partial_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_e, 0)) = 0$. Su di esse è noto solo il fatto che se ℓ è radice allora lo è anche la sua complessa coniugata $\bar{\ell}$; infatti l'equazione secolare ha coefficienti reali.

Pertanto, nel caso generale, le $\Re \ell$ avranno segni vari. Qualora queste siano tutti negative, il Teorema 1 di Liapunov garantisce stabilità asintotica; qualora ve ne sia anche una sola positiva il Teorema 4 assicura l'instabilità; negli altri casi i teoremi di stabilità lineare non sono in grado di fornire una risposta definitiva. $\square$

Esempio 4.1.33 Con $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ si consideri l'equazione

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^n), \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}_e) = 0. \quad (1.6)$$

ovvero

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}(\mathbf{u}) := \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbf{u}_0 := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}.$$

L'equazione ha linearizzata in $\mathbf{u}_e := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_e \\ 0 \end{pmatrix}$ data da:

$$\dot{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_n \\ \partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_e) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{x}_e \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} =: \partial \mathbf{v}(\mathbf{x}_e) (\mathbf{u} - \mathbf{u}_e). \quad (1.7)$$

Si chiami $\mathbf{B}_e$ la matrice $-\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_e)$ e si supponga che sia (reale e) tale che $\mathbf{B}_e = \mathbf{B}_e^T$. Ciò è quanto avviene per l'Hessiano $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_e)$ dell'energia potenziale $\Pi = \Pi(\mathbf{x})$ nel caso in cui la $\mathbf{f}$ sia conservativa, e cioè provenga da un potenziale posizionale secondo la $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\nabla \Pi(\mathbf{x})$.

Siano $\{\ell_j\}_{j=1, \dots, 2n}$ i $2n$ autovalori di $\partial \mathbf{v}(\mathbf{u}_e) := \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_n \\ -\mathbf{B}_e & 0 \end{pmatrix}$; essi sono ciò che si ottiene imponendo che la (1.7) abbia soluzioni del tipo $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_e + e^{\ell t}(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_e)$. In quanto radici dell'equazione $0 = \text{Det}(\mathbf{B}_e + \ell^2 \mathbb{I}) =: \text{Det}(\mathbf{B}_e - \lambda \mathbb{I})$, i loro quadrati coincidono con gli opposti degli autovalori λ della matrice $\mathbf{B}_e$, e cioè: $-\ell^2 = \lambda$.

Per studiare la stabilità della (1.6) mediante la segnatura delle $\Re \ell$ della (1.7) conviene ricordare innanzi tutto che un operatore $\mathbf{B}_e$ reale simmetrico ha solo autovalori λ reali. Di conseguenza gli $\{\ell_j\}_{j=1, \dots, 2n}$ hanno necessariamente la forma

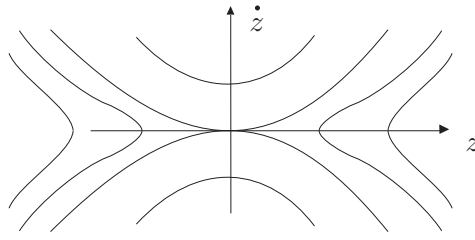
$$-\ell^2 = \lambda = |\lambda| e^{ik\pi} =: \omega^2 e^{ik\pi} \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Sono possibili solo due alternative:

- (i) Esiste qualche $-\ell^2 = \lambda$ strettamente negativa; per essa si ha $\omega \neq 0$ e k dispari. Allora $\ell^+ = \omega$ ed $\ell^- = -\omega$ sono autovalori reali di $\partial \mathbf{v}(\mathbf{u}_e)$, e quindi in tal caso esiste almeno un autovalore di $\partial \mathbf{v}(\mathbf{u}_e)$ con $\Re \ell > 0$.
- (ii) Tutte le $-\ell^2 = \lambda$ sono o nulle o positive; e siccome la radice quadrata di un numero reale negativo è puramente immaginaria si ha che tutte le $\Re \ell$ sono nulle. In altre parole, per esse o è $\omega = 0$ oppure k è pari, e quindi tutti gli autovalori di $\partial \mathbf{v}(\mathbf{u}_e)$ sono del tipo $\ell, \bar{\ell} = \omega \exp \pm i(\frac{\pi}{2} + h\pi) = \pm i\omega$ con $\omega \geq 0$.

Nel primo caso il Teorema 4 assicura che la quiete in $\mathbf{x}_e$ è certamente instabile.

Nel secondo caso, il fatto che le $\Re \ell$ siano tutte nulle lascia la possibilità, ma non la implica, della stabilità. Tale eventuale stabilità non potrà comunque essere asintotica, e non è sicura poiché in questo caso “debole” gli ordini superiori al primo, nello sviluppo del campo $\mathbf{v}(\mathbf{u})$, possono influire sul moto asintotico almeno quanto la parte lineare. Ne è un esempio molto semplice il caso: $\Pi(x, y, z) = \frac{1}{2}c^2(x^2 + y^2) + hz^4$, con $c, h \in \mathbb{R}$, che ha equilibrio in $(0, 0, 0)$ e moto asintotico che dipende dal segno della costante h , come si verifica facilmente dato che il sistema disaccoppia le coordinate. Nel caso $h < 0$ l'origine è instabile:



Si noti che in questo esempio l'equazione $\text{Det}(\mathbf{B}_e + \ell^2 \mathbf{1}) = 0$ non ammette alcun autovalore $\ell^2 > 0$ e quindi il teorema lineare non è conclusivo neanche in forma negativa. $\square$

Più in generale, un sistema meccanico strettamente conservativo: *vincoli indipendenti dal tempo e forze a potenziale posizionale* ha linearizzata nel punto di equilibrio $(q_e, 0)$ con campo espresso da $\partial \mathbf{v}(q_e, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{A}_e^{-1} \\ -\mathbf{B}_e & 0 \end{pmatrix}$ ove $\mathbf{B}_e$ è l'Hessiano in $\mathbf{q} = \mathbf{q}_e$ dell'operatore π_e dell'energia potenziale $\Pi = \Pi(\mathbf{q})$, ed $\mathbf{A}_e$ è la matrice dell'operatore $\mathcal{T}_2$ dell'energia cinetica $\mathcal{T} = \mathcal{T}_2$ calcolata nel punto q_e . L'equazione agli autovalori diviene $\text{Det}(\mathbf{A}_e^{-1} \mathbf{B}_e + \ell^2 \mathbf{1}) = 0$ ovvero $\text{Det}(\mathbf{B}_e - \lambda \mathbf{A}_e) = 0$ avendo chiamato anche qui $-\ell^2 = \lambda = \omega^2$. La simmetria di $\mathbf{A}_e^{-\frac{1}{2}} \mathbf{B}_e \mathbf{A}_e^{-\frac{1}{2}}$ implica che le λ sono tutte reali; inoltre la loro segnatura è la stessa degli autovalori di $\mathbf{B}_e$ ([Gantmacher §X.2]) [infatti dato che $\mathbf{A}_e$ è definita positiva si ha che $\mathbf{A}_e^{-\frac{1}{2}} = (\mathbf{A}_e^{\frac{1}{2}})^T$, e quindi $\mathbf{A}_e^{-\frac{1}{2}} \mathbf{B}_e \mathbf{A}_e^{-\frac{1}{2}}$ è congruente con $\mathbf{B}_e$ e si possono "riscalare" gli assi con la matrice $\mathbf{A}_e^{-1/2}$]. Pertanto:

Condizione sufficiente (ma non necessaria) per la instabilità di un sistema meccanico, strettamente conservativo a vincoli indipendenti dal tempo e forze a potenziale posizionale, è che l'operatore della parte bilineare dell'energia potenziale: $\mathbf{B}_e$ ammetta qualche autovalore λ negativo, e quindi che $\mathbf{B}_e$ non sia definita positiva né semidefinita positiva; o anche: che l'energia potenziale non ammetta un minimo nel punto di equilibrio, e che ciò sia riconosciuto tramite lo studio della forma quadratica associata alla funzione energia potenziale: $\Pi(\mathbf{q})$.

Equivalentemente si ha la:

Condizione necessaria (ma non sufficiente) per la stabilità di un sistema meccanico, strettamente conservativo a vincoli indipendenti dal tempo e forze a potenziale posizionale, è che tutti gli autovalori di $\mathbf{B}_e$ (e di $\mathbf{A}_e^{-1} \mathbf{B}_e$) siano positivi o nulli. Se positivi, gli autovalori di $\mathbf{A}_e^{-1} \mathbf{B}_e$ assumono il significato di quadrati $-\ell^2 \equiv \lambda =: \omega^2$ delle cosiddette "Pulsazioni proprie" con le quali oscillano i "Modi normali". Ciò accade se, per per l'energia potenziale, il punto $\mathbf{x}_e$ è: o di minimo, o di stazionarietà qualunque e di ordine superiore al secondo. In entrambi i casi, la stabilità non può essere assicurata, mediante il ricorso alla stabilità lineare, da queste condizioni perché l'essere $\Re \ell = 0$ fa cadere in difetto la linearizzazione. In effetti i due moti: quello dell'equazione non lineare e quello della sua linearizzata non è detto che siano, alla lunga, "vicini". Potrebbero non esserlo a dipendere dagli ordini superiori dello sviluppo del campo; e generalmente ciò accade almeno per quanto riguarda i loro valori simultanei, le loro traiettorie potendo invece rimanere "vicine".

L'essere $\ell^2 \in \mathbb{R}$ implica:

Caso I	Caso II
esiste $-\ell^2 = \omega^2 < 0$, e cioè	ogni $-\ell^2 = \omega^2 \geq 0$, e cioè
$\exists$ un a-valore di $\mathbf{B}_e$ negativo;	a-valori di $\mathbf{B}_e$ tutti positivi;
vi sono $\ell^+ > 0$ ed $\ell^- < 0$;	vi sono $(\ell, \bar{\ell}) = (i\beta, -i\beta)$;
l'instabilità è certa;	la stabilità è possibile;
$\Pi(\mathbf{q})$ è stazionario, non minimo,	$\Pi(\mathbf{q})$ è minimo o stazionario,
e lo si riconosce mediante le ∂^2 .	e lo si riconosce mediante le $\partial^{\ell \geq 2}$.

4.2 Il metodo diretto di Liapunov

Come si è già osservato, vi sono casi in cui il procedimento di linearizzazione non dà informazioni sulla stabilità del sistema non lineare da cui si è partiti.

Esempio 4.2.1 $\dot{x} = x^2$, con $x_0 \in \mathbb{R}$.

La soluzione nulla è instabile. L'equazione linearizzata: $\dot{\xi} = 0$ è stabile. $\square$

Esempio 4.2.2 $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x^n \end{cases}$ con $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ ed $n > 1$.

L'equazione linearizzata nella soluzione nulla è $\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$, che è instabile. L'equazione assegnata, avendo energia $\mathcal{E}(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ ha soluzione nulla che è stabile se n è dispari mentre è instabile se n è pari o nullo. Lo si riconosce facilmente mediante lo studio delle linee di livello della funzione energia sullo spazio delle fasi, studio che, si ricordi, è uno studio globale contrariamente a quello dell'Hessiano che è solo locale ed il cui valore in questo caso è zero. $\square$

Esempio 4.2.3 $\begin{cases} \dot{x} = +y + xf(\sqrt{x^2 + y^2}) \\ \dot{y} = -x + yf(\sqrt{x^2 + y^2}) \end{cases}$ con $\begin{cases} x_0, y_0 \in \mathbb{R}, & f(0) = 0, \\ f \in C^1(\mathbb{R}^+ \cup \{0\}). \end{cases}$

La linearizzata nell'origine è l'oscillatore lineare. Tuttavia, con $\rho := \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$, il sistema equivale a $\begin{cases} \dot{\rho} = \rho f(\rho), \\ \dot{\theta} = -1; \end{cases}$ per cui se, ad esempio, $f(\rho) = c\rho^{n-1}$ allora si ha $\dot{\rho} = c\rho^n$, e la stabilità della soluzione nulla è decisa dal segno di c qualunque sia $n > 1$. Infatti, essendo $\rho_0 > 0$, la funzione $\rho : t \mapsto \rho(t) \equiv \rho(x(t), y(t))$ cresce o decresce con la t a seconda del segno della sua derivata, e quindi di c . $\square$

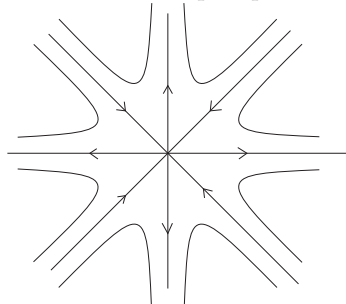
Esempio 4.2.4 $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 y \end{pmatrix},$ con $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

L'origine è un centro se $\varepsilon = 0$ ed è una spirale debole se $|\varepsilon| \ll 1$, attrattiva o repulsiva a seconda che $\varepsilon \gtrless 0$. Infatti posto $\mathcal{F} : (x, y) \mapsto \mathcal{F}(x, y) := \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ si ha $\mathcal{L}_v \mathcal{F} = xy + y(-x - \varepsilon x^2 y) = -\varepsilon x^2 y^2$ e pertanto le traiettorie sono trasversali alle circonferenze (vedi oltre). $\square$

Esempio 4.2.5 $\begin{cases} \dot{x} = x^3 - 3xy^2 \\ \dot{y} = -3x^2 y + y^3, \end{cases}$ con $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

Per discutere l'equazione è opportuno ricorrere all'equazione associata, che è (ad esempio) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \left(\frac{y^2 - 3x^2}{x^2 - 3y^2} \right)$. Se si ricercano soluzioni del tipo $y = \alpha x$ si ricavano le condizioni necessarie: $\alpha = 0$, oppure $\alpha = 1$, oppure α soluzione di $\alpha = \alpha(\alpha^2 - 3)/(1 - 3\alpha^2)$ da cui $\alpha = \pm 1$. D'altra parte su tali rette si ha: $\dot{x} = x^3$ nel caso $\alpha = 0$; $\dot{y} = y^3$ nel caso $\alpha = \infty$; $\dot{x} = (1 - 3\alpha^2)x^3 = -2x^3$ nel caso $\alpha = \pm 1$.

Siccome $\dot{x} = kx^3$ si risolve nella $x : t \mapsto x(t) = x_0 (1 - 2kx_0^2(t - t_0))^{-1/2}$, l'origine è chiaramente un punto di instabilità per il sistema non lineare, mentre è di stabilità per quello lineare.



$\square$

L'Esempio 4.2.3 indica un metodo affrontare lo studio della stabilità dei punti fissi (di sistemi non lineari) anche nel caso in cui non siano delle selle- k . Il metodo "diretto" verrà qui esposto per sistemi autonomi ma si applica anche a sistemi non autonomi. Esso è di primaria importanza perché, qualora si riesca ad utilizzare, fornisce informazioni anche non locali rispetto ad x . La sua caratteristica inoltre è di far uso solo della forma del campo (assegnato) e non delle soluzioni (incognite) del sistema, neanche se valutate in modo approssimato. D'altra parte non sono noti algoritmi generali che lo rendano applicabile in generale, e caso per caso va usata a tale scopo la propria esperienza e la propria inventiva.

L'idea di base è quella di determinare delle opportune funzioni definite sullo spazio delle fasi e tali che, generalizzando il ruolo che l'energia totale svolge nella discussione dei sistemi conservativi, abbiano un andamento qualitativo noto lungo le incognite traiettorie delle soluzioni. Nell'Esempio 3 la funzione in questione è stata la $\rho = \rho(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$ e si è osservato il fatto che, lungo le soluzioni, essa assume valori crescenti (o decrescenti) con t a seconda del segno della costante c ; le soluzioni stesse quindi, al crescere di t , saranno tali da congiungere regioni in cui $\rho := \sqrt{x^2 + y^2}$ è minore (maggiore) con regioni in cui è maggiore (minore).

Esempio 4.2.6 Van Der Pol: $\ddot{x} + e(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$, $x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R}$, $e < 0$.

Con $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, l'equazione equivale alla

$$\dot{\mathbf{x}} \equiv \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x - e(x^2 - 1)y \end{pmatrix} =: \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \text{con } \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2, \quad (2.8)$$

ed ha punto fisso $\mathbf{x}_e = (0, 0)^T$. Nell'esempio 1.11 si è visto che il sistema linearizzato è uniformemente ed asintoticamente stabile, e quindi tale è il punto di equilibrio della (2.8); qui lo si vuole confermare con il metodo diretto.

Si scelga in modo del tutto arbitrario, e per ora ingiustificato, la funzione $\mathcal{F} : (x, y) \mapsto \mathcal{F}(x, y) := x^2 + y^2$. Lungo le soluzioni $\mathbf{x} : t \mapsto \mathbf{x}(t) \equiv (x(t), y(t))$ dell'equazione data, si calcola

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathcal{F}(\mathbf{x}) &:= \frac{d}{dt}\mathcal{F}(\mathbf{x}(t)) \Big|_{\substack{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{v}(\mathbf{x})}} \\ &= 2xy + 2y(-x - e(x^2 - 1)y) = -2(x^2 - 1)y^2e \end{aligned}$$

che è senz'altro negativa all'interno della striscia $x \in [-1, 1]$, salvo che sull'asse delle x . Ma su tale asse il campo vale $\begin{pmatrix} 0 \\ -x \end{pmatrix}$ e quindi su tutti questi punti, tranne il punto di equilibrio, esso è non nullo e tangente alle circonferenze $x^2 + y^2 = \text{cost}$. Le traiettorie tuttavia non possono “uscire” da queste ultime perché in tal caso, in un intorno destro dell'istante in cui avviene la tangenza, la $\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{x}(t))$ dovrebbe necessariamente assumere valori positivi; né possono “restarvi sopra” perché queste non sono traiettorie possibili; pertanto non può che dedursi il fatto che le traiettorie “entrano” nelle circonferenze dette.

Infine, dato che l'unico punto di equilibrio è l'origine, e che se ci fosse un ciclo (limite) nella striscia $x \in [-1, 1]$ esso attraverserebbe le circonferenze di centro l'origine in entrambi i versi, se ne conclude che *ogni* orbita ha l'origine come unico possibile insieme ω -limite: di qui l'asintotica stabilità, uniforme per l'autonomia.

La discussione sarebbe stata ancora più semplice se al posto di $\mathcal{F}$ si fosse adottata la funzione

$$\mathcal{F}_1 : (x, y) \mapsto \mathcal{F}_1(x, y) := x^2 - exy + y^2$$

la quale ha derivata direzionale $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathcal{F}_1 = e(x^2 + y^2 - exy - 2x^2y^2 + ex^3y)$. Quest'ultima ha Hessiano: $e \begin{pmatrix} 2 & -e \\ -e & 2 \end{pmatrix}$ che è definito negativo in zero purché $4 - e^2 > 0$, ed in tal caso si ha $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathcal{F}_1 < 0$ in $N(0)$. Con questa funzione lo studio è immediato e conclusivo per $-2 < e < 0$; infatti, in tale eventualità, il segno definito della $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathcal{F}_1$ assicura che le curve di fase si dirigeranno, per t crescenti, verso punti sui quali $\mathcal{F}_1$ ha valori più bassi, attraversando trasversalmente e definitivamente le linee di livello $\mathcal{F}_1 = \text{cost}$ e cioè le ellissi $x^2 - exy + y^2 = \text{cost}$, e dirigendosi verso la zona interna a ciascuna di esse.

Si noti che nell'ipotesi $-2 < e < 0$ i due autovalori della matrice $\mathbf{T} := \partial \mathbf{v}(\mathbf{x}_e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & e \end{pmatrix}$ sono complessi coniugati: $\lambda_1 := \bar{\mu} := \alpha - i\beta := \frac{e}{2} - i\sqrt{1 - e^2/4}$, e $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$. In questo caso, siano: $\mathbb{B} := \{\epsilon_\mu, \bar{\epsilon}_\mu\}$ la base propria in ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^2$ dell'operatore ${}^{\mathbb{C}}\mathcal{T}$ che nella base data ha matrice $\mathbf{T}$; $\tilde{\mathbb{B}} = \{x_\mu, y_\mu\}$ la base reale formata dalle parti $\Re \epsilon_\mu$ e $-\Im \epsilon_\mu$; $\mathbf{P} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ la matrice che in $\mathbb{C}^2$ diagonalizza ${}^{\mathbb{C}}\mathbf{T}$ (vedi §II.2); $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ le $\tilde{\mathbb{B}}$ -componenti di $\mathbf{x}$, ed $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{\xi} + i\tilde{\eta} \\ \tilde{\xi} - i\tilde{\eta} \end{pmatrix} := \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ l'espressione del vettore $\mathbf{x}$ nelle coordinate proprie. Si riconosce (vedi oltre) che la

$$\mathcal{F}_2(\boldsymbol{\xi}) \equiv r^2 := \langle x, x \rangle_{\tilde{\mathbb{B}}} = \tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2 \equiv z\bar{z}$$

è un'altra funzione, oltre alle $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}_1$, con la quale è possibile ripetere la stessa discussione, (si osservi che la r^2 è stata già usata nei Punti 2,3,4 e nel Teorema 4 del §1). Infatti si calcola $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}r^2 = z\bar{z} + \dot{z}\bar{z} = \mu r^2 + \bar{\mu} r^2 + o(r^2) = 2\Re \mu r^2 + o(r^2) = er^2 + o(r^2)$ e quindi con essa si possono trarre le stesse conclusioni trovate mediante la $\mathcal{F}_1$: le curve di fase si dirigeranno, per t crescenti, verso punti sui quali r^2 ha valori più bassi.

D'altra parte, siccome è $\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$ e quindi $z/2 = [\mu x - y]/(2i\beta)$, esprimendo la $\mathcal{F}_2 = r^2$ nelle coordinate iniziali, e con $\Delta := Tr^2\mathbf{T} - 4Det\mathbf{T} = e^2 - 4 = -4\beta^2$, risulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(x, y) = z\bar{z} &= \frac{1}{\beta^2} [\mu\bar{\mu}x^2 + y^2 - (\mu + \bar{\mu})xy] \\ &= \frac{4}{-\Delta} (x^2 Det \mathbf{T} + y^2 - xy Tr \mathbf{T}) = \frac{4}{4 - e^2} (x^2 + y^2 - exy), \end{aligned}$$

e quindi, ai soli fini della discussione vista sopra, essa è del tutto equivalente alla $\mathcal{F}_1$. (Per ulteriori possibilità si veda anche l'Esempio 2.20 più oltre).

Nel caso reale: $e < -2$, si hanno $\lambda_{1,2} = \frac{Tr\mathbf{T}}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}} = \frac{e}{2} \pm \sqrt{\frac{e^2}{4} - 1}$ e coordinate proprie $\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 x - y \\ y - \lambda_1 x \end{pmatrix}$, per cui la $\mathcal{F}_2 = \langle x, x \rangle_{\tilde{\mathbb{B}}}$ fornisce

$$r^2(x, y) = \frac{1}{+\Delta} ((\lambda_1^2 + \lambda_2^2)x^2 + 2y^2 - 2(\lambda_1 + \lambda_2)xy) = \frac{2}{e^2 - 4} ((e^2/2 - 1)x^2 + y^2 - exy).$$

Comunque, per $e < 0$, si conferma il risultato dell'Esempio 4.1.30. □

Per poter formalizzare il metodo, è opportuno richiamare alcune semplici nozioni di analisi. Esse fanno riferimento a studi locali nell'intorno di qualche fissato punto dello spazio delle fasi $\mathbb{M}$ (localmente omeomorfo ad $\mathbb{R}^n$) che verrà, senza perdita di generalità, considerato l'origine: $x = 0$; un suo intorno sarà indicato con $N(0)$, e la chiusura di questo con $[N(0)]$.

$\mathcal{F} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ definita positiva su $N(0)$:= una funzione $\mathcal{F} \in C^0(N(0))$ tale che

$$\mathcal{F}(0) = 0, \quad \mathcal{F}(x) > 0 \quad \forall x \in N(0) \setminus \{0\}.$$

$\mathcal{F} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ semi-definita positiva su $N(0)$:= una funzione $\mathcal{F} \in C^0(N(0))$:

$$\mathcal{F}(0) = 0, \quad \mathcal{F}(x) \geq 0 \quad \forall x \in N(0).$$

Equivalentemente:

Se una funzione $\mathcal{F} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{F} \in C^0(N(0))$, è tale che: $\mathcal{F}(0) = 0$, ed esiste $r > 0$ per la quale:

$$\forall \varepsilon \in (0, r) \quad \exists \delta(\varepsilon): \quad 0 < \varepsilon \leq |x| \leq r \Rightarrow \mathcal{F}(x) \geq \delta(\varepsilon),$$

allora la $\mathcal{F}$ si dice: $\begin{cases} \text{definita positiva quando } \delta(\varepsilon) > 0 \\ \text{semidefinita positiva quando } \delta(\varepsilon) \geq 0. \end{cases}$

N.B. 4.2.7 Si possono dare analoghe definizioni per funzioni $\mathcal{F}(t, \mathbf{x})$ richiedendo che esista una $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ di segno definito e che limiti per ogni $t \geq t_0$ quella dipendente dal tempo. Con esse si estendono i teoremi seguenti anche a sistemi non autonomi. Qualche attenzione, tuttavia, va esercitata per le funzioni semidefinite (vedi [Hahn § V.41], opp.[Cesari § 7.1]). $\diamond$

Esempio 4.2.8

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 & \text{ def. pos. in } \mathbb{R}^2; \quad \text{semidef. pos. in } \mathbb{R}^3; \\ x^2 + y^2 - x^3 & \text{ def. pos. in } \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 1 \right\}; \\ -2y^2(x^2 - 1) & \text{ semidef. pos. in } \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 < 1 \right\}; \\ x^2 + y^2 + z^4 & \text{ def. pos. in } \mathbb{R}^3; \end{aligned}$$

meno immediato è il fatto che $x^2 + y^2 - exy - 2x^2y^2 + ex^3y$ sia definita positiva in $N(0) \subset \mathbb{R}^2$ quando $e \in (-2, 0)$ (vedi oltre). Si noti infine che né $(x+a)^2 + y^2$ né $(x+a)^2 + y^2 - a^2$ hanno segno definito in $N(0) \subset \mathbb{R}^2$. $\square$

Si rammenti la seguente definizione

Funzione omogenea di grado $p \in \mathbb{R}$:= una funzione $\mathcal{O}_p : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\mathcal{O}_p(0) = 0$, ed $\mathcal{O}_p(tx) = t^p \mathcal{O}_p(x)$ per tutti i $t > 0$ per i quali $\mathcal{O}_p(tx)$ è definita, e per ogni $x \neq 0$.

Nota 4.2.1

Sia $\mathcal{O}_p : x \in \mathbb{M} \mapsto \mathcal{O}_p(x) \in \mathbb{R}$ una funzione omogenea di grado p definita su $N(0) \cap B_{r \geq 1}(0)$.

Se $\mathcal{F}(x) = \mathcal{O}_p(x) + w(x)$ con $w(x) = o(|x|^p) \cap C^0(N(0))$, allora:

“ $\mathcal{O}_p$ definita positiva in $N(0)$ ” implica “ $\mathcal{F}$ definita positiva in $N(0)$ ”

Sotto le stesse ipotesi, il viceversa non sussiste.

Controesempio: $x^2 + y^2 + z^4$ è definita positiva in $\mathbb{R}^3$ ma non implica che $x^2 + y^2$ sia definita positiva in $\mathbb{R}^3$.

Dimostrazione Sia $m := \min_{|x|=1} \mathcal{O}_p(x)$; dato che la superficie della sfera unitaria è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{M}$, tale m esiste strettamente positivo.

Risulta $\mathcal{O}_p(x) = |x|^p \mathcal{O}_p(\frac{x}{|x|}) \geq m|x|^p$, per ogni $x \in N(0) \setminus \{0\}$.

D'altra parte per ipotesi esiste $\delta = \delta(\varepsilon)$ tale che $|w(x)| < \varepsilon|x|^p$ per $|x| < \delta$. Pertanto basta che sia $\varepsilon \leq m/2$ per avere, su $N(0) \cap B_\delta(0) \setminus \{0\}$

$$\mathcal{F}(x) \geq \mathcal{O}_p(x) - |w(x)| \geq m|x|^p - \frac{m}{2}|x|^p = \frac{m}{2}|x|^p > 0.$$

$\triangleright$

Usando quanto si è visto in questa nota si può risolvere l'ultimo caso dell'Esempio 5, quando si faccia anche ricorso alla seguente:

Nota 4.2.2

Particolari funzioni omogenee sono i polinomi omogenei, o *forme*, di grado $p \in \mathbb{N}$; e cioè funzioni $\mathcal{F}_p : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ definite (in coordinate) da

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_p : \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}_p(\mathbf{x}) &:= \sum_{|\mathbf{h}|=p} a_{\mathbf{h}} x^{\mathbf{h}}, \quad \text{con } a_{\mathbf{h}} \in \mathbb{R} \text{ e dove} \\ \mathbf{x} &= (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n, \quad x^{\mathbf{h}} := (x^1)^{h^1} \cdots (x^n)^{h^n} \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{h} &= (h^1, \dots, h^n) \in \mathbb{N}^n, \quad |\mathbf{h}| := (h^1 + \dots + h^n) \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Se p è dispari la forma $\mathcal{F}_p$ non può avere segno definito in $N(0)$. Infatti, chiamando ξ ad esempio la n -ma coordinata: $x^n = \xi$, e ponendo $x^h =: \xi u^h$ per le altre $h = 1, \dots, n-1$, se ne ricava l'espressione $\mathcal{F}_p = \xi^p \mathcal{F}(u^1, \dots, u^{n-1}, 1)$ e quindi al variare della n -ma coordinata la funzione cambia segno.

Se p è pari e $p > 2$ non sono noti metodi generali per assicurare la definitezza in segno della forma.

Se $p = 2$, e cioè con $\mathcal{Q} := \mathcal{F}_{p=2} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ una forma quadratica (reale), detti $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T$ la matrice reale simmetrica dell'Hessiano: $\mathbf{B}_{ij} := \frac{\partial^2 \mathcal{Q}}{\partial x^i \partial x^j}$ della forma $\mathcal{Q}$, e detti $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ gli autovalori di $\mathbf{B}$ i quali, come è noto, sono tutti reali, si hanno i seguenti fatti.

Il rango r di $\mathcal{Q}$ è il numero dei suoi autovalori non nulli; la segnatura di $\mathcal{Q}$ la differenza fra il numero dei suoi autovalori positivi e quello dei suoi autovalori negativi. Si definiscano, inoltre, le seguenti matrici.

Minori principali di $\mathcal{Q}$:= le matrici quadrate $\mathbf{B} \begin{pmatrix} 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n \\ 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n \end{pmatrix}$ che si ottengono estraendo dalla matrice $\mathbf{B}$ i suoi elementi intersezioni delle colonne $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n$ della matrice $\mathbf{B}$ e delle righe (con i medesimi indici:) $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n$.

Minori principali ordinati di $\mathcal{Q}$:= le matrici quadrate $\mathbf{D}_k := \mathbf{B} \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, k \leq n \\ 1, 2, \dots, k \leq n \end{pmatrix}$, definite per $k = 1, \dots, n$.

Sussiste la proprietà (Jacobi): se tutte le $\mathbf{D}_k$ hanno determinante non nullo allora il numero degli autovalori positivi è pari al numero di permanenze di segno dei $\text{Det } \mathbf{D}_k$, per $k = 1, 2, \dots, n$, ed il numero degli autovalori negativi è pari al numero delle variazioni di segno dei $\text{Det } \mathbf{D}_k$.

Pertanto, indicato con il simbolo $|\mathbf{B}|$ il $\text{Det } \mathbf{B}$, si ha che:

$$\begin{aligned}\text{se tutti i determinanti } |\mathbf{D}_k|, \quad k = 1, \dots, n, \quad \text{sono diversi da zero} \\ \mathcal{Q} \text{ definita positiva} &\Leftrightarrow |\mathbf{D}_1| > 0, |\mathbf{D}_2| > 0, \dots, |\mathbf{D}_n| > 0, \\ \mathcal{Q} \text{ definita negativa} &\Leftrightarrow |\mathbf{D}_1| > 0, |\mathbf{D}_2| < 0, \dots, (-1)^n |\mathbf{D}_n| > 0, \\ \mathcal{Q} \text{ indefinita} &\Leftrightarrow \text{esistono } 1 \leq i, j \leq n \text{ tali che } |\mathbf{D}_i| > 0, |\mathbf{D}_j| < 0.\end{aligned}$$

Tuttavia, se qualche $\text{Det } \mathbf{D}_k$ è nullo non si può determinare il segno della forma, semidefinita, $\mathcal{Q}$ mediante lo studio dei segni dei $\text{Det } \mathbf{D}_k$, $k = 1, \dots, n$.

Ci si può servire, in tal caso, delle seguenti proprietà che danno informazioni più specifiche.

$$\begin{aligned}\mathcal{Q} \text{ semidefinita positiva} &\Leftrightarrow \begin{cases} \left| \mathbf{B} \begin{pmatrix} 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n \\ 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n \end{pmatrix} \right| \geq 0 \\ \forall \quad 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \\ \mathcal{Q} \text{ semidefinita negativa} &\Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^k \left| \mathbf{B} \begin{pmatrix} 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n \\ 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n \end{pmatrix} \right| \geq 0 \\ \forall \quad 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{cases}\end{aligned}$$

Se ne ricava la seguente, importante:

Osservazione.

Condizione sufficiente affinché una forma quadratica reale $\mathcal{Q}$ non sia definita positiva né semidefinita positiva è che la matrice reale simmetrica dell'Hessiano: $\mathbf{B}_{ij} := \frac{\partial^2 \mathcal{Q}}{\partial x^i \partial x^j}$ della forma $\mathcal{Q}$ abbia qualche minore principale:

$$\mathbf{B}_e \begin{pmatrix} 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n \\ 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n \end{pmatrix} \quad \text{con determinante negativo.} \quad \triangleright$$

Nota 4.2.3 Sia $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x)$ definita positiva su un intorno $N(0) \subseteq \mathbb{M}$ dell'origine e sia $\varepsilon > 0$ tale che $[B_\varepsilon(0)] \subset N(0)$. Allora esiste un $c_0(\varepsilon) > 0$ per il quale: ogni curva continua γ parametrizzata da

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{M}, \quad \gamma : \tau \mapsto x(\tau), \quad \gamma(0) = 0, \quad \gamma(1) \in \partial B_\varepsilon(0),$$

che unisca l'origine con la frontiera $\partial B_\varepsilon(0)$, interseca ciascuno degli insiemi di livello $S_c := \{x \in N \mid \mathcal{F}(x) = c\}$ per qualsiasi $c \in [0, c_0]$.

Si noti che per le proprietà degli intorni in $\mathbb{M}$, dato $N(0)$ è sempre possibile trovare ε che verifica l'ipotesi detta, e che un qualunque intorno dell'origine, a chiusura compatta, può fare le veci della sfera $B_\varepsilon(0)$.

Dimostrazione La superficie $\partial B_\varepsilon(0) := \{x \mid |x| = \varepsilon\}$ è compatta, quindi esiste ed è positivo il valore $m(\varepsilon) := \min_{|x|=\varepsilon} \mathcal{F}(x)$. Ma $\mathcal{F}$ è continua in $N(0) \supseteq [B_\varepsilon(0)]$, quindi $\mathcal{F} \circ \gamma$ è continua su $[0, 1]$ ed assume (almeno) i valori 0 ed m . Essa pertanto assume necessariamente tutti i valori in $[0, m]$; e ne segue che γ stessa dovrà necessariamente attraversare tutti gli insiemi di livello definiti da $\mathcal{F}$, e cioè gli insiemi S_c con $c \in [0, c_0]$ per qualche $c_0 \geq m$. $\triangleright$

Nota 4.2.4 Giacché in generale lo studio è locale nell'intorno di un punto x_e di un sistema assegnato su una varietà $\mathbb{M}$, si può senza perdita di generalità considerarne una rappresentazione in coordinate nella quale il punto x_e sia fatto corrispondere all'origine della carta. I risultati che seguono sono invarianti al variare della carta solo se (vedi §1 N.B.9) la trasformazione di coordinate è indipendente dal tempo e muta la metrica in, al più, una ad essa equivalente (vedi Cesari §1.9). Infine, qualora nel seguito se ne presenti la necessità, $\mathbb{R}^n$ verrà considerato euclideo con il prodotto scalare standard: $\langle x, y \rangle := \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{h=1}^n x^h y^h$. $\triangleright$

Sia assegnato un campo $\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, liscio su un aperto $D \subset \mathbb{R}^n$ contenente l'origine, e tale che $\mathbf{v}(0) = 0$. Si indichi con $\phi = \phi(t, 0, \mathbf{x})$ la soluzione dell'equazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ uscente dal punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. In particolare la $\phi(t, 0, 0) = 0$ è certamente soluzione ed è anche definita per ogni $t > 0$.

Sia poi $\mathcal{F} : G \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{F} \in C^1(G)$ con G aperto e contenuto in D ; e si denoti (più brevemente ma con abuso di notazione) con $\dot{\mathcal{F}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione derivata direzionale di $\mathcal{F}$ lungo il campo dato:

$$\dot{\mathcal{F}} : \mathbf{x} \in G \mapsto \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{x}) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{F}(\phi(t, 0, \mathbf{x})) \equiv \mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathcal{F}(\mathbf{x}) \equiv (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{F})(\mathbf{x}).$$

Nota 4.2.5

Molti dei seguenti teoremi si potrebbero enunciare con solo $\mathcal{F} \in C^0(G)$. Infatti al posto della $\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathcal{F}(\mathbf{x})$ si può usare la

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{v}}^+ \mathcal{F}(\mathbf{x}) &:= \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} [\mathcal{F}(g^\varepsilon \mathbf{x}) - \mathcal{F}(\mathbf{x})] = (\text{se } \mathcal{F} \in \text{loc.Lip}) = \\ &= \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} [\mathcal{F}(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{v}(\mathbf{x})) - \mathcal{F}(\mathbf{x})]; \end{aligned}$$

in effetti $[\mathcal{L}_{\mathbf{v}}^+ \mathcal{F}(\xi)]_{\xi=\phi(t, 0, \mathbf{x})} = \frac{d^+}{dt} [\mathcal{F}(\phi(t, 0, \mathbf{x}))]$, e l'essere quest'ultima non negativa implica che $\mathcal{F}(\phi(t, 0, \mathbf{x}))$ è non decrescente (rispetto a t). $\triangleright$

Funzione di Liapunov, per $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$, in $N(0)$:= una funzione $\mathcal{F} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$, regolare su $G \subseteq \mathbb{R}^n$, e che abbia $\dot{\mathcal{F}} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ *semi-definita* in segno in un intorno dell'origine $N(0)$ tale che $[N(0)] \subseteq G$.

Funzione di Liapunov "stretta", per $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$, in $N(0)$:= una funzione $\mathcal{F} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$, regolare su $G \subseteq \mathbb{R}^n$, e che abbia $\dot{\mathcal{F}} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ *definita* in segno in un intorno dell'origine $N(0)$ tale che $[N(0)] \subseteq G$.

N.B. 4.2.14 Non è possibile parlare di funzioni di Liapunov *senza aver preventivamente introdotto un certo campo* $\mathbf{v}$; e cioè senza riferirsi ad uno specifico sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$. $\diamond$

N.B. 4.2.15 È chiaro che se $\mathcal{F}_1 \in C^0(N(0))$ ha $\dot{\mathcal{F}}_1$ di segno semidefinito allora la funzione $\mathcal{F}_2 := -\mathcal{F}_1$ è anche lei una funzione di Liapunov e, come si vedrà, entrambe possono essere usate allo stesso modo nello studio della stabilità del sistema. Si badi a non confondere la funzione $\mathcal{F}$ con l'energia potenziale Π , dei sistemi meccanici conservativi il cui segno invece caratterizza il comportamento del sistema. La $\mathcal{F}$ può essere correlata con l'energia totale $\mathcal{E}$ di tali sistemi. $\diamond$

N.B. 4.2.16 Un integrale primo è per definizione tale che $\dot{\mathcal{F}} : \mathbf{x} \in N(0) \mapsto \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{x}) = 0$, pertanto è senz'altro una funzione di Liapunov, mai stretta. $\diamond$

N.B. 4.2.17 In riferimento al N.B. 0, una qualsiasi funzione $\mathcal{F} \in C^1(N(0))$ che sia semidefinita in $N(0)$, o anche solo con un punto di stazionarietà nell'origine, ha certo $\dot{\mathcal{F}}(0) = 0$ e qualunque sia $\mathbf{v}$ in quanto ha nullo il $\nabla \mathcal{F}(0)$, ma ciò evidentemente non basta a dire che la funzione è di Liapunov e cioè che $\dot{\mathcal{F}}$ sia semidefinita in tutto un intorno $N(0)$. Quest'ultima proprietà evidentemente dipende dal campo $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ mentre la prima no. $\diamond$

N.B. 4.2.18 È bene ribadire esplicitamente che (per sistemi autonomi) sia la $\mathcal{F}$ che la $\dot{\mathcal{F}}$ sono funzioni della posizione $\mathbf{x}$ e non del tempo. $\diamond$

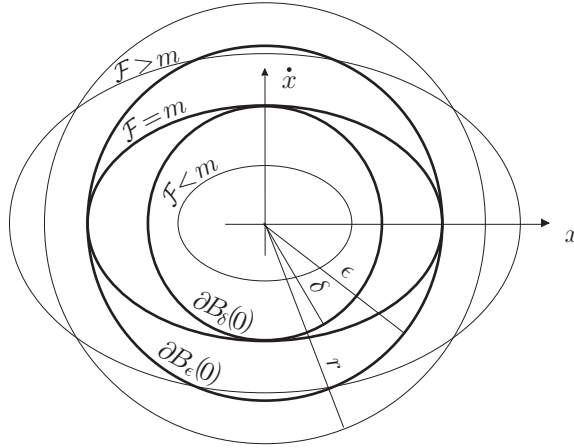
N.B. 4.2.19 Per definizione, una funzione di Liapunov è (almeno) continua in $N(0)$. $\diamond$

Teorema 4.2.1 (Dirichlet - Laplace - Liapunov) Sia $\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo liscio su un aperto $D \subset \mathbb{R}^n$ contenente l'origine, e tale che $\mathbf{v}(0) = 0$. Se il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ ammette una funzione di Liapunov $\mathcal{F}$ in $N(0)$, e se la $\mathcal{F}$ ha segno definito in $N(0)$, ed opposto a quello della sua derivata $\dot{\mathcal{F}}$ (quando questo sia definito), allora l'origine è punto di equilibrio stabile.

Se inoltre la $\mathcal{F}$ è "stretta" allora l'origine è asintoticamente stabile.

Dimostrazione Per fissare le idee si consideri la $\mathcal{F} : G \rightarrow \mathbb{R}$ definita positiva. Sia $N(0) \subseteq G$ un intorno di definitezza di entrambe le $\mathcal{F}$ e $\dot{\mathcal{F}}$, e sia $r > 0$ tale che $B_r(0) \subseteq N(0)$. Fissato $\varepsilon \in (0, r)$, siccome $\partial B_\varepsilon(0)$ è compatta esiste ed è strettamente positivo il valore $m(\varepsilon) := \min_{|\mathbf{x}|=\varepsilon} \mathcal{F}(\mathbf{x})$. Ancora, la $\mathcal{F}$ è continua e nulla nell'origine, quindi esiste $\delta(m) > 0$ tale che $|\mathbf{x}| < \delta$ implica $\mathcal{F}(\mathbf{x}) < m$, ed è certamente $\delta \leq \varepsilon$ perché altrimenti si avrebbe $[B_\varepsilon(0)] \subset B_\delta(0)$ e quindi $B_\delta(0)$ conterrebbe punti sui quali $\mathcal{F}(\mathbf{x}) = m$.

Dato comunque $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(0)$, finché $\phi : t \geq 0 \mapsto \phi(t, 0, \mathbf{x}_0)$ è definita ed è in $N(0)$ essa, in virtù della $(\frac{d}{dt} \mathcal{F} \circ \phi)(\mathbf{x}) =: \dot{\mathcal{F}} \leq 0$, è tale che $\mathcal{F}(\phi(t, 0, \mathbf{x}_0)) \leq \mathcal{F}(\mathbf{x}_0) < m$. Quindi, ragionando come nella Nota 3, si conclude che $\phi(t, 0, \mathbf{x}_0)$ non può raggiungere $\partial B_\varepsilon(0)$. Essa pertanto è definita per ogni $t \geq 0$ ed appartiene a $B_\varepsilon(0)$, che è la definizione di stabilità della soluzione $\phi : t \geq 0 \mapsto \phi(t, 0, 0) = 0$.



Conseguenza: dato $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(0)$, siccome la $(\mathcal{F} \circ \phi)(t)$ è monotona non crescente e positiva, esiste il $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\phi(t, 0, \mathbf{x}_0)) =: \hat{c}$ con $0 \leq \hat{c} \leq \mathcal{F}(\mathbf{x}_0) < m$.

Sia $\dot{\mathcal{F}}$ di segno definito ed opposto a quello della $\mathcal{F}$; si supponga quindi definita negativa su $N(0)$. In tali ipotesi, dato comunque $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(0)$ si ha necessariamente $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\phi(t, 0, \mathbf{x}_0)) =: \hat{c} = 0$.

Infatti: si assuma $\hat{c} > 0$. Ancora per la continuità della $\mathcal{F}$ certo esiste $\delta_1 = \delta_1(\hat{c}/2) > 0$ tale che $|\mathbf{y}| < \delta_1 \Rightarrow \mathcal{F}(\mathbf{y}) < \hat{c}/2$. In più, δ_1 è strettamente minore di ε , perché altrimenti in $B_{\delta_1}(0)$ la $\mathcal{F}(\mathbf{y})$ potrebbe assumere valori arbitrariamente vicini ad m e quindi maggiori di $\hat{c}/2 < \hat{c} < m$. Pertanto è non vuoto l'insieme compatto $K_1 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \delta_1(\hat{c}/2) \leq |\mathbf{x}| \leq \varepsilon\}$, sul quale la $\mathcal{F}$ può assumere valori maggiori di $\hat{c}/2$. D'altra parte dalla sua definizione: $\hat{c} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\phi(t, 0, \mathbf{x}_0))$, segue che esiste almeno un istante $t' \geq 0$ nel quale $\mathcal{F}(\phi(t', 0, \mathbf{x}_0)) > \hat{c}/2$; ed il fatto che $\mathcal{F}(\phi(t, 0, \mathbf{x}_0))$ si diriga monotona verso $\hat{c}$ implica che ciò continua ad essere vero per ogni $t \geq t'$. Pertanto per ogni $t \geq t'$ si ha che $\phi(t, 0, \mathbf{x}_0)$ esiste ed appartiene al compatto K_1 , né può uscirne giacché deve essere definitivamente $\hat{c}/2 < \mathcal{F}(\phi(t, 0, \mathbf{x}_0)) < m$. Per ipotesi la $\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{x})$ è funzione continua e definita negativa in $N(0)$, quindi essa ammette su K_1 un massimo: $-\ell$, strettamente negativo. Tale massimo è certo maggiore o uguale del valore massimo raggiunto dalla $\dot{\mathcal{F}}(\phi(t, 0, \mathbf{x}_0))$ su $[0, \infty)$. Ma $\dot{\mathcal{F}}(\phi(t, 0, \mathbf{x}_0)) \leq -\ell$ per ogni $t \geq t'$ implica $\mathcal{F}(\phi(t, 0, \mathbf{x}_0)) \leq -\ell(t - t') + \mathcal{F}(\phi(t', 0, \mathbf{x}_0))$ per ogni $t \geq t'$, e pertanto il suo limite non può essere $\hat{c} > 0$.

Infine se $\hat{c} = 0$ anche $\lim_{t \rightarrow \infty} |\phi(t, 0, \mathbf{x}_0)| = 0$. Infatti se per certi t comunque grandi esistesse $\delta_2 > 0$ tale che $\delta_2 \leq |\phi(t, 0, \mathbf{x}_0)| < \varepsilon$, dato che la compattezza dell'insieme $K_2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \delta_2 \leq |\mathbf{x}| \leq \varepsilon\}$ implica l'esistenza di $m_2 := \min_{\mathbf{x} \in K_2} \mathcal{F}(\mathbf{x})$ strettamente positivo, si avrebbe l'esistenza di t comunque grandi nei quali $\mathcal{F}(\phi(t, 0, \mathbf{x}_0)) \geq m_2$ contraddicendo l'ipotesi che sia $\hat{c} = 0$. ■

La prima parte del teorema contiene ovviamente il Teorema di Dirichlet nella sua forma comunemente usata in Meccanica.

Sussiste infatti, innanzi tutto, la seguente:

Proposizione 4.2.1 *Sia $G \subset \mathbb{R}^{2n}$ un aperto contenente l'origine e, su di esso, sia assegnato un sistema meccanico del tipo:*

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{x}} = -\nabla \Pi(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad \text{ovvero :} \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} = -\nabla \Pi(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

con $\mathbf{g} \in C^0(G)$, $\mathbf{g}^T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{y} \leq 0$, e $\Pi(\mathbf{x})$ definita positiva in $N(0)$.

Allora: l'origine $(0, 0)$ è stabile.

In tali ipotesi infatti la funzione $\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{y}^2/2 + \Pi(\mathbf{x})$ è definita positiva in $N(0, 0)$ ed è Liapunov non stretta in quanto $\dot{\mathcal{E}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{g}^T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{y} \leq 0$, ed $\mathcal{E}(0, 0) = 0$.

Allo stesso modo, per sistemi meccanici strettamente conservativi:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \partial \mathcal{H} / \partial \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\partial \mathcal{H} / \partial \mathbf{q}, \end{cases} \quad \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) := \mathcal{T}_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \Pi(\mathbf{q}), \quad \mathcal{H}(0, 0) = \Pi(0) = 0,$$

si riconosce che se l'origine delle $\mathbf{q}$ è un minimo relativo proprio per la funzione $\Pi(\mathbf{q})$, la $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ è di segno definito in $N(0, 0)$; ed essendo un integrale primo è anche Liapunov non stretta. Di conseguenza l'origine è un punto di stabilità.

Ancora, per un sistema meccanico a potenziale ed autonomo, e cioè con Lagrangiana:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{T}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \Pi(\mathbf{q}) - \dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\pi}(\mathbf{q}),$$

se $\mathbf{q} = 0$ è un punto di minimo relativo proprio per $\Pi(\mathbf{q})$ allora il punto $(\mathbf{q}_e, 0)$ è di equilibrio stabile per le equazioni di Lagrange, ed il punto $(\mathbf{q}_e, -\boldsymbol{\pi}(\mathbf{q}_e))$ è di equilibrio stabile per il corrispondente sistema Hamiltoniano. Infatti, il punto $(\mathbf{q}_e, 0)$ è di minimo per la funzione $\mathcal{T}_2 + \Pi$ che è un integrale primo delle equazioni di Lagrange, così come il punto $(\mathbf{q}_e, -\boldsymbol{\pi}(\mathbf{q}_e))$ lo è per la $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} (\mathbf{p} + \boldsymbol{\pi})^T \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{p} + \boldsymbol{\pi}) + \Pi(\mathbf{q})$ che è anch'essa un integrale primo per le equazioni di Hamilton.

In presenza di forze dissipative conviene ricorrere alle equazioni di Lagrange piuttosto che a quelle di Hamilton, ed anche in questo caso si ha che $\mathcal{T}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \Pi(\mathbf{q})$ è funzione di Liapunov (vedi: [Gantmacher p.50])

Nel caso di vincoli dipendenti dal tempo (ma ancora autonomo), la funzione $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_0 + \Pi$ è Liapunov non stretta così come l'equivalente funzione delle $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ lo è per le equazioni di Lagrange.

La seconda parte del teorema può essere trasformata nel seguente teorema, che dà informazioni sulle regioni "asintotiche", (vedi anche [Hirsh §Teor. 9.3.2]) ed è di grande importanza dato che non confina il corrispondente dato $\mathbf{x}_0$ ad un "convenientemente piccolo" intorno dell'origine $B_\delta(0)$.

Teorema 4.2.2 (del sottoinsieme invariante) (si veda: [La Salle, Teor. VI §1.3])

Sia $\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo liscio su un aperto $D \subset \mathbb{R}^n$ contenente l'origine, e tale che $\mathbf{v}(0) = 0$. Se il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ ammette una funzione di Liapunov $\mathcal{F} \in C^1(\mathbb{R}^n)$ tale che: $\mathcal{F}(0) = 0$, e che esista $l \in \mathbb{R}^+$ per il quale

- (1) dell'insieme $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{F}(\mathbf{x}) < l\}$ sia limitata la componente connessa Ω_l che contiene l'origine;
- (2) $\mathcal{F}(\mathbf{x}) > 0$ sia definita positiva su Ω_l ;
- (3) $\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{x}) \leq 0$ sia semidefinita negativa su Ω_l ;

allora, detti $N := \{\mathbf{x} \in \Omega_l \mid \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{x}) = 0\}$, ed I_N il suo massimo sottoinsieme invariante rispetto al flusso, si riconosce che: ogni $\mathbf{x}_0$ in Ω_l ha evoluzione tale che $\phi(t, 0, \mathbf{x}_0) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} I_N$, e cioè: I_N contiene l'insieme ω -limite di $\mathbf{x}_0$.

Dimostrazione L'essere $\mathcal{F} \circ \phi$ non crescente ed $\mathbf{x}_0$ in Ω_l implicano, come visto prima, che $\mathcal{F}(\phi(t, 0, \mathbf{x}_0)) \leq l_0 := \mathcal{F}(\mathbf{x}_0) < l$ per ogni $t > 0$ in cui ϕ è definita. Quindi, finché è definita, la $\phi(t, 0, \mathbf{x}_0)$ appartiene ad Ω_l ; ed anzi, esistendo certamente un compatto che contiene Ω_l , essa è definita *per ogni* $t > 0$ ed ammette $\omega(\mathbf{x}_0)$ non vuoto e contenuto in Ω_l . Ne segue che $\mathcal{F} : t \mapsto \mathcal{F}(\phi(t, 0, \mathbf{x}_0))$ è monotona su $[0, \infty)$, varia in $[0, l_0] \subset [0, l)$, ed ha pertanto limite $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\phi(t, 0, \mathbf{x}_0)) =: \hat{c} \in [0, l_0]$. Se ne conclude che preso comunque $\hat{\mathbf{x}} \in \omega(\mathbf{x}_0)$ esistono per definizione t comunque grandi nei quali $|\phi(t, 0, \mathbf{x}_0) - \hat{\mathbf{x}}| < \varepsilon$ e quindi, per continuità, $\mathcal{F}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{c}$. Inoltre il fatto che l'insieme ω -limite di una traiettoria di un sistema autonomo contenga intere le traiettorie $\gamma := \{\phi(t, t_1, \mathbf{x}_1)\}_{t \in J_M}$ uscenti dai suoi punti $\mathbf{x}_1 \in \omega(\mathbf{x}_0)$ implica che $\mathcal{F}(\phi(t, t_1, \mathbf{x}_1)) = \hat{c}$ per ogni t , e quindi che $\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{x}_1) = 0$ *per ogni* $\mathbf{x}_1 \in \omega(\mathbf{x}_0)$. L'invarianza di quest'ultimo assicura che $\omega(\mathbf{x}_0) \subseteq I_N \subseteq N$. ■

N.B. 4.2.20 Sia $\mathcal{F}(\mathbf{x}) > 0$ se $\mathbf{x} \neq 0$, e siano
$$\begin{cases} \mathcal{F}(\mathbf{x}) \rightarrow \infty & \text{per } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \\ \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{x}) \leq 0 & \text{su tutto } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$
 Allora N è l'insieme di tutti i punti di $\mathbb{R}^n$ tali che $\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{x}) = 0$. In particolare si supponga che la $\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{x})$ si annulli solo su una linea γ , e che su di essa l'unico insieme invariante sia proprio il punto di equilibrio $\mathbf{x}_e$ del sistema (come accade se il campo è ovunque trasverso a $\gamma \setminus \{\mathbf{x}_e\}$). Allora il punto $\mathbf{x}_e$ è *globalmente ed asintoticamente* stabile. ◇

Esempio 4.2.21 $\ddot{x} + k\dot{x}^m + x^\ell = 0$ con $x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R}$, ℓ, m positivi dispari, $k > 0$.
Con la $\mathcal{F}(x, \dot{x}) := \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{\ell+1}x^{\ell+1}$ si ha una Liapunov non stretta in $\mathbb{R}^2$, infatti $\dot{\mathcal{F}} = -k\dot{x}^{m+1}$. Ciononostante, per il N.B. qui sopra, l'origine è globalmente ed asintoticamente stabile. □

Esempio 4.2.22 $\ddot{x} + k\dot{x}^m + \sin x = 0$ con $x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R}$, m positivo dispari, $k > 0$.
Con la $\mathcal{F}(x, \dot{x}) := \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \cos x + 1$ si ha una Liapunov non stretta in $(-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$, infatti $\dot{\mathcal{F}} = -k\dot{x}^{m+1}$. Come sopra, l'origine è ivi asintoticamente stabile. □

I seguenti esempi mostrano alcune idee sul come procurarsi una funzione di Liapunov per un dato sistema.

Esempio 4.2.23
$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y^2 \\ \dot{y} = xy - y^3, \end{cases} \quad \text{con } x_0, y_0 \in \mathbb{R}.$$

L'equazione linearizzata ha matrice $\partial \mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, pertanto l'origine non è punto iperbolico. Si consideri allora, con $a \in \mathbb{R}$, la famiglia di funzioni $\mathcal{F}(x, y) := x^2 + ay^2$. Si ha $\frac{1}{2}\dot{\mathcal{F}}(x, y) = -x^2 - 2xy^2 + axy^2 - ay^4 = -(x^2 + 2y^4)$ se $a = 2$. In virtù del Teorema 1 si ha che lo zero è globalmente ed asintoticamente stabile. □

Esempio 4.2.24
$$\begin{cases} \dot{x} = \sin y \\ \dot{y} = -2x - 3y, \end{cases} \quad \text{con } x_0, y_0 \in \mathbb{R}.$$

L'equazione linearizzata ha matrice $\partial \mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, pertanto $Tr < 0$, $Det > 0$ e l'origine è punto iperbolico asintoticamente stabile. Per confermarlo con il metodo diretto si provi con la famiglia di funzioni $\mathcal{F}(x, y) := ax^2 + bxy + cy^2$. Si ha $\dot{\mathcal{F}}(x, y) = 2ax \sin y + by \sin y - 2bx^2 - (4c + 3b)xy - 6cy^2$, e quindi la matrice dell'Hessiano nell'origine è

$$\mathbf{H}(0, 0) = \begin{pmatrix} -4b & 2a - (4c + 3b) \\ 2a - (4c + 3b) & 2b - 12c \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{F}$ è definita positiva se $a > 0$ e $b^2 - 4ac < 0$;

$\dot{\mathcal{F}}$ è definita negativa se $b > 0$ e, ad esempio, $\begin{cases} 2a = (4c + 3b) \\ 2b - 12c < 0. \end{cases}$

Ne segue la condizione sufficiente $(\frac{1}{2}b)^2 < ac = 2c^2 + \frac{3}{2}bc$, e cioè, ad esempio, $\frac{1}{2}b = c$ ed $a = 5c$, la quale assicura le ipotesi del Teorema 1 e permette di riconoscere che lo zero è globalmente ed asintoticamente stabile. □

Esempio 4.2.25 L'Equazione di Eulero non forzata:

$$\begin{cases} a\dot{\omega}_\xi - (b - c)\omega_\eta\omega_\zeta = 0 \\ b\dot{\omega}_\eta - (c - a)\omega_\zeta\omega_\xi = 0 \\ c\dot{\omega}_\zeta - (a - b)\omega_\xi\omega_\eta = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

L'incognita è il vettore $\omega : t \mapsto \omega(t)$ del quale le $(\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta) := (\omega^i)_{i=1,2,3} \equiv (\omega_i)_{i=1,2,3} \in \mathbb{R}^3$ sono le componenti rispetto ad una base ortonormale solidale al corpo rigido e, per esso, principale d'inerzia; $a, b, c > 0$ sono i corrispondenti momenti d'inerzia.

Il sistema, e non il corpo, ha equilibri in $\omega_i = \omega_{i+1} = 0$ ed $\omega_{i+2} \neq 0$ per $i = 1$ oppure 2 oppure 3. Sia, ad esempio, $\omega_\xi(t) = \omega_\xi(0) =: \omega_\xi|_0 \neq 0$, e si ponga $\omega_e := (\omega_\xi|_0, 0, 0)$.

La linearizzata in ω_e ha campo:

$$\partial v(\omega_e)(\omega - \omega_e) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c-a}{b} \omega_\xi|_0 \\ 0 & \frac{a-b}{c} \omega_\xi|_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_\xi - \omega_\xi|_0 \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix}$$

dalla quale si ricavano $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm \sqrt{\left(\frac{(c-a)(a-b)}{bc} \omega_\xi|_0\right)^2}$. Pertanto se $c < a < b$, oppure $b < a < c$, per il Teorema 4 del precedente paragrafo si ha *instabilità*. Negli altri casi la linearizzata ha tutte $\Re \lambda = 0$, e quindi il 1° teorema di Liapunov non è di aiuto.

Si rinomini la variabile ω_ξ ponendo $\omega_\xi =: \omega_\xi|_0 + \delta\omega_\xi$. Il sistema (2.9) si può riscrivere nella forma $\dot{x} = T x + h(t, x)$, che ha l'origine come punto di equilibrio:

$$\begin{cases} \dot{\delta\omega_\xi} = \frac{b-c}{a} \omega_\eta \omega_\zeta \\ \dot{\omega}_\eta = \frac{c-a}{b} \omega_\zeta (\delta\omega_\xi + \omega_\xi|_0) \\ \dot{\omega}_\zeta = \frac{a-b}{c} \omega_\eta (\delta\omega_\xi + \omega_\xi|_0). \end{cases}$$

Il fatto che la funzione h sia non lineare impedisce anche di servirsi delle varie proposizioni viste nel precedente paragrafo e riservate ai sistemi lineari. Si può invece ricorrere al metodo diretto.

È noto che sussistono i seguenti integrali primi (come d'altronde si riconosce immediatamente con un pò di algebra sulle equazioni di partenza):

$$\begin{cases} 2\mathcal{T} = a(\delta\omega_\xi + \omega_\xi|_0)^2 + b\omega_\eta^2 + c\omega_\zeta^2 = 2\mathcal{T}_0 \\ \mathcal{K}^2 = a^2(\delta\omega_\xi + \omega_\xi|_0)^2 + b^2\omega_\eta^2 + c^2\omega_\zeta^2 = \mathcal{K}_0^2, \end{cases}$$

queste funzioni però non hanno segno definito nell'intorno dell'origine, infatti non valgono zero in zero, né basterebbe toglierli il loro valore in zero perché rimarrebbe comunque un termine dispari, (vedi Esempio 2.7). Un certo guadagno lo si ottiene considerando la funzione $\mathcal{F}_1 := (\mathcal{K}^2 - 2a\mathcal{T}) = b(b-a)\omega_\eta^2 + c(c-a)\omega_\zeta^2$ che è, almeno, semidefinita positiva in $N(0)$ qualora $a < b < c$ oppure $a < c < b$ (negli altri due casi, simmetrici di questi, lo è $-\mathcal{F}_1$). Si supponga, ad esempio, $a < b < c$. Tuttavia, per poter ricorrere al teorema è necessario che la funzione $\mathcal{F}_1$ abbia segno definito. [Se si vuole concludere il ragionamento senza fare ricorso al teorema, a questo punto si può notare che la particolare forma dell'integrale primo $(\mathcal{K}^2 - 2a\mathcal{T}) = \text{cost}$ permette di concludere che $|\omega_\eta|, |\omega_\zeta|$ rimangano piccole se tali sono in $t = 0$, e quindi $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0$ implica che anche $|\delta\omega_\xi|$ rimane piccola].

Per poter trovare una funzione di segno definito sarà conveniente cercare un'altra funzione degli integrali primi, e che (quindi potrà essere una Liapunov e) sia anche lei semidefinita positiva, *ma che risulti strettamente positiva lì dove la precedente era nulla*. Occorre cioè che sia (nulla nell'origine e) positiva nei punti $(\delta\omega_\xi, 0, 0)$. Ha questa caratteristica la funzione $\mathcal{F}_2 := (2\mathcal{T} - 2\widetilde{\mathcal{T}})^2$, con $2\widetilde{\mathcal{T}} := a(\omega_\xi|_0)^2$. Se ne conclude che la funzione $\mathcal{F} := \mathcal{K}^2 - 2a\mathcal{T} + (2\mathcal{T} - 2\widetilde{\mathcal{T}})^2$ è Liapunov, e per mezzo di essa il teorema assegna stabilità:

$$\mathcal{F} = b(b-a)\omega_\eta^2 + c(c-a)\omega_\zeta^2 + \left(a(\delta\omega_\xi^2 + 2\delta\omega_\xi\omega_\xi|_0) + b\omega_\eta^2 + c\omega_\zeta^2\right)^2$$

è infatti definita positiva in $N(0, 0, 0)$. □

Esempio 4.2.26 $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$, $x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R}$.

Se si adotta la funzione “energia”: $\mathcal{E} = \mathcal{E}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \int^x g(\xi)d\xi$, si calcola $\dot{\mathcal{E}} = \dot{\mathcal{E}}(x, \dot{x}) = -\dot{x}^2 f(x, \dot{x})$ che può dimostrarsi utile se, come nel caso in cui le f rappresentino forze sostanzialmente dissipative, si abbia $f \geq 0$.

D'altra parte, a meno che non sia applicabile il Teorema 2 sull'insieme ω -limite, questo metodo non dà informazioni sulla asintotica stabilità, visto che la presenza del fattore $\dot{x}$ rende la $\dot{\mathcal{E}}$ non definita in segno; (vedi però il ricorso alla trasformazione di Lienard, più oltre). □

Esempio 4.2.27 (si veda: [La Salle Lefschetz])

$$\ddot{x} + a\dot{x} + 2bx + 3x^2 = 0, \quad x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R}, \quad a, b > 0.$$

L'equazione è equivalente a

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -2bx - ay - 3x^2 \end{pmatrix} =: \mathbf{v}(x, y) \quad \text{con} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

I punti di equilibrio sono due: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ed $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b/3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si ha

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{v}(x_1, y_1) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2b & -a \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} Tr < 0, \\ Det > 0 \end{cases} \quad \text{per cui} \quad (x_1, y_1) \text{ è asint. stabile,} \\ \partial \mathbf{v}(x_2, y_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ +2b & -a \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} Tr < 0, \\ Det < 0 \end{cases} \quad \text{per cui} \quad (x_2, y_2) \text{ è instabile.} \end{aligned}$$

In questo caso, pur essendo poco utile per studiare la stabilità degli equilibri, il metodo diretto può essere usato per valutare, anche se solo per inclusione, la regione di stabilità dell'origine. A questo scopo si consideri ad esempio

$$\mathcal{F} : (x, y) \mapsto \mathcal{F}(x, y) := \frac{1}{2} y^2 - \int^x \dot{y}(\xi, 0) d\xi = \frac{1}{2} y^2 + bx^2 + x^3.$$

Si calcola $\dot{\mathcal{F}} = -ay^2 \leq 0$ e si ha, con la notazione usata nel Teorema 2, $N := \{(x, y) \in \Omega_l \mid \dot{\mathcal{F}} = 0\} \equiv \{(x, y) \in \Omega_l \mid y = 0\}$, ove il sottoinsieme connesso, e contenente l'origine, di $\Omega_l := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathcal{F}(x, y) < l\}$ è limitato purché sia $l \leq \mathcal{F}(x_2, y_2)$. Quindi risulta $I_N = \{(x_1, y_1)\}$ in quanto il campo, fuori dagli equilibri, è trasversale l'asse delle x e non nullo.

Per determinare una zona che sia sicuramente inclusa nel bacino di attrazione dell'origine si può far crescere il parametro l degli insiemi Ω_l e cercarne il massimo valore $\tilde{l}$ per il quale il corrispondente insieme $\Omega_{\tilde{l}}$ arrivi possibilmente a toccare, ma non contenga, il punto instabile (x_2, y_2) . Stante il fatto che la $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x, y)$ verifica le ipotesi del Teorema 2 per un qualsiasi $x > -b$, e che $x_2 = -\frac{2}{3}b > -b$, un buon candidato per il numero $\hat{l}$ è allora $\hat{l} = \mathcal{F}(x_2, y_2)$. Se ne conclude che il bacino di attrazione del punto (x_1, y_1) è *ampio abbastanza da contenere, dell'insieme* $\{(x, y) \mid \mathcal{F}(x, y) < \mathcal{F}(x_2, y_2)\}$, almeno la componente connessa che contiene il punto (x_1, y_1) . $\square$

Il metodo diretto di Liapunov può essere usato anche per verificare l'instabilità della soluzione nulla di $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ come già si è visto nell'Esempio 2.

Teorema 4.2.1 (di Chetaiev) Sia $\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo liscio su un aperto $D \subset \mathbb{R}^n$ contenente l'origine, e tale che $\mathbf{v}(0) = 0$. Se esistono un intorno dell'origine $N(0) \subset \mathbb{R}^n$, un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ sulla cui frontiera $\partial U \subset \mathbb{R}^n$ è l'origine, ed una funzione $\mathcal{F} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ tali che:

$$(i) \quad \mathcal{F}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{su} \quad N(0) \cap \partial U;$$

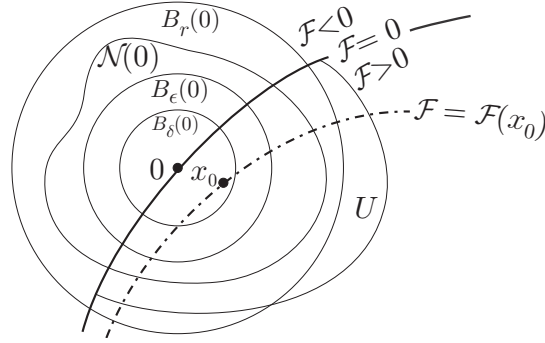
$$(ii) \quad \mathcal{F}, \dot{\mathcal{F}} \in C^0(N(0) \cap [U]) \text{ e definite dello stesso segno su } N(0) \cap U;$$

allora l'origine è instabile, e cioè per qualche $\mathbf{x}_0 \in U$ la $\phi : t \mapsto \phi(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ esce da qualunque $[B_\varepsilon(0)] \subset N(0)$ in un tempo finito.

Dimostrazione Si suppongano $\mathcal{F}$ e $\dot{\mathcal{F}}$ entrambe positive su $N(0) \cap U$, e sia $B_r(0) \subset N(0)$ e tale che $[B_r(0)] \subset N(0)$. Fissato $\delta \in (0, r)$, esiste $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(0) \cap U$ tale che $\mathcal{F}(\mathbf{x}_0) > 0$. Inoltre, siccome anche $\dot{\mathcal{F}}$ è ivi non negativa, fintanto che $\phi(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ rimane in $B_r(0) \cap U$ si ha che $\mathcal{F}(\phi(t, t_0, \mathbf{x}_0)) \geq \mathcal{F}(\mathbf{x}_0) > 0$, e quindi è anche $\phi(t, t_0, \mathbf{x}_0) \in \{\mathbf{x} \in N(0) \mid \mathcal{F}(\mathbf{x}) \geq \mathcal{F}(\mathbf{x}_0)\}$.

La funzione $\dot{\mathcal{F}}$ è continua, e pertanto assumerà un minimo $\ell > 0$ sull'insieme compatto $[B_r(0) \cap U \cap \{\mathbf{x} \mid \mathcal{F}(\mathbf{x}) \geq \mathcal{F}(\mathbf{x}_0)\}]$ e questo, per la continuità di $\mathcal{F}$, è separato da quella parte della ∂U che è in $N(0)$ e sulla quale $\mathcal{F} = 0$. Ciò implica che $\mathcal{F}(\phi(t, t_0, \mathbf{x}_0)) \geq \mathcal{F}(\mathbf{x}_0) + \ell(t - t_0)$ fintanto che $\phi(t, t_0, \mathbf{x}_0) \in [B_r(0) \cap U]$.

Si fissi ora un qualunque $\varepsilon \in (\delta, r)$; o accade che $\phi(t, t_0, \mathbf{x}_0) \in B_\varepsilon(0) \cap U$ per ogni $t \geq t_0$, oppure deve esistere $t' > t_0$ tale che $\phi(t', t_0, \mathbf{x}_0) \in \partial(B_\varepsilon(0) \cap U)$. Ma la prima eventualità è esclusa dalla continuità di $\mathcal{F}$ su $B_r(0) \cap [U]$ che implica la sua limitatezza sul sottoinsieme $[B_\varepsilon(0) \cap U]$. Pertanto esiste $t' < \infty$ tale che in $t_0 + t'$ la soluzione $\phi(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ raggiunge (ed attraversa) $\partial(B_\varepsilon(0) \cap U) \subset (\partial B_\varepsilon(0) \cap [U]) \cup ([B_\varepsilon(0)] \cap \partial U)$. Siccome la $\phi(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ non può attraversare $[B_\varepsilon(0)] \cap \partial U$ poiché ivi è $\mathcal{F}(\mathbf{x}) = 0$, essa dovrà necessariamente passare attraverso la parte della $\partial B_\varepsilon(0)$ che è in U . $\blacksquare$



Questo teorema viene usato, come già in parte visto nel Teor. 1.3, per invertire il teorema di Dirichlet (almeno parzialmente).

Nel caso di sistemi Hamiltoniani a vincoli indipendenti dal tempo e forze *strettamente conservative* si ha in particolare

Teorema 4.2.2 Sia dato un sistema meccanico strettamente conservativo, (e tensore della metrica: $\mathbf{K}_{hk} \equiv \delta_{hk}$):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = +\partial \mathcal{H} / \partial \mathbf{p}, \\ \dot{\mathbf{p}} = -\partial \mathcal{H} / \partial \mathbf{q}, \end{cases} \quad \mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^n \text{ (localmente)}, \quad \text{con}$$

$$\mathcal{H} := \mathcal{T}_2 + \Pi, \quad \mathcal{T}_2 : (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p}, \quad \Pi : \mathbf{q} \mapsto \Pi(\mathbf{q}), \quad \Pi \in C^1(N(0)).$$

Sia $\Pi : \mathbf{q} \mapsto \Pi(\mathbf{q}) = \Pi_k(\mathbf{q}) + \Pi_{k+1}(\mathbf{q}) + \dots$ con $\Pi_k : \mathbf{q} \mapsto \Pi_k(\mathbf{q})$ omogenea di grado $k \geq 2$, e $\Pi_{k+1}(\mathbf{q}) + \dots = o(|\mathbf{q}|^k)$; pertanto, $\Pi(0) = 0$.

Se $\mathbf{q} = 0$ è di stazionarietà per $\Pi(\mathbf{q})$, e quindi l'origine $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \equiv (0, 0)$ lo è per la funzione $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, ma $\Pi(0)$ non è un minimo;

o, equivalentemente: se $\mathbf{q} = 0$ è di stazionarietà per $\Pi(\mathbf{q})$ e tale che per $N(0, 0)$ sufficientemente piccolo è non vuoto l'aperto H^- definito da

$$H^- := \left\{ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in N(0, 0) \mid \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) < 0 \right\},$$

[N.B. e quindi, siccome $\mathcal{T}_2$ è definita positiva in $N(0, 0)$ e si annulla per $\mathbf{p} = 0$, è non vuoto l'aperto $P^- := \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in N(0, 0) \mid \Pi(\mathbf{q}) < 0\}$, ed è $H^- \subseteq P^-$];

e se l'insieme H^- è, in particolare, contenuto nell'insieme P_k^- definito da

$$P_k^- := \left\{ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in N(0, 0) \mid \Pi_k(\mathbf{q}) < 0 \right\},$$

allora: l'origine $(0, 0)$ è instabile.

N.B. 4.2.28 In breve: si ha instabilità se l'origine è estrema non di minimo per l'energia potenziale e se i punti in $N(0, 0)$ sui quali la $\mathcal{H}$ è negativa sono quelli stessi sui quali è negativa (strettamente) la parte principale dell'energia potenziale. $\diamond$

N.B. 4.2.29 L'insieme P_k^- è non vuoto se esiste un intorno di $\mathbf{q} = 0$ sul quale Π_k è definita negativa, semidefinita negativa, oppure indefinita; ed è invece vuoto se Π_k è definita positiva o semidefinita positiva. Alla condizione $P_k^- \neq \emptyset$ va poi aggiunta quella sulla inclusione di H^- . Per $N(0, 0)$ convenientemente piccolo l'insieme H^- è certamente contenuto in P_k^- se Π_k è definita negativa, e può esservi contenuto se Π_k è semidefinita negativa o indefinita. Quindi, in particolare: (2° teor. di Liapunov) ...Se Π ha un massimo isolato e questo lo si riconosce tramite la Π_k , allora l'origine è instabile. $\diamond$

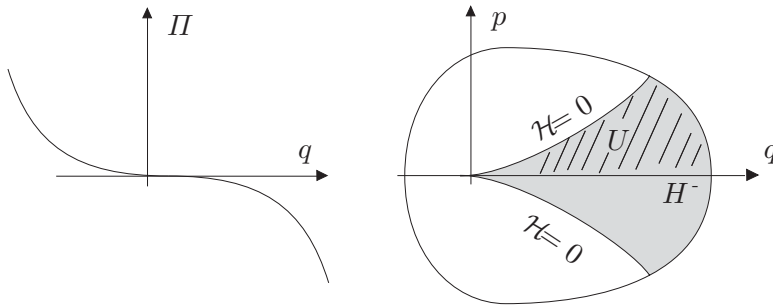
N.B. 4.2.30 Per $\Pi = \Pi_2 + \dots$ la condizione $\Pi_2 < 0$ su (tutto) $N(0, 0) \cap H^- \neq \emptyset$ è più forte di quella che richiede che la forma $\frac{1}{2} \langle \mathbf{q}, \Pi \mathbf{q} \rangle$ abbia seppure una sola direzione sulla quale essa è negativa. Nel caso (conservativo) iperbolico questo è un metodo alternativo al Teorema 1.4 per provare che se ci sono autovalori di Π con parti reali negative allora l'instabilità è assicurata. $\diamond$

Dimostrazione La funzione $\mathcal{F} : (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) := -\mathbf{q}^T \mathbf{p} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ verifica le ipotesi del teorema di Chetaiev. Infatti:

- (i) se $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ è in H^- , allora anche $(\mathbf{q}, -\mathbf{p})$ è in H^- ; e quindi dall'essere non vuoto l'insieme $N(0, 0) \cap H^-$ segue che è anche non vuoto l'aperto $U := \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in N(0, 0) \cap H^- \mid \mathbf{p}^T \mathbf{q} > 0\}$, e su di esso $\mathcal{F}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) > 0$;
- (ii) la continuità di $\mathcal{H}$ su $N(0, 0)$ implica $\mathcal{F}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = 0$ su quella parte della frontiera di U che è in $N(0, 0)$; su di essa o è $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = 0$ oppure $\mathbf{q}^T \mathbf{p} = 0$; a tale insieme appartiene anche il punto $(0, 0)$;
- (iii) per i punti di U è valida la stima

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= -\left(\mathbf{q}^T \dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{p}\right) \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = -\left(-\mathbf{q}^T \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{p}^T \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}\right) \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ &= +\left(\mathbf{q}^T \frac{\partial \mathcal{T}_2}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{q}^T \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} - 2\mathcal{T}_2\right) \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ &= \left(O(|\mathbf{q}| \cdot |\mathbf{p}|^2) + k\Pi_k(\mathbf{q}) + O(|\mathbf{q}|^{k+1}) - 2\mathcal{T}_2\right) \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}). \end{aligned}$$

Pertanto, per $N(0, 0)$ sufficientemente piccolo, su U si ha $\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) > 0$.



[Più debolmente: l'origine è instabile se l'intersezione $U^- := H^- \cap P_k^-$ è non vuota e localmente positivamente invariante [:= e cioè $\forall \mathbf{x} \in U^-$ si ha che $\phi(t, 0, \mathbf{x}) \in U^-$ almeno finché $\phi(t, 0, \mathbf{x})$ appartiene a $N(0, 0)$]. In tal caso infatti, la parte della frontiera di U^- che è in $N(0, 0)$ non viene raggiunta per costruzione, e su $U^- \neq \emptyset$ le $\mathcal{F}$ ed $\dot{\mathcal{F}}$ sono positive]. ■

Esempio 4.2.31 Con la notazione del Teorema 4, ove $\mathbf{q} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, siano $\Pi : (x, y, z) \mapsto \frac{1}{2}c(x^4 + y^4) - hz^4$, e $\mathcal{T}_2 : (x, y, z) \mapsto \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$, con $c, h > 0$.

Lo studio della linearizzata non è sufficiente a trarre conclusioni giacché $\partial \mathbf{v}(0, 0)$ ha solo autovalori nulli; questo teorema garantisce l'instabilità. □

Esempio 4.2.32 Con la notazione del Teorema 4, ove $\mathbf{q} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, siano $\Pi : (x, y, z) \mapsto \frac{1}{2}c(x^2 + y^2) - hz^4$, e $\mathcal{T}_2 : (x, y, z) \mapsto \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$, con $c, h > 0$.

Lo studio della linearizzata non è sufficiente a trarre conclusioni giacché $\partial \mathbf{v}(0, 0)$ ha un autovalore nullo e non ha autovalori positivi; *tuttavia neanche questo teorema* garantisce l'instabilità. Infatti la $\Pi_2(x, y, z) = 12c(x^2 + y^2)$ è semidefinita positiva, e quindi *non* è strettamente negativa sull'insieme (non vuoto)

$$H^- := \left\{ (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \in N(0, \dots, 0) \mid hz^4 > \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}c(x^2 + y^2) \right\}.$$

Né si potrebbe usare il teorema nel caso $c < 0$ a meno di riconoscere che esso disaccoppia le coordinate e quindi che esistono intorno dell'origine localmente invarianti sui quali $\Pi_k < 0$.

In casi come questo la stabilità o la instabilità vanno provate, secondo la definizione, per verifica diretta, come fatto nell'Esempio 1.13, oppure mediante l'uso di una qualche altra funzione di Liapunov (ammesso che esista). □

N.B. 4.2.33 Si consideri un sistema lagrangiano a potenziale autonomo, e cioè soggetto a forze *indipendenti dal tempo, conservative o anche giroscopiche*:

$$\begin{cases} Q_h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -\frac{\partial \Pi(\mathbf{q})}{\partial \dot{q}^h} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \pi_h}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \pi_k}{\partial \dot{q}^h} \right) \dot{q}^k; & \frac{\partial \Pi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \Big|_{\mathbf{q}=0} = 0; \\ \mathcal{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{k=1}^n \pi_k(\mathbf{q}) \dot{q}^k + \Pi(\mathbf{q}); & \boldsymbol{\pi}(\mathbf{q}) = (\pi_1(\mathbf{q}), \dots, \pi_n(\mathbf{q})). \end{cases}$$

Se si tenta di seguire un procedimento analogo a quello seguito nel teorema e si definisce

$$\mathcal{F}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) := \langle \mathbf{p} + \boldsymbol{\pi}(\mathbf{q}), \mathbf{q} \rangle_{\mathcal{H}} \quad \text{ed} \quad U := \left\{ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in N(0, 0) \cap H^- \mid \langle \mathbf{p} + \boldsymbol{\pi}(\mathbf{q}), \mathbf{q} \rangle > 0 \right\}$$

si trova che $\dot{\mathcal{F}}$ non risulta strettamente minore di zero su U ; infatti, in questo caso, *il risultato non sussiste!* È noto il seguente controesempio (vedi: [Levi Civita 2^o.1 p.471]). Un elemento vincolato ad un piano liscio è soggetto a una forza effettiva totale della forma $(k - m\omega^2)\mathbf{x}$, con $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $k, \omega \in \mathbb{R}$, costanti positive. Si vede facilmente che l'origine è attrattiva se $k < m\omega^2$. Detto $\vec{e}_3$ un versore ortogonale al piano, in un riferimento uniformemente rotante con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} := (0, 0, \omega)$ parallela all'asse $(O, \vec{e}_3)$, l'equazione di moto è: $m\dot{\boldsymbol{\xi}} = (k - m\omega^2)\boldsymbol{\xi} + m\omega^2\boldsymbol{\xi} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\xi}}$. Ma la trasformazione dalle coordinate assolute a quelle relative è una trasformazione ortogonale: $\zeta = z$ ed $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, e pertanto se l'origine è stabile per le une lo è anche per le altre. Ciò implica che la presenza della forza giroscopica $-2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\xi}}$ nell'equazione $m\dot{\boldsymbol{\xi}} = k\boldsymbol{\xi} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\xi}}$ ne stabilizza la soluzione $\xi(t) = \eta(t) = \zeta(t) = 0$ che, per $\omega = 0$, sarebbe instabile. Si noti inoltre che la centrifuga: $m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\xi})$ non è una forza centrale in $\mathbb{R}^3$, e quindi ogni ricorso al Teorema 4 è vano. $\diamond$

Esempio 4.2.34 Nel caso di sistemi lineari autonomi $\dot{x} = \mathcal{T}x$, con $x_0 \in \mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^n$ si è costruita precedentemente (vedi §1, Punti 1, ..., 4) la funzione $\mathcal{F} \equiv r^2$ espressa da $\langle x, x \rangle_{\mathbb{B}} \equiv \mathcal{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P}^{-T} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}$, ove $\mathbb{B} := \{\epsilon_h = P e_h\}_{h=1, \dots, n}$ è la base ε -quasi propria di $\mathcal{T}$. Tale funzione è una funzione di Liapunov stretta in $N(0)$ quando tutte le parti reali degli autovalori di $\mathcal{T}$ sono strettamente negative; infatti si è visto che $\frac{1}{2} \dot{r}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_{(i)} (\xi^i)^2 + \sum_{i=\nu+1}^{\nu+\tau} \Re \mu_{(i)} ((\tilde{\xi}^i)^2 + (\tilde{\eta}^i)^2) + O(\varepsilon)$ e quindi, nel caso detto, essa può essere resa strettamente negativa. $\square$

Un'analoga funzione di Liapunov, alternativa alla $\langle x, x \rangle_{\mathbb{B}}$, la cui forma può dare notizie sugli insiemi positivamente invarianti è la seguente.

Si supponga anche ora che la base data sia ortonormale rispetto al prodotto $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e si pongano

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^T := + \int_0^\infty e^{\mathbf{T}^T t} e^{\mathbf{T} t} dt \quad \text{ed} \quad \mathcal{F}_C : \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}_C(\mathbf{x}) := \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x}.$$

(i) La definizione è ben data se la matrice $\mathbf{T}$ ha tutti gli autovalori con $\Re \lambda < 0$. Infatti, in tal caso, entrambi i sistemi lineari $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T} \mathbf{x}$, ed $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^T \mathbf{x}$ sono asintoticamente stabili, giacché $\mathbf{T}, \mathbf{T}^T$ hanno gli stessi autovalori. Pertanto (vedi §1) esistono $\kappa, \alpha \in \mathbb{R}$ positivi e tali che $\|e^{\mathbf{T} t}\| < \kappa e^{-\alpha t}$; ed un'analoga proprietà sussiste per $\|e^{\mathbf{T}^T t}\|$; ciò che implica l'integrabilità di $\mathbf{C}$.

(ii) Sussiste la $\frac{d}{dt} (e^{\mathbf{T}^T t} e^{\mathbf{T} t}) = \mathbf{T}^T (e^{\mathbf{T}^T t} e^{\mathbf{T} t}) + (e^{\mathbf{T}^T t} e^{\mathbf{T} t}) \mathbf{T}$, ma il primo membro è continuo e fornisce $\int_0^\infty \frac{d}{dt} (e^{\mathbf{T}^T t} e^{\mathbf{T} t}) dt = -\mathbf{I}$, per cui è $\mathbf{T}^T \mathbf{C} + \mathbf{C} \mathbf{T} = -\mathbf{I}$.

(iii) $\mathcal{F}_C \equiv \langle x, Cx \rangle$ è definita positiva perché

$$\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x} = \int_0^\infty (e^{\mathbf{T} t} \mathbf{x})^T (e^{\mathbf{T} t} \mathbf{x}) dt = \int_0^\infty \mathbf{x}^T(t) \mathbf{x}(t) dt.$$

(iv) $\dot{\mathcal{F}}_C$ è definita negativa perché

$$\dot{\mathcal{F}}_C = \mathcal{L}_{\mathbf{T} \mathbf{x}} (\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{T}^T \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{T} \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T \mathbf{x}.$$

Si supponga che (la metrica sia banale e che), ad esempio, $\mathbf{T}$ sia normale: $\mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{T} \mathbf{T}^T$. In tal caso lei e la sua trasposta sono diagonalizzabili in una stessa base ortonormale $\mathbb{B}_A$; e pertanto, in tale base, la matrice di $\mathbf{C}$ diviene

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \int_0^\infty e^{2\lambda_1 t} dt & & & & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \int_0^\infty e^{2\Re \mu_i t} dt & & 0 \\ & & 0 & \int_0^\infty e^{2\Re \mu_i t} dt & \\ \vdots & & & & \ddots \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\lambda_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & -\frac{1}{2\Re \mu_i} \mathbb{I}_2 & \\ \vdots & & & \ddots \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Per cui, detta $\mathbf{P}$ la matrice (ortogonale) del cambio di base $\{e\} \rightarrow \mathbb{B}_A$, e posto $\boldsymbol{\xi} := \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$, dalla ortogonalità di $\mathbf{P}$ segue che

$$\mathcal{F}_C(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, C\mathbf{x} \rangle = \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P} \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^T \tilde{\mathbf{C}} \boldsymbol{\xi} = -\frac{1}{2} \left(\sum_i \frac{\xi_i^2}{\lambda_i} + \sum_\mu \frac{\tilde{\xi}_i^2 + \tilde{\eta}_i^2}{\Re \mu_i} \right).$$

Si paragoni questa forma con la $\mathcal{F}_T(\mathbf{x}) := \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbb{B}_T} \equiv \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$. La derivata di questa, ancora per l'ortogonalità di $\mathbf{P}$, vale (vedi §.1 Punto 2) $\dot{\mathcal{F}}_T = 2 \sum_i \lambda_{(i)} \xi_i^2 + \sum_j \Re \mu_{(j)} (\tilde{\xi}_j^2 + \tilde{\eta}_j^2) \equiv -\frac{1}{2} \langle \mathbf{x}, C^{-1}\mathbf{x} \rangle_{\mathbb{B}}$. L'osservazione fa intuire che la funzione $\mathcal{F}_C$ benché diversa dalla $\mathcal{F}_T$, le sia strettamente analoga. $\square$

Esempio 4.2.35 La funzione $\mathcal{F}_C : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x}$ dell'Esempio precedente può essere usata anche nello studio della stabilità dell'origine di sistemi autonomi *quasi lineari* purché l'operatore $\mathcal{T}$ del campo (linearizzato) abbia ancora autovalori con parti reali *negative*. Sia dato $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{x})$ con $\mathbf{T}$ verificante tale ipotesi ed $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = o(|\mathbf{x}|)$.

(iv') Stante il fatto che $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$, dalla Nota 1 vista sopra segue che la derivata $\dot{\mathcal{F}}_C$ è definita negativa; infatti:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{F}}_C : \mathbf{x} \mapsto \dot{\mathcal{F}}_C(\mathbf{x}) &= \mathcal{L}_{\mathbf{T}\mathbf{x}+\mathbf{h}}(\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x}) \\ &= +\mathbf{x}^T \mathbf{T}^T \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{h}^T \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{T} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{h} \\ &= -\mathbf{x}^T \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{h}. \end{aligned}$$

La differenza con il caso lineare è che ciò avviene certamente solo entro un qualche intorno $N(0)$ anziché in tutto lo spazio. Di conseguenza, tale intorno $N(0)$ gioca il ruolo di bacino di attrazione dell'origine. $\square$

Esempio 4.2.36 Sempre nel caso di punto di equilibrio iperbolico, il ragionamento si applica anche nel verso della instabilità. Infatti sia $\mathbb{B}$ la base in cui la matrice di campo $\mathbf{T} = \partial \mathbf{v}(0)$, che si suppone abbia k autovalori con $\Re \lambda_+ > 0$ ed $n-k$ con $\Re \lambda_- < 0$, assume la forma $\begin{pmatrix} \mathbf{T}_- & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_+ \end{pmatrix}$ (vedi Punto 8 §1). Sia $\mathbf{P}$ la matrice del corrispondente cambio di base: $\mathbb{B} := \{\epsilon_j = \mathbf{P} e_j\}_{j=1,\dots,n}$; e siano $\mathbf{x}_+ = \mathbf{P} \boldsymbol{\xi}_+$, con $\boldsymbol{\xi}_+ := (\xi_+^1, \dots, \xi_+^k, 0, \dots, 0)^T$, ed $\mathbf{x}_- = \mathbf{P} \boldsymbol{\xi}_-$, con $\boldsymbol{\xi}_- := (0, \dots, 0, \xi_-^{k+1}, \dots, \xi_-^n)^T$, i vettori che descrivono i due sottospazi $\mathbb{W}_+$ ed $\mathbb{W}_-$, rispettivamente invarianti relativamente ad $\mathbf{T}_+$ ed $\mathbf{T}_-$. Risulta allora, sempre con l'ipotesi di $\{e\}$ -base ortonormale,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbb{B}} = \langle \mathbf{x}_+, \mathbf{x}_+ \rangle_{\mathbb{B}} + \langle \mathbf{x}_-, \mathbf{x}_- \rangle_{\mathbb{B}} = \sum_{i=1}^k (\xi_+^i)^2 + \sum_{i=k+1}^n (\xi_-^i)^2.$$

Posto $\mathbf{C}_\mp := \int_0^\infty e^{\pm \mathbf{T}_\mp^T t} e^{\pm \mathbf{T}_\mp t} dt$, per la forma

$$\mathcal{F} : \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}) := -\langle \mathbf{x}_-, \mathbf{C}_- \mathbf{x}_- \rangle_{\mathbb{B}} + \langle \mathbf{x}_+, \mathbf{C}_+ \mathbf{x}_+ \rangle_{\mathbb{B}}$$

espressa da

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{x}) &= [-\boldsymbol{\xi}_-^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{C}_- \mathbf{P} \boldsymbol{\xi}_- + \boldsymbol{\xi}_+^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{C}_+ \mathbf{P} \boldsymbol{\xi}_+]_{|\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})} \\ &= -\mathbf{x}_-^T \mathbf{P}^{-T} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{C}_- \mathbf{x}_- + \mathbf{x}_+^T \mathbf{P}^{-T} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{C}_+ \mathbf{x}_+ \end{aligned}$$

si ricavano le seguenti proprietà

(i) $\dot{\mathcal{F}}$ è definita positiva; infatti

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{F}}(\mathbf{x}) &= -\langle \mathbf{A}_- \mathbf{x}_-, \mathbf{C}_- \mathbf{x}_- \rangle_{\mathbb{B}} - \langle \mathbf{x}_-, \mathbf{C}_- \mathbf{A}_- \mathbf{x}_- \rangle_{\mathbb{B}} \\ &\quad + \langle \mathbf{A}_+ \mathbf{x}_+, \mathbf{C}_+ \mathbf{x}_+ \rangle_{\mathbb{B}} + \langle \mathbf{x}_+, \mathbf{C}_+ \mathbf{A}_+ \mathbf{x}_+ \rangle_{\mathbb{B}} \\ &= \begin{cases} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbb{B}} & \text{se } \dot{\mathbf{x}} = \mathcal{T} \mathbf{x} \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbb{B}} + o(|\mathbf{x}|^2) & \text{se } \dot{\mathbf{x}} = \mathcal{T} \mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{x}) \text{ con } \mathbf{h} = o(|\mathbf{x}|); \end{cases} \end{aligned}$$

- (ii) $\mathcal{F}(x) > 0$ su un aperto U tale che $\partial U \ni \{0\}$;
 (iii) $\mathcal{F}(x) = 0$ su $N(0) \cap \partial U$.

In effetti, entrambe le forme $\langle x_-, C_- x_- \rangle_{\mathbb{B}} \equiv \xi_-^T \tilde{C}_- \xi_-$, ed $\langle x_+, C_+ x_+ \rangle_{\mathbb{B}} \equiv \xi_+^T \tilde{C}_+ \xi_+$ sono semidefinite positive in zero e quindi $\mathcal{F}(\xi)$ potrà assumere entrambi i segni, data l'indipendenza dei vettori x_- dai vettori x_+ . $\square$

Quest'ultimo risultato è un caso particolare (autonomia) dei più forti teoremi di stabilità ed instabilità lineare già visti, però a differenza di quelli dà informazione sui bacini di attrazione del punto fisso, in quanto fornisce una funzione di Liapunov.

N.B. 4.2.37 Al punto (i) si è usato il fatto che l'uguaglianza

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-\mathbf{T}_+^T t} e^{-\mathbf{T}_+ t} \right) = -\mathbf{T}_+^T \left(e^{-\mathbf{T}_+^T t} e^{-\mathbf{T}_+ t} \right) - \left(e^{-\mathbf{T}_+^T t} e^{-\mathbf{T}_+ t} \right) \mathbf{T}_+$$

implica che $\mathbf{C}_+$ è soluzione di $-\mathbf{I} = -\mathbf{T}_+^T \mathbf{C}_+ - \mathbf{C}_+ \mathbf{T}_+$, anzi quest'ultima ha soluzione definita positiva se e solo se $\mathbf{T}$ è tale che $\Re \lambda > 0$. $\diamond$

Esempio 4.2.38 Van Der Pol: $\ddot{x} + e(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$, con $x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R}$ ed $e \in (-2, 0)$. L'equazione ha autovalori $\lambda_{1,2} = \frac{e}{2} \pm \sqrt{\frac{e^2}{4} - 1}$. Siano $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} := \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ con $\mathbf{P}$ tale che

$$\mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e/2 & -\beta \\ \beta & e/2 \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1}, \quad \beta := \sqrt{1 - \frac{e^2}{4}} > 0. \quad (2.10)$$

Giacché le componenti (r, s) dell'autovettore di $e/2 + i\beta$ verificano l'espressione $s = (e/2 + i\beta)r$, si ricava la

$$\begin{pmatrix} x_\mu \\ y_\mu \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e/2 & -\beta \end{pmatrix}; \quad \text{e quindi} \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e/(2\beta) & -1/\beta \end{pmatrix}.$$

Come è noto, la matrice $e^{\mathbf{T}t}$ è data dalla

$$e^{\mathbf{T}t} = e^{et/2} \mathbf{P} \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1},$$

per cui è possibile calcolare esplicitamente la matrice $\mathbf{C}$. Il semplice, (anche se non immediato) risultato è:

$$\mathbf{C} = \int_0^\infty e^{\mathbf{T}^T t} e^{\mathbf{T}t} dt = \frac{-1}{2e} \begin{pmatrix} e^2 + 2 & -e \\ -e & 2 \end{pmatrix}$$

e conferma il più veloce calcolo che cerca le soluzioni della $\mathbf{T}^T \mathbf{C} + \mathbf{T} \mathbf{C} = -\mathbf{I}$. Si ottiene in definitiva la funzione di Liapunov (stretta):

$$\mathcal{F}_C : (x, y) \mapsto \mathcal{F}_C(x, y) = \frac{-1}{e} \left(\left(\frac{e^2}{2} + 1 \right) x^2 + y^2 - exy \right).$$

Alternativamente si possono calcolare le altre Liapunov, notando ad esempio che anche la $\mathbf{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \beta - \frac{e}{2} \\ 1 & -(\beta + \frac{e}{2}) \end{pmatrix}$ verifica la (2.10). Con essa si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(x, y) &= \frac{1}{e} (\xi^2 + \eta^2) \Big|_{\xi = \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{x}} = \frac{1}{e} \mathbf{x}^T \mathbf{P}_1^{-T} \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{x} = \\ &= \frac{1}{e} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \beta - e/2 & -(\beta + e/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta - e/2 \\ 1 & -(\beta + e/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{e} (x^2 + y^2 - exy). \end{aligned}$$

O anche, vedi Esempio 2.6 e posto $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, la lunghezza $\langle x, x \rangle_{\mathbb{B}}$ che fornisce la $\mathcal{F}(x, y) = \frac{1}{\beta^2} (x^2 + y^2 - exy)$.

È facile verificare che tali funzioni di Liapunov sono "strette". Ad esempio, si ha: $\dot{\mathcal{F}}_C(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{x} < 0$ ed $\dot{\mathcal{F}}(\mathbf{x}) = e(x^2 + y^2 - exy - 2x^2 y^2 + ex^3 y) = e\mathcal{F}(\mathbf{x}) + o(|\mathbf{x}|^2) > 0$. $\square$

Esempio 4.2.39 L'equazione di Lienard: $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$, con $x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R}$, e $g \in C^1(N(0))$. Posto $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, l'equazione equivale alla

$$\dot{\mathbf{x}} \equiv \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ -g(x) - f(x)\eta \end{pmatrix} =: \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2.$$

Si supponga che: $g(x) \geq 0$ se $x \geq 0$, ed $f(x) > 0$ in $N(0)$; e cioè, qualitativamente, che $g(x)$ agisca “come una forza elastica”, e che $f(x)\dot{x}$ sia dissipativa. Tale sistema ha l'origine $\mathbf{x}_e = (0, 0)$ come punto di equilibrio, e le sue caratteristiche qualitative lasciano supporre che l'origine sia un punto di asintotica stabilità. Tuttavia per esso la funzione $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\eta^2 + \int^x g(\tau)d\tau$ non è una funzione di Liapunov stretta. In effetti $\dot{\mathcal{E}} = -f(x)\eta^2$ non è definita positiva in $N(0, 0)$.

In questo esempio, l'asintotica stabilità dell'origine viene riconosciuta, più agevolmente, ricorrendo ad un altro sistema di equazioni, equivalente al primo e ottenuto da esso mediante una diversa definizione della seconda variabile; esso è

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \int^x f(\tau)d\tau \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases}.$$

Per questo secondo sistema la funzione $\mathcal{E} : (x, y) \mapsto \mathcal{E}(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int^x g(\tau)d\tau$ non solo è definita positiva in $N(0, 0)$, ma ha anche derivata definita negativa; infatti $f(y) > 0$ in $N(0)$ implica che $\int^x f(\tau)d\tau \geq 0 \iff x \geq 0$. $\square$

Esempio 4.2.40 Volterra - Lotka: prede $:= x \in \mathbb{R}^+$, predatori $:= y \in \mathbb{R}^+$;

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - bxy \\ cxy - dy \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d, x_0, y_0 \in \mathbb{R}^+.$$

Il punto di equilibrio $\mathbf{x}_0 := (0, 0)$ è una sella avente l'asse delle x come varietà instabile, e quello delle y come varietà stabile. L'altro punto di equilibrio è $\mathbf{x}_e := (d/c, a/b)^T$ nel quale la linearizzata ha $\Re \lambda = 0$ (vedi: [§II.1])

Tutto ciò si può vedere anche più facilmente ricorrendo alla trasformazione di variabili: $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} cx \\ by \end{pmatrix}$, che fornisce $\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi(a - \eta) \\ \eta(\xi - d) \end{pmatrix}$.

Per utilizzare il metodo diretto si cerca una funzione di Liapunov della speciale forma $\mathcal{F} : (x, y) \mapsto \mathcal{F}(x, y) = f(x) + g(y)$. Risulta

$$\dot{\mathcal{F}}(x, y) = f'(x)(ax - bxy) + g'(y)(cxy - dy),$$

e si nota che è possibile risolvere l'equazione che impone alla $\mathcal{F}(x, y)$ di essere un integrale primo: infatti l'equazione $\dot{\mathcal{F}}(x, y) = 0$ è a variabili separabili e dà

$$\frac{xf'(x)}{cx - d} = \frac{yg'(y)}{by - a} = \text{cost.} = (\text{ad esempio}) = 1.$$

Tale scelta impone $f'(d/c) = g'(a/b) = 0$ e quindi c'è la possibilità che $\mathcal{F}$ abbia segno definito in $N(\mathbf{x}_e)$. Si ricavano $f(x) = cx - d \ln x$, $g(y) = by - a \ln y$; e si nota che la funzione $\mathcal{F}(x, y) = f(x) + g(y)$ è un integrale primo *solo localmente* in un intorno $N(\mathbf{x}_e)$ contenuto, o al più uguale, al 1° quadrante (aperto): $\{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$, cosa che, d'altra parte, è del tutto inessenziale dato il significato fisico delle variabili.

Qualora su $N(\mathbf{x}_e)$ la funzione $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x, y)$ risultasse anche definita in segno, si avrebbe la stabilità (semplice) dell'equilibrio $\mathbf{x}_e$. È questo il caso, come si prova facilmente mediante lo studio dell'Hessiano: $\partial \mathbf{v}(x, y) = \begin{pmatrix} d/x^2 & 0 \\ 0 & a/y^2 \end{pmatrix}$, che è definito positivo in $N(\mathbf{x}_e)$.

Diversamente dal caso lineare, questo procedimento ha in più potuto fornire la forma delle traiettorie di fase: esse devono appartenere alle linee di livello della funzione $\mathcal{F}(x, y)$ così trovata.

Per esaminare l'andamento delle traiettorie, e verificare che le linee di livello della funzione così trovata sono tutte curve chiuse, corrispondenti a moti periodici non asintotici, aventi il punto di equilibrio come centro, si può (vedi [Hirsh]) procedere come segue. Siano

$$\mathbf{x}_0 \in Q_1 := \left\{ (x, y) \mid x > \frac{d}{c}, \quad y > \frac{a}{b} \right\}, \quad \tau := \sup \left\{ t \mid \phi(t, t_0, \mathbf{x}_0) \in Q_1 \right\}.$$

Per $t = t_0$ è $\begin{cases} \dot{x}_0 = x_0(a - by_0) < 0 \\ \dot{y}_0 = y_0(cx_0 - d) > 0 \end{cases}$ e tali rimangono anche $\dot{x}, \dot{y}$ per $t < \tau$.

Pertanto la y cresce e la x decresce in Q_1 , e ciò implica le

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \ln x(t) = a - by < a - by_0 =: -r \\ \frac{d}{dt} \ln y(t) = cx - d < cx_0 - d =: +s \end{cases}$$

Queste, per $t < \tau$, forniscono le stime

$$\frac{d}{c} \leq x(t) \leq e^{-r(t-t_0)} x_0 \quad \text{insieme con} \quad \frac{a}{b} \leq y(t) \leq e^{+s(t-t_0)} y_0.$$

Dalla prima si nota che il valore τ è finito perché prima o poi $e^{-r(t-t_0)}$ diviene minore di d/c ; di conseguenza esiste K compatto tale che

$$\text{se } t \in [t_0, \tau] \quad \text{allora} \quad (x(t), y(t)) \in K := \left[\frac{d}{c}, x_0 \right] \times \left[\frac{a}{b}, y_0 e^{+s(\tau-t_0)} \right].$$

In modo analogo si trattano gli altri tre quadranti:

$$Q_2 := \left\{ x < \frac{d}{c}, y > \frac{a}{b} \right\}, \quad Q_3 := \left\{ x < \frac{d}{c}, y < \frac{a}{b} \right\}, \quad Q_4 := \left\{ x > \frac{d}{c}, y < \frac{a}{b} \right\} :$$

ciascuna orbita gira intorno al punto $\mathbf{x}_e \equiv (d/c, a/b)^T$ senza andare all'infinito.

Esiste allora una successione infinita di istanti nei quali essa interseca (ad esempio) il segmento $\{y = a/b, x \in [0, d/c]\}$, e siccome tale successione va all'infinito perché il moto rimane al finito, ed ha i corrispondenti y ordinati perché il sistema è autonomo, se ne deduce l'esistenza di un loro punto di accumulazione sul segmento stesso. Tale punto, non potendo appartenere ad un ciclo limite né essere il punto di equilibrio, data la conservatività del sistema, dovrà necessariamente essere *sempre lo stesso* per tutti gli istanti della successione, e cioè *ciascuna orbita è chiusa*. In questo semplice modello ogni condizione iniziale dà luogo ad un moto periodico.

Il caso però non è un caso generico.

Se si considerano anche fenomeni sociali quali la lotta per il cibo (e cioè si introduce l'ipotesi che la quantità di cibo decresca proporzionalmente alla popolazione) si ha il nuovo, più plausibile modello:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy - \lambda x^2 \\ \dot{y} = cxy - dy - \mu y^2 \end{cases} \quad \lambda, \mu > 0; \quad a, b, c, d > 0 \quad x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Le isocline principali sono: $\begin{cases} \lambda x + by = a =: L \\ cx - \mu y = c =: M \end{cases}$ la cui intersezione, che esiste sempre poiché $\lambda\mu + cb$ è positivo,

è $\hat{\mathbf{x}} \equiv (\hat{x}, \hat{y}) := \left(\frac{a\mu + bd}{\lambda\mu + bc}, \frac{-\lambda d + ac}{\lambda\mu + bc} \right)$. La coordinata $\hat{x}$ è certamente positiva, mentre la $\hat{y}$ lo è quando $ac > \lambda d$.

La linearizzata in $\hat{\mathbf{x}}$ ha ora campo dato da

$$\partial \mathbf{v}(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} a - by - 2\lambda x & -bx \\ cy & cx - d - 2\mu y \end{pmatrix} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} -\lambda \hat{x} & -b\hat{x} \\ c\hat{y} & -\mu \hat{y} \end{pmatrix}$$

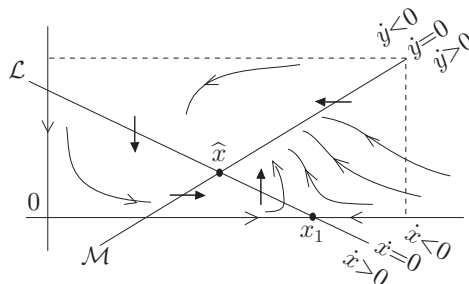
che, quando $\hat{y} > 0$, ha certo $Tr < 0$, $Det > 0$, e quindi autovalori con parti reali negative. Pertanto $\hat{\mathbf{x}}$ è una sella-(0) e come tale è asintoticamente stabile.

C'è però, in questo caso, un altro punto di equilibrio: l'intersezione tra l'asse delle x e l'isoclina L , e cioè il punto $\mathbf{x}_1 := (a/\lambda, 0)$, (non interessa l'intersezione di $x = 0$ con M perché avviene in un punto con $y < 0$). In $\mathbf{x}_1$ la linearizzata ha campo

$$\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}_1) = \begin{pmatrix} a - by - 2\lambda x & -bx \\ cy & cx - d - 2\mu y \end{pmatrix} \Big|_{\mathbf{x}_1} = \begin{pmatrix} -a & -ab/\lambda \\ 0 & -d + ac/\lambda \end{pmatrix}$$

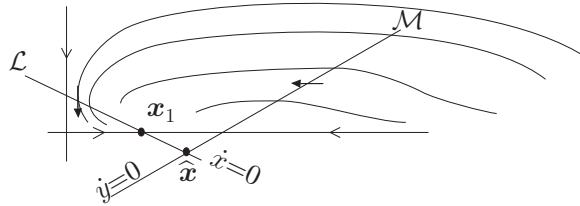
e si distinguono due casi (iperbolici con autovalori: $-a$ e $-d + ac/\lambda$, ed autovettori: $(1, 0)^T$ ed $(r, s)^T$ tale che $[(-d + ac/\lambda) + a]r + (ab/\lambda)s = 0$):

Caso n° 1. $ac > \lambda d$ che dà $Det < 0$ e cioè una sella-(1).



In questo caso possono anche essere presenti dei cicli limite.

Fatto n° 2. $ac < \lambda d$ che dà $Det > 0$, $Tr < 0$ e cioè una sella-(0).



In questo caso non possono presentarsi cicli limite.

Nel primo caso ogni rettangolo del tipo mostrato in figura è positivamente invariante, ma né l'origine né x_1 possono essere insiemi ω -limite della generica traiettoria. Tali dovranno quindi essere $\hat{x}$ o eventualmente qualche ciclo limite.

D'altra parte si può vedere (vedi: [Lemma 5.1] più oltre) che un eventuale ciclo deve racchiudere una regione contenente almeno un punto di equilibrio, e quindi esso circonda senz'altro l'equilibrio $\hat{x}$; inoltre esso stesso dovrà essere contenuto nel più piccolo dei possibili rettangoli positivamente invarianti: quest'ultimo rappresenta allora un limite superiore per le popolazioni dopo tempi sufficientemente grandi, così come $\hat{x}$ rappresenta lo *stato endemico* del sistema. $\square$

Nota 4.2.6 (di puro uso Meccanico Conservativo)

Nell'esempio 2 si è potuta garantire l'instabilità poiché in *dimensione 1* l'inversione del teorema del Dirichlet è sempre possibile mediante la seguente Proposizione.

Proposizione 4.2.1 Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia data l'equazione $\ddot{x} = -\frac{d\Pi}{dx}(x)$, con $\frac{d\Pi}{dx}(x_e) = 0$ e $\Pi(x_e) = 0$. Se x_e è un punto di stazionarietà isolato per l'energia potenziale $\Pi(x)$, ma non di minimo, allora: l'equilibrio x_e è instabile.

Dimostrazione Le traiettorie appartengono alle linee $\dot{x} = \pm\sqrt{2(\mathcal{E}_0 - \Pi(x))}$. Si supponga che x_e sia uno zero per la forza isolato in un intorno $N(0,0)$, e sia:

$$x_0 \begin{cases} \neq 0 \\ > 0 \\ < 0 \end{cases} \quad \text{a seconda che } x_e \text{ sia punto di } \begin{cases} \text{massimo} \\ \text{flesso discendente} \\ \text{flesso ascendente} \end{cases} \quad \text{per } \Pi(x).$$

Tale x_0 esiste, e l'orbita per $(x_0, 0)$ senz'altro non contiene $(0,0)$ perché su essa $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \Pi(x) = \mathcal{E}_0 < 0$. Se allora appartenesse all'intorno $N(0,0)$ per ogni $t > 0$, essa dovrebbe avere insieme ω -limite in $[N(0,0)]$.

Per il teorema di Poincaré, tale ω -limite può essere o un punto di equilibrio o un ciclo, magari limite. La prima eventualità è esclusa dall'essere $(0,0)$ isolato, così come l'esistenza dell'integrale primo impedisce l'esistenza di un ciclo limite. Rimane da escludere la possibilità che l'orbita per $(x_0, 0)$ sia essa stessa orbita chiusa e contenuta in $[N(0,0)]$. Se lo fosse, essa racchiuderebbe una zona (limitata) di energia $\mathcal{E} < \mathcal{E}_0$ [ciò accade su ogni ciclo del sistema vista la forma della funzione $\mathcal{E}$: si pensi al suo andamento lungo le linee $x = \cos t$ ed al fatto che un qualunque ciclo deve intersecare l'asse delle x].

Vi sarebbe allora, in contraddizione con l'ipotesi, un altro punto di equilibrio nella regione racchiusa dal ciclo stesso; sussiste infatti il seguente Lemma che, pur se valido solo in $\mathbb{R}^2$, lo è anche per sistemi non conservativi:

Lemma 4.2.1 Se la regione $U \subset \mathbb{R}^2$ racchiusa da un ciclo γ (e cioè tale che $K := U \cup \gamma$ sia un compatto in $\mathbb{R}^2$) appartiene tutta al dominio di regolarità del campo, essa contiene (almeno) un equilibrio.

Dimostrazione U contiene o un equilibrio o un ciclo γ_1 , altrimenti γ stesso dovrebbe essere insieme α -limite ed ω -limite di tutte le traiettorie con $x_0 \in U$ e ciò darebbe intersezioni non ordinate con una sua qualunque sezione trasversa. Procedendo per induzione, si ha una successione $\{x_n \in \gamma_n\}$ che nel compatto K ammette limite $\hat{x} \in U$ l'orbita della quale è necessariamente chiusa (perché se fosse asintotica verso un ciclo limite quest'ultimo sarebbe, per continuità, qualche γ_n); e d'altra parte non può essere un ciclo perché esso allora conterrebbe una regione $U' \subset U$ senza né equilibri né cicli limite, contraddicendo la prima parte del lemma. Pertanto deve essere un punto di equilibrio. $\blacksquare$

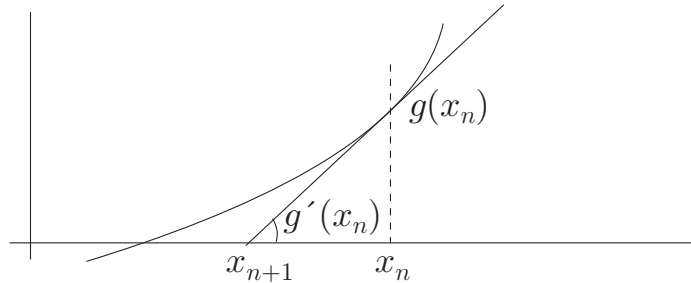
Capitolo 5

Comportamento caotico dei Sistemi

5.1 La mappa quadratica

In questo capitolo ci si occuperà non solo di sistemi per i quali la famiglia di applicazioni di avanzamento è indicata da un parametro reale $t \in \mathbb{R}$, ma anche di sistemi “discreti”, per i quali cioè il parametro t varia nell’insieme degli interi $\mathbb{Z}$.

Entrambi definiti su una varietà delle fasi $\mathbb{M}$, la dinamica dei primi è regolata da Equazioni Differenziali Ordinarie: $\dot{x} = v(x)$, e per essi si parla di campi vettoriali $v : x \in \mathbb{M} \mapsto v(x) \in T_x \mathbb{M}$ e di flussi $g : (t, x) \in \mathbb{M} \mapsto g(t, x) \in \mathbb{M}$, la dinamica dei secondi è soluzione di equazioni discrete del tipo $x_{n+1} = f(x_n)$ e si parla di mappe (trasformazioni di punti o insiemi, in insiemi) e di (diffeo) morfismi (trasformazioni di punti in punti) dello spazio delle fasi $\mathbb{M}$ in sé, indicati con $\mathcal{F} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$, o anche con $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qualora si tratti specificamente di funzioni scalari da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, (si veda anche il Memento più oltre).



Sistemi discreti si presentano in modo naturale non solo autonomamente nella descrizione di sistemi evolutivi i cui incrementi temporali sono naturalmente modulari, quali ad esempio sistemi biologici, economici, sociali, etc., ma anche nello studio di quelli continui sia come loro “discretizzazioni” sia in procedimenti di calcolo mediante approssimazioni successive. I seguenti casi ne sono alcuni esempi.

- Approssimazioni consecutive. Ne è un esempio il metodo di Newton, che ha lo scopo di determinare le radici di equazioni del tipo $g(x) = 0$ mediante la successione data da: $x_{n+1} = f(x_n) := x_n - g(x_n)/g'(x_n)$. Questa, conseguenza dell’assunto $g(x_n + h) = 0 = g(x_n) + hg'(x_n)$, individua una mappa contrattiva f purché $|f'| < 1$ e quindi purché $|gg''| < g'g'$.
- Mappe di Poincaré, sia con periodi naturali che stroboscopici; si veda oltre.
- Approssimazioni numeriche. Ne sono un esempio i vari metodi che cercano le soluzioni di un’equazione del tipo $\dot{x} = v(t, x)$ valutandone i valori più plausibili su un ristretto insieme, discreto, di punti opportunamente scelti nello spazio della variabile indipendente. Di essi quello forse più usato è il metodo di Runge-Kutta, che valuta la soluzione $x : t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^n$ della

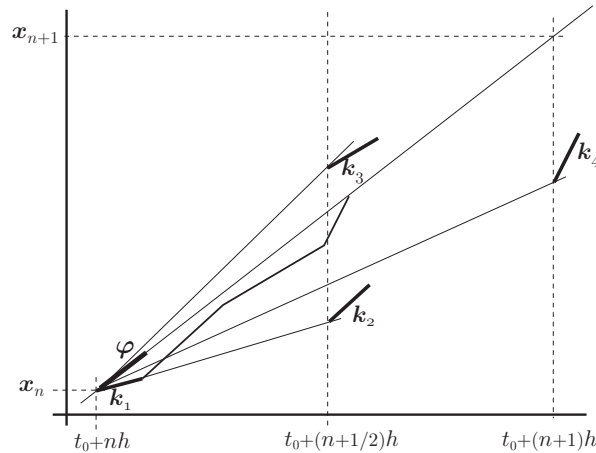
$$\dot{x} = v(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

fornendone i valori, nella famiglia di istanti $\{t_i := t_0 + hi\}_{i=1,2,\dots}$, ottenuti a partire da x_0 mediante la mappa

$$x_{i+1} = x(t_i + h) := f(t_i, x_i; h), \quad \text{ovvero} \quad x_{i+1} = f_i(x_i),$$

dove

$$\begin{cases} f(t, x; h) = x + h \varphi(t, x; h) \\ \varphi(t, x; h) := \frac{1}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4](t, x; h) \\ k_1(t, x; h) := v(t, x) \\ k_2(t, x; h) := v(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}k_1(t, x; h)) \\ k_3(t, x; h) := v(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}k_2(t, x; h)) \\ k_4(t, x; h) := v(t + h, x + hk_3(t, x; h)) \end{cases}$$



Studiare la dinamica di un sistema discreto definito su una varietà $\mathbb{M}$ significa studiare la famiglia di operatori di evoluzione definiti su $\mathbb{M}$ ed indicati con il parametro $n \in \mathbb{Z}$ che fanno corrispondere, per ciascun fissato n per il quale l'operazione sia lecita, al valore iniziale $x_0 \in \mathbb{M}$ quello attuale x_n . Nel caso autonomo, il valore attuale è dato dalla

$$x_n = f^{\circ n}(x_0) = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ volte}}(x_0) \quad .$$

In tal senso il moto $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{M}$, definito dalla $n \mapsto x_n \in \mathbb{M}$, è soluzione della $x_{n+1} = f(x_n)$. Nel seguito per brevità si scriverà $x_n =: f^n(x_0)$, dato che le potenze algebriche di una funzione non compariranno.

Pur di apportarvi alcune (evidenti) modifiche, molte delle definizioni già date per i campi si possono rinunciare in modo del tutto analogo per le mappe.

Anche per queste si definiscono traiettorie, orbite periodiche, punti di equilibrio, varietà stabili o instabili, bacini di attrazione, etc. Tuttavia in tali analogie va tenuto presente il fatto che

le orbite di un sistema discreto sono insiemi numerabili di punti:

$$\gamma := \{x_i := f^{\circ i}(x_0)\}_{i=0,1,2,\dots}, \quad f^{\circ i}(x_0) =: \gamma(i), \quad \gamma: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{M},$$

e non insiemi con la potenza del continuo.

Esse, pur potendo risultare dense in varietà regolari ed unidimensionali, possono anche non essere in alcun modo ordinate su esse; ed in particolare, se anche una traiettoria γ di un sistema discreto appartiene ad una linea $\ell \in \mathbb{M}$ individuata da una $\ell \in C(\mathbb{R}, \mathbb{M})$, è certamente distinta da essa e non la può riempire.

Inoltre è importante notare che il passaggio da un'equazione differenziale ordinaria ad un'equazione discreta che in qualche modo le corrisponda non è affatto immediato. Per rendersene conto basta pensare al diverso comportamento delle soluzioni, in particolare per $b < 0$, dei due sistemi lineari

$$\begin{aligned} \text{rcccl}\dot{x} &= b x & \text{che implica} & \quad x(n) = (e^b)^n x_0 \\ x_{n+1} &= b x_n & \text{che implica} & \quad x_n = (b^n) x_0 \end{aligned}$$

il secondo dei quali ha un comportamento che, almeno per il prescelto *passo temporale*: $h = 1$, è ben diverso dal primo (si veda l'Esempio 1 qui di seguito).

Nota 5.1.1 Si osservi che le costanti b nelle due equazioni non sono grandezze "omogenee" fra loro. Inoltre si noti che l'aggiungere al campo della seconda il termine x_n proveniente dall'uso della "derivata discreta" nella prima $\partial x_n := x_{n+1} - x_n$ non è di grande aiuto, a meno che tale discretizzazione venga effettuata a passi temporali $h > 0$ convenientemente piccoli. La discretizzazione infatti può seguire sia lo:

Schema esplicito: $x_{n+1} = x((n+1)h) = x_n + h\dot{x}_n + h^2\ddot{x}_n/2 + \cdots$ che, ad esempio nel caso dell'equazione $\dot{x} = b x$ fornisce

$$\partial x(nh) = \frac{1}{h}(x_{n+1} - x_n) = b x_n \quad \text{da cui} \quad x_n = (1 + bh)^n x_0 ;$$

sia lo:

Schema implicito: $x_n = x((n+1)h - h) = x_{n+1} - h\dot{x}_{n+1} + h^2\ddot{x}_{n+1}/2 - \cdots$, che per la stessa equazione $\dot{x} = b x$ fornisce

$$\partial x((n+1)h) = \frac{1}{h}(x_{n+1} - x_n) = b x_{n+1} \quad \text{da cui} \quad x_n = (1 - bh)^{-n} x_0.$$

Queste sono le soluzioni che nel limite: $n \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$, $nh =: t = O(1)$, vanno paragonate con la $x(nh) = (e^{bh})^n x_0$, e cioè paragonando l'espressione di $e^{nbh} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (nh)^k b^k$ con quelle di $(1 + bh)^n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} [nh(nh-1)\cdots(nh-k+1)] b^k$, o, rispettivamente, con la sua analoga per $(1 - bh)^{-n}$. $\triangleright$

In quel che segue, lo studio delle mappe verrà fatto senza che esse rivestano alcun significato di soluzioni approssimate di altrettanti eventuali schemi continui, e se ne indagheranno le proprietà in modo specifico ed indipendente dal loro uso. Inoltre si esamineranno in particolare le proprietà della dinamica generata da una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ almeno derivabile, anche se per alcune di esse la continuità è sufficiente.

Si hanno le seguenti definizioni.

Punto fisso, per una mappa $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M} :=$ un punto x^* tale che $f(x^*) = x^*$.

Punto periodico, per una mappa $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M} :=$ un punto x^* che sia fisso per una qualche iterata f^k della mappa. In tal caso k è detto il *periodo* del punto e di tutta la traiettoria $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{k-1}(x)\}$.

Punto critico, per una mappa $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M} :=$ un punto c tale che $\partial f(c) = 0$.

Punto iperbolico, per una mappa $f: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M} :=$ un punto fisso per la mappa, tale che la matrice jacobiana $\partial f(x) \big|_{x=x^*}$ non abbia autovalori di modulo uno.

Memento 5.1.1 È anche opportuno ricordare che

Mappa $f: D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ $:=$ una corrispondenza fra i punti dell'insieme $D \subset \mathbb{X}$ e punti dell'insieme $\mathbb{Y}$ tale che:

$$\forall x \in D \Rightarrow \exists y \in \mathbb{Y} : y = f(x) .$$

Funzione $f: D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ $:=$ una mappa tale che il punto $f(x) = y \in \mathbb{Y}$ è unico.

Suriettiva su $B \subseteq \mathbb{Y}$ $:=$ una mappa $f: D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ tale che:

$$\forall y \in B \Rightarrow \exists x \in D : y = f(x) .$$

Iniiettiva da $D \subseteq \mathbb{Y}$ $:=$ una mappa $f: D \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ tale che:

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x') .$$

Mappa $f: D \subset \mathbb{X} \rightarrow B \subset \mathbb{Y}$ invertibile, o “Bijettiva” $:=$ una mappa che sia una funzione suriettiva ed iniiettiva: e cioè che sia $1 \xrightarrow{\text{onto}} 1$ da D a B .

Per una funzione, sussistono le seguenti proprietà (si vedano anche le Appendici). Sia $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset 2^{\mathbb{X}}$ una famiglia di insiemi, e $B \subset \mathbb{Y}$. Allora

$$ff^{-1}(B) \subseteq B; \quad f^{-1}f(B) \supseteq B, \quad (1.1)$$

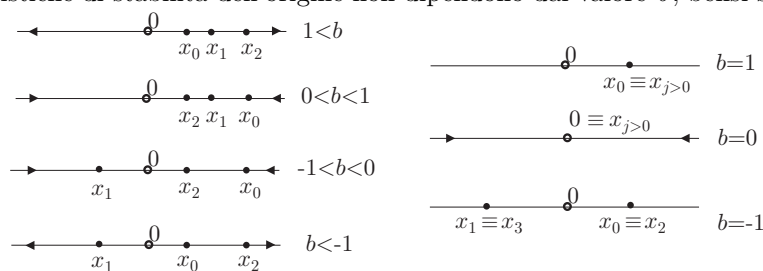
ove le inclusioni possono essere strette. Inoltre:

$$\begin{aligned} f(\cup_{\alpha \in A} E_\alpha) &= \cup_{\alpha \in A} f(E_\alpha) & f^{-1}(\cup_{\alpha \in A} E_\alpha) &= \cup_{\alpha \in A} f^{-1}(E_\alpha) \\ f(\cap_{\alpha \in A} E_\alpha) &\subset \cap_{\alpha \in A} f(E_\alpha) & f^{-1}(\cap_{\alpha \in A} E_\alpha) &= \cap_{\alpha \in A} f^{-1}(E_\alpha) \\ f^{-1}(\mathbb{Y} \setminus B) &= \mathbb{X} \setminus f^{-1}(B) \end{aligned} \quad (1.2)$$

e la $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ è stretta se esistono $x \in A \setminus B$ ed $y \in B \setminus A$ tali che $f(x) = f(y)$. Per altre utili relazioni si veda [Royden Cap. I.3] e [Kelley Cap. IV teor.1]

Esempio 5.1.2 La mappa lineare $x \mapsto bx$, $x \in \mathbb{R}$.

In corrispondenza a diversi valori del parametro si hanno comportamenti del tutto diversi. In particolare: l'identità $b = 1$ ha tutti punti fissi; l'opposto dell'identità $b = -1$ ha fissa solo l'origine e tutti i punti periodici lo sono con periodo due; le caratteristiche di stabilità dell'origine non dipendono dal valore b , bensì solo dal suo modulo.



□

Nel seguito, si pensi all'Esempio 1 quando la proprietà: “*parte reale degli esponenti caratteristici* ≤ 0 ” verrà modificata nella “*moduli dei moltiplicatori* ≤ 1 ”.

È opportuno ribadire che se il passo di discretizzazione non è sufficientemente piccolo, fra i due tipi di sistemi dinamici si possono presentare differenze che non sono solo formali. Ad esempio l'equazione logistica $\dot{p} = kp(1-p)$, anche se con $k > 0$, non è così analoga come sembra alla $p_{n+1} = \mu p_n(1-p_n)$. Infatti mentre la prima ha una facile soluzione, del tutto regolare lì dove esiste e ciò in modo indipendente dal parametro k , (vedi § 1.4)

$$p(t) = p_0 \left(p_0 + (1-p_0)e^{-k(t-t_0)} \right)^{-1}$$

la seconda presenta comportamenti assai più complessi, almeno per certi valori del parametro μ .

Sarà anzi proprio quest'ultima l'*esempio-guida* che verrà qui usato per introdurre alcuni dei comportamenti “difficili” comuni a molti dei sistemi non lineari, sia discreti che continui.

Una delle cause di tale complessità risiede (come si vedrà tra breve) nel fatto che la mappa $f_\mu(x) := \mu x(1-x)$ non solo non è monotona, ma ammette valori del parametro μ per i quali il valore della derivata $\frac{d}{dx} f_\mu(x)$ può non appartenere all'intervallo $[-1, 1]$. A ciò si aggiunge il fatto che la dinamica generata da $n \mapsto f^n$, mentre ha comportamento banale al di fuori di un certo compatto (che per essa è l'intervallo $[0, 1]$), si mantiene invece viva ed interessante all'interno dell'intervallo stesso; ciò rende questo sistema paragonabile con quelli definiti solo su varietà compatte, la dinamica dei quali è generalmente assai più complicata di quelli su varietà aperte.

N.B. 5.1.3 Come esempio di varietà topologica compatta si consideri il toro $\mathbb{T}^n$ sui punti del quale, considerati come elementi di $\mathbb{R}^n$, sia definita un'operazione che lo rende gruppo. Ad esempio, con l'usuale notazione si ha

$$\mathbb{T}^n := \left\{ \theta \mid \theta := (\theta^1, \dots, \theta^n) \in [0, 2\pi)^n \equiv \mathbb{R}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n; \quad \text{con} \quad \theta_1^h + \theta_2^h = \theta_3^h \mod(2\pi) \right\}$$

sul quale la metrica è la usuale metrica su $\mathbb{R}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n$, ovvero quella invariante per rotazioni:

$$d(\theta_1, \theta_2) := \left(\sum_{h=1}^n [(\theta_1^h - \theta_2^h) \mod(2\pi)]^2 \right)^{1/2}.$$

Equivalentemente l'insieme $\mathbb{T}^n$ può essere espresso mediante la notazione moltiplicativa:

$$\mathbb{T}^n := \left\{ z \mid z := (z^1, z^2, \dots, z^n) \in \mathbb{C}^n; \quad |z^h| = 1, \quad h = 1, \dots, n \right\}$$

con la nota operazione di prodotto: $z_1^h \cdot z_2^h = \exp i(\theta_1^h + \theta_2^h + 2k\pi)$. Nel seguito verrà usata la prima di queste notazioni. $\diamond$

Memento 5.1.1 Siano G_1 e G_2 due insiemi con leggi di composizione: “ $\circ_1$ ” e “ $\circ_2$ ” rispettivamente. Si hanno le seguenti definizioni

Omomorfismo := una corrispondenza $\mathcal{G} : G_1 \rightarrow G_2$ tale che

$$\mathcal{G}(x \circ_1 y) = \mathcal{G}(x) \circ_2 \mathcal{G}(y), \quad \forall x, y \in G_1.$$

Isomorfismo := un omomorfismo $\mathcal{I} : G_1 \rightarrow G_2$ che sia iniettivo e suriettivo.

Endomorfismo := un omomorfismo $\mathcal{G} : G \rightarrow G$.

Automorfismo := un isomorfismo $\mathcal{I} : G \rightarrow G$.

Un endomorfismo $\mathcal{G}$ del toro è un'operazione iniettiva da $\mathbb{T}^n$ in sé che ne conserva la struttura: ossia trasforma aperti in aperti e commuta con l'operazione di somma delle θ . Esso è quindi un'operazione *continua e genuinamente lineare*. Ad esempio: ogni sottogruppo chiuso di $\mathbb{T}^1$, e che sia distinto da $\mathbb{T}^1$, è un gruppo ciclico finito dato dai divisori dell'unità: $\{\theta_k := 2\pi k/m\}_{k=0, \dots, m-1}$ per qualche m intero. (dimostrazione analoga a quella vista nel § III.1 per l'esistenza del periodo di un moto).

Sussistono inoltre (vedi: [Walters]) le seguenti proprietà:

- Gli endomorfismi del toro $\mathbb{T}^n$ sono le mappe lineari $\mathcal{A} : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ rappresentate da matrici $n \times n$: $\mathbf{A}$ ad elementi interi: $\mathbf{A}_j^i \in \mathbb{Z}$ per $i, j = 1, \dots, n$, $(\mathbf{A}\theta)^i = \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_j^i \theta^j \mod 2\pi$. La condizione $\mathbf{A}_j^i \in \mathbb{Z}$ è quella che elimina le discontinuità nei punti $\theta = (2\pi m^1, \dots, 2\pi m^n)$ con $(m^1, \dots, m^n) \in \mathbb{Z}^n$. Tali morfismi risultano suriettivi quando $\det \mathbf{A} \neq 0$, e sono anche iniettivi (= automorfismi) quando $\det \mathbf{A} = \pm 1$, [Walters, Teor. 0.15]. Tutti gli endomorfismi (continui) su $\mathbb{T}^n$ conservano la misura di Haar (e cioè il volume normalizzato di $\mathbb{R}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n$).

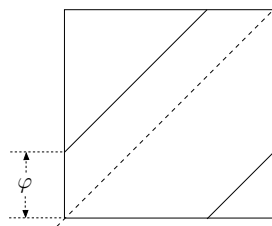
- Un automorfismo $\mathcal{A}: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ ha periodici almeno tutti i punti $\theta \in \mathbb{T}^n$ tali che $\theta = 2\pi q$ con $q \in \mathbb{Q}^n$; infatti, dato $q = (\frac{m^1}{m^0}, \dots, \frac{m^n}{m^0})$ ed $(m^0, m^1, \dots, m^n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, essendo $\mathbf{A}$ in $\mathbb{L}(n, \mathbb{Z})$ si ha che anche $q' = \mathbf{A}q$ ha la forma $(\frac{\tilde{m}^1}{\tilde{m}^0}, \frac{\tilde{m}^2}{\tilde{m}^0}, \dots, \frac{\tilde{m}^n}{\tilde{m}^0})$ giacché $(\mathbf{A}_1^i m^1 + \mathbf{A}_2^i m^2 + \dots + \mathbf{A}_n^i m^n) \in \mathbb{Z}$; ed è certo finito il numero di tali punti. D'altra parte giacché $\mathcal{A}$ è un automorfismo, i punti periodici di $\mathcal{A}$ sono necessariamente del tipo $q = \mathbf{A}q''$, e cioè: per ogni $q \in \text{Per}(\mathbb{T}^n)$ esiste q'' tale che $q = \mathbf{A}q''$. Pertanto l'insieme di tali punti non può che essere trasformato in sé e solo in sé da $\mathcal{A}$. La condizione di ergodicità: $\text{Det}(\mathbf{A}^k - \mathbf{I}) \neq 0$ per ogni k (vedi qui di seguito), se verificata, implica inoltre che ogni punto periodico ha la forma $\theta = 2\pi q$ con $q \in \mathbb{Q}^n$.
- Si ricordi che, in uno spazio di misura, una trasformazione $\mathcal{T}$ che conserva la misura si dice ergodica quando ogni insieme misurabile e $\mathcal{T}$ -invariante ha misura banale, (o anche quando ogni funzione misurabile ed invariante lungo le traiettorie della trasformazione $\mathcal{T}$ è costante quasi ovunque). In particolare si ha che, relativamente alla "lunghezza" del toro (misura di Haar): $d(\theta_1, \theta_2) = |\theta_1 - \theta_2| \bmod (2\pi)$, un endomorfismo $\theta \mapsto a\theta$ del toro $\mathbb{T}^1$ è ergodico quando a è (intero e) tale che $|a| > 1$. Un endomorfismo suriettivo del toro $\mathbb{T}^n$ è ergodico quando non esiste $y \in \mathbb{Z}^n$ tale che $y^T \mathbf{A}^k = y^T$ per alcun $k \in \mathbb{N}^+$, e pertanto quando $\text{spct}(\mathbf{A}) \not\subset \{e^{iq\pi}\}$ per alcun $q \in \mathbb{Q}$.

Una rotazione $\theta \mapsto \theta + \phi$ del toro $\mathbb{T}^1$ in sé è ergodica quando $\phi/2\pi \notin \mathbb{Q}$.

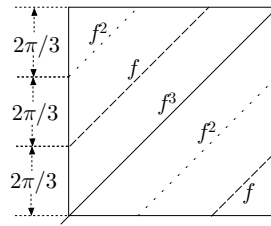
Esempio 5.1.4 La rotazione del toro: $f(\theta) = \theta + \varphi$, $\varphi, \theta \in \mathbb{T}^1$.

La rotazione non è un endomorfismo perché non è genuinamente lineare. Essa non ha punti uniti se $\varphi \neq 0$, mentre ha tutti i punti periodici se $\varphi = 2\pi q$ con $q = k/n \in \mathbb{Q}$, e $k, n \in \mathbb{Z}$, $k < n$. In tal caso infatti $\theta + n\varphi = \theta \bmod(2\pi)$ per qualsiasi $\theta \in \mathbb{T}^1$.

$$f(\theta) = \theta + \varphi$$



$$f(\theta) = \theta + 2\pi/3$$



□

Esempio 5.1.5 La rotazione del toro: $f(\theta) = \theta + \varphi$, $\varphi, \theta \in \mathbb{T}^1$,

dà luogo ad orbite dense in $\mathbb{T}^1$ (e non ammette punti periodici) se $\varphi = 2\pi\nu$, con $\nu \notin \mathbb{Q}$. Infatti: innanzi tutto ogni traiettoria, e cioè l'insieme degli evoluti di ogni fissato θ_0 iniziale, ha punti distinti (e non periodici), perché se ne fossero due coincidenti dovrebbero esistere $n_{1,2,3} \in \mathbb{N}$ tali che $n_1\nu = n_2\nu + n_3$, e ciò è contrario all'ipotesi. L'essere $\mathbb{T}^1$ compatto fa sì che ogni traiettoria ammetta almeno un punto di accumulazione. Ne segue che, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono θ_1, θ_2 tali che $d(\theta_1, \theta_2) < \varepsilon$ e quindi esistono (n_1, n_2, n_3) , eventualmente dipendenti da θ_0 , tali che $0 < |\theta_0 + 2\pi\nu n_2 + 2\pi\nu n_3 - \theta_0 - 2\pi\nu n_1| < 2\pi\varepsilon$, ovvero $0 < |n\nu + n_3| < \varepsilon$ con $n := n_2 - n_1$. Se allora si considera la successione: $\tilde{\theta}_0 := \theta_0$, $\tilde{\theta}_1 := \theta_1 = \theta_0 + 2\pi\nu n_1$, $\{\tilde{\theta}_m := \tilde{\theta}_{m-1} + 2\pi\nu n = 2\pi m\nu(n_2 - n_1) + \theta_0\}_{m=2,3,\dots}$, si riconosce che essa è fatta di punti, tutti appartenenti alla traiettoria uscente da θ_0 , e distribuiti uniformemente su $\mathbb{T}^1$ in quanto si conservano le lunghezze degli archi $d(\tilde{\theta}_m, \tilde{\theta}_{m+1})$, e queste sono tali che $0 < d(\tilde{\theta}_m, \tilde{\theta}_{m+1}) < \varepsilon$. Come si è detto, per le rotazioni del toro $\mathbb{T}^1$ la condizione $\nu \notin \mathbb{Q}$ equivale all'ergodicità (vedi Walters Teor. 1.8).

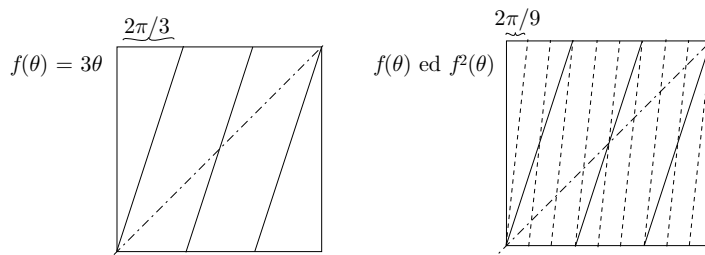
□

Esempio 5.1.6 Un endomorfismo del toro $f(\theta) = a\theta$, $\theta \in \mathbb{T}^1$, $a \in \mathbb{Z}$,

ha punti θ^* che sono n -periodici se e solo se $a^n \theta^* = \theta^* + 2k\pi$. Sono cioè n -periodici quei punti θ^* per i quali esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $\theta^* = 2k\pi/(a^n - 1)$. Essi sono quindi gli $a^n - 1$ punti del toro $\mathbb{T}^1$ individuati da questa espressione al variare di $k = 0, 1, 2, \dots, a^n - 1$ ove, come si è detto, il coefficiente a è un numero intero.

Si fissi ad esempio $a = 3$. Sono n -periodici tutti i punti θ^* tali che $\theta^*/2\pi$ è un numero razionale della forma $k/(3^n - 1)$ con $k \in \mathbb{Z}$. Pertanto se ci si domanda dell'esistenza di punti periodici aventi un periodo comunque grande, si trova che l'insieme di tali punti è *denso sul toro*, dato che fissato un qualunque intervallo di lunghezza $\varepsilon > 0$ esistono certamente $n, m \in \mathbb{N}$ tali che $|\frac{1}{3^n - 1} - \frac{1}{3^m - 1}| < \varepsilon$. D'altra parte, quando a è intero e con $|a| > 1$, esistono punti con *traiettoria* densa in $\mathbb{T}^1$. In più, l'insieme dei punti periodici ha misura nulla, e *quasi tutti* i

punti (tutti salvo i periodici) hanno traiettorie dense in $\mathbb{T}^1$ (euristicamente: per n grande l'immagine inversa di $\mathbb{T}^1$ secondo f^n è una famiglia di segmenti arbitrariamente piccoli ed uniformemente sparsi su tutto $\mathbb{T}^1$; pertanto comunque preso $\bar{\theta} \in \mathbb{T}^1$ non periodico, si troveranno sue k -controimmagini, per k grande, quasi ovunque sul toro).



□

Per affrontare lo studio sistematico dei sistemi dinamici discreti è bene iniziare dal caso più semplice: il sistema definito in $\mathbb{R}$ da una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Fintanto che la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è semplice, il modo più facile per studiarne le proprietà, anche dinamiche, è l'analisi grafica. Con ciò si intende la costruzione, direttamente sul piano contenente il grafico della f , della spezzata:

$$(x_0, 0), \quad (x_0, f(x_0)), \quad (f(x_0), f(x_0)), \quad (f(x_0), f^2(x_0)),$$

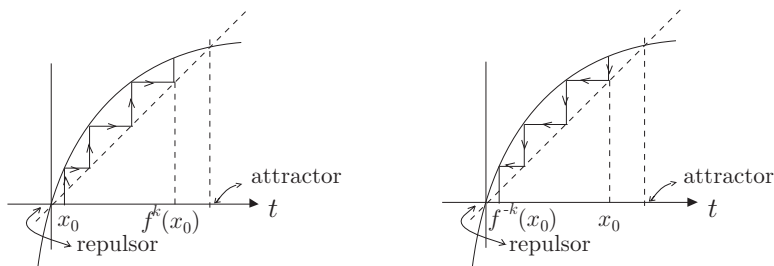
$$(f^2(x_0), f^2(x_0)), \quad (f^2(x_0), f^3(x_0)), \quad (f^3(x_0), f^3(x_0)), \quad \dots$$

ovvero della spezzata:

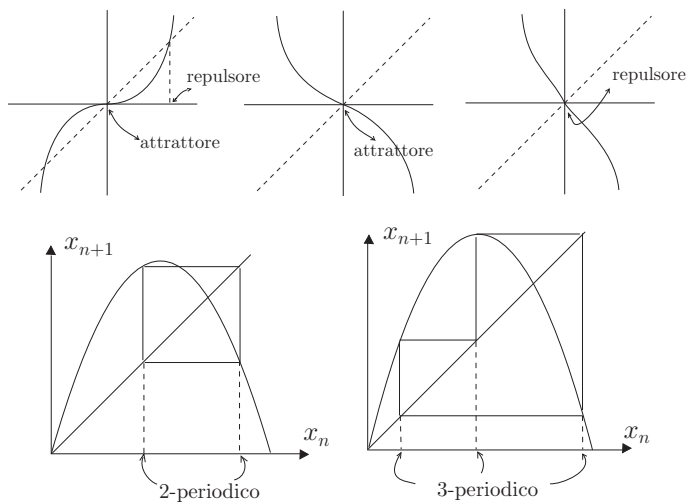
“curva - bisettrice - curva - bisettrice - curva - ...”

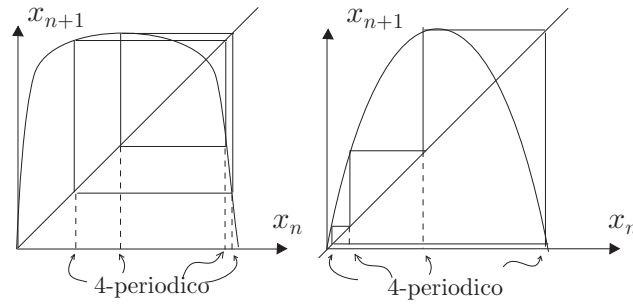
di estremi:

$$(x_0, 0), \quad (x_0, x_1), \quad (x_1, x_1), \quad (x_1, x_2), \quad (x_2, x_2), \quad (x_2, x_3), \quad \dots$$



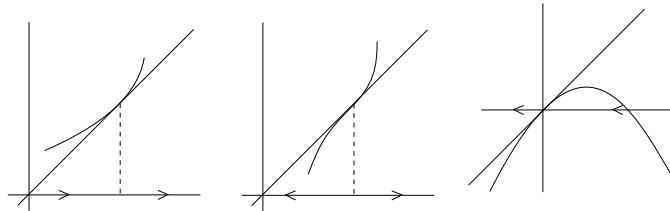
Le proprietà di questa fanno risalire ad alcuni dei comportamenti caratteristici della dinamica del sistema in esame. Ciò, d'altra parte, si era già notato in occasione della discussione sulla mappa di primo ritorno, (vedi: [§ III.4]).





In particolare: un punto fisso $\bar{x}$ nel quale $|\partial f(\bar{x})| \neq 1$, come si è detto, si chiama *iperbolico*; esso è *asintoticamente stabile* o *attrattivo* se $|\partial f(\bar{x})| < 1$ (in tal caso la f è localmente una contrazione in quanto $|f(x) - f(\bar{x})| = |\partial f(\xi)(x - \bar{x})| < |x - \bar{x}|$), mentre è *repulsivo* se $|\partial f(\bar{x})| > 1$; si noti però che tali condizioni *non* sono necessarie per l'attrattività (repulsività) di un generico punto fisso.

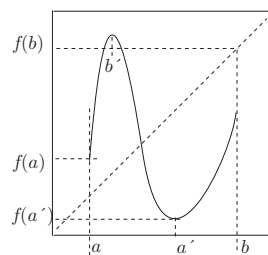
I seguenti sono alcuni esempi di non iperbolicità:



Siano dati un chiuso $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ed una $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ che abbia un numero finito n_c di punti di stazionarietà, o “punti critici”, e che sia continua (e si noti che questa è una forte ipotesi). Sono opportune le seguenti

Osservazioni.

- (i) Se f è tale che $f([a, b]) \subseteq [a, b]$ oppure tale che $f([a, b]) \supseteq [a, b]$, (e non se si sovrappongono solo parzialmente o affatto), allora in $[a, b]$ la f ammette un punto fisso. Infatti $f(x) - x$ è continua ed è (nel primo dei due casi) non negativa in a e non positiva in b . Pertanto, o è $f(a) = a$, oppure $f(b) = b$, oppure esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = c$. Il secondo dei due casi è del tutto analogo: necessariamente esistono $a' \geq a$ e $b' \leq b$ tali che $f(a') \leq a'$ ed $f(b') \geq b'$ ed il risultato segue come sopra: $f(x) - x$ è non positiva in a' e non negativa in b' . In questo secondo caso inoltre si deduce l'esistenza di $a'' \geq a' \geq a$ e di $b'' \leq b' \leq b$ tali che $f([a'', b'']) = [a, b]$.



- (ii) Se, in più, f è derivabile su $[a, b]$ e se, dato $x_0 \in [a, b]$, la traiettoria $\{x^m := f^m(x_0)\}_{m \in \mathbb{N}}$ appartiene ad $[a, b]$, allora la derivata di $f^m(x_0)$ esiste per ogni $m \in \mathbb{N}$, e vale

$$\partial f^m(x_0) = \partial f(x_{m-1}) \cdot \partial f(x_{m-2}) \cdots \partial f(x_0) .$$

In particolare si ha

$$\partial f^m(x_i) = \partial f(x_{m-1+i}) \cdot \partial f(x_{m-2+i}) \cdots \partial f(x_i) ,$$

con, generalmente,

$$\partial f^m(x_i) := (\partial f^m)(f^i x_0) \neq \partial f^m \circ f^i(x_0) = \partial f^m(x_i) \cdot \partial f^i(x_0) .$$

Conseguenza importante.

I possibili punti critici (o di stazionarietà) delle mappe f^m , $m \in \mathbb{N}$, sono i punti x_0 tali che $\partial f(x_k) = 0$ per qualche $0 \leq k \leq m$, ovvero tali che $f^k(x_0) = c$ con c un punto critico di f . Essi sono quindi i punti *le cui traiettorie passano per (contengono) i punti critici della f* . Come tali, essi formano l'insieme

$$C(f^m) = \bigcup_c \gamma_{-m}(c) := \bigcup_c \{f^{-k}(c)\}_{k=0, \dots, m-1},$$

ove l'unione è estesa all'insieme dei punti critici c della f . Nel seguito si supporrà che il numero n_c dei punti critici c della f sia finito: $n_c < \infty$.

Dalla $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ segue subito che l'insieme $M(f^m) = f^m(C(f^m))$ dei valori di stazionarietà per la funzione f^m è dato dalla:

$$M(f^m) = \bigcup_c \{f^m(f^{-k}(c))\}_{k=0, \dots, m-1} = \bigcup_c \{f^k(c)\}_{k=1, \dots, m} =: \bigcup_c \gamma_m(c)$$

e quindi $M(f^m)$ contiene il corrispondente insieme $M(f^{m-1})$.

Nel caso in cui la f abbia un solo punto critico c , l'insieme $\gamma_{-m}(c) = \{f^{-k}(c)\}_{k=0, \dots, m-1}$ contiene al più $\sum_{k=0}^{m-1} 2^k = 2^m - 1$ punti, e l'insieme $M(f^m) = \{f(c), f^2(c), \dots, f^m(c)\}$ è formato al più da m punti distinti.

(iii) Un punto unito per la mappa f^m corrisponde ad una intera orbita periodica per la mappa f

$$x_0 = f^m(x_0) \iff \{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}\} \text{ è } f\text{-invariante.}$$

Il numero m è detto minimo periodo se tutti gli x_i sono distinti fra loro. (Si noti che un insieme f^m -invariante può contenere punti di più orbite periodiche per la f , eventualmente anche di periodi diversi fra loro).

(iv) Se f ammette un'orbita periodica di periodo (minore o uguale ad) m , sussistono per $i = 1, \dots, m$ le relazioni:

$$x_i = f^i(x_0) = f^{m+i}(x_0) = f^m(x_i)$$

e la

$$\begin{aligned} \partial f^m(x_i) &= \partial f(x_{m+i-1}) \cdots \partial f(x_m) \cdot \partial f(x_{m-1}) \cdots \partial f(x_i) \\ &= \partial f(x_{i-1}) \cdots \partial f(x_0) \cdot \partial f(x_{m-1}) \cdots \partial f(x_i) \\ &= \partial f^i(x_0) \partial f^m(x_0) (\partial f^i(x_0))^{-1}. \end{aligned}$$

Nel caso generale, invece, si ha solo la

$$\begin{aligned} \partial f^m(x_i) \cdot \partial f^i(x_0) &= \frac{d}{d\xi} \Big|_{\xi=x_0} f^m \circ f^i(\xi) \\ &= \frac{d}{d\xi} \Big|_{\xi=x_0} f^i(f^m(\xi)) = \partial f^i(x_m) \cdot \partial f^m(x_0). \end{aligned}$$

Nel caso periodico, quindi, le (matrici) $\partial f^m(x_i)$ e $\partial f^m(x_0)$ (entrambe generalmente diverse da $\mathbf{1}$) sono simili, e ciò implica che *gli autovalori dello Jacobiano di f^m sono gli stessi su ogni punto della traiettoria periodica*. Ne segue che se per qualche $i^* \in \{1, \dots, m\}$ avviene che tutti gli autovalori di $(\partial f^m)(x_{i^*})$ hanno moduli minori di 1 allora l'orbita periodica è *attrattiva in ogni suo punto*, e tutta repulsiva se i moduli sono maggiori di 1.

Prendono il nome di orbite periodiche *superstabili* quelle per le quali la $\partial f^m(x_i)$ ha autovalori nulli, e di *neutre* quelle per le quali la $\partial f^m(x_i)$ ha autovalori di modulo unitario.

Esempio pilota.

La mappa quadratica : $f_\mu(x) := \mu x(1-x)$. La mappa quadratica ha al più due equilibri: $\bar{x}_0 = 0$ e $\bar{x}_\mu = 1 - \frac{1}{\mu}$; essa verrà qui studiata per valori positivi del parametro, e cioè con il vertice della parabola a destra dell'origine. Si può osservare che il caso $\mu \in [0, 1]$ e cioè quello nel quale il punto fisso $\bar{x}_\mu$ cade alla sinistra dell'origine può essere ricondotto al caso $\mu \geq 1$ (in cui $\bar{x}_\mu$ è alla destra dello zero) mediante la trasformazione di variabili che porta

l'origine nel punto fisso instabile e rinormalizza gli assi rendendo unitario il nuovo segmento di base. Essa è data dalla

$$\begin{cases} \xi = \alpha(x - \bar{x}) \\ \eta = \alpha(y - \bar{x}) \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \bar{x} = (1 - 1/\mu), & \lambda := 2 - \mu, \\ \alpha = (2 - \lambda)/\lambda \equiv \mu/(2 - \mu) \end{cases}$$

giacché si richiede che per $y = \mu(x - x^2)$ risulti una identità la

$$\eta = \alpha(y - \bar{x}) = \lambda(\xi - \xi^2) = \lambda\alpha(x - \bar{x})(1 - (x - \bar{x})) .$$

È anche semplice riconoscere che la dinamica della f_μ è equivalente a quella della

$$\eta = f_c(\xi) = -\xi^2 + c, \quad \text{con} \quad \xi = \mu(x - 1/2), \quad \eta = \mu y, \quad \text{e con} \quad c = \mu^2/4 .$$

Per $\mu > 1$, $\bar{x}_\mu$ resta fissato alla destra di $\bar{x}_0$ ed alla sinistra di 1. Ne segue che tutta la dinamica interessante avviene sull'intervallo $[0, 1]$. Infatti, siccome $\mu > 1$ implica che $f_\mu(x) < x$ per ogni $x < 0$, (l'altro punto di equilibrio $\bar{x}_\mu$ è maggiore di $\bar{x}_0 = 0$), un qualunque $x_0 < 0$ evolve necessariamente in $x_n \xrightarrow[n]{\infty} -\infty$.

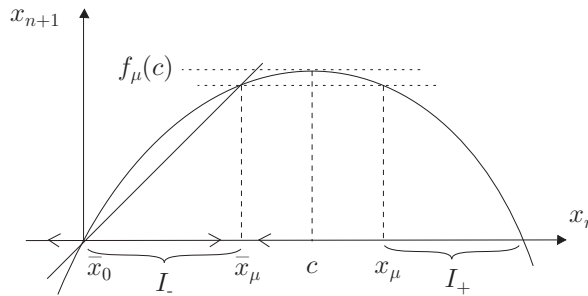
D'altra parte, per $x > 1$ si ha $f_\mu(x) < 0$, e quindi anche il semiasse a destra di 1 evolve verso $-\infty$. Invece, almeno per $\mu < 4$, l'intervallo $[0, 1]$ è invariante; in particolare l'unica *immagine inversa* dell'origine $\bar{x}_0$ è il punto $x = 1$.

La $\partial f_\mu(x) = \mu(1 - 2x)$ fornisce $\partial f_\mu(\bar{x}_0) = \mu$ e $\partial f_\mu(\bar{x}_\mu) = 2 - \mu$ e quindi $|\partial f_\mu(\bar{x}_\mu)| < 1$ purché $1 < \mu < 3$, il che comporta che per questi valori del parametro il punto di equilibrio $\bar{x}_\mu$ è attrattivo mentre l'origine $\bar{x}_0$ è instabile.

Si chiami $x_\mu = 1/\mu$ l'altra radice dell'equazione $f_\mu(x) \equiv \mu x(1 - x) = \bar{x}_\mu = 1 - 1/\mu$. Si nota che i due punti $x_\mu, \bar{x}_\mu$ sono simmetrici rispetto al punto critico $c = 1/2$ nel quale la f_μ ammette valore massimo $f_\mu(c) = \mu/4$. Inoltre, se μ è maggiore (minore) di 2, entrambe $f_\mu(c) = \mu/4$ ed $\bar{x}_\mu$ risultano maggiori (minori) del punto critico $c = 1 - 2$, ed è non vuoto (vuoto) l'insieme $\{f_\mu^{-1}(c)\}$.

Per studiare le caratteristiche del sistema individuato dalla mappa f_μ è allora opportuno suddividere ulteriormente i valori del parametro nei seguenti intervalli:

- $1 < \mu \leq 2$. Si ha $f_\mu(c) = \frac{\mu}{4} \leq c := \frac{1}{2}$ e $x_\mu \geq \bar{x}_\mu$



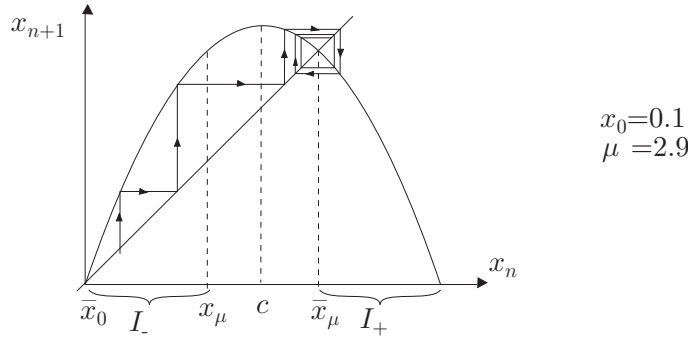
Chiamati:

$$I_- := \{x \mid 0 < x < \bar{x}_\mu\}, \quad I_0 := \{x \mid \bar{x}_\mu < x < x_\mu\}, \quad I_+ := \{x \mid x_\mu < x < 1\},$$

si vede facilmente che la f_μ è monotona crescente su I_- e decrescente su I_+ , che $f_\mu([I_+]) = [I_-]$, e che $x \in I_-$ (e $\mu > 1$) implicano $x < f_\mu(x) < \bar{x}_\mu$. Ne segue che per $x \in I_-$ si ha $x < f_\mu(x) < f_\mu^2(x) < \dots < \bar{x}_\mu$. Né vi possono essere su I_- altri punti di accumulazione diversi da $\bar{x}_\mu$ perché questi è l'unico punto unito della f_μ che possa essere attrattivo. D'altra parte, la $x \in I_0$ (e $\frac{\mu}{4} < \frac{1}{2}$) implicano $f([c, x_\mu]) = f_\mu([\bar{x}_\mu, c]) = [\bar{x}_\mu, f(c)] \subset [\bar{x}_\mu, c]$, e siccome la f_μ è monotona su $(\bar{x}_\mu, c)$ e su di esso è $\bar{x}_\mu < f_\mu(x) < x$, si può ripetere su questo l'argomento appena discusso per I_- .

In definitiva su $I_- \cup I_0$ ogni successione $x_0, x_1, \dots, x_n := f_\mu^n(x_0)$ ammette $\bar{x}_\mu$ come limite, e cioè $\bar{x}_\mu$ ha come bacino di attrazione tutto l'intervallo aperto $(0, 1)$.

- $2 < \mu \leq 3$. Si hanno, ora, le relazioni: $f_\mu(c) = \frac{\mu}{4} > c = \frac{1}{2}$ e $x_\mu < \bar{x}_\mu$,
(ma ancora $f_\mu(c) < 1$ ed $\bar{x}_\mu$ attrattivo).



Con le nuove definizioni:

$$I_- := \{x \mid 0 < x < x_\mu\}, \quad I_0 := \{x \mid x_\mu < x < \bar{x}_\mu\}, \quad I_+ := \{x \mid \bar{x}_\mu < x < 1\},$$

si vede facilmente che l'intervallo $[0, 1]$ è ancora invariante, e che

$$\begin{aligned} f_\mu([I_-]) &= [I_-] \cup [I_0], \\ f_\mu([I_0]) &= [\bar{x}_\mu, f_\mu(c)] \subseteq [I_+], \\ f_\mu([I_+]) &= [I_-] \cup [I_0], \\ f_\mu^2([I_0]) &= f_\mu([\bar{x}_\mu, f_\mu(c)]) = [f_\mu^2(c), \bar{x}_\mu] \subseteq [c, \bar{x}_\mu]. \end{aligned}$$

Infatti:

Innanzitutto si nota che per $\mu > 2$ si ha $c < \bar{x}_\mu < f_\mu(c)$, e che la f_μ è decrescente su $[c, f_\mu(c)]$ e quindi che $f_\mu^2(c) \leq c$. D'altra parte il minimo di $\mu \mapsto f_\mu^2(c) = (4\mu^2 - \mu^3)/16$ per $\mu \geq 2$ si ha per $\mu = 2$ e vale c .

Poi si osserva che su I_- la f_μ è monotona ed ha valore massimo $\bar{x}_\mu$, che è definitivamente maggiore di x_μ .

Pertanto ogni successione $x_0, x_1, x_2, \dots$ con $x_0 \in I_-$ ammetterà un $n < \infty$ tale che $x_n \in I_0$, né può convergere prima data l'assenza in I_- di punti fissi (attrattivi) per la f_μ . (Si pensi alla traiettoria inversa del punto x_μ).

A sua volta, su I_0 si ha $\bar{x}_\mu \leq f_\mu(x) \leq f_\mu(c) < 1$ e cioè la f_μ ha valori in I_+ , e su questo la f_μ è monotona decrescente. Ne segue $0 < f_\mu^2(c) \leq f_\mu^2(x) \leq \bar{x}_\mu$. Per cui su I_0 si ha $x < f^2(x) < \bar{x}_\mu$, e ciò implica che f^2 contrae I_0 verso $\bar{x}_\mu$.

Infine su $[c, \bar{x}_\mu]$ non solo la f_μ ma anche la f_μ^2 sono monotone, ed anzi:

$$\partial f_\mu^2(x) = \mu(1 - 2f_\mu(x))\mu(1 - 2x) = \mu^2(1 - 2(1 + \mu)x + 6\mu x^2 - 4\mu x^3) < 1$$

e tale derivata è massima in $\bar{x}_\mu$ ove vale $\partial f_\mu^2(\bar{x}_\mu) = (2 - \mu)^2$ e diminuisce retrocedendo, con le x , fino a c . ■

In definitiva anche in questo caso tutto $(0, 1)$ converge verso $\bar{x}_\mu$.

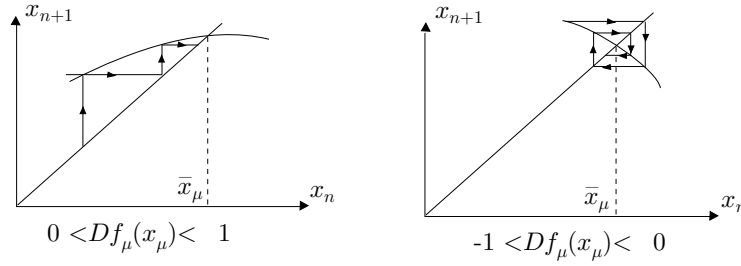
N.B. 5.1.7 Molte di queste caratteristiche sono condivise da una qualunque

Funzione unimodale := $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tale che

$$\begin{cases} f(0) \geq 0, & f(1) \geq 0, & f \in C^0([0, 1]), & \text{ed inoltre} \\ \text{esista } c \in (0, 1) & \text{unico punto critico per } f & \text{e tale che} \\ f & \text{è strettamente} & \begin{cases} \text{crescente} \\ \text{decrescente} \end{cases} & \text{a} & \begin{cases} \text{sinistra} \\ \text{destra} \end{cases} & \text{di } c. \end{cases}$$

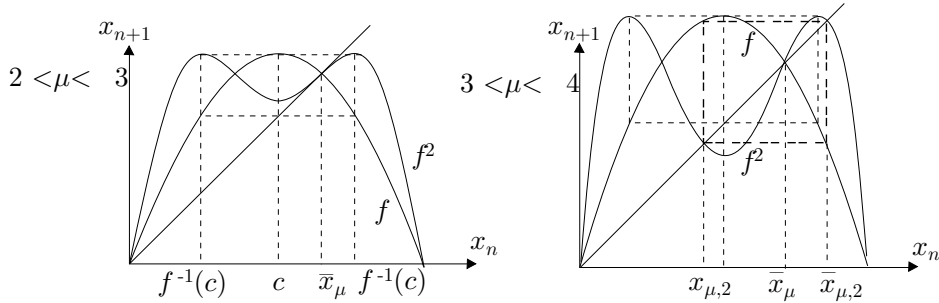
Tali funzioni hanno finita, per ogni $m \in \mathbb{N}$, la cardinalità dell'insieme $f^{-m}(c)$, ed f^m è strettamente monotona su ciascuno degli intervalli nei quali il dominio $[0, 1]$ resta suddiviso dai punti dell'insieme $\gamma_{-m}(c) := \{f^{-k}(c)\}_{k=0, \dots, m-1}$, unici possibili punti di stazionarietà per la f^m . ◇

Tuttavia, per $\mu \in (2, 3]$ il comportamento della f_μ vicino al punto $\bar{x}_\mu$ è ben diverso dal caso $\mu \in (1, 2]$. Infatti risulta $\partial f_\mu(\bar{x}_\mu) = 2 - \mu$ e quindi per $\mu < 2$ i punti della successione che costituiscono la traiettoria convergente ad $\bar{x}_\mu$ sono ordinati, mentre per $\mu > 2$ tale successione, composta da due sottosuccessioni ordinate, è fatta da punti che cadono alternativamente l'uno a destra l'altro a sinistra del punto limite $\bar{x}_\mu$,

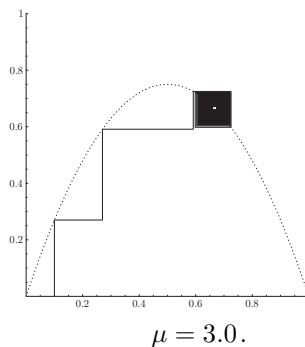
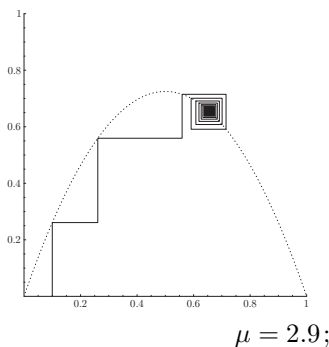
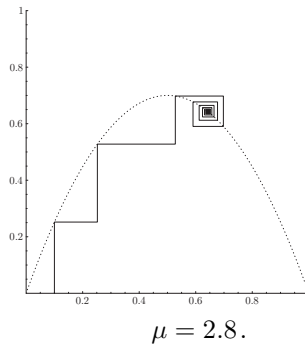
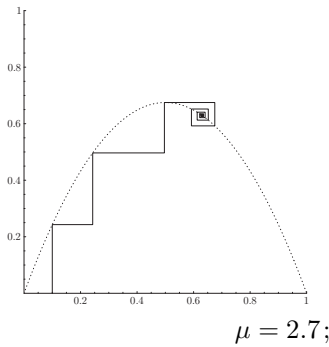


resta immutato invece, al variare di μ da $(1, 2]$ a $(2, 3]$, il comportamento qualitativo di f_μ^2 .

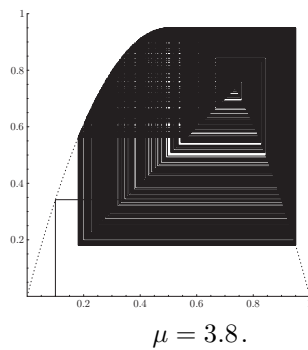
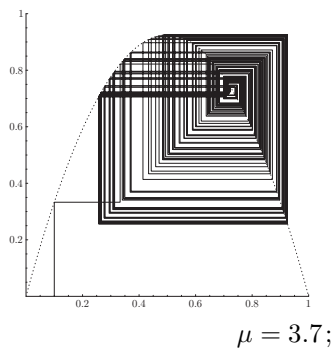
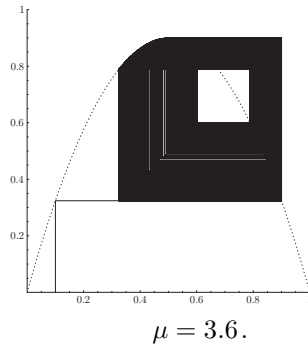
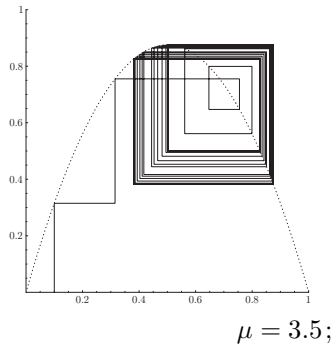
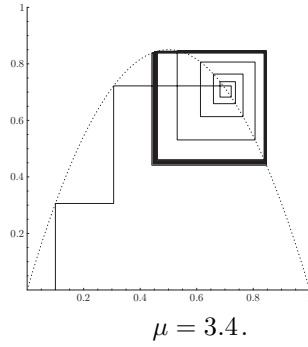
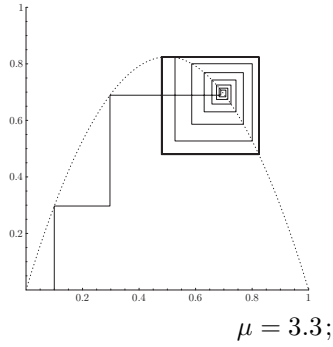
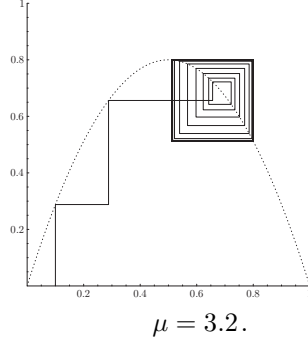
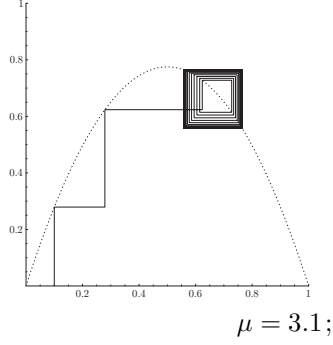
Quest'ultimo cambia a sua volta al passaggio di μ per il valore 3, valore oltre il quale la f_μ^2 acquista, in aggiunta al punto $\bar{x}_\mu =: \bar{x}_{\mu,1}$, altri due punti fissi $x_{\mu,2}$ ed $\bar{x}_{\mu,2}$ l'uno a destra e l'altro a sinistra di $\bar{x}_{\mu,1}$. Successivamente, per $\mu = 1 + \sqrt{5}$ la $f_\mu^2(c)$ diviene inferiore a c ; ed $f_\mu(c)$, che come si è detto è anche valore di massimo per la f_μ^2 , supera (il maggiore dei) $f_\mu^{-1}(c)$. Quando μ transita per il valore $\mu_2 := 3$ il modulo della $\partial f_\mu(\bar{x}_\mu) = 2 - \mu$ attraversa il valore uno, e quindi il punto $\bar{x}_\mu$ da equilibrio stabile per la f_μ (e per la f_μ^2) diventa instabile:

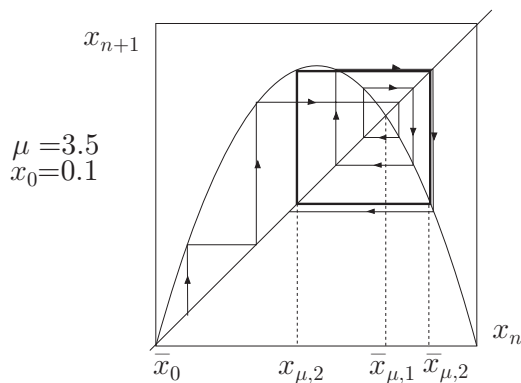


È questo l'inizio di una lunga storia: quando μ supera 3 sia la $\partial f_\mu(\bar{x}_\mu) = 2 - \mu$ sia la $\partial f_\mu^2(\bar{x}_\mu) = (\partial f_\mu(\bar{x}_\mu))^2$ attraversano e superano il valore 1 e quindi (per entrambe) il punto $\bar{x}_\mu$ perde la sua stabilità (nel valore di transito: $\mu_2 = 3$ si ha che ancora $\bar{x}_\mu$ è attrattivo, ma solo debolmente). Restano invece stabili, per valori di μ vicini a 3, i due punti $x_{\mu,2}$, $\bar{x}_{\mu,2}$ che, essendo fissi per la mappa f_μ^2 e non per la f_μ , sono punti 2-periodici per la mappa iniziale f_μ . Se anzi essi sono estremali per f_μ^2 si ha che il ciclo è un ciclo superstabile. Si noti che tali punti non avevano alcun significato per $\mu \leq 3$.

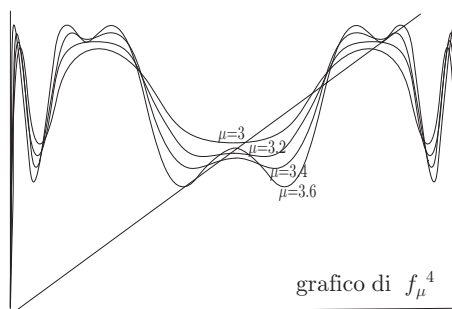
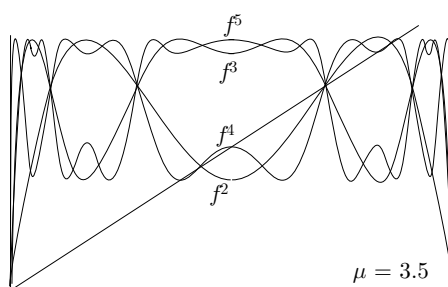


Proseguendo, con l'aumentare di μ oltre il valore 3 il punto $\bar{x}_\mu$ rimane comunque punto fisso (instabile) per la mappa f_μ ; ma gli $x_{\mu,2}$, $\bar{x}_{\mu,2}$, che dapprima sono stabili per f_μ^2 , a partire da un certo $\mu_4 \in (\mu_2, 4)$ perdono la loro stabilità e contemporaneamente *per ciascuno di essi* una coppia di punti $x_{\mu,4}$, $\bar{x}_{\mu,4}$ si aggiunge ai precedenti. I ragionamenti fatti per $\bar{x}_\mu$ ed f_μ si ripetono, rispettivamente, per ciascuno dei due $x_{\mu,2}$, $\bar{x}_{\mu,2}$ ed f_μ^2 : pur rimanendo punti uniti per f_μ^2 , con il diventare instabili essi danno luogo ad altrettante coppie di punti uniti per f_μ^4 : $x_{\mu,4}$, $\bar{x}_{\mu,4}$ che a loro volta perderanno la stabilità per un qualche $\mu_8 \in (\mu_4, 4)$.



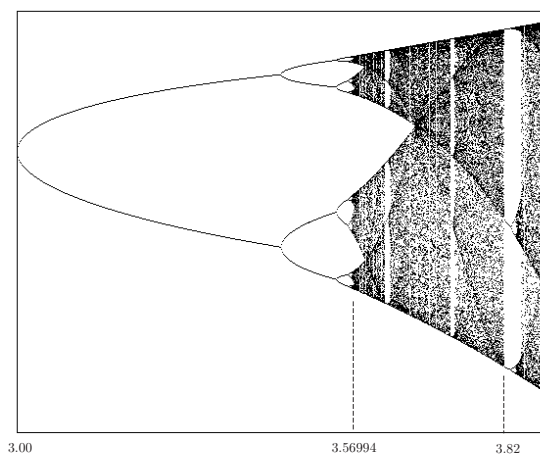


Si noti che per tale valore del parametro il ciclo 2-periodico è instabile.



Questo comportamento, noto con il nome di *period doubling*, (vedi oltre), può essere facilmente verificato a calcolatore almeno per i primi valori di μ valutando la traiettoria di un qualche punto (ad esempio $x_0 = 0.5$) per vari valori del parametro. Posti in ordinata i valori di x_n per n grandi, ed in ascissa i vari valori del parametro, si ottiene il seguente

Diagramma dei punti: $(\mu, x_\infty) \in [3, 3.9] \times [0, 1]$



N.B. 5.1.8 È abbastanza sorprendente il seguente fatto:

$$\mu_{2^n} \xrightarrow[n]{\infty} \mu_\infty := 3.56994 \dots$$

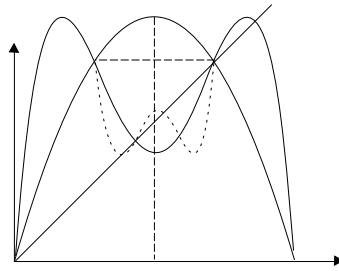
ed in più esiste il limite del rapporto

$$\frac{\mu_{2^{n+1}} - \mu_{2^n}}{\mu_{2^n} - \mu_{2^{n-1}}} \xrightarrow[n]{\infty} \frac{1}{\delta}, \quad \delta := \text{cost} = 4.66920$$

e ciò è valido per tutte le mappe unimodali; inoltre $|\mu_{2^n} - \mu_\infty| \sim \delta^{-n}$.

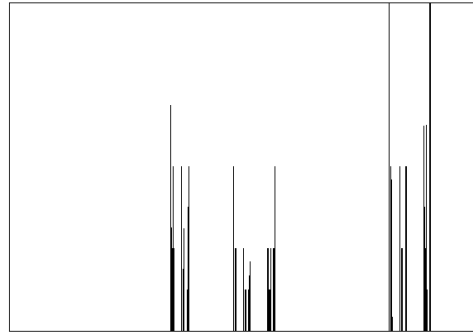
Esiste cioè una funzione “limite”, e cioè la $f := \lim_{m \rightarrow \infty} (-\ell)^m f_{\mu_\infty}^{2^m}(\ell^{-m}x)$, per qualche $\ell \in \mathbb{R}$, che caratterizza i valori μ_∞ e $-\ell \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{x}_{\mu_{2^{n+1}}} - x_{\mu_{2^{n+1}}}}{\bar{x}_{\mu_{2^n}} - x_{\mu_{2^n}}}$, e che è soluzione dell’equazione “di scala”: $f(x) = -\ell f(f(-x/\ell))$. Tale equazione proviene dall’osservare che la mappa f_μ ha un comportamento qualitativamente invariante all’azione dell’operatore di riduzione:

$$\mathcal{R}_\mu f_\mu(x) := \ell_\mu \circ f_\mu^2 \circ \ell_\mu^{-1}(x) \quad \text{con} \quad \ell_\mu(x) := \frac{x - x_\mu}{\bar{x}_\mu - x_\mu}.$$



◇

Per $\mu = \mu_\infty$ il sistema mostra un comportamento non regolare, e la frequenza di visita nei punti del segmento $[0, 1]$ risulta come nella seguente figura



(Densità massima di visita: 625/10.000)

La figura mostra che, a tempi lunghi, vengono visitati solo i punti di un certo insieme (chiuso, invariante) che prende il nome di *attrattore di Feigenbaum*.

[Si noti che tale attrattore non è un insieme attrattivo (perché arbitrariamente vicine ad esso si trovano traiettorie 2^n -periodiche *anche se instabili*); né è “strano”, e cioè espansivo, (perché μ non è sufficientemente grande); né ha dipendenza sensibile dal dato; è però non decompontibile, (perché in esso si trovano traiettorie non periodiche dense); e su di esso la dinamica è non periodica, ergodica, non mescolante, con esponenti di Liapunov nulli; per tutte queste proprietà si veda oltre].

Dal punto di vista geometrico tale attrattore mostra sensibilmente proprietà di totale disconnessione (:= gli unici connessi contenuti sono i punti), proprietà questa che condivide con gli *insiemi di Cantor*, (vedi oltre).

Quando $\mu > \mu_\infty$ l’attrattore scompare. Per illustrare meglio ciò che accade converrà ricordare i seguenti teoremi, che pur se validi solo per mappe $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, fanno luce sul tipo di comportamenti cui si può andare incontro. Verranno anzi qui accennati solo in forma schematica.

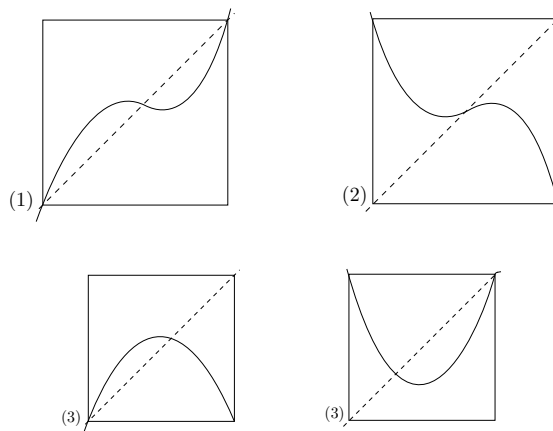
Teorema 5.1.1 Se una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ha derivata di Schwartz $\partial_S f(x) := \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2$ negativa (o anche $\partial_S f(x) = -\infty$), ed un numero finito n_c di punti critici allora essa è tale da ammettere al più $n_c + 2$ orbite periodiche attrattive.

In particolare la mappa quadratica f_μ ha $\partial_S f_\mu(x) = -\frac{3}{2} \left(\frac{1}{x-1/2} \right)^2 < 0$, ed essendo unimodale ha $n_c = 1$; essa in effetti (per μ sufficientemente piccolo) ha una sola orbita periodica attrattiva

Dimostrazione (cenno; vedi Devaney e Collet-Eckmann)

Una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (definita ovunque e) che abbia derivata di Schwartz negativa: $\partial_S f(x) < 0$ possiede le seguenti proprietà:

- (i) È finito l'insieme dei punti y tali che $y = f^{-k}(\{x\})$ per qualsiasi fissato $k \in \mathbb{N}$ ed $x \in \mathbb{R}$. Infatti: in ogni intervallo $[y_1, y_2]$ tale che $f(y_1) = f(y_2) = x$ cade almeno un punto critico per la f ; per cui dall'ipotesi $n_c < \infty$ segue che è necessariamente finito l'insieme $\{y \mid y = f^{-1}(\{x\})\}$ per qualsiasi $x \in \mathbb{R}$, e di conseguenza lo è anche $\{y \mid y = f^{-k}(\{x\})\}$ per ogni fissato $k \in \mathbb{N}$.
- (ii) È finito l'insieme dei punti critici per $(f \text{ ed } f^m)$. Infatti: come si è visto, tale insieme è dato da $C(f^n) := \bigcup_c \{f^{-k}(c)\}_{k=0, \dots, n-1}$, e quindi l'ipotesi che il numero n_c dei punti critici di f sia finito, ed il punto precedente, implicano la tesi per ogni $m \geq 1$.
- (iii) Anche la f^n ha derivata di Schwartz negativa: $\partial_S(f^n) < 0$. Infatti: se $\partial_S f < 0$ ed $\partial_S g < 0$ allora anche $\partial_S(f \circ g) = (g')^2 \partial_S f|_g + \partial_S g$ è negativa.
- (iv) La f' non può avere minimi (relativi) positivi né massimi (relativi) negativi; in particolare la f' ha segni opposti in due suoi punti critici adiacenti. Infatti: la condizione $f'' = 0$ insieme con la $\partial_S f < 0$ implicano f''' e f' di segni opposti in due punti critici adiacenti di f' . Ma la f'' si annulla agli estremi di tale intervallo, e quindi in esso la $(f'')'$ cambia segno, e di conseguenza anche la f' . Ne segue in particolare che fra due punti critici adiacenti di f' se ne trova almeno uno per f .
- (v) È finito l'insieme dei punti fissi per f ed f^m . Infatti: la condizione $\partial_S f < 0$ esclude che sia $f' = \text{cost} \neq 0$ su alcun intervallo, pertanto se f ammettesse infiniti punti fissi per la continuità di f' (ed il teorema del valor medio) esisterebbero infiniti punti in cui f' dovrebbe raggiungere il valore 1 ed infiniti punti nei quali esserne strettamente minore. Dal punto precedente segue allora che la funzione f avrebbe infiniti punti critici, in contrasto con l'ipotesi $n_c < \infty$. Ripetendo il ragionamento per la f^m , in virtù delle (ii) (iii), si ha che è finito l'insieme $\text{Per}_m(f)$ dei punti m -periodici per ogni fissato $m \in \mathbb{N}$.
- (vi) Ogni bacino di attrazione di un punto fisso (attrattivo) della f contiene almeno un punto critico della f stessa. Infatti: sia p fisso ed attrattivo: $|f'(p)| < 1$, e $W(p) =: (l, r)$ il suo bacino di attrazione. $W(p)$ è aperto, massimale, e tale che: $f(W(p)) \subseteq W(p)$. Ma la massimalità implica l'invarianza: $f(W(p)) = W(p)$, per cui se l, r sono finiti può avvenire solo una delle seguenti:
 - (vi.1) $f(l) = l, f(r) = r$; gli estremi sono punti fissi instabili;
 - (vi.2) $f(l) = r, f(r) = l$; il punto p è racchiuso da un ciclo (instabile) di periodo due;
 - (vi.3) $f(l) = f(r)$; uno solo degli estremi è un punto fisso instabile.



Nel caso (1) si può riconoscere, anche graficamente, che esistono a, b tali che $p \in (a, b) \subset W(p)$, e nei quali $f'(a) = f'(b) = 1$, e quindi essendo $f'(p) < 1$ la (iv) implica che in (a, b) e quindi in $W(p)$ c'è (almeno) uno zero per la f' e quindi almeno un punto critico per la f .

Nel caso (2) si ottiene lo stesso risultato per f^2 , in virtù della (iii), e quindi per f data l'invarianza di $W(p)$. Nel caso (3) i classici teoremi sulle funzioni continue garantiscono direttamente l'esistenza di un punto critico per f in $W(p)$.

- (vii) Ogni bacino di attrazione $W(p_m)$ di un punto fisso p_m della f^m contiene almeno un punto critico della f . Infatti: se $m > 1$ la (iii) permette di ripetere per la f^m il ragionamento fatto per la f . Ma l'esistenza di un punto critico per f^m in $W(p_m)$ implica l'esistenza di un punto critico per f , visto che $W(p_m)$ è invariante e, come si è detto, se x è critico per f^m allora sull'orbita di x c'è almeno un punto critico per f .

Riassumendo: ciascun bacino di attrazione dei punti m -periodici di f , se attrattivi, deve contenere almeno un punto critico per f . Pertanto punti periodici con bacini di stabilità limitati attraggono almeno un c , e quindi sono al più n_c . Le ultime due orbite periodiche attraggono al più le due semirette $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$, e non ci sono per la mappa f_μ che ivi diverge. ■

Il seguente teorema, pur se valido solo in $\mathbb{R}$, è comunque interessante per spiegare il comportamento di sistemi quali la f_μ .

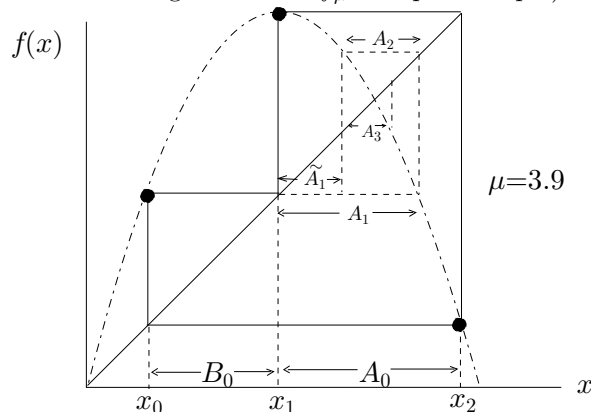
Teorema 5.1.2 [Sarkowski] *Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua ed ammette una traiettoria 3-periodica allora ammette traiettorie n -periodiche per ogni $n \in \mathbb{N}$. Esiste infatti un ordinamento dei numeri naturali secondo il quale se il sistema ammette una traiettoria di periodo k allora ammette senz'altro traiettorie di periodi $h < k$ "precedenti" a k in tale ordinamento:*

$$\begin{array}{lll} rcccc3 \succ & 5 \succ 7 \succ & \dots \succ \\ \succ 2 \cdot 3 \succ & 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ & \dots \succ \\ \succ 2^2 \cdot 3 \succ & 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 7 \succ & \dots \succ \\ \succ 2^3 \cdot 3 \succ & 2^3 \cdot 5 \succ 2^3 \cdot 7 \succ & \dots \succ \\ \succ 2^4 \succ & 2^3 \succ 2^2 \succ & 2 \succ 1 . \end{array}$$

[In particolare quindi se per un certo μ^* la $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$ ha qualche dato iniziale x_0 la cui traiettoria è un ciclo 3-periodico allora per quello stesso valore μ^* il sistema descritto dalla f_{μ^*} ha certamente dati iniziali $x_0^{(n)}$ che appartengono a cicli di periodo n per ogni intero $n \in \mathbb{N}$. Dal Teorema 1 segue poi anche che se l'orbita (periodica, stabile) della quale si riconosce la presenza è un'orbita di periodo tre, allora tutte le altre (di qualsiasi periodo), che sono certamente presenti per quello stesso valore del parametro μ , sono tutte instabili]. Inoltre se un tale sistema ha un'orbita diversa da una potenza di due allora ammette infinite orbite periodiche; e se invece ha un numero finito di orbite periodiche allora il loro periodo è necessariamente una potenza di due.

Dimostrazione (cenno solo della prima parte)

Si noti che un ciclo 3-periodico di una mappa continua su $\mathbb{R}$ ha necessariamente, salvo inversioni di parità, forma come in figura (nella quale si è tracciato il grafico della f_μ solo per esempio)



Detti $B_0 := [x_0, x_1]$, $A_0 := [x_1, x_2]$, con $x_1 := f(x_0)$, ed $x_2 := f(x_1)$, per la continuità della f si ha che

$$f(B_0) \supseteq A_0, \quad \text{ed} \quad f(A_0) \supseteq B_0 \cup A_0 \supseteq A_0.$$

Ma nella Osservazione (i) si è provato che se per un qualsiasi $A \subset [0, 1]$ accade che $A \subseteq f(A)$ allora, per il teorema degli zeri, esiste un punto fisso per f in A , ed un $A' \subseteq A$ tale che $f(A') = A$. Pertanto esiste un punto fisso per f in A_0 , ed un punto fisso per f^2 in B_0 giacché $f^2(B_0) \supseteq f(A_0) \supseteq B_0 \cup A_0 \supseteq B_0$.

Per dimostrare che esistono anche periodi superiori si noti che, siccome in A_0 la f assume (decrecendo, almeno una volta) tutti i valori fra x_2 ed x_0 , e cioè $f(A_0) \supseteq A_0$, esiste un sottoinsieme $A_1 \subseteq A_0$ tale che $f(A_1) = A_0 \supseteq A_1$. Per lo stesso motivo allora esiste un sottoinsieme $A_2 \subseteq A_1$ tale che $f(A_2) = A_1 \supseteq A_2$.

Procedendo in tal modo si costruiscono

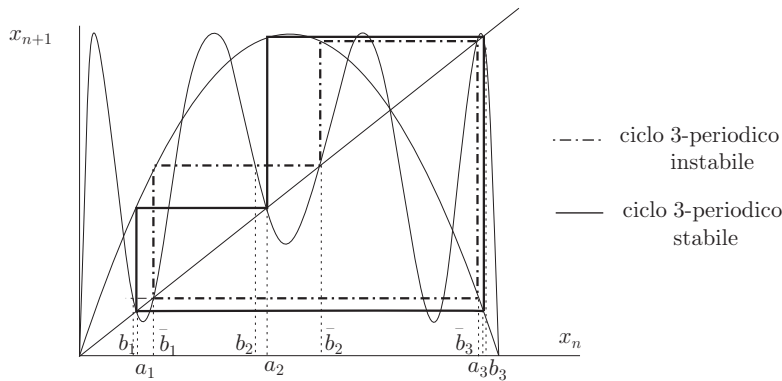
$$\begin{aligned} A_m &\subseteq A_{m-1} \subseteq \dots \subseteq A_2 \subseteq A_1 \subseteq A_0 \subseteq A_0 \cup B_0 && \text{ tali che} \\ f(A_m) &\supseteq A_{m-1} \supseteq A_m && m = 0, 1, \dots \\ f(A_0) &\supseteq A_0 \cup B_0 \supseteq A_0 \\ f(A_0 \cup B_0) &\supseteq A_0 \cup B_0 \supseteq A_m. \end{aligned}$$

Quindi per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha $f^{m+1}(A_m) \supseteq B_0 \cup A_0$ ed esiste un sottoinsieme $\tilde{A}_m$ di A_m tale che $f^{m+1}(\tilde{A}_m) = B_0$, e $f^{m+2}(\tilde{A}_m) \supset A_0 \supset \tilde{A}_m$. Esiste allora almeno un punto $p \in \tilde{A}_m$ tale che $f^{m+2}(p) = p$; d'altra parte $m+2$ è un periodo *minimo* perché la $(m+1)$ -esima iterata cade in B_0 , mentre *tutte* le precedenti sono in A_0 . Se poi qualche iterata finisse sul bordo $\{x_0, x_1, x_2\}$, allora $m = 2$ oppure $m = 3$.

Mediante questo risultato, e con ragionamenti di compatibilità aritmetica, si ottiene poi lo specifico ordinamento accennato. ■

Queste considerazioni fanno intuire cosa accada nell'intervallo di valori $\mu \in (\mu_\infty, \mu_3)$ dove con $\mu_3 \simeq 3.828427\dots$ si è indicato il primo valore per il quale si manifesta un'orbita 3-periodica.

Per $\mu = \mu_3 + \varepsilon$, ad esempio $\mu = 3.839$, si hanno due orbite 3-periodiche, di cui solo una: la $\gamma^s := \{a_1 \simeq .15, a_2 \simeq .49, a_3 \simeq .96\}$ è attrattiva in quanto $(f^3)'(a_i) = -.78$; e ciò accade anche per un qualsiasi μ in un intorno (destro) di μ_3 .



Siano $\gamma^u := \{\bar{b}_1 \simeq .17, \bar{b}_2 \simeq .54, \bar{b}_3 \simeq .95\}$ i punti dell'orbita periodica instabile e $b_i \neq \bar{b}_i$ i loro tre primi vicini tali che $f^3(b_i) = \bar{b}_i$; si riconoscono i tre bacini di attrazione rispetto alla f_μ^3 dei tre punti della γ^s : $W(a_1) := (b_1, \bar{b}_1)$, $W(a_2) := (b_2, \bar{b}_2)$ e $W(a_3) := (\bar{b}_3, b_3)$.

Detti $I_0 := [0, b_1]$, $I_1 := [\bar{b}_1, b_2]$, $I_2 := [\bar{b}_2, \bar{b}_3]$, $I_3 := [b_3, 1]$, la dinamica è tale che $f(I_0) \subset I_0 \cup I_1 \cup W(a_1)$, $f(I_1) = I_2$, $f(I_2) \subset I_1 \cup I_2 \cup W(a_2)$, $f(I_3) = I_0$. [Infatti: per motivi di simmetria si vede che $f(b_2) = f(\bar{b}_2) = \bar{b}_3$ ed $f^3(b_1) = \bar{b}_1 = f(\bar{b}_3) = f^2(b_2)$. Sia $c_1 := f^{-1}(c) \cap [0, c]$. f^2 è monotona su $[c_1, c]$ ed è $b_2 \in [c_1, c]$ ed anche $f(b_1) \in [c_1, c]$; ciò implica $f(b_1) = b_2$ ed $f^2(b_1) = \bar{b}_3 = f^3(b_3)$ che conduce a $f(b_3) = b_1$].

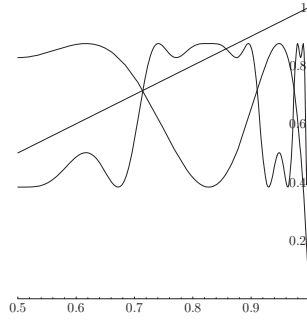
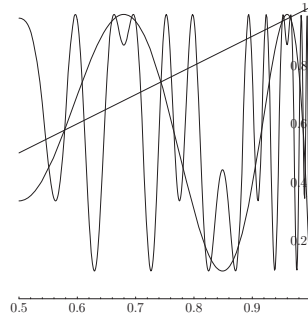
È possibile in tal caso rappresentare tale comportamento con una matrice di raggiungibilità

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Siccome poi su I_0 si ha $f(x) > x$, dato $x_0 \in I_0$ o si ha $\omega(x_0) = \{a_1\}$ oppure esiste n tale che $f^n(x_0) \in I_1$; ed analogo ragionamento vale per $x_0 \in I_3$.

Tutta la dinamica definitivamente periodica, (e cioè almeno tutte le orbite periodiche di cui il Teorema di Sarkowski, salvo lo zero ed i punti a_1, a_2, a_3), appartiene allora all'insieme $I_1 \cup I_2$ sul quale la matrice di raggiungibilità è data da $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. In più (vedi: [Devaney § 1.13]) si può mostrare che tale insieme ne contiene uno: Λ invariante non vuoto e formato da quei punti la cui dinamica rimane in Λ e risulta topologicamente coniugata ad un subshift finito di matrice A (vedi: [oltre]).

Per μ abbastanza maggiore di μ_3 ma ancora minore di 4 il procedimento del raddoppio dei periodi si può nuovamente innescare.

Iterate 3 e 6; $\mu = 3.5$; $\mu = 3.9$.

È comunque possibile però escludere un certo numero di traiettorie fra tutte quelle immaginabili (vedi la “kneading theory” su: [Devaney], ovvero in [Collet Eckmann]).

Un drammatico cambio di comportamento si verifica dopo il valore $\mu = 4$, per il quale il massimo della f_μ supera il valore uno. Infatti si riconosce, in tal caso, l'esistenza di tutta una successione di intervalli i cui punti al crescere delle iterazioni si perdono verso $-\infty$.

Si chiami A_0 l'intervallo (aperto e non vuoto se $\mu > 4$) dei punti sui quali $f_\mu(x) > 1$:

$$A_0 := \left\{ x \in [0, 1] \mid f_\mu(x) > 1 \right\}.$$

La successione delle controimmagini $f_\mu^{-k}(A_0)$ è fatta di punti che hanno traiettorie definitivamente destinate verso $-\infty$. Ne segue che l'unico insieme che conta ai fini della dinamica asintotica, e che è invariante secondo la f_μ , è dato dal seguente insieme $\mathcal{A}$ chiamato, seppure impropriamente,

Attrattore della mappa quadratica

$$\mathcal{A} := [0, 1] \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} f_\mu^{-j}(A_0) = \bigcap_{j=0}^{\infty} f_\mu^{-j}([0, 1]). \quad (1.3)$$

Si noti che $\mathcal{A}$ è chiuso, dato che f_μ è continua e che A_0 è aperto (se $\mu > 4$).

Per mostrare l'uguaglianza fra il secondo ed il terzo membro della (AT), per provare che x appartiene ad $\mathcal{A}$ se e solo se $f_\mu^j(x)$ appartiene a $[0, 1]$ per ogni $j \in \mathbb{N}$, e, più in generale, per esprimere convenientemente la dinamica su $[0, 1]$, è opportuno innanzi tutto ricordare le seguenti relazioni, valide per una qualsiasi funzione f fra due spazi di punti $\mathbb{X}$ ed $\mathbb{Y}$:

(R1) se $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ e $D \subset \mathbb{Y}$, allora: $f f^{-1}(D) \subseteq D$, e l'inclusione è stretta su punti $y \in D \setminus f(\mathbb{X})$, e cioè: se $D \subseteq f(\mathbb{X})$, allora: $f f^{-1}(D) = D$;

(R2) per ogni $A, B \in 2^{\mathbb{Y}}$, sussiste la: $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$;

(R3) se $f(A \setminus B) \cap f(B \setminus A) = \emptyset$ allora: $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, altrimenti vale l'inclusione: $\subset$.

Infatti, dalle $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ e $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$ segue in tal caso

$$(f(A \cap B) \cup f(A \setminus B)) \cap (f(B \cap A) \cup f(B \setminus A)) = f(A \cap B).$$

Successivamente, è utile introdurre la seguente notazione. Siano

$$I_0 := \left\{ x \in [0, 1/2] \mid 0 \leq f_\mu(x) \leq 1 \right\},$$

$$I_1 := \left\{ x \in [1/2, 1] \mid 0 \leq f_\mu(x) \leq 1 \right\},$$

e si introducano gli insiemi

$$K_m \quad \text{definiti da} \quad K_m := f_\mu^{-m}([0, 1]), \quad m = 0, 1, \dots,$$

$$A_m \quad \text{definiti da} \quad A_m := f_\mu^{-m}(A_0), \quad m = 1, \dots,$$

Giacché $\mu > 4$, tutti gli insiemi K_m ed A_m sono composti da intervalli, rispettivamente: chiusi quelli di K_m ed aperti quelli di A_m , disgiunti e non vuoti. In particolare: I_0 ed I_1 sono intervalli chiusi, disgiunti, non vuoti, e tali che:

$$K_1 = f_\mu^{-1}([0, 1]) = [0, 1] \setminus A_0 = I_0 \cup I_1.$$

Infatti: se μ è maggiore di 4 il punto critico c della f_μ è (unico e) tale che $f_\mu(c) > 1$. Allora, detto J un qualsiasi sottoinsieme di $[0, 1]$, si traggono le seguenti considerazioni.

- $f_\mu^{-1}(J)$ consiste di due sottoinsiemi l'uno di I_0 l'altro di I_1 in quanto ogni punto in $[0, 1]$ ammette una ed una sola immagine inversa in ciascun I_0 ed I_1 ; ciò perché f_μ è continua, monotona su I_0 ed I_1 , e tale che $f_\mu(I_0) = f_\mu(I_1) = [0, 1]$.
- Qualunque sia $\sigma \in \{0, 1\}$, l'insieme $I_\sigma \cap f_\mu^{-1}(J)$ è non vuoto se tale è J .
- La precedente proprietà si può poi estendere alle iterazioni successive della mappa f_μ^{-1} nel seguente modo. Si definiscano, per $m = 1, 2, \dots$ e $j = m - 1, m - 2, \dots, 1, 0$, gli insiemi

$$I_{\sigma_j \dots \sigma_m} := I_{\sigma_j} \cap f_\mu^{-1}(I_{\sigma_{j+1} \dots \sigma_m}).$$

Allora, qualsiasi sia $m \in \mathbb{N}$, l'insieme I_{σ_m} è non vuoto e, essendo non vuoto $I_{\sigma_{j+1} \dots \sigma_m}$, tale risulta $I_{\sigma_j \dots \sigma_m} := I_{\sigma_j} \cap f_\mu^{-1}(I_{\sigma_{j+1} \dots \sigma_m})$.

- Nessun punto y di $[0, 1]$ ammette immagine inversa che sia in A_0 . Infatti la (R1) con $D \equiv [0, 1]$ impone $f_\mu f_\mu^{-1}([0, 1]) \subseteq [0, 1]$. Ma ciò non accade ai punti $x \in A_0$, per cui deve essere $f_\mu^{-1}([0, 1]) \cap A_0 = \emptyset$.
- La $f_\mu^{-1}(A \cup B) = f_\mu^{-1}(A) \cup f_\mu^{-1}(B)$ implica che se $A \supset B$ allora $f_\mu^{-1}(A) \supset f_\mu^{-1}(B)$. Per cui, dato che $K_0 = [0, 1] \supset A_0$, si ha senz'altro: $K_m \supset A_m$ per ciascun $m = 1, 2, \dots$.
- La: $f_\mu^{-1}(A_0) \cap A_0 = \emptyset$ (provata qui sopra), l'essere $f_\mu^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, e la $f_\mu^{-1}(A \cap B) = f_\mu^{-1}(A) \cap f_\mu^{-1}(B)$, fanno concludere che anche $A_{m+1} \cap A_m = f_\mu^{-1}(A_m) \cap A_m = f_\mu^{-m}(f_\mu^{-1}(A_0) \cap A_0) = \emptyset$.

Queste e la (R2) permettono innanzi tutto di verificare che

$$\begin{aligned} rcccl K_1 &:= f_\mu^{-1}([0, 1]) = f_\mu^{-1}(K_0) = K_0 \setminus f_\mu^{-0}(A_0) = [0, 1] \setminus A_0 \\ K_2 &:= f_\mu^{-2}([0, 1]) = f_\mu^{-1}(K_1) = K_1 \setminus f_\mu^{-1}(A_0) = [0, 1] \setminus \bigcup_{j=0}^1 A_j \\ K_3 &:= f_\mu^{-3}([0, 1]) = f_\mu^{-1}(K_2) = K_2 \setminus f_\mu^{-2}(A_0) = [0, 1] \setminus \bigcup_{j=0}^2 A_j \\ &\dots \qquad \dots \end{aligned}$$

e cioè che sussistono, per $m = 1, 2, \dots$, le

$$\begin{aligned} K_{m+1} &:= f_\mu^{-(m+1)}([0, 1]) = f_\mu^{-1}(K_m) = K_m \setminus f_\mu^{-1}(A_{m-1}) \\ &= K_m \setminus A_m = [0, 1] \setminus \bigcup_{j=0}^m A_j \subseteq K_m, \end{aligned} \tag{1.4}$$

e quindi la (AT): $\mathcal{A} = \bigcap_{j=0}^{\infty} K_j$ come conseguenza della:

$$\mathcal{A} = [0, 1] \setminus \bigcup_{m=0}^{\infty} A_m \equiv (\dots (([0, 1] \setminus A_0) \setminus A_1) \dots) \equiv (\dots ((K_m \setminus A_m) \setminus A_{m+1}) \dots).$$

In secondo luogo si ha che ciascuno degli insiemi K_m consiste esattamente di 2^m intervalli chiusi, e ciò verrà anche confermato nella (KT) per induzione su $m = 0, 1, \dots$. In effetti, così come l'insieme $f_\mu^{-m}(c)$ delle controimmagini di ordine m del punto critico c è costituito esattamente da 2^m punti, l'insieme $A_m = f_\mu^{-m}(A_0)$ è costituito da 2^m intervalli aperti non vuoti; ciascuno di essi cade *internamente* ad uno ed uno solo dei 2^m intervalli, chiusi disgiunti non vuoti, che costituiscono l'insieme $K_m = f_\mu^{-m}([0, 1])$, e da questo vengono sottratti lasciandone 2^{m+1} intervalli ancora chiusi non vuoti. L'unione di tali sottointervalli, risultato della m -esima iterazione della mappa f_μ^{-1} , forma (per costruzione) l'insieme $K_m = f_\mu^{-m}([0, 1])$ e, sempre per il fatto che $\mu > 4$, ciascuna delle unioni nella (EK) è fra insiemi disgiunti, così come ciascuna delle immagini inverse è da insiemi non vuoti in insiemi non vuoti.

È importante ribadire che f_μ è continua e strettamente monotona su ciascuno degli intervalli I_0 ed I_1 , ed assume su di essi i valori zero ed uno, e quindi la loro f_μ -immagine è tutto $[0, 1]$. Se ne deduce che le proprietà topologiche dei loro sottoinsiemi, ed in particolare il numero e le posizioni relative dei punti fissi e critici delle funzioni definite su essi, risultano conservati nella operazione:

$$I_0 \xrightarrow{f_\mu} [0, 1] \quad \text{oppure} \quad I_1 \xrightarrow{f_\mu} [0, 1],$$

così come sono conservati in ciascuna delle due operazioni inverse:

$$[0, 1] \xrightarrow{f_\mu^{-1}} I_0 \quad \text{oppure} \quad [0, 1] \xrightarrow{f_\mu^{-1}} I_1 .$$

In particolare: $[0, 1] = f_\mu f_\mu^{-1}([0, 1])$. Questa, e la (R1), implicano che:

$$\text{per ogni sottoinsieme } J \subseteq [0, 1] \quad \text{si ha: } J = f_\mu f_\mu^{-1}(J) .$$

D'altra parte sussistono la $f_\mu^{-1}([0, 1]) = I_0 \cup I_1$ e la $f_\mu^{-1}(J) = f_\mu^{-1}([0, 1] \cap J) = f_\mu^{-1}([0, 1]) \cap f_\mu^{-1}(J)$. Se ne conclude che:

$$f_\mu^{-1}(J) = (I_0 \cap f_\mu^{-1}(J)) \cup (I_1 \cap f_\mu^{-1}(J)) , \quad (FU1) \quad (1.5)$$

$$J = f_\mu f_\mu^{-1}(J) = f_\mu(I_0 \cap f_\mu^{-1}(J)) \cup f_\mu(I_1 \cap f_\mu^{-1}(J)); \quad (FU2) \quad (1.6)$$

ed anzi, per ogni $J \subseteq [0, 1]$ si ha $f_\mu(I_0 \cap f_\mu^{-1}(J)) = f_\mu(I_1 \cap f_\mu^{-1}(J))$, giacché ciascun punto di J ha una ed una sola immagine inversa in I_0 ed una ed una sola immagine inversa in I_1 . In altre parole, la (FU2) si specializza nella

$$J = f_\mu(I_0 \cap f_\mu^{-1}(J)) = f_\mu(I_1 \cap f_\mu^{-1}(J)) . \quad (1.7)$$

Dalla (FU1) si hanno in particolare le (unioni disgiunte)

$$\begin{aligned} f_\mu^{-1}(I_0) &= (I_0 \cap f_\mu^{-1}(I_0)) \cup (I_1 \cap f_\mu^{-1}(I_0)) =: I_{00} \cup I_{10} \\ f_\mu^{-1}(I_1) &= (I_0 \cap f_\mu^{-1}(I_1)) \cup (I_1 \cap f_\mu^{-1}(I_1)) =: I_{01} \cup I_{11} \end{aligned} \quad (1.8)$$

(la cui unione è K_2), e le

$$\begin{aligned} f_\mu^{-1}(I_{01}) &= (I_0 \cap f_\mu^{-1}(I_{01})) \cup (I_1 \cap f_\mu^{-1}(I_{01})) =: I_{001} \cup I_{101} \\ f_\mu^{-1}(I_{11}) &= (I_0 \cap f_\mu^{-1}(I_{11})) \cup (I_1 \cap f_\mu^{-1}(I_{11})) =: I_{011} \cup I_{111}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

(la cui unione è $f_\mu^{-2}(I_1)$). Ancora, ed in particolare, si ricavano le

$$\begin{aligned} K_1 &= f_\mu^{-1}([0, 1]) = I_0 \cup I_1 = \bigcup_{\sigma_0 \in \{0,1\}} I_{\sigma_0} , \\ K_2 &= f_\mu^{-2}([0, 1]) = f_\mu^{-1} \left(\bigcup_{\sigma_1 \in \{0,1\}} I_{\sigma_1} \right) = \bigcup_{\sigma_0, \sigma_1 \in \{0,1\}} I_{\sigma_0 \sigma_1} , \end{aligned}$$

giacché è $\bigcup_{\sigma_0 \in \{0,1\}} \bigcup_{\sigma_1 \in \{0,1\}} I_{\sigma_0} \cap f_\mu^{-1}(I_{\sigma_1}) \equiv \bigcup_{\sigma_0, \sigma_1 \in \{0,1\}} I_{\sigma_0 \sigma_1}$. Segue, allo stesso modo, la

$$K_3 = f_\mu^{-3}([0, 1]) = f_\mu^{-1} \left(\bigcup_{\sigma_1, \sigma_2 \in \{0,1\}} I_{\sigma_1 \sigma_2} \right) = \bigcup_{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \in \{0,1\}} I_{\sigma_0 \sigma_1 \sigma_2} .$$

È opportuno concludere la notazione. Ancora dalla (FU1), per $m = 0, 1, 2, \dots$, e con $\sigma_i \in \{0, 1\}$, $i = 0, 1, \dots, m$, si inducono le

$$\begin{aligned} I_{\sigma_0 \dots \sigma_m} &:= I_{\sigma_0} \cap f_\mu^{-1}(I_{\sigma_1 \dots \sigma_m}) \\ &= I_{\sigma_0} \cap f_\mu^{-1}(I_{\sigma_1} \cap f_\mu^{-1}(I_{\sigma_2} \cap \dots \cap f_\mu^{-1}(I_{\sigma_m}) \dots)) \\ &= I_{\sigma_0} \cap f_\mu^{-1}(I_{\sigma_1}) \cap f_\mu^{-2}(I_{\sigma_2}) \cap \dots \cap f_\mu^{-m}(I_{\sigma_m}) \\ &= I_{\sigma_0 \dots \sigma_{m-1}} \cap f_\mu^{-m}(I_{\sigma_m}) . \end{aligned} \quad (1.10)$$

Inoltre, la (FU1) e la seconda delle (EI) implicano le

$$\bigcup_{\sigma_0 \in \{0,1\}} I_{\sigma_0 \dots \sigma_m} = \bigcup_{\sigma_0 \in \{0,1\}} I_{\sigma_0} \cap f_\mu^{-1}(I_{\sigma_1 \dots \sigma_m}) = f_\mu^{-1}(I_{\sigma_1 \dots \sigma_m}) .$$

Mediante queste si prova per induzione la

$$\begin{aligned}
 K_{m+1} &:= f_\mu^{-(m+1)}([0, 1]) = f_\mu^{-1}(K_m) \\
 &= \bigcup_{\sigma_0 \in \{0,1\}} I_{\sigma_0} \cap f_\mu^{-1} \left(\bigcup_{\substack{\sigma_i \in \{0,1\} \\ i=1,\dots,m}} I_{\sigma_1 \dots \sigma_m} \right) \\
 &= \bigcup_{\substack{\sigma_i \in \{0,1\} \\ i=0,\dots,m}} I_{\sigma_0} \cap f_\mu^{-1}(I_{\sigma_1 \dots \sigma_m}) = \bigcup_{\substack{\sigma_i \in \{0,1\} \\ i=0,\dots,m}} I_{\sigma_0 \dots \sigma_m}.
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Si osservi ora che, per la prima delle (EI), si ha

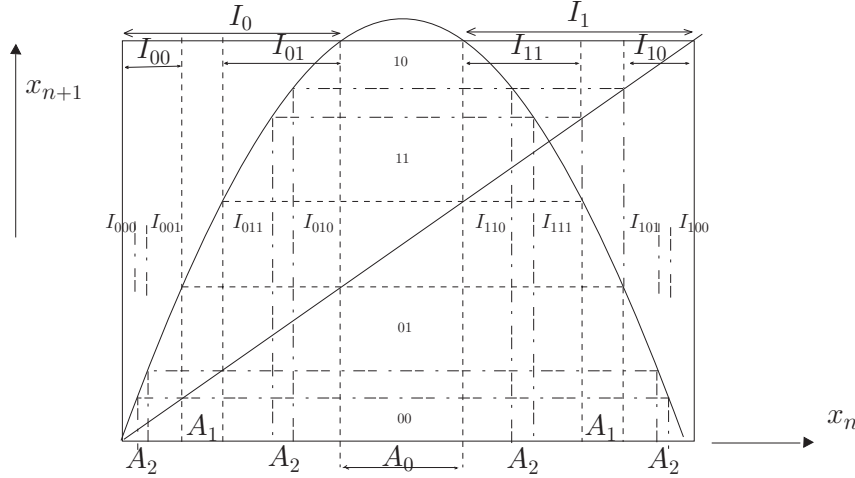
$$x \in I_{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_m} \quad \text{se e solo se} \quad \begin{cases} x \in I_{\sigma_0} \\ f_\mu(x) \in I_{\sigma_1 \dots \sigma_m} \end{cases}$$

ed anzi ogni punto x' di $I_{\sigma_1 \dots \sigma_m}$ è immagine $x' = f_\mu(x)$ di (esattamente) un $x \in I_0$ e di un $x \in I_1$, entrambi appartenenti a $f_\mu^{-1}(I_{\sigma_1 \dots \sigma_m})$, si ricordi la (FU2b).

Seguono le importanti espressioni, con $\sigma_k \in \{0,1\}$, per $k = 0, 1, \dots, m$,

$$\begin{aligned}
 f_\mu(I_{\sigma_0 \dots \sigma_m}) &= f_\mu f_\mu^{-1}(I_{\sigma_1 \dots \sigma_m}) = I_{\sigma_1 \dots \sigma_m}, & \text{che implica} \\
 f_\mu^m(I_{\sigma_0 \dots \sigma_m}) &= I_{\sigma_m \sigma_{m+1} \dots} \subset I_{\sigma_m}, & \text{insieme con} \\
 f_\mu^m(I_{\sigma_0 \dots \sigma_m}) &= I_{\sigma_m}, \quad \text{per } m = 1, 2, \dots, & \text{ed in particolare} \\
 x \in I_{\sigma_0 \dots \sigma_m} &\quad \text{se e solo se } f_\mu^j(x) \in I_{\sigma_j} \quad \text{per ogni } j = 0, 1, \dots, m.
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

In tal modo si riconosce che il valore dell'indice $\sigma_j \in \{0,1\}$ mostra quale sia l'insieme I_0 o I_1 , rispettivamente, nel quale il sottointervallo $I_{\sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_j}$ viene trasportato dalla j -ma iterazione della mappa f_μ .



In definitiva, ciascuno dei 2^m sotto-intervalli che costituiscono $f_\mu^{-m}([0, 1])$ viene monotonicamente trasformato dalla f_μ^m esattamente su tutto l'intervallo $[0, 1]$. Anzi la f_μ^m è alternativamente crescente e decrescente su di essi [la f_μ lo è in I_0, I_1 ; la f_μ^2 lo è negli intervalli $\{I_{00}, I_{10}\} = f_\mu^{-1}(I_0)$, ed $\{I_{01}, I_{11}\} = f_\mu^{-1}(I_1)$; etc.], e pertanto f_μ^{m+1} ha esattamente 2^m massimi su $[0, 1]$, ed interseca la retta $y = x$ in almeno 2^{m+1} punti, essendo $f_\mu^{m+1}(1/2) < 0$.

Se μ è abbastanza grande, gli intervalli $I_{\sigma_0 \dots \sigma_m}$ hanno certamente tutti lunghezza decrescente al crescere di m . Ad esempio $\mu > 2 + \sqrt{5}$ rende ogni $x \in I_0 \cup I_1$ tale che $|\partial f(x)| > \lambda$ per un certo $\lambda > 1$ e quindi la lunghezza di ciascun sottointervallo è ridotta almeno di $1/\lambda$ ad ogni applicazione della mappa f_μ^{-1} . In tal caso, è possibile mostrare in modo semplice che $\mathcal{A}$ è un esempio di

Insieme di Cantor := un insieme (non numerabile) chiuso e non contenente punti interni né punti isolati.
 Equivalentemente: un chiuso, totalmente disconnesso, perfetto; ove, si ricordi,

Insieme perfetto := un insieme che coincide con il suo derivato: ogni suo punto è di accumulazione di punti dell'insieme.

Infatti:

- (i) $\mathcal{A}$ non contiene punti interni. Come si è detto, i due segmenti I_0 ed I_1 vengono monotonicamente trasportati in tutto $[0, 1]$ e ciò è vero, dopo m passi, per ciascuno dei 2^m intervalli chiusi dai quali è composto $f_\mu^{-k}([0, 1])$.

Pertanto se $\mathcal{A}$ contenesse intervalli, (e quindi punti interni ad $\mathcal{A}$ stesso) siccome, iterando la f_μ , ogni intervallo contenuto in $I_0 \cup I_1$ ha lunghezza crescente almeno secondo il fattore $\lambda > 1$, se la sua lunghezza fosse positiva esso finirebbe per coprire tutto $[0, 1]$ dopo un numero finito di iterazioni, e quindi avere una sua parte che si perde in A_0 contrariamente all'ipotizzata definitiva appartenenza a $[0, 1]$.

- (ii) $\mathcal{A}$ non contiene punti isolati. Se $\mathcal{A}$ contenesse qualche punto isolato p , tutti i punti vicini ad esso dovrebbero cadere in qualche $f_\mu^{-m}(A_0)$. Allora il punto p , che certo non può essere interno ad alcuno degli intervalli dai quali è composto $f_\mu^{-m}(A_0)$ e che hanno lunghezza decrescente con m , o è punto di accumulazione degli estremi di tali intervalli oppure coincide definitivamente con uno di essi. Tali estremi però sono anch'essi punti di $\mathcal{A}$ in quanto immagini inverse dello zero, e l'ipotesi esclude la prima eventualità. Rimane la possibilità che esistano $\tilde{m}$ ed $\varepsilon > 0$ tali che: $f_\mu^{\tilde{m}}(p) \geq 0$ e che (dovendo essere isolato) per ogni $x \in B_\varepsilon(p) \setminus \{p\}$ sia: $f_\mu^{\tilde{m}}(x) \notin [0, 1]$, e cioè $f_\mu^{\tilde{m}}(x) < 0$. Dovrebbero allora essere nulle sia $f_\mu^{\tilde{m}}(p)$ che $\partial f_\mu^{\tilde{m}}(p)$; ma si è visto che in tal caso p dovrebbe necessariamente avere traiettoria passante per il punto critico c , e quindi per l'interno di A_0 .

Ciò fa intuire come variazioni per quanto piccole delle condizioni iniziali portino *sicuramente* a delle traiettorie definitivamente diverse; [si pensi che ogni intervallo $J \subset [0, 1]$ che contenga punti di $\mathcal{A}$ contiene anche controimmagini del punto c , il quale separa le traiettorie che passano per I_0 da quelle che passano per I_1]. Tutte queste proprietà verranno più oltre dimostrate simultaneamente ed in modo alternativo facendo ricorso alla coniugazione topologica del sistema $(\mathcal{A}, f_\mu)$ con un più comodo ed equivalente sistema dinamico.

Una proprietà simile, ma più debole, dell'ultima vista qui sopra è quella posseduta da sistemi per i quali ci sia solo la sicurezza di trovare, arbitrariamente vicino ad ogni punto, *qualche* altro la cui dinamica sia definitivamente diversa, e cioè sistemi per i quali variazioni per quanto piccole delle condizioni iniziali *possano* dar luogo a traiettorie definitivamente diverse. Ciò accade se l'attrattore contiene qualche

Direzione di espansività := per ogni $x \in \mathcal{A}$ esiste $m_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|(\partial f^m)(x)| > 1 \quad \text{per ogni} \quad m > m_0,$$

(per altre generalizzazioni si veda la fine del paragrafo).

Qualora nel suo attrattore (che, si ricordi, è insieme invariante) vi sia almeno una direzione di espansività, si dice [Ruelle 1969] che

il sistema mostra dipendenza sensibile dal dato := *comunque si scelga* x nell'insieme invariante: $\mathcal{A}$, (o positivamente invariante se la mappa non è invertibile), *comunque grande si fissi* $\delta > 0$ (purché minore del $\sup_{x' \in \mathcal{A}} d(x, x')$), in ogni intorno per quanto piccolo $N(x)$ si può trovare almeno un $y \in N(x)$ tale che $d(f^m(x), f^m(y)) > \delta$ per qualche $m \in \mathbb{N}$ finito.

(In effetti la separazione si manifesta per un *qualsiasi* punto y purché scelto nella direzione di espansività. Inoltre, generalmente ci si aspetta che questo m sia convenientemente piccolo, e che la divergenza sia di tipo esponenziale: $d(f(x), f(y)) \geq \kappa d(x, y)$ con $\kappa > 1$).

Tale comportamento, spesso presente nei sistemi non lineari, non è però necessariamente presente in tutti quei casi nei quali la dinamica è irregolare: non si verifica, ad esempio, nella rotazione irrazionale sul toro né è conseguenza del period doubling.

Si osservi che l'introduzione degli indici σ_m tali che $f^m(I_{\sigma_0 \dots \sigma_m}) = I_{\sigma_m}$ ed il fatto che I_0 ed I_1 sono disgiunti permette di generare univocamente per ogni $x \in \mathcal{A}$ una successione $\sigma = \sigma(x) := [\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots]$ unilateralmente infinita di simboli σ_m che valgono zero o uno a seconda che l'evoluto al passo m -mo del dato x si trovi nell'intervallo I_0 oppure nell'intervallo I_1 . Viceversa, il fatto che la lunghezza degli intervalli $I_{\sigma_0, \dots, \sigma_m}$ tende a zero per $m \rightarrow \infty$ lascia sperare (come verrà provato più avanti) che sia possibile far corrispondere ad ogni successione $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m, \dots$ uno ed un unico $x \in \mathcal{A}$.

In definitiva, si intende individuare i punti di $\mathcal{A}$ mediante la loro storia evolutiva, e studiare le proprietà che caratterizzano la traiettoria corrispondente a ciascuno di essi fra tutte quelle possibili. Un comodo metodo per descrivere in questo modo l'evoluzione del sistema f_μ (nel caso $\mu > 2 + \sqrt{5}$) è fornito dalla cosiddetta

Dinamica Simbolica

Con questo nome ci si riferisce alla dinamica di un modello, realizzato mediante simboli astratti, la cui storia evolutiva sia "la stessa" del sistema originario in esame. La potenza del metodo risiede nel fatto che lo studio del modello simbolico è generalmente semplice, e che esso si adatta a *molti* diversi sistemi con le stesse caratteristiche di moto. A tale scopo si consideri il seguente

Esempio 5.1.9 Lo shift di Markov (topologico, discreto).

Sia $\mathbb{Y} := \{y_1, \dots, y_N\} \xrightarrow{1-1} \{1, \dots, N\}$ un alfabeto finito sul quale si introduca la topologia discreta $\mathcal{T}_d$. La topologia $\mathcal{T}_d$ può essere definita sugli interi, come sottoinsieme dei reali, tramite il valore assoluto; per essa ogni singleton $\{y_n\}$ è aperto e chiuso, e la convergenza avviene solo per definitiva uguaglianza). Lo spazio i cui punti sono le successioni $\sigma := [\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots]$, unilateralmente infinite, di elementi σ_i presi in $\mathbb{Y}$, e dotato della topologia prodotto, verrà indicato con

$$(\mathbb{Y}^{\mathbb{N}}, \mathcal{T}_p) := \underbrace{(\mathbb{Y}, \mathcal{T}_d) \times (\mathbb{Y}, \mathcal{T}_d) \times \dots}_{\text{infinite volte}}.$$

Si ricordi che la *topologia prodotto* [Kelley § 3.2, Heisemberg3.28] $\mathcal{T}_p$ è quella generata dagli insiemi prodotto di un *numero finito* di aperti scelti negli spazi fattori e, per il resto, di infiniti termini costituiti dai rimanenti spazi fattori. La convergenza rispetto a $\mathcal{T}_p$ è la convergenza "per coordinate". Si noti inoltre che nel caso in esame il singleton $\{y_j \in \mathbb{Y}\}$ è aperto e chiuso nella topologia discreta $(\mathbb{Y}, \mathcal{T}_d)$, pertanto sono aperti e chiusi nella topologia prodotto $\mathcal{T}_p$ i *cilindri a base finita*, o cilindri finiti. Si definisce

$$\text{Cilindro di base } S_k := \{\sigma \in \mathbb{Y}^{\mathbb{N}} \mid \sigma_{i_1} = y_{i_1}, \sigma_{i_2} = y_{i_2}, \dots, \sigma_{i_k} = y_{i_k}\}$$

l'insieme di tutte le successioni $\sigma \in \mathbb{Y}^{\mathbb{N}}$ delle quali siano stati assegnati certi k valori $\{y_{i_j} \in \mathbb{Y}\}_{j=1, \dots, k}$ alle sue coordinate nei siti $i_1, \dots, i_k$, (l'insieme dei quali è detta *base* $S_k := \{i_1, \dots, i_k\}$ del cilindro).

I cilindri verranno indicati con $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ y_{i_1} & y_{i_2} & \dots & y_{i_k} \end{pmatrix}$.

Cilindri del tipo $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k \\ y_0 & y_1 & \dots & y_k \end{pmatrix}$ possono essere una base per la topologia prodotto; sono infatti definite le seguenti operazioni:

$$\text{Unione, o OR logico: } \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ y_{i_1} & y_{i_2} & \dots & y_{i_k} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_h \\ z_{j_1} & z_{j_2} & \dots & z_{j_h} \end{pmatrix} :=$$

$$\left\{ \sigma \in \mathbb{Y}^{\mathbb{N}} \mid \begin{array}{l} \text{almeno una delle seguenti è vera :} \\ \sigma_{i_n} = y_{i_n} \quad \text{per ogni } n = 1, \dots, k \\ \sigma_{j_m} = z_{j_m} \quad \text{per ogni } m = 1, \dots, h \end{array} \right\}.$$

In particolare essa è tale che

$$\bigcup_{y \in \mathbb{Y}} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{j-1} & i_j & i_{j+1} & \dots & i_k \\ y_{i_1} & y_{i_2} & \dots & y_{i_{j-1}} & y & y_{i_{j+1}} & \dots & y_{i_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{j-1} & i_j & i_{j+1} & \dots & i_k \\ y_{i_1} & y_{i_2} & \dots & y_{i_{j-1}} & y_{i_j} & y_{i_{j+1}} & \dots & y_{i_k} \end{pmatrix};$$

ed il generico cilindro $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ y_{i_1} & y_{i_2} & \dots & y_{i_k} \end{pmatrix}$ può essere considerato come unione di cilindri del tipo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k \\ y_0 & y_1 & \dots & y_k \end{pmatrix}, \text{ ove le coordinate } y_i \text{ con } i \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \text{ vengono lasciate assumere ogni valore in } \mathbb{Y}.$$

In tal modo la più generale unione $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k \\ y_0 & y_1 & \dots & y_k \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & h \\ z_0 & z_1 & \dots & z_h \end{pmatrix}$ è esprimibile come unione di cilindri aventi come base l'unione delle basi e coordinate tali da rendere vera almeno una delle condizioni assegnate sui valori delle coordinate.

$$\text{Intersezione, o AND logico: } \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ y_{i_1} & y_{i_2} & \dots & y_{i_k} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_h \\ z_{j_1} & z_{j_2} & \dots & z_{j_h} \end{pmatrix} :=$$

$$\begin{cases} \left\{ \sigma \in \mathbb{Y}^{\mathbb{N}} \mid \sigma_{i_n} = y_{i_n}, \sigma_{j_m} = z_{j_m}, \quad \forall n = 1, \dots, k, \quad m = 1, \dots, h \right\} \\ \emptyset \text{ se } \exists i' \in \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \cap \{j_1, j_2, \dots, j_h\} \text{ tale che } y_{i'} \neq z_{i'} \end{cases}$$

Un cilindro di base S_k è allora una intersezione (finita) di cilindri di base S_1 .

$$\text{Complementazione, o NOT logico: } \mathbb{Y}^{\mathbb{N}} \setminus \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ y_{i_1} & y_{i_2} & \dots & y_{i_k} \end{pmatrix} \text{ ad esempio dato da}$$

$$\bigcup_{y \in \mathbb{Y} \setminus \{y_{i_1}\}} \begin{pmatrix} i_1 \\ y \end{pmatrix} \bigcup_{y \in \mathbb{Y} \setminus \{y_{i_2}\}} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ y_{i_1} & y \end{pmatrix} \dots \bigcup_{y \in \mathbb{Y} \setminus \{y_{i_k}\}} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ y_{i_1} & y_{i_2} & \dots & y \end{pmatrix}$$

anch'esso chiuso ed aperto nella topologia detta in quanto complementare di un insieme che è chiuso ed aperto.

[Si noti, tuttavia, che la topologia prodotto $\mathcal{T}_p$ non è la topologia discreta poiché i punti non sono aperti giacché non contengono alcun cilindro finito; né d'altra parte $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n \\ y_0 & y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}$ appartiene alla $\mathcal{T}_p$, infatti questa è chiusa rispetto a unioni qualunque di insiemi che le appartengano, e ciò non avviene per l'insieme $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k \\ y_0 & y_1 & \dots & y_k \end{pmatrix}$ quando $k \rightarrow \infty$].

Si voglia ora definire su $(\mathbb{Y}^{\mathbb{N}}, \tau_p)$ una metrica; sarà conveniente sceglierla in modo tale che la topologia indotta dalle sfere coincida con quella prodotto, e quindi tale che le sfere siano cilindri. A questo scopo, si consideri $\mathbb{Y}$ nuovamente come sottoinsieme di $(\mathbb{N} \subset \mathbb{R}, |\cdot|)^{\mathbb{N}}$, e cioè si assumano le σ_i in $(\mathbb{N} \subset \mathbb{R}, |\cdot|)$; inoltre, per semplicità, si consideri dapprima il caso $\mathbb{Y} =: \mathbb{Y}_2$ con $\dim \mathbb{Y}_2 = 2$.

Si definisce la funzione $d : \mathbb{Y}_2^{\mathbb{N}} \times \mathbb{Y}_2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ data da

$$d(\sigma, \sigma') := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} |\sigma_i - \sigma'_i|,$$

e se ne riconoscono le seguenti caratteristiche:

(i) d è in effetti una metrica giacché eredita dal modulo su $\mathbb{R}$ le proprietà:

$$\begin{aligned} \text{(i.1)} \quad & \begin{cases} d(\sigma, \sigma') > 0 \Leftrightarrow \sigma \neq \sigma'; \\ d(\sigma, \sigma') = 0 \Leftrightarrow \sigma = \sigma'; \end{cases} \\ \text{(i.2)} \quad & d(\sigma, \sigma') = d(\sigma', \sigma); \\ \text{(i.3)} \quad & d(\sigma, \sigma'') \leq d(\sigma, \sigma') + d(\sigma', \sigma''). \end{aligned}$$

(ii) Le sfere $B_\varepsilon(\sigma')$, definite da tale metrica, sono date dagli insiemi

$$\left\{ \sigma \mid \sigma_i = \sigma'_i, \forall i \leq i^* \right\}, \quad \text{essendo } i^* := \min \left\{ j \mid 2^{-j} \leq \varepsilon \right\} \quad \text{ed } \varepsilon > 0;$$

infatti per tali σ si ha che

$$d(\sigma, \sigma') := \sum_{j=i^*+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} |\sigma_j - \sigma'_j| \leq \sum_{j=i^*+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{i^*+1}} \left(\frac{1}{1-1/2} \right) = 2^{-i^*} \leq \varepsilon,$$

e d'altra parte se esistesse $i' < i^*$ tale che $|\sigma_{i'} - \sigma'_{i'}| = 1$ sarebbe $\sigma \notin B_\varepsilon(\sigma')$, in quanto in tal caso risulterebbe $d \geq 2^{-i'} > \varepsilon$.

(iii) Le sfere $B_\varepsilon(\sigma')$ sono allora cilindri del tipo $\left(\begin{smallmatrix} 0, & 1, & \cdots, & k \\ y_0, & y_1, & \cdots, & y_k \end{smallmatrix} \right)$, con $k = i^*$ ed $y_j = \sigma'_j$ per ogni $j \leq i^*$. Ad esempio la sfera $B_{1/2}(\sigma')$ è il cilindro $\left(\begin{smallmatrix} 0, & 1 \\ y_0, & y_1 \end{smallmatrix} \right)$ con $y_0 = \sigma'_0$ e $y_1 = \sigma'_1$.

In base ai tre punti qui sopra si può osservare che la convergenza in questa metrica equivale alla convergenza per coordinate.

Risultati del tutto analoghi si ottengono nel caso generale $(\mathbb{Y}^{\mathbb{N}}, \tau_p)$ con $\text{card } \mathbb{Y} = N > 2$ e con una delle seguenti metriche (ove $\delta(x-y) = 0$ se $x = y$, ed uno altrimenti)

$$rcccd(\sigma, \sigma') = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|\sigma_i - \sigma'_i|}{N^i}, \quad d(\sigma, \sigma') = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta(\sigma_i - \sigma'_i)}{2^i},$$

$$d(\sigma, \sigma') = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \left(\frac{|\sigma_i - \sigma'_i|}{1 + |\sigma_i - \sigma'_i|} \right), \quad d(\sigma, \sigma') = \left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\sigma_i - \sigma'_i}{(N+1)^i} \right|.$$

Infine, su $(\mathbb{Y}^{\mathbb{N}}, d)$ si definisce una

Mappa d'avanzamento o Operatore di shift $:= \mathcal{S} : \mathbb{Y}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{Y}^{\mathbb{N}}$ definito da

$$\sigma \mapsto \mathcal{S}\sigma := \sigma' \quad \text{tale che} \quad \sigma'_0 = \sigma_1, \quad \sigma'_1 = \sigma_2, \quad \text{etc.}$$

Tale evoluzione è talvolta subordinata ad un operatore di compatibilità, o operatore di “transizione” $A : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$, rappresentato da una matrice $N \times N$ con elementi in $\{0, 1\}$; esso agisce sul generico elemento $\sigma_n \in \mathbb{Y}$ di $\sigma \in \mathbb{Y}^{\mathbb{N}}$, e ne ammette il cambio in σ_{n+1} se $\mathbf{A}_{\tilde{\sigma}_n, \tilde{\sigma}_{n+1}} = 1$, ove $\tilde{\sigma}_n \in \mathbb{Y}$. Si ha cioè che una successione $\sigma \in \mathbb{Y}^{\mathbb{N}}$ rappresenta una *storia plausibile se e solo se* σ appartiene a quel sottoinsieme $\mathbb{Y}_A^{\mathbb{N}}$ di $\mathbb{Y}^{\mathbb{N}}$ di quei punti che hanno σ_n e σ_{n+1} tali che $\mathbf{A}_{\tilde{\sigma}_n, \tilde{\sigma}_{n+1}} = 1$.

Il sottoinsieme $\mathbb{Y}_A^{\mathbb{N}}$ prende allora il nome di *catena di Markov* topologica ed il sistema dinamico il nome di *subshift finito*.

Alcuni esempi di subshift finiti sono i seguenti:

- $A_{i,j} = 1 \Rightarrow \mathbb{Y}_A^{\mathbb{N}} \equiv \mathbb{Y}^{\mathbb{N}}$;
- $A_{i,j} = \delta_{i,j} \Rightarrow \mathbb{Y}_A^{\mathbb{N}}$, e cioè consistente solo di N punti fissi;
- (nel caso $\dim \mathbb{Y} = 2$), $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, opp. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, opp. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, implicano che nessun punto è permesso; infatti, ad esempio la prima implica che la successione σ non può contenere zeri perché non evolvono, né uni perché evolverebbero in zeri; $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, opp. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, danno solo un punto fisso: tutti uni; la prima inoltre ammette anche il punto: 01111...;
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, per la quale 1 può seguire lo zero, ma non il viceversa. Sono allora possibili tutte le successioni tali che, per qualche k , abbia

$$\sigma_0 = 0, \quad \sigma_1 = 0, \quad \dots, \quad \sigma_k = 0, \quad \sigma_{k+1} = 1, \quad \sigma_{k+2} = 1, \dots;$$
- la mappa quadratica $f_{\mu}(x)$ per $\mu_3 < \mu < 4$ e purché ristretta ad un conveniente sottoinsieme di $I_1 \cup I_2$ (vedi: sopra) con matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Nuovamente iniziando con il caso semplice: $\mathbb{Y} = \mathbb{Y}_2$ con $\dim \mathbb{Y}_2 = 2$, si consideri lo Shift $\mathcal{S} : \mathbb{Y}_2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{Y}_2^{\mathbb{N}}$. Si possono subito rimarcare i seguenti fatti:

- L'operatore $\mathcal{S}$ risulta *continuo* nella metrica d . Infatti affinché $d(\sigma, \sigma') < \delta$ implichi $d(\mathcal{S}\sigma, \mathcal{S}\sigma') < \varepsilon$, e cioè affinché $\sigma \in B_{\delta}(\sigma')$ implichi $\mathcal{S}\sigma \in B_{\varepsilon}(\mathcal{S}\sigma')$, detto $i^* := \min\{j \mid 2^{-j} \leq \varepsilon\}$ basta prendere $\delta = 2^{-(i^*+1)}$, e cioè rendere uguali le prime coordinate di σ e di σ' almeno "un posto in più" dopo i^* . In tal modo, perso quest'ultimo vantaggio a causa dello shift, $\mathcal{S}\sigma$ rimane comunque vicina ad $\mathcal{S}\sigma'$ per almeno ε .
- Esistono due e solo due punti fissi:

$$\sigma^{(1)} = [0, 0, \dots], \quad \text{e} \quad \sigma^{(2)} = [1, 1, \dots];$$

e, più in generale, esistono 2^n punti periodici $\sigma^{(k_n)}$ con $k_n = 1, 2, \dots, 2^n$, aventi periodo n (non necessariamente minimo):

$$\sigma^{(k_n)} = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots],$$

ed esistono $2^h \cdot 2^n$ punti "definitivamente n -periodici" dopo h passi:

$$[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_h, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots].$$

- L'insieme dei punti periodici è denso in $\mathbb{Y}_2^{\mathbb{N}}$, e cioè la loro chiusura è $\mathbb{Y}_2^{\mathbb{N}}$ stesso. Infatti, per ogni $\sigma \in \mathbb{Y}_2^{\mathbb{N}}$, esiste $\sigma^{(k_n)}$ periodico tale che $d(\sigma^{(k_n)}, \sigma) < \varepsilon$: tale è ad esempio un qualsiasi punto periodico che abbia periodo maggiore dell'indice i^* (definito come il più grande dei j tali che $2^{-j} \leq \varepsilon$) e le prime i^* coordinate uguali a quelle di σ .
- Esistono punti $\hat{\sigma}$ di $\mathbb{Y}_2^{\mathbb{N}}$ la cui orbita arriva vicina quanto si vuole a *qualsiasi* punto $\sigma \in \mathbb{Y}_2^{\mathbb{N}}$, e cioè dati $\varepsilon > 0$ e $\sigma \in \mathbb{Y}_2^{\mathbb{N}}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\mathcal{S}^n \hat{\sigma} \in B_{\varepsilon}(\sigma)$. A questo scopo, fissato ε e quindi le prime i^* coordinate di σ , per essere sicuri che questo "pacchetto" di coordinate compaia prima o poi nella storia di $\hat{\sigma}$ basta costruire $\hat{\sigma}$ in modo che contenga *ogni* pacchetto finito di coordinate:

$$\hat{\sigma} := [0, 1, 00, 01, 11, 000, 001, 010, \dots, 0000, 0001, \dots, 00000, 00001, \dots].$$

- L'essere denso l'insieme dei punti periodici esclude che possa esistere un'orbita *periodica attrattiva*, così come l'esistenza di anche una sola traiettoria densa rende $\mathbb{Y}_2^{\mathbb{N}}$ *Topologicamente transitivo* e quindi in particolare *non decomponibile* in sottoinsiemi $\mathcal{S}$ -invarianti (vedi oltre).
- Pensando alla rappresentazione dei numeri $\xi \in [0, 1]$ in base due, ci si rende conto che la cardinalità dell'insieme dei punti periodici è al più quella del numerabile, mentre la cardinalità dei punti non periodici è quella del *continuo*, potendo far corrispondere gli irrazionali ai non-periodici ed i razionali a quelli periodici. Infatti $\xi = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sigma_j}{2^{j+1}}$ assegna ad un punto periodico $\sigma^{(k_n)}$, [e quindi tale che per esso $\sigma_h^{(k_n)} = \sigma_{h+in}^{(k_n)}$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ ed $h = 1, 2, \dots, n$] il valore $\bar{\xi} = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\sigma_{in+h}}{2^{in+h+1}} = \sum_{h=0}^{n-1} \frac{\sigma_h}{2^{h+1}} \left(\frac{2^n}{2^n - 1} \right)$ che è razionale.
- Si osserva che l'insieme $\mathbb{Y}^{\mathbb{N}}$ è perfetto: ogni punto $\sigma \in \mathbb{Y}^{\mathbb{N}}$ è un punto di accumulazione di altri punti di $\mathbb{Y}^{\mathbb{N}}$; infatti per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che $B_{\varepsilon}(\sigma) \setminus \{\sigma\} \neq \emptyset$.
- Dati (comunque) due punti distinti σ e σ' , per vicini che essi siano, la loro storia è tale da presentare un $n < \infty$ nel quale i loro iterati $[\sigma_n, \sigma_{n+1}, \dots]$ e $[\sigma'_n, \sigma'_{n+1}, \dots]$ hanno distanza superiore all'unità: *il sistema presenta dipendenza sensibile dal dato*.

□

Le stesse caratteristiche sostanziali che si sono trovate per lo spazio $(\mathbb{Y}_2^{\mathbb{N}}, d)$ nel caso $\dim \mathbb{Y}_2 = 2$, ottenuto ad esempio come prodotto di infinite copie di $(\{0, 1\}, \mathcal{T}_{|\cdot|})$, si ritrovano anche per $(\mathbb{Y}^{\mathbb{N}}, d)$ ottenuto come prodotto su uno spazio $\mathbb{Y}$ di $N > 2$ simboli equipaggiato ad esempio con una delle metriche viste sopra.

In ogni caso, $\mathbb{Y}^{\mathbb{N}}$ può essere costruito come prodotto di infinite copie dello spazio $(\{1, \dots, N\}, |\cdot|)$, e questo è totalmente disconnesso, compatto, metrico.

[Si ricordi che queste due ultime proprietà implicano la completezza, (vedi: [Kolmogorov]); e si rammenti che uno spazio, (od un suo sottoinsieme), si dice connesso se non esiste alcuna coppia di insiemi aperti non vuoti e disgiunti la cui unione sia lo spazio, (o l'insieme in esame); e si dice totalmente disconnesso se i più grossi (per inclusione) insiemi connessi sono i punti. La topologia discreta e la $\mathcal{T}_p$ su $\mathbb{Y}^{\mathbb{N}}$ ad esempio, rendono lo spazio totalmente disconnesso].

Pertanto, $\mathbb{Y}^{\mathbb{N}}$ è totalmente disconnesso, perfetto, compatto, metrico.

Equivalentemente, siccome perfetto e completo implicano non numerabile, esso è un *Insieme di Cantor*, e come tale è uno spazio privo di punti interni, privo di punti isolati, e non numerabile.

Se ne conclude che *risulta un insieme di Cantor anche ogni insieme omeomorfo a $\mathbb{Y}^{\mathbb{N}}$* . In particolare, è omeomorfo a $\mathbb{Y}_2^{\mathbb{N}}$ con $\dim \mathbb{Y}_2 = 2$ lo spazio dei risultati di un processo di lancio ripetitivo di una moneta, (a prescindere dall'essere questa più o meno “onesta”, ma solo con l'ipotesi che entrambe le facce siano possibili). Analogamente, le considerazioni che qui seguono confermano le proprietà (già viste prima) del sistema $(\mathcal{A}, f_\mu)$ ed in particolare il fatto che: *risulta un insieme di Cantor l'attrattore $\mathcal{A}$ della mappa quadratica $f_\mu := \mu x(1-x)$ quando $\mu > \lambda := 2 + \sqrt{5}$, valore questo per il quale $|\partial f_\mu| > \lambda > 1$ in ogni punto dell'insieme $I_0 \cup I_1$* . (Qui con “attrattore” si intende l'insieme dei punti di $[0, 1]$ che vi rimangono sotto qualunque iterazione della mappa; in seguito si preciserà meglio tale concetto e se ne darà una definizione più restrittiva).

Proposizione 5.1.1 *La dinamica, sull'insieme $\mathcal{A}$, del sistema definito dalla mappa f_μ con $\mu > 2 + \sqrt{5}$, può essere rappresentata in modo simbolico mediante il sistema definito dallo shift di Markov su $(\mathbb{Y}_2^{\mathbb{N}}, \mathcal{T}_p)$, con $\dim \mathbb{Y}_2 = 2$. In effetti: i due sistemi dinamici: $(\mathbb{Y}_2^{\mathbb{N}}, \mathcal{S})$ ed $(\mathcal{A}, f_\mu)$ sono topologicamente coniugati.*

Dimostrazione

Ogni $x \in \mathcal{A}$ individua una ed una sola successione $\sigma \in \mathbb{Y}_2^{\mathbb{N}}$. Infatti: per ogni $x \in \mathcal{A}$ esiste una (ed una sola) traiettoria $\gamma := \{x_0 = x, x_1 = f(x), \dots\}$ tutta contenuta in $\mathcal{A} \subset I_0 \cap I_1$. Pertanto, e mediante la

$$\sigma_i = \begin{cases} 0 & \text{se } x_i := f_\mu^{+i}(x) \in I_0 \\ 1 & \text{se } x_i := f_\mu^{+i}(x) \in I_1 \end{cases} \quad \text{e cioè: } f_\mu^{+i}(x) \in I_{\sigma_i} \quad \forall i \geq 0, \quad (1.13)$$

ogni $x \in \mathcal{A}$ individua univocamente la successione σ unilateralmente infinita di indici detta “storia” del punto x .

Viceversa:

Ogni successione $\sigma \in \mathbb{Y}_2^{\mathbb{N}}$ individua uno ed un solo punto $x \in \mathcal{A}$, e da questo parte una traiettoria che è totalmente contenuta in $\mathcal{A}$. Infatti, considerato che la lunghezza di un qualsiasi sottointervallo non vuoto J contenuto in I_0 o in I_1 risulta λ volte più grande della lunghezza di uno qualsiasi dei due intervalli non vuoti formanti la sua controimmagine $f_\mu^{-1}(J)$, si ha che:

(i) Ogni successione $\sigma \in \mathbb{Y}_2^{\mathbb{N}}$ individua almeno un $x \in \mathcal{A}$.

Infatti: affinché una certa σ sia una storia plausibile per un qualche $x \in \mathcal{A}$, per ogni $m > 0$ dovranno essere tutte vere le

$$x \in I_{\sigma_0}, \quad f_\mu(x) \in I_{\sigma_1}, \quad \dots, \quad f_\mu^j(x) \in I_{\sigma_j}, \quad \dots, \quad f_\mu^m(x) \in I_{\sigma_m},$$

e cioè, in virtù dell'ultima delle (SF),

$$x \in I_0 \cap f_\mu^{-1}(I_{\sigma_1}) \cap \dots \cap f_\mu^{-m}(I_{\sigma_m}) \quad \text{o anche} \quad x \in I_{\sigma_0 \dots \sigma_m}.$$

Ma ciascuno dei 2^{m+1} intervalli $I_{\sigma_0 \dots \sigma_m}$ chiusi disgiunti non vuoti la cui unione costituisce l'insieme $K_{m+1} = [0, 1] \setminus \bigcup_{j=0}^m f_\mu^{-j}(A_0) = f_\mu^{-(m+1)}([0, 1])$ è tale che $I_{\sigma_0 \dots \sigma_{m-1}} \supset I_{\sigma_0 \dots \sigma_m}$, (vedi l'ultima delle (EI)). Pertanto, per ciascuna fissata $\sigma \in \mathbb{Y}_2^{\mathbb{N}}$, la famiglia: $\{I_{\sigma_0 \dots \sigma_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ di sottoinsiemi (chiusi, inclusi) di $[0, 1]$ ha la proprietà che: ogni intersezione finita di suoi elementi è non vuota (“sistema centrato”). La compattezza di $[0, 1]$ implica allora che esiste (almeno un) $x \in \bigcap_{i=0}^{\infty} I_{\sigma_0 \dots \sigma_i}$ che rende vere tutte le:

$$x \in I_{\sigma_0}, \quad f_\mu(x) \in I_{\sigma_1}, \quad f_\mu^2(x) \in I_{\sigma_2}, \quad \dots, \quad f_\mu^j(x) \in I_{\sigma_j}, \quad \dots$$

le quali mostrano che la successione σ è la storia di x definita dalla (OS) e che $x \in \mathcal{A}$ giacché $f^j(x) \in [0, 1]$ per ogni $j = 0, 1, \dots$.

(ii) Ogni successione $\sigma \in \mathbb{Y}_2^{\mathbb{N}}$ individua al più un $x \in \mathcal{A}$.

Infatti $\bigcap_{i=0}^{\infty} I_{\sigma_0 \dots \sigma_i}$ non può che essere un insieme costituito da un solo punto: dati due punti in $\mathcal{A}$ a distanza $\delta > 0$ l'uno dall'altro, dopo $\hat{m}$ iterazioni, con $\hat{m}$ tale che $\lambda^{\hat{m}} \delta > 1/2$, essi restano da bande opposte rispetto ad A_0 e quindi non possono avere una stessa σ .

Esiste allora una mappa invertibile $\mathcal{H}$ che assegna tale corrispondenza biunivoca

$$\mathcal{H} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Y}_2^{\mathbb{N}}, \quad \mathcal{H} : x \mapsto \sigma = \mathcal{H}(x),$$

e la mappa $\mathcal{H}$ coniuga le due dinamiche: di f_{μ} su $\mathcal{A}$, e di $\mathcal{S}$ su $\mathbb{Y}_2^{\mathbb{N}}$

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{H} = \mathcal{H} \circ f_{\mu};$$

e cioè, si veda il § III.1 e la seconda delle (SF), $\sigma' = \mathcal{S}\sigma$ è la successione che corrisponde a $x' = f_{\mu}(x)$ quando σ è quella che corrisponde a x .

Inoltre $\mathcal{H}$ è un omeomorfismo, e la coniugazione è topologica, in quanto

- (i) la mappa $\mathcal{H} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Y}_2^{\mathbb{N}}$ è continua. Infatti: dato $\varepsilon > 0$, si fissi i^* come il più piccolo dei j tali che $2^{-j} \leq \varepsilon$. L'insieme $K_{i^*+1} = f_{\mu}^{-(i^*+1)}([0, 1])$ è formato dai 2^{i^*+1} intervalli chiusi disgiunti non vuoti $I_{\sigma_0 \dots \sigma_{i^*}}$, e contiene $\mathcal{A}$. Esiste, positivo, il valore minimo: $\delta(\varepsilon)$ delle distanze fra due qualsiasi di tali intervalli. Dati comunque $|x - x'| < \delta$ essi necessariamente appartengono ad uno, ed il medesimo, di questi intervalli, e cioè $x, x' \in I_{\sigma_0 \dots \sigma_{i^*}}$ per una qualche i^* -pla $(\sigma_0, \dots, \sigma_{i^*})$. Ne segue che i primi i^* passi delle storie dei punti x, x' coincidono, e che $d(\sigma, \sigma') \equiv d(\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')) < 1/2^{i^*} \leq \varepsilon$.
- (ii) la mappa $\mathcal{H}^{-1} : \mathbb{Y}_2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{A}$ è continua. Infatti: la lunghezza degli intervalli $I_{\sigma_0 \dots \sigma_m}$ decresce con m ; e pertanto dati comunque $\sigma' \in \mathbb{Y}_2^{\mathbb{N}}$ ed $\varepsilon > 0$, è possibile fissare i^* tale che $|I_{\sigma'_0 \dots \sigma'_{i^*}}| < \varepsilon$. Ma ogni $\sigma \in B_{\delta}(\sigma')$ con $\delta \leq 1/2^{i^*}$ ha le prime coordinate $\sigma_i = \sigma'_i$ per almeno tutti i siti $i = 0, 1, \dots, i^*$; e quindi tale σ individua un x che appartiene all'intervallo $I_{\sigma'_0 \dots \sigma'_{i^*}}$. Questo x ha storia simile a quella di $x' = \mathcal{H}^{-1}(\sigma')$ sino alla i^* -ma iterazione della mappa f_{μ} , e verifica la $|\mathcal{H}^{-1}(\sigma) - \mathcal{H}^{-1}(\sigma')| = |x - x'| < \varepsilon$.

■

In definitiva si ha che:

- f_{μ} ha infinite (numerabili) traiettorie periodiche, non attrattive, densamente distribuite in $\mathcal{A}$;
- f_{μ} ha infinite (non numerabili) traiettorie non periodiche, non attrattive, delle quali almeno una è densa in $\mathcal{A}$;
- f_{μ} mostra dipendenza sensibile dal dato iniziale.

A prescindere dalla struttura geometrica di $\mathcal{A}$, le tre proprietà dette si riassumono dicendo che

Il sistema dinamico, ovvero la sua evoluzione su $\mathcal{A}$, sono caotici.

“Benché il moto sia, strettamente parlando, deterministico, ciononostante da un punto di vista pratico esso è del tutto casuale: anche approssimativamente, lo stato a tempi grandi dipende in modo sensibile da dettagli non osservabilmente fini di quello al tempo zero” (O.Lanford).

Si ricordi infatti che lo shift su $\mathbb{Y}_2^{\mathbb{N}}$ è equivalente al sistema di testa e croce ripetuti, che è il più classico gioco in cui si assume vi sia totale casualità e non causalità, e ciò a prescindere dalla probabilità “di vincita” con cui la moneta mostra una delle sue due facce, purché tale probabilità sia non banale.

Qui sopra si è mostrato che $(\mathcal{A}, f_{\mu})$, con $\mu > 2 + \sqrt{5}$, è caotico.

Esempio 5.1.10 La “tent-map su $\mathbb{T}^1$ ”, e cioè la trasformazione di $\mathbb{T}^1$ in sé data da $\theta \mapsto 2\theta$, per $\theta \in [0, \pi]$, e $\theta \mapsto 2(2\pi - \theta)$ per $\theta \in [\pi, 2\pi]$ è espansiva su tutto $\mathbb{T}^1$ (e quindi ha dipendenza sensibile dal dato); in base a quanto visto nell'Esempio 4 si ha che tale mappa è caotica su $\mathbb{T}^1$. In più ciò implica che anche la mappa $f_4 := 4x(1 - x)$ è caotica su $[0, 1]$. Infatti, come è mostrato qui di seguito, è possibile stabilire una corrispondenza, anche se non invertibile, fra queste due mappe. Si noti che in questi due casi l'attrattore non è un insieme di Cantor, visto che coincide con $\mathbb{T}^1$ e con $[0, 1]$ rispettivamente, e che quindi la coniugazione topologica con $(\mathbb{Y}^{\mathbb{N}}, \mathcal{T}_p)$ non è l'unica possibilità per un sistema di esibire comportamento caotico.

Dimostrazione Talvolta la tent-map viene anche definita su $[0, 1]$ in sé, valendo $2y$ su $[0, \frac{1}{2}]$ e $2(1-y)$ su $[\frac{1}{2}, 1]$ mediante la $\theta := 2\pi y \in \mathbb{T}^1$. Si ponga $y =: \frac{1}{2\pi} \arcsin \sqrt{x}$; si ha $\sin^2 \theta = x$. Allora, la $x \mapsto 4x(1-x)$ comporta la $\sin^2 \theta \mapsto 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \equiv (2 \sin \theta \cos \theta)^2 \equiv \sin^2(2\theta)$. In tal modo si vede che l'endomorfismo $\theta \mapsto 2\theta$ del toro $\mathbb{T}^1$ in sé che si è visto nell'Esempio 4 produce sulla x la stessa dinamica della mappa quadratica f_μ con $\mu = 4$. Il morfismo $\theta \mapsto 2\theta$ coincide con quello della tent-map salvo che per l'inessenziale parità, che è invece la stessa di quella di un'altra $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, la “mappa del panettiere” o “baker's map”: $2y$ e $2y - 1$ su $[0, \frac{1}{2}]$ e $[\frac{1}{2}, 1]$ rispettivamente, e che ha proprietà del tutto analoghe alla precedente. ■

□

[La seguente è pura divagazione. La tent-map abbia distribuzione $p(y)dy \equiv c \cdot dy$ con $|c| = 1$; essa cioè sia uniforme su $[0, 1]$. Se si pensa ad una rappresentazione in base due, si ha che il sistema dinamico della tent-map può essere usato come generatore casuale di numeri uniformemente distribuiti su $[0, 1]$. Se $p(y)$ è la densità assegnata su $[0, 1]$, p è invariante sotto la dinamica quando $p(y)dy = p(z_1)dz_1 + p(z_2)dz_2$ con z_1, z_2 le due controimmagini di y .

Le due controimmagini secondo la tent-map di $y = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \dots$ (con $b_j \in \{0, 1\}$) sono $z_1 = \frac{b_1}{2^2} + \frac{b_2}{2^3} + \dots$ e $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{b_1}{2^2} + \frac{b_2}{2^3} + \dots$ e quindi anche loro uniformemente distribuiti su $[0, 1]$. La distribuzione per la x su $[0, 1]$ diviene

$$p(x)dx := p(y(x)) \frac{dy}{dx} dx = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}} dx.$$

L'esponente di Liapunov (vedi: [§ 3]) della tent vale

$$\eta := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log \left| \frac{df}{dy}(f^k(y)) \right|$$

che diviene, con l'assunzione di ergodicità,

$$\eta = \int_{[0,1]} \log \left| \frac{df}{dy} \right| p(y) dy = \int (\log 2) p(y) dy = \log 2.$$

Questo stesso valore si trova nel caso della mappa $4x(1-x)$, infatti si ha $\eta = \frac{1}{\pi} \int_{[0,1]} \frac{\log |4(1-2x)|}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \int_0^1 \log(4 \cos(\frac{\pi z}{2})) dz = \log 2$. La distribuzione $p(x)$ mostra che zero ed uno non attraggono, ma costituiscono l'insieme ω -limite di molti punti dell'intervallo $[0, 1]$. Gli altri continuano a vagare. È un esempio di moto ergodico (senza punti periodici stabili) con una certa assegnata densità di probabilità e con dipendenza sensibile dal dato. Fine della divagazione].

Anche quando il valore del parametro μ è tra 4 e $2 + \sqrt{5}$ la mappa f_μ ha comportamento caotico. Ciò è conseguenza dei seguenti fatti.

(•) Quando μ supera 4, il valore $f_\mu(1/2)$ supera l'unità, e diventa non vuoto l'insieme $[0, 1] \cap f_\mu^{-2}(0)$. Esistono infinite (numerabili) traiettorie che partendo dai punti (non fissi) $q := f_\mu^{-n}(0) \in [0, 1]$, (si pensi alla storia inversa degli estremi dell'intervallo A_0). Tali punti hanno come insieme ω -limite il punto fisso: $p_0 = 0$ (che, peraltro, è instabile). Inoltre, vi sono senz'altro alcuni di tali punti che appartengono a qualche intorno del punto stesso $p_0 = 0$, mentre altri appartengono a qualche intorno di altri punti: $r_0 \in [0, 1]$, di equilibrio o periodici. Si definiscono

Punti $q \in \mathbb{R}$ omoclini al punto (fisso) $p_e \in \mathbb{R}$:= punti per i quali esiste $n > 0$ tale che $f^n(q) = p_e$ malgrado sia $q \in W^u(p_e)$. Più in generale: punti tali che $q \in W^u(p_e) \cap W^s(p_e)$.

Punti $q \in \mathbb{R}$ eteroclini ai punti $p, r \in \text{Per}(f)$:= punti per i quali esiste $n > 0$ tale che $q \in W^u(r)$ ed $f^n(q) = p$. Più in generale: punti tali che $q \in W^u(r) \cap W^s(p)$.

[È chiaro che esistono punti che non sono né omoclini né eteroclini: per esempio quelli con traiettorie dense, o con traiettorie periodiche].

(•) Se q è omoclino per $p_0 = 0$, e quindi $q \in W^u(0)$, proseguendo nelle controimmagini $f_\mu^{-n}(q)$ ci si avvicina sempre di più a zero stesso, che, si ricordi, non è attrattivo. In più, se $\mu > 4$, nessuna delle traiettorie omocline o eterocline può avere punti nei quali $\partial f_\mu = 0$, perché l'unico punto critico $1/2$ esce definitivamente dall'intervallo di definizione.

Omocline degeneri := orbite omocline che ammettono punti q nei quali $\partial f(q) = 0$. [Nel caso della mappa f_μ si hanno omocline degeneri se $\mu = 4$].

(•) Le due considerazioni precedenti sussistono anche per l'altro punto fisso della f_μ anch'esso instabile dato che $\mu > 3$.

(•) La caoticità della dinamica anche per $\mu \in [4, 2 + \sqrt{5}]$ è conseguenza (vedi: [Devaney]) del seguente teorema, nel quale con *insieme iperbolico* (in $\dim = 1$) si intende un insieme $I \subset \mathbb{R}$ compatto non vuoto invariante, e tale che per ogni $x \in I$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che o è $|\partial f^n(x)| > 1$ per $n > n_0$ oppure è $|\partial f^n(x)| < 1$ per $n > n_0$.

[La definizione è un caso particolare ($\dim = 1$) di quella che verrà data nel seguito].

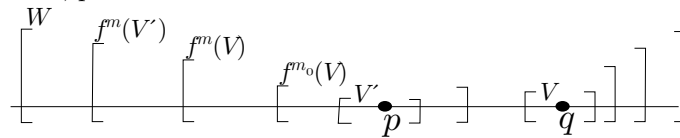
Teorema 5.1.1 Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R})$, e sia p un punto fisso (iperbolico) instabile che ammetta un'orbita omoclina non degenerare. Allora per ogni intorno $N(p)$ esiste un intero m tale che la mappa f^m ammette un attrattore iperbolico (invariante) contenuto in $N(p)$ e sul quale essa risulta coniugata allo shift $(\mathbb{Y}_2^{\mathbb{N}}, \mathcal{S})$

Dimostrazione (vedi [Devaney])

Sia ad esempio $\partial f(p) > 1$, e sia $W \subset N(p)$ un intorno di p tale che $\partial f(x) > \delta > 1$ per ogni $x \in W$. Sia q un punto omoclino per p ; siccome $q \in W^u(p)$ non lede supporlo in W (proseguendo a ritroso nel tempo); e sia $m_0 < \infty$ il tempo di ritorno dell'orbita omoclina, e cioè tale che $f^{m_0}(q) = p$.

L'ipotesi che questa sia non degenerare implica l'esistenza di un minimo positivo anche per $|\partial f^{m_0}(q)|$; sarà allora possibile fissare tutto un intorno $V \ni q$, $V \not\ni p$, $V \subset W \subset N(p) \cap W_{loc}^u(p)$ sul quale $|\partial f^{m_0}(x)| > \varepsilon > 0$. Ne segue che la f^{m_0} trasforma V in $f^{m_0}(V)$ in modo invertibile, ed anzi $f^{m_0}(V)$ è *diffeomorfo* a V , ed in particolare contiene p .

Inoltre siccome p è instabile ed $f^{m_0}(V)$ è contenuto in W sul quale ∂f è maggiore di δ , non lede supporre che, pur essendo V così piccolo che $f^{m_0}(V) \cap V = \emptyset$, tuttavia esista $k > 0$ tale che posto $m := m_0 + k$ l'insieme $f^m(V)$ non solo sia contenuto in W e contenga entrambi p e V , ma sia anche tale che $f^{m_0+h}(V) \cap V = \emptyset$ solo per $h < k$; ed inoltre, che per $x \in V$ si abbia $|\partial f^m(x)| > 1$, (a questo scopo basta che sia $\delta^k \varepsilon > 1$). Pertanto anche $f^m(V)$ è diffeomorfo a V , pur contenendolo.



Per riconoscere la presenza dello shift basta controllare l'esistenza in $f^m(V)$, e quindi in W , di un altro intorno (chiuso) $V' \ni p$, disgiunto da V , tale che $f^j(V') \subset W$ per $j = 1, \dots, m$, la cui immagine $f^m(V')$, diffeomorfa a V' , contenga sia V che V' e sia contenuta in W . In tal caso i due insiemi V e V' rivestono per la f^m lo stesso ruolo che I_0 ed I_1 avevano per la f_μ . L'esistenza di un tale V' è assicurata dal fatto che la $\partial f(x) > 1$ in W e quindi la mappa f^m , che su V' ha derivata $|\partial f^m(x)| > \delta^m > 1$, espande ogni intorno di p senza farlo uscire da W . ■

Corollario 5.1.1 L'essere coniugato allo shift implica l'esistenza di infiniti punti periodici in ogni intorno per quanto piccolo del punto fisso omoclino, i quali naturalmente avranno orbite "vicine" alla omoclina.

Si vedrà che, in dimensione maggiore di uno, questo tipo di comportamento è il principale responsabile della generazione di caos.

Risulta in effetti anche interessante lo studio dei sistemi in cui le caratteristiche di maggiore o minore "mescolamento" vengono studiate *in media* a seconda della densità di probabilità legata all'evoluzione del sistema. Questo tipo di descrizione risulta imposto dalla stessa complessità del sistema non appena questi comincia ad evolvere dallo stato di riferimento. Essa permette di studiare la dinamica al di là della semplice visione puntuale deterministica (geometrica), e ciononostante di mantenere significativo il concetto di evolutore nello spazio delle fasi. In altre parole, dato il fatto che un sistema si comporta come il lancio di un dado, ci si chiede anche se questo sia, o meno, truccato, e si fa a meno di dare importanza a quei casi che pur essendo possibili sono a tutti gli effetti assai improbabili (ovvero il cui effetto cessa presto di avere rilevanza).

Tale studio è però al di là della presente esposizione; qui invece si vogliono ricordare alcuni dei concetti principali legati ai sistemi dinamici topologici la cui evoluzione avviene su insiemi compatti.

Sia $(\mathbb{X}, d)$ uno spazio metrico compatto, sia $\mathbb{H}_0$ lo spazio degli omeomorfismi (= corrispondenze biunivoche e bicontinue) da $(\mathbb{X}, d)$ in sé, e sia $\mathcal{H}$ un elemento di $\mathbb{H}_0$.

$\mathcal{H}$ minimale := per ogni $x \in \mathbb{X}$ l'orbita $\gamma(x) := \{\mathcal{H}^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è densa in $\mathbb{X}$.

Equivalentemente := non esistono sottoinsiemi $E \subset \mathbb{X}$ chiusi ed $\mathcal{H}$ -invarianti che non siano $\mathbb{X}$ o $\emptyset$. [$E \subset \mathbb{X}$ deve contenere la chiusura di una qualunque orbita nata dentro di sé, e questa chiusura è, per ipotesi, $\mathbb{X}$].

Equivalentemente := ogni aperto non vuoto $U \subset \mathbb{X}$ è tale che $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^n(U) = \mathbb{X}$. [Per il punto precedente, il complementare dell'unione è un chiuso invariante e non può essere $\mathbb{X}$].

[Quest'ultima proprietà, infine, implica la definizione di minimalità perché impone che ciascun arbitrario $x \in \mathbb{X}$ appartiene necessariamente a $\mathcal{H}^k U$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, e quindi che $\mathcal{H}^{-k}(x) \in U$. Siccome U è arbitrario, ciò significa che x ha orbita densa].

È evidente che se $\mathcal{H}$ ammette sia punti periodici (o fissi), sia punti con orbite dense in $\mathbb{X}$, allora $\mathcal{H}$ non è minimale né è possibile decomporlo in più trasformazioni che siano minimali anche se solo su opportuni sottoinsiemi di $\mathbb{X}$.

È anche evidente che un omeomorfismo $\mathcal{H}$ che sia minimale non ammette né traiettorie periodiche né integrali primi, e cioè funzioni invarianti non costanti (ma per questo è già sufficiente che esista anche solo un'orbita densa).

Estendendo il concetto di insieme ω -limite, con una trasformazione $\mathcal{F} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ che sia (solo) continua si definiscono

Punto non erratico, o “nonwandering”, per la $\mathcal{F} :=$ un punto x per il quale, dato comunque un aperto U contenente x , esiste $n \geq 1$ tale che $\mathcal{F}^{-n}(U) \cap U \neq \emptyset$.

Non è necessario che $\mathcal{F}^{-n}(U) \cap U$ contenga x stesso; se ciò accade il punto si dirà

Punto ricorrente per la $\mathcal{F}$:= un punto x per il quale esiste una successione $n_j \nearrow \infty$ tale che $\mathcal{F}^{n_j}(x) \rightarrow x$; ed è evidente che $x \in \Omega(\mathcal{F})$, ove:

Insieme non erratico := l'insieme $\Omega(\mathcal{F})$ dei punti non erratici per la $\mathcal{F}$.

L'insieme $\Omega(\mathcal{F})$ è fatto di punti o ricorrenti o dotati di una certa ricorrenza; in effetti il numero n della definizione è arbitrariamente grande.

Inoltre si ha che $\Omega(\mathcal{F})$ è chiuso e non vuoto, in quanto contiene tutti gli insiemi ω -limite di $\mathbb{X}$ (che si sta supponendo compatto), e quindi tutti gli insiemi periodici; inoltre risulta $\mathcal{F}(\Omega) \subseteq \Omega$. [Un'orbita densa, o un'orbita periodica, è composta da punti ricorrenti e quindi non erratici. Per un punto ricorrente le immagini si “sovrappongono” su se stesse. Punti omoclini per un qualche insieme invariante I sono non erratici ma non ricorrenti. In qualche senso l'insieme non erratico rappresenta il sistema a tempi lunghi, mentre il suo complementare ne descrive il transiente].

Per la mappa quadratica con $\mu > 2 + \sqrt{5}$ si ha che $\Omega(f_\mu) \cap [0, 1] = \mathcal{A}$.

N.B. 5.1.11 Se $\mathcal{F}$ conserva la misura di Borel (e cioè la “lunghezza”, che è positiva sugli aperti non vuoti), allora $\Omega \equiv \mathbb{X}$ perché altrimenti potrebbe esistere in $\mathbb{X} \setminus \Omega$ una famiglia numerabile di aperti disgiunti $\{\mathcal{F}^{-n}(U)\}_{n=0,1,\dots}$ e questo contrasta con la finitezza della misura di $\mathbb{X}$. $\diamond$

N.B. 5.1.12 Se $\mathcal{H}$ è (un omeo) minimale, (o se esiste $E \subset \mathbb{X}$ chiuso invariante e tale che $\mathcal{H}|_E$ è minimale), allora $\Omega(\mathcal{H}) = \mathbb{X}$ (o $E = \Omega$). In caso contrario infatti $\mathbb{X}$, (o E), potrebbe contenere punti $x \in U$ tali da ammettere una famiglia numerabile di intorno aperti disgiunti $\{\mathcal{H}^{-n}(U)\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Pertanto $\mathbb{X}$, (o E) sarebbero ricoperti da una famiglia non finita di aperti disgiunti, e ciò contrasta con la compattezza di $\mathbb{X}$. $\diamond$

Dalle due precedenti note si capisce come la proprietà di minimalità sia una proprietà assai forte per una generica mappa continua. Ad esempio, lo shift su $\mathbb{Y}^{\mathbb{N}}$ è minimale se e solo se $N = 0$ (vedi: [Walters]), infatti non deve ammettere punti periodici.

Più debole è la seguente proprietà di *Transitività topologica*, enunciata assumendo ancora che $(\mathbb{X}, d)$ sia uno spazio metrico compatto e $\mathcal{H} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ un omeomorfismo. [Se $\mathcal{H}$ non fosse invertibile si potrebbe introdurre il concetto di transitività topologica unilaterale]. Si premetta innanzi tutto la seguente definizione:

Insieme E affatto denso in $\mathbb{X}$:= un sottoinsieme $E \subset \mathbb{X}$ la cui chiusura non contiene alcun aperto; essa cioè non contiene punti interni: in ogni sfera di $\mathbb{X}$ si trovano punti di $\mathbb{X} \setminus E$. Esempi: sono affatto densi gli interi come sottoinsieme dei reali; lo è l'insieme ternario di Cantor in $[0, 1]$; l'insieme $\mathcal{A}$ della mappa f_μ per $\mu > 4$; il complementare di un insieme denso e aperto è (la chiusura di un insieme) affatto denso.

$\mathcal{H}$ è topologicamente transitivo := quando per qualche $x \in \mathbb{X}$ l'orbita $\{\mathcal{H}^n x, n \in \mathbb{Z}\}$ è densa in $\mathbb{X}$.

Equivalentemente := quando gli unici sottoinsiemi $E \subset \mathbb{X}$ chiusi e $\mathcal{H}$ -invarianti sono $\mathbb{X}$ o sono *affatto densi* in $\mathbb{X}$. [L'insieme E , se non contiene qualche punto dell'orbita densa, e quindi alcun punto di essa, non può contenere aperti].

Equivalentemente := quando ogni aperto non vuoto $U \subset \mathbb{X}$, se non è tale che $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^n U = \mathbb{X}$, è almeno tale che $\mathbb{X} \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^n U$ è affatto denso. [Per il punto precedente, il complementare dell'unione è un chiuso invariante affatto denso].

[Quest'ultima proprietà, d'altra parte, implica la definizione di transitività topologica perché un $x \in \mathbb{X}$ che non sia nell'insieme affatto denso appartiene necessariamente a $\mathcal{H}^k U$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, e quindi, poiché U è arbitrario, ciò significa che x ha un'orbita densa].

Equivalentemente := quando dati comunque due insiemi $U, V \subset \mathbb{X}$ non vuoti, aperti, esiste $n \in \mathbb{Z}$ per il quale $\mathcal{H}^n U \cap V \neq \emptyset$.

Si osservi che la transitività topologica, contrariamente alla minimalità, permette l'esistenza di orbite periodiche; essa tuttavia *non permette che $\mathbb{X}$ sia decomponibile in sottoinsiemi invarianti che siano aperti non vuoti*.

Si può inoltre mostrare che queste proprietà implicano anche la densità dello stesso insieme dei punti con traiettorie dense.

Sia $\mathbb{X}$ compatto metrizzabile, e si denoti ancora con $\mathbb{H}_0$ lo spazio degli omeomorfismi su $\mathbb{X}$. Sussistono le seguenti proposizioni (vedi ancora: [Walters § 5.5]), ove con “*ergodico*” si intende un omeomorfismo $\mathcal{H} \in \mathbb{H}_0$ che conserva la misura ed è tale che ogni aperto invariante ha misura banale.

Proposizione 5.1.1 *Se $\mathcal{H} \in \mathbb{H}_0$ è ergodico rispetto ad una certa misura finita su $\mathbb{X}$ che sia positiva sugli aperti non vuoti, allora $\mathcal{H}$ è topologicamente transitivo e quasi tutti i punti di $\mathbb{X}$ hanno traiettorie dense.*

Dimostrazione (Walters Teor. 5.15) Sia $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base numerabile per la topologia su $\mathbb{X}$. Una traiettoria $\gamma(x)$ è densa se ha intersezione non vuota con ciascuno degli U_n , pertanto si ha che

$$D := \{x \in \mathbb{X} \mid [\gamma(x)] = \mathbb{X}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^k U_n.$$

Ma l'ergodicità di $\mathcal{H}$ implica che per ciascun n l'aperto $\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^k U_n$ è $\mathcal{H}$ -invariante ed ha misura 0 oppure 1; e, d'altra parte, $m(U_n) \neq 0$ poiché $U_n \neq \emptyset$. Pertanto $m(D) = 1$. ■

Proposizione 5.1.2 *Se $\mathcal{H} \in \mathbb{H}_0$ è topologicamente transitivo e se esiste una metrica d su $\mathbb{X}$ che sia conservata da $\mathcal{H}$ allora $\mathcal{H}$ è minimale.*

Dimostrazione (Walters Teor. 5.13) Per ipotesi si ha che $d(\mathcal{H}x, \mathcal{H}y) = d(x, y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{X}$, ed esiste x_0 tale che l'orbita $\gamma(x_0)$ per x_0 è densa in $\mathbb{X}$. Si vuole dimostrare che è anche $[\gamma(x)] = \mathbb{X}$. Dato $\varepsilon > 0$ esistono $m, n \in \mathbb{Z}$ tali che $d(x, \mathcal{H}^m(x_0)) < \varepsilon$ ed $d(y, \mathcal{H}^n(x_0)) < \varepsilon$. Ne segue che

$$\begin{aligned} d(y, \mathcal{H}^{n-m}(x)) &\leq d(y, \mathcal{H}^n(x_0)) + d(\mathcal{H}^n(x_0), \mathcal{H}^{n-m}(x)) \\ &\leq d(x, \mathcal{H}^n(x_0)) + d(\mathcal{H}^m(x_0), x) < 2\varepsilon \end{aligned}$$

e ciò implica la tesi. ■

Sono topologicamente transitivi, ad esempio, lo shift su $\mathbb{Y}^{\mathbb{N}}$ e gli automorfismi $\mathcal{A} : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ del toro (vedi: Esempio 4, ed anche [Walters] e [Devaney]), che siano ergodici (in misura di Haar); gli endomorfismi lo sono unilateralmente.

La prima delle proposizioni qui sopra tuttavia lascia vedere che un insieme può essere topologicamente transitivo e ciononostante ammettere un insieme addirittura denso di punti periodici.

Esempio 5.1.13 Il gatto di Arnold, (vedi oltre: § 3 Esempio 4) è un automorfismo ergodico di $\mathbb{T}^2$ in sé, infatti $\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante $\text{Det } \mathcal{A} = 1$ ed autovalori $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ e quindi tali che $|\lambda_{1,2}| \neq 1$. Esso pertanto è topologicamente transitivo; inoltre è iperbolico ed invertibile con inversa iperbolica. D'altra parte, come si è visto, ha un insieme denso di punti periodici, e quindi non è minimale. □

Esempio 5.1.14 La rotazione del toro $\mathcal{F}(\theta) = \theta + \varphi$, $\theta \in \mathbb{T}^1$, è topologicamente transitiva, (ed anche minimale), se $\varphi = 2\pi\nu$, con $\nu \notin \mathbb{Q}$. □

La seguente discussione estende la (EI) e segue strettamente la teoria svolta su [Walters] al quale si rimanda per i debiti dettagli.

Generatore $\mathcal{G}$ per $\mathcal{H} \in \mathbb{H}_0$:= un ricoprimento finito $\{A_1, \dots, A_m\}$ di $\mathbb{X}$, fatto con insiemi aperti $\{A_i\}_{i=1,2,\dots}$, e tale che per ogni successione $\{A_{k_n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $A_{k_n} \in \mathcal{G}$ si abbia che l'insieme $\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{-n}[A_{k_n}]$ contiene al più un punto di $\mathbb{X}$. (ove $[\cdot]$ indica la chiusura).

N.B. 5.1.15 È evidente che se $\mathcal{H}$ ammette un generatore ammette anche un generatore “debole”, e cioè un ricoprimento (aperto) finito $\{O_1, \dots, O_m\}$ di $\mathbb{X}$ tale che $\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{-n}O_{k_n}$ contiene al più un punto di $\mathbb{X}$.

Inoltre si può mostrare che vale anche il viceversa: se esiste un generatore debole, il ricoprimento $\{O_1, \dots, O_m\}$ è finito, e quindi è anche finito il suo numero di Lebesgue $= \nu$; basta allora scegliere $\text{diam}[A_k] < \nu$ e sfruttare la compattezza di $\mathbb{X}$ per concludere che esiste un ricoprimento $\{A_k\}_{k=1,\dots,m_1}$ che è un generatore per $\mathcal{H}$.

Si ricordi la definizione di

numero di Lebesgue per un ricoprimento $\{O_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ di $\mathbb{X}$:= un numero positivo ν tale che ogni insieme $V \subset \mathbb{X}$ con $\text{diam } V \leq \nu$ appartiene propriamente a qualche O_k . Tale numero esiste finito se lo spazio è compatto metrizzabile (vedi: [Walters]). ◇

Un generatore è un ricoprimento dello spazio la cui dinamica separa i punti dello spazio stesso; ad esempio un generatore per la dinamica della f_μ su $\mathcal{A}$ può essere l'insieme $\{\bar{I}_0, \bar{I}_1\}$, con $\bar{I}_0$ ed $\bar{I}_1$ aperti disgiunti, contenenti rispettivamente I_0 ed I_1 , e non contenenti $c = 1/2$. (Si intende che l'intersezione nella definizione di generatore è solo per $n \geq 0$ dato che f_μ non è un omeo).

Proposizione 5.1.1 *Se $(\mathbb{X}, d)$ è compatto metrico e $\mathcal{H} \in \mathbb{H}_0$ ammette generatore $\mathcal{G}$, allora $\mathcal{G}$ individua la topologia su $(\mathbb{X}, d)$ nel senso che:*

- (i) dato $\varepsilon > 0$ esiste $m > 0$ tale che ogni $A \in \bigvee_{n=-m}^m \mathcal{H}^{-n} \mathcal{G}$ ha $\text{diam } A < \varepsilon$;
- (ii) per ogni $m > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $d(x, y) < \delta$ implica $x, y \in \bigcap_{n=-m}^m \mathcal{H}^{-n} A_{k_n}$ per qualche $(A_{k_{-m}}, \dots, A_{k_{+m}})$, $A_{k_j} \in \mathcal{G}$.
Con $\mathcal{G}_1 \vee \mathcal{G}_2$ si intende la famiglia costituita dalle intersezioni $G_1 \cap G_2$ con $G_1 \in \mathcal{G}_1$ e $G_2 \in \mathcal{G}_2$.

Dimostrazione

- (i) Se non fosse, per ogni j esisterebbero $x_j, y_j, \{A_{k_n(j)} \in \mathcal{G}\}_{n=-j, \dots, j}$ tali che $x_j, y_j \in \bigcap_{n=-j}^j \mathcal{H}^{-n} A_{k_n(j)}$ eppure tali che $d(x_j, y_j) > \varepsilon > 0$. La compattezza dello spazio implica l'esistenza di una sottosuccessione $\{j_k\}_{k=1, 2, \dots}$ tale che $x_{j_k} \rightarrow x, y_{j_k} \rightarrow y$, eppure $x \neq y$; la finitezza del ricoprimento implica che infiniti degli x_{j_k} e degli y_{j_k} sono contenuti in uno stesso A_0 fra gli A_{k_0} , in uno stesso A_1 fra gli A_{k_1} , etc.
Ne segue che i punti di accumulazione x, y appartengono a $\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{-n} [A_n]$ e pertanto devono coincidere.
- (ii) La continuità di $\mathcal{H}$ permette di scegliere δ tale che per un certo fissato m si abbia che la $d(x, y) < \delta$ implica $d(\mathcal{H}^i x, \mathcal{H}^i y) < \nu$ per ogni $i \in [-m, m]$. Se allora si è scelto ν proprio il numero di Lebesgue del ricoprimento $\mathcal{G}$ si ha anche che $\mathcal{H}^{-i} x, \mathcal{H}^{-i} y \in A_{k_i}$ per qualche $A_{k_i} \in \mathcal{G}$. ■

Si può finalmente dare la seguente importante definizione:

$\mathcal{H} \in \mathbb{H}_0$ è **espansivo** := è possibile fissare un $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{X}, x \neq y$, esiste $n \in \mathbb{Z}$ per il quale $d(\mathcal{H}^n x, \mathcal{H}^n y) > \delta$.
In particolare, il morfismo $\mathcal{H}$ mostra dipendenza sensibile dal dato iniziale nell'intorno di un qualunque $x \in \mathbb{X}$. Si noti che, in generale, e cioè se $\mathbb{X}$ è qualsiasi, questa proprietà non è strettamente correlata né alla transitività topologica, né alla minimalità, né all'ampiezza di $\Omega(\mathcal{H})$.

È di grande importanza il seguente:

Teorema 5.1.1 $\mathcal{H} \in \mathbb{H}_0$ è **espansivo** se e solo se $\mathcal{H}$ ha un generatore $\mathcal{G}$.

Dimostrazione

- ($\Rightarrow$) Sia $\mathcal{S}_\delta$ un ricoprimento di $\mathbb{X}$ costituito da sfere di diametro non superiore a δ , ed $x, y \in \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{-n} [A_{k_n}]$ con $A_{k_n} \in \mathcal{S}_\delta$; per costruzione si ha che $d(\mathcal{H}^n x, \mathcal{H}^n y) \leq \delta$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Ma per ipotesi $\mathcal{H}$ è espansivo, per cui $x = y$; ne segue che $\mathcal{R}_\delta \equiv \mathcal{G}$ è un generatore.
Ovvero: un qualunque ricoprimento aperto di $\mathbb{X}$ con sfere di raggio $\delta/2$ è un generatore di $\mathcal{H}$ se questi è espansivo, con costante di espansività δ .
- ($\Leftarrow$) Si supponga che esistano $x, y \in \mathbb{X}, \nu < \infty$ tali che $\forall n \in \mathbb{Z}$ si abbia $d(\mathcal{H}^n x, \mathcal{H}^n y) \leq \nu$. Se, in particolare, ν è un numero di Lebesgue per $\mathcal{G}$ si può anche supporre che $\forall n \exists A_{k_n} \in \mathcal{G}$ con $\mathcal{H}^n x, \mathcal{H}^n y \in A_{k_n}$; e cioè che $x, y \in \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{-n} A_{k_n}$. Ma per ipotesi $\mathcal{G}$ è un generatore e quindi $x = y$; ciò implica che $\mathcal{H}$ sia espansivo. ■

N.B. 5.1.16 Malgrado cambi il valore della costante δ , una eventuale variazione della metrica su $\mathbb{X}$ che però conservi la topologia non cambia le proprietà di espansività; esse risultano inoltre conservate dagli omeomorfismi. La definizione di generatore infatti è esclusivamente topologica. ◇

In particolare:

Proposizione 5.1.1 $\mathcal{H} \in \mathbb{H}_0$ espansivo su $\mathbb{X}$ compatto implica che un qualunque ricoprimento finito $\widetilde{\mathcal{G}}$ di $\mathbb{X}$ con insiemi aventi diametri $d \leq \delta$ è tale che $\text{diam} \bigvee_{j=-m}^m \mathcal{H}^{-j} \widetilde{\mathcal{G}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$.

N.B. 5.1.17 $\mathcal{H} \in \mathbb{H}_0$ espansivo implica che esiste $N \in \mathbb{N}$ ed un sottoinsieme chiuso $\Omega \subset \mathbb{Y}^{\mathbb{N}}$ tale che, detto $\mathcal{S}$ lo shift su $\mathbb{Y}^{\mathbb{N}}$, si ha che

- $\mathcal{S}\Omega = \Omega$;
- esiste $\mathcal{F} : \Omega \xrightarrow{\text{onto}} \mathbb{X}$, continua e tale che $\mathcal{F}\mathcal{S}(\omega) = \mathcal{H}\mathcal{F}(\omega)$ per ogni $\omega \in \Omega$.

◇

N.B. 5.1.18 $\mathcal{H} \in \mathbb{H}_0$ espansivo implica che, detta ξ una partizione finita di $\mathbb{X}$ in Boreliani $\{B_i\}$ con $|B_i| \leq \delta$, si ha

$$\bigvee_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{-n} \alpha(\xi) = \beta(\mathbb{X})$$

ove α è l'algebra generata da ξ , e β l'algebra di Borel. ◇

N.B. 5.1.19 Sia $\mathcal{A} \in \mathbb{L}(n, \mathbb{Z}) : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ con $\det \mathcal{A} = \pm 1$. $\mathcal{A}$ è espansivo se e solo se ogni autovalore $\lambda_{\mathcal{A}}$ di $\mathcal{A}$ è tale che $|\lambda_{\mathcal{A}}| \neq 1$. Infatti $\mathcal{A}$ è espansivo se e solo se lo è il corrispondente operatore lineare su $\mathbb{R}^n$. Se un automorfismo $\mathcal{A} : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ ha $\text{spt}(\mathcal{A}) = \{e^{i\nu\pi}\}$ con $\nu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ allora è ergodico ma non espansivo; se però è espansivo certo è ergodico. ◇

La presenza dell'espansività fa sì che ogni tentativo di risoluzione numerica del problema sia sicuramente destinata ad un incerto risultato, almeno per quanto riguarda i tempi "lungi".

Esempio 5.1.20 La mappa quadratica è espansiva su $I_0 \cup I_1$ se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, ed infatti una qualunque coppia di punti $x \neq y$ ha traiettorie che, prima o poi, si trovano da bande opposte rispetto ad A_0 . (Qui $\delta = \text{diam } A_0$). □

Esempio 5.1.21 Non è espansiva, invece, la rotazione irrazionale del toro $\mathbb{T}^1$, pur essendo topologicamente transitiva. $\square$

Esempio 5.1.22 Lo shift su $\mathbb{Y}^{\mathbb{Z}}$ costruito con le successioni doppiamente infinite di simboli in un alfabeto $\mathbb{Y}$ di cardinalità finita, è espansivo.

Infatti

$$\mathbb{X} = \bigcup_{\sigma_0 \in \mathbb{Y}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_0 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad g := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_0 \end{pmatrix} \mid \sigma_0 \in \mathbb{Y} \right\}$$

è un generatore per lo shift $\mathcal{S}$, giacché se $x \in \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{S}^{-n} \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix}$ allora x corrisponde ad uno ed un solo $\sigma \in \mathbb{Y}^{\mathbb{Z}}$. Alternativamente si ha che, se $\sigma \neq \sigma'$, allora esiste un primo $n^* : \sigma_{n^*} \neq \sigma'_{n^*}$ e quindi

$$d(\mathcal{S}^{n^*} \sigma, \mathcal{S}^{n^*} \sigma') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{N^{|n|}} |\sigma_{n+n^*} - \sigma'_{n+n^*}| \geq |\sigma_{n^*} - \sigma'_{n^*}| \geq 1.$$

Definendo in modo ovvio la *positiva espansività* con solo indici temporali positivi, si ha anche che lo shift positivo sulle successioni unilateralmente infinite è positivamente invariante. $\square$

5.2 Cenni di teoria delle biforcazioni

Il concetto di coniugazione topologica che, in sintesi, è la proprietà di avere una “stessa” dinamica, è di interesse quando si vuole studiare il modo in cui i sistemi si modificano (e cioè modificano il loro comportamento cinetico e/o geometrico) al variare del campo. Se ne è già vista un’applicazione nel caso dei sistemi linearizzati in relazione a quelli non lineari.

Un’altra applicazione la si incontra quando si studia l’effetto prodotto sulla dinamica dal variare di qualche parametro di controllo presente nel campo. Nel precedente paragrafo si è fatto variare il parametro μ della mappa quadratica e si è constatato che il sistema muta in modo drastico il suo comportamento: da strettamente deterministico arriva ad essere coniugato e quindi ad esibire la stessa dinamica di un gioco ripetuto di testa e croce.

Va tenuto presente che modificare i valori dei parametri presenti nel campo non è certo l’unico modo di farlo variare. È molto più generale, dato un certo campo e fissato un qualche spazio funzionale, considerare come suoi “variati” tutti i campi di un conveniente intorno di quello dato e contenuto nello spazio scelto, *senza assumere apriori che essi siano descritti da una stessa espressione algebrica* che ne caratterizza la dipendenza dai parametri e dalle variabili del sistema. Tale modo più ampio di far variare un campo è quello che si permette quando si voglia studiare la *stabilità strutturale di un sistema*, e cioè (vedi: [§ IV. 1]) la proprietà che si attribuisce ad un sistema quando si constata che esso risulta topologicamente equivalente (o coniugato) *a tutti i sistemi che hanno campi in convenienti intorni di quello dato*.

Si ricordi brevemente la seguente definizione generale:

Un C^r -campo v su una varietà $\mathbb{M}$ si dice *strutturalmente stabile* (per un qualche $0 \leq k \leq r$) se esiste un intorno $\mathcal{N}(v)$ nella topologia C^k , e cioè quella generata dalla norma $\|v\| := \sup_x \{|v| + |v_*| + \dots + |v_{k*}|\}$, tale che ogni $v' \in \mathcal{N}(v) \cap C^r(\mathbb{M})$ risulti

C^0 -coniugato a v ; esista cioè $\mathcal{F} \in \text{Homeo}(\mathbb{M})$ tale che $\mathcal{F}(\phi(t, x)) = \phi'(t, \mathcal{F}(x))$

o anche, più debolmente, risulti

C^0 -equivalente a v ; esistano cioè $\mathcal{F} \in \text{Homeo}(\mathbb{M})$ e $\tau = \tau(t, x)$ monotona crescente per ogni x , tali che $\mathcal{F}(\phi(t, x)) = \phi'(\tau(t, x), \mathcal{F}(x))$.

Esempio 5.2.1 (Grobman-Hartman, vedi: § IV.1 iv, e [Hartman XI 7.1])

Se l’equazione non lineare $\dot{x} = v(x)$ ha un equilibrio x_e iperbolico, essa ha equazione alle variazioni $\dot{u} = v(x_e + u) = v_*(x_e)u + h(u)$ che è localmente C^0 -coniugata all’equazione linearizzata $\dot{u} = v_*(x_e)u$. $\square$

Esempio 5.2.2 La mappa $f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \frac{1}{2}x \in \mathbb{R}$ è C^1 -strutturalmente stabile su $[0, 1]$. Notando infatti che

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2} - g'(x) \right| &< \frac{1}{2} \quad \text{se e solo se} \quad g'(x) \in (0, 1) \quad \text{e che} \\ \left| \frac{1}{2}x - g(x) \right| &< \frac{1}{2} \quad \text{se e solo se} \quad \frac{1}{2}(x-1) < g(x) < \frac{1}{2}(x+1), \end{aligned}$$

si riconosce che se $\epsilon < 1/2$ *una qualunque mappa* g che sia in $B_\epsilon(f) \subset C^1$ è monotona crescente, ha un unico punto di equilibrio attrattivo (per il teorema della media), e come tale individua un dominio sul quale genera la stessa dinamica di f . [Per costruire esplicitamente l’omeo della coniugazione ci vuole qualche sforzo in più: occorre infatti trovare esplicitamente un compatto che si trasformi in modo commutativo con la f ; vedi: [Devaney]]. $\square$

Esempio 5.2.3 La mappa quadratica $f_\mu : x \in \mathbb{R} \mapsto f_\mu(x) = \mu x(1-x) \in \mathbb{R}$ è C^2 -strutturalmente stabile, per $\mu > 2 + \sqrt{5}$.

[La logica della dimostrazione è la seguente: prendere ϵ tanto piccolo che l'appartenenza di g alla sfera $B_\epsilon(f_\mu)$ implichi che g ha due punti fissi $\bar{x}_- < \bar{x}_+$ l'uno con $\partial g(\bar{x}_-) > 1$, l'altro con $\partial g(\bar{x}_+) < -1$; un solo punto critico, un solo $\bar{x}' := g^{-1}(\bar{x}_-) \neq \bar{x}_-$; inoltre ammette due punti $a_0, a_1 := g^{-1}(\bar{x}')$ tali che $x \in I_0 \cup I_1 := [\bar{x}, a_0] \cup [a_1, \bar{x}'] \Rightarrow |g'(x)| > 1$. Si ha allora che anche g è topologicamente coniugato con lo shift su $\mathbb{Y}_2^{\mathbb{N}}$]. $\square$

Diversamente dallo studio della stabilità strutturale, l'esame del come varia la risposta del sistema al variare *dei soli valori* dei parametri di struttura in una assegnata legge funzionale è di maggior interesse per quei modelli per i quali la forma del campo è fissata apriori. In tale ambito può accadere che, nello spazio nel quale i parametri assumono valori, esista un qualche specifico punto di transizione, attraversando il quale il comportamento del sistema subisce una radicale modifica e mostra caratteristiche del tutto diverse da quelle esibite in punti seppur vicini ad esso. L'insieme dei valori dei parametri che individuano tale comportamento "discontinuo" si dice rappresentino un *punto di biforcazione*; trovarli e determinare il comportamento del sistema nell'intorno di tali punti è argomento della *teoria delle biforcazioni*.

Esempio 5.2.4 La mappa quadratica $f_\mu : x \in \mathbb{R} \mapsto f_\mu(x) = \mu x(1-x) \in \mathbb{R}$ presenta un'infinità (numerabile) di punti di biforcazione: sono i valori μ_{2^n} nei quali si ha il raddoppio del periodo dell'orbita periodica (vedi anche più avanti). Essa presenta inoltre valori ($\mu = 4$) oltre i quali tutta la sua dinamica si modifica drasticamente e globalmente. $\square$

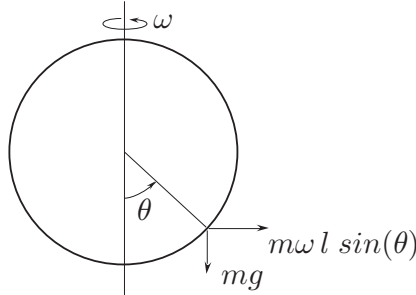
Esempio 5.2.5 Un pendolo uniformemente rotante è descritto dall'equazione

$$m l \ddot{\theta} = -mg \sin \theta + m \omega^2 l \sin \theta \cos \theta ,$$

e cioè dalla

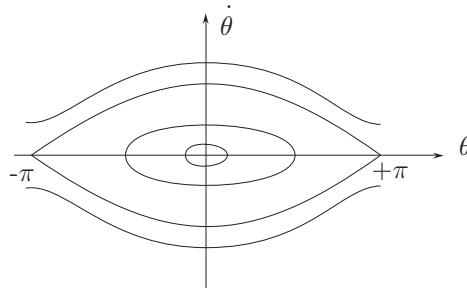
$$\ddot{\theta} = \nu(\theta, \mu) := \frac{g}{l} \sin \theta (\mu \cos \theta - 1), \quad \mu := \frac{\omega^2 l}{g}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad (2.14)$$

che come è ben noto implica $\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{g}{l} \cos \theta (1 - \frac{\mu}{2} \cos \theta) = \text{cost}$.

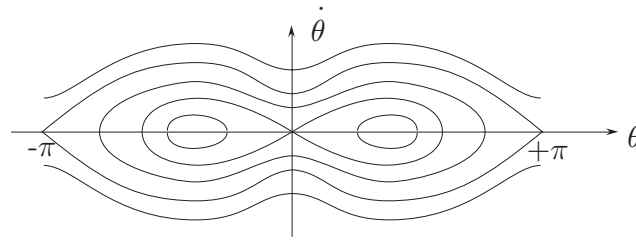


Dallo studio degli zeri del campo, o anche graficamente dallo studio della funzione $\dot{\theta} = \dot{\theta}(\theta)$, si riconoscono le due possibilità:

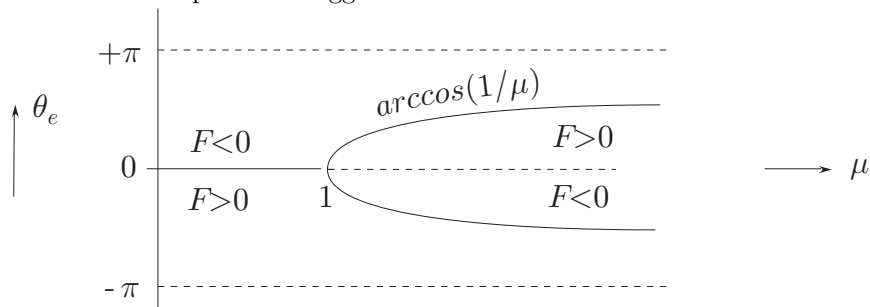
- $0 \leq \mu \leq 1$ che dà: $\begin{cases} \theta_e = 0 & \text{equilibrio stabile,} \\ \theta_e = \pm\pi & \text{equilibri instabili;} \end{cases}$



- $\mu > 1$ che dà: $\begin{cases} \theta_e^\pm := \arccos(1/\mu) & \text{equilibri stabili,} \\ \theta_e = 0, \pm\pi & \text{equilibri instabili.} \end{cases}$



Si può pertanto tracciare il seguente grafico biforcatico nel “piano” $(x_e; \mu)$, nel quale il tratto continuo rappresenta un equilibrio stabile e quello tratteggiato uno instabile:



In esso si riconosce la presenza di un punto di equilibrio: l'origine, che pur rimanendo tale per ogni valore del parametro, modifica la sua stabilità quando il parametro attraversa il particolare valore $\mu = 1$ e la cede ad altri due punti che risultano di equilibrio solo a partire da tale valore del parametro. $\square$

Dagli esempi si vede che biforcazioni possono darsi sia di natura locale, quelle cioè che esaminano il cambio di comportamento del sistema nell'intorno di un suo specifico punto (fisso o periodico), sia di natura globale, quello cioè per le quali è tutta la struttura topologica del diagramma di fase che cambia e ciò non può essere riconosciuto, in generale, da un esame della dinamica “in intorno piccoli” di qualche punto. Questo è quello che accade ad esempio quando si perde o si acquista la trasversalità fra due varietà invarianti, ad esempio W^u e W^s di uno stesso punto di equilibrio, o quando si interrompono delle omocline o delle eterocline, o quando si innescano dei meccanismi di “auto-sovrapposizione” o di sdoppiamenti.

In questo paragrafo ci si occuperà di biforcazioni della prima specie, lasciando al prossimo paragrafo la discussione delle seconde. Inoltre si prenderanno in considerazione solo casi in cui il parametro di controllo μ sia uno scalare reale. Per una trattazione più estesa si rimanda alla bibliografia.

Tuttavia, prima di procedere ulteriormente con la discussione delle principali biforcazioni di un sistema, è opportuno premettere la presentazione di una importante benché particolare famiglia di mappe che trae origine direttamente dai sistemi continui, e che risulta essere uno dei più potenti procedimenti di indagine nel campo dei sistemi non lineari.

Le Mappe di Poincarè

o mappe di primo ritorno, relative ad un sistema $\dot{x} = v(t, x)$, $x \in \mathbb{M}$.

Va subito rimarcato che esse hanno significato quasi esclusivamente per quei sistemi che ammettono una qualche forma di periodicità: di una soluzione vicino alla quale si effettua l'indagine, dei coefficienti dell'equazione che governa il moto, o della dinamica globale del sistema; (insomma è necessario che esista un “primo ritorno”).

Quando si possano definire, le Mappe di Poincarè si riferiscono ad un numero di coordinate minore di quello necessario a descrivere tutto il sistema; inoltre è di grande chiarezza visto che la descrizione della proprietà orbitali si riduce allo studio di mappe discrete. Il loro svantaggio sta nel fatto che è necessario operare delle scelte apriori, per le quali spesso occorre conoscere o ipotizzare qualcosa della soluzione, e dalle quali dipendono i conseguenti risultati e considerazioni.

In sintesi il procedimento si può riassumere nei seguenti passi:

- (i) In base a quanto si conosce del sistema si sceglie un intorno dello spazio delle fasi, o dello spazio delle fasi ampliato, contenente traiettorie dotate di una qualche forma di periodicità, e si fissa un periodo di riferimento T che può essere quello delle soluzioni, o quello dei coefficienti, o quello del sistema globale.
- (ii) Si sceglie una porzione di superficie regolare Σ , di opportuna codimensione (generalmente uguale a uno), che sia trasversa al campo in ogni suo punto, in modo tale che le traiettorie l'attraversino, localmente, in un solo istante.

- (iii) L'insieme dei punti di un certo intorno scelto su questa superficie viene preso come insieme delle condizioni iniziali per altrettante traiettorie, delle quali però non si memorizza tutta l'evoluzione *bensì solo quella relativa al primo istante vicino a T in cui esse ripassano per la superficie*.
- (iv) Si dà il nome di Mappa di Poincaré alla trasformazione che in tal modo resta definita sulla superficie Σ .

Si hanno i seguenti casi fondamentali:

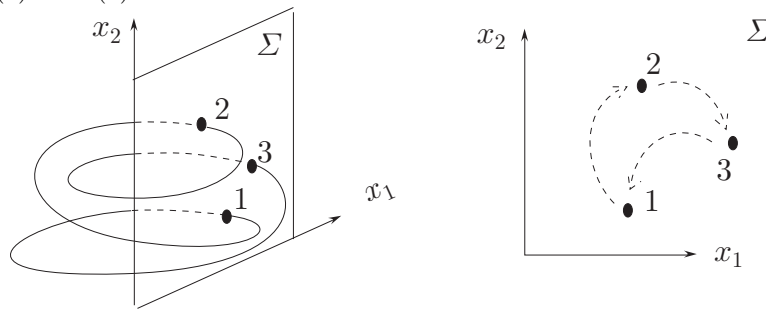
- (A) Il sistema è autonomo ed ammette un'orbita periodica.
- (B) Lo spazio delle fasi è periodico, (ad esempio: vi sono forzanti periodiche).
- (C) Lo spazio delle fasi è quasi-periodico, e si è prescelto un periodo fondamentale.
- (D) Il sistema ammette un'orbita omoclina ad un punto, o un ciclo di eterocline.

Caso A.

Sia data l'equazione $\dot{x} = v(x, t)$, $x_0 \in \mathbb{M}$, con campo regolare; e sia Σ una porzione di superficie $(n-1)$ -dimensionale contenente un punto x^* di un'orbita periodica e tale che $v(x^*)$ non sia tangente a Σ in alcun suo punto. Per il teorema di primo ritorno esiste un aperto $V \in \Sigma$, $V \ni x^*$, tale che le traiettorie delle soluzioni $x = \phi(t, t_0, x_0)$ passanti all'istante $t = \bar{t}$ per un qualsiasi $x \in V$ tornano su Σ dopo un intervallo di tempo $\tau(x) \simeq T := \tau(x^*)$. La mappa di Poincaré è la mappa $\mathcal{P} : V \in \Sigma \rightarrow \Sigma$, data da

$$\mathcal{P} : x \mapsto \mathcal{P}(x) := \phi(\bar{t} + \tau(x), \bar{t}, x).$$

In figura è mostrata una traiettoria “subarmonica” periodica di periodo $3T$, e la mappa $\mathcal{P}$ è tale che $2 = \mathcal{P}(1)$, $3 = \mathcal{P}(2) = \mathcal{P}^2(1)$, $1 = \mathcal{P}(3) = \mathcal{P}^3(1)$



Esempio 5.2.6

$$\begin{cases} \dot{x} = +x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = +x + y - y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad \text{ovvero, su } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

È evidente che il sistema ammetta un ciclo (stabile, vedi la (SH)) in $r^* = 1$, e che $\theta(t) = t - t_0 + \theta_0$. Scelto $t_0 = 0$ e con $\bar{\theta} := \bar{t} + \theta_0$ fissato, una buona sezione trasversa può essere $\Sigma := \{(x, y) \mid x > 0, y = 0\} = \{(r, \theta) \mid r > 0, \theta = \bar{\theta} := 0\}$. Dato poi che $\dot{x} = 2x(1 - x)$ implica $c|1 - 1/x| = e^{-2t}$, la soluzione del sistema è

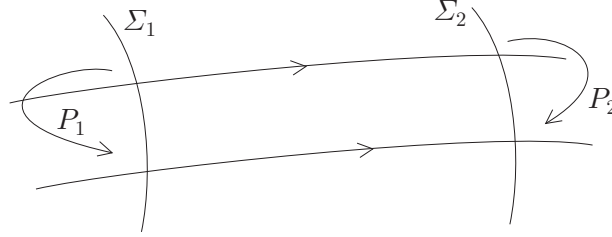
$$\phi(t, 0, r_0, \theta_0) = \left(\left(1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-2t} \right)^{-1/2}; \quad t + \theta_0 \right).$$

D'altra parte, la definizione di Σ implica che il tempo di volo è $\tau(r, \bar{\theta}) = T = 2\pi$ (periodo intrinseco delle coordinate polari: pertanto in questo esempio il tempo di ritorno $\tau(x)$ è indipendente da x_0). In definitiva si conclude che la mappa di Poincaré $\mathcal{P} : V \in \Sigma \rightarrow \Sigma$, è data da

$$\mathcal{P} : r \mapsto \mathcal{P}(r) = \left(1 + \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right)^{-1/2}$$

nella quale si nota in primo luogo la riduzione del numero di coordinate, e poi la proprietà di ammettere punti fissi che sono in corrispondenza biunivoca con le traiettorie periodiche del sistema originario: $r^* = 1$. Si ha in più (vedi oltre) che lo studio della stabilità lineare di tali punti fissi fornisce direttamente la stabilità di tali orbite periodiche. In questo esempio risulta $\partial \mathcal{P}(1) = \frac{d\mathcal{P}}{dr} \Big|_{r=1} = e^{-4\pi} \in (0, 1)$ e questo assicura la stabilità del ciclo $r^* = 1$, cosa che, in questo caso, è facilmente riconoscibile dalla stessa equazione iniziale. $\square$

N.B. 5.2.7 Non è troppo difficile convincersi che se Σ_1, Σ_2 sono due sezioni trasverse al campo, ed $h : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ è il diffeomorfismo generato dal flusso del sistema, allora le immagini P_1, P_2 corrispondenti alle due sezioni sono topologicamente coniugate dal diffeomorfismo h .



◇

Caso B.

Sia data l'equazione $\dot{x} = v(x, t)$, $x_0 \in \mathbb{M}$, con campo v regolare e T -periodico rispetto alla t . Posto $\omega := 2\pi/T$ e $g(x, \theta) := v(x, t(\theta))$, e quindi con $g(x, \cdot) : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{V} \equiv T_x \mathbb{M}$ e $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ definita da $\theta(t) := \omega(t - t_0) + \theta_0 \pmod{2\pi}$ (o, in coordinate: $\theta(t) := (\omega(t - t_0) + \theta_0) \in \mathbb{R}$ e $t(\theta) = t_0 + (\theta - \theta_0)/\omega$) l'equazione equivale, in coordinate, alla

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x, \theta) \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \quad \text{con :} \quad \begin{aligned} & (x_0, \theta_0) \in \mathbb{R}^{n+1} \\ & g(x, \theta + 2\pi) = g(x, \theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e le sue soluzioni sono del tipo $\phi : (t, t_0, x_0, \theta_0) \mapsto \begin{pmatrix} x(t, t_0, x_0, \theta_0) \\ \theta(t, t_0, x_0, \theta_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Nello spazio $\mathbb{M} \times \mathbb{T}$ si definisce

Sezione stroboscopica $\Sigma^{\bar{\theta}}$:= la superficie $\{(x, \theta) \in \mathbb{M} \times \mathbb{T} \mid \theta = \bar{\theta}\}$.

Dato che $\omega \neq 0$, nello spazio delle fasi ampliato $\mathbb{M} \times \mathbb{T}$ essa è senz'altro trasversa al campo, e permette di introdurre la Mappa di Poincaré $\mathcal{P} : \Sigma^{\bar{\theta}} \rightarrow \Sigma^{\bar{\theta}}$ data in coordinate da

$$\mathcal{P} : (x, \bar{\theta}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto (x(\bar{t} + T, \bar{t}, x); \bar{\theta} + 2\pi) \quad \text{con } \bar{t} := t(\bar{\theta}) = t_0 + (\bar{\theta} - \theta_0)/\omega.$$

Osservazione.

Le traiettorie della $\mathcal{P}$ non sono traiettorie del sistema a tempo continuo, anche perché esse sono famiglie solo numerabili di punti. Esse appartengono alle proiezioni sullo spazio $\mathbb{M}$ delle curve integrali di quello, e cioè delle linee definite in $\mathbb{M} \times \mathbb{R}$ come grafico delle funzioni moto. Queste ne contengono i valori (le sezioni) relative agli istanti $\bar{t} + kT$ per $k = 0, 1, 2, \dots$. Se il sistema è autonomo, tali proiezioni costituiscono delle varietà $\mathcal{P}$ -invarianti sulla sezione di Poincaré. In generale, invece, tali proiezioni non è detto siano invarianti ed i loro punti possono evolvere in modo diverso da quelli che vengono proiettati.

Si noti inoltre che la sezione $\Sigma^{\bar{\theta}}$ sulla quale è definita la mappa ha dimensione n , ed infatti $\mathcal{P}(x)$ non dipende dalla variabile “temporale” θ .

Anche questa mappa ha punti fissi che corrispondono ad orbite $(2\pi/\omega)$ -periodiche, ed anche ora due mappe relative a due diverse sezioni $\Sigma^{\bar{\theta}_1}, \Sigma^{\bar{\theta}_2}$ sono C^r -coniugate dal flusso:

$$(x, \bar{\theta}) \xrightarrow{\mathcal{H}} (x(\bar{t}_2, \bar{t}_1, x); \bar{\theta}_2); \quad \text{con } \bar{t}_i := t_0 + (\bar{\theta}_i - \theta_0)/\omega, \quad i = 1, 2.$$

Si noti infine che in questo secondo caso si è “arbitrariamente” attribuito il valore $T = 2\pi/\omega$ al tempo di ritorno $\tau(x)$ di ognuna delle traiettorie. È questa la parte più difficile del procedimento, e che spesso dà luogo a risultati di non immediata interpretazione. □

Esempio 5.2.8 L'equazione $\ddot{x} + \kappa \dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t$, $t, t^0, x^0, \dot{x}^0, \omega, \omega_0 \in \mathbb{R}$;

rappresenta l'oscillatore armonico lineare debolmente smorzato e forzato armonicamente. In questo esempio e nel successivo i dati iniziali verranno indicati con lo zero ad esponente; il deponente, se presente, rimane ad indicare il valore dello smorzamento κ .

Con ω la frequenza della forzante, $\theta^0 := \omega t^0$, e $\omega_\kappa := -\sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2/4}$, l'equazione equivale a

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x - \kappa y + f \cos \theta \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}$$

La soluzione generale (scegliendo $t_0 = 0$) si può scrivere come segue

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \psi) \\ -\omega \sin(\omega t + \psi) \end{pmatrix} + c e^{-\kappa t/2} \begin{pmatrix} \cos(\omega_\kappa t + \varphi) \\ -\omega_\kappa \sin(\omega_\kappa t + \varphi) - \frac{\kappa}{2} \cos(\omega_\kappa t + \varphi) \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

con:

$$r \begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^x \\ a^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)f}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\kappa\omega)^2} \\ \frac{\kappa f \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\kappa\omega)^2} \end{pmatrix}$$

$$c \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^x \\ c^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 - a^x \\ \frac{1}{\omega_\kappa} \left(\frac{\kappa}{2} (x_0 - a^x) + (y_0 - \omega a^y) \right) \end{pmatrix}$$

e con

$$r := \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\kappa\omega)^2}}; \quad c := \frac{x_0 - a_1}{\omega_\kappa} \sqrt{\omega_0^2 + \left[\frac{y_0 - \omega a_2}{x_0 - a_1} \right]^2 + \kappa \frac{y_0 - \omega a_2}{x_0 - a_1}}; \quad (2.16)$$

$$\psi := \arctan \frac{\kappa\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}; \quad \varphi := \arctan \frac{1}{\omega_\kappa} \left[\frac{\kappa}{2} + \frac{y_0 - \omega a_2}{x_0 - a_1} \right].$$

Infatti, il secondo addendo della (2.15) esprime la ben nota soluzione dell'equazione omogenea associata; e una funzione della forma $r \cos(\omega t - \psi)$ è certo soluzione particolare purché le costanti siano scelte in modo opportuno. Per farlo, e cioè per trovare il valore del vettore $\mathbf{a}$, si è fatto uso del metodo delle ampiezze complesse. Esso consiste (vedi anche § VI.1 Nota 4) nello sfruttare il fatto che i coefficienti dell'equazione sono reali e l'equazione lineare, e quindi la sua dinamica rimane reale. Considerata allora la data equazione $eq(x)$ come $\Re(eq(z))$, a causa della forzante armonica ωt si è cercata una soluzione particolare sotto la forma $a \exp(i\omega t)$, con $a = a^x - ia^y$, e quindi con $(a^x - ia^y)(\cos \omega t + i \sin \omega t) = a^x \cos \omega t + a^y \sin \omega t$. Si è trovata la condizione

$$a[(\omega_0^2 - \omega^2) + i\kappa\omega] = f \quad \text{ovvero} \quad a = f \frac{((\omega_0^2 - \omega^2) - i\kappa\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \kappa^2\omega^2}$$

È quindi agevole riscrivere la soluzione generale nell'ulteriore forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{1}{\omega} \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^x \\ \omega a^y \end{pmatrix} + e^{-\kappa t/2} \begin{pmatrix} \cos \omega_\kappa t + \frac{\kappa}{2\omega_\kappa} \sin \omega_\kappa t & \frac{1}{\omega_\kappa} \sin \omega_\kappa t \\ -\frac{\omega_0^2}{\omega_\kappa} \sin \omega_\kappa t & \cos \omega_\kappa t - \frac{\kappa}{2\omega_\kappa} \sin \omega_\kappa t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^x \\ \omega_\kappa c^y - \frac{\kappa}{2} c^x \end{pmatrix}$$

che mostra la relazione $\begin{pmatrix} c^x \\ \omega_\kappa c^y - \kappa c^x/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 - a^x \\ y_0 - \omega a^y \end{pmatrix}$.

Alternativamente, l'equazione può essere scritta fin dall'inizio in forma vettoriale (vedi: Esempio II 2.7)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \cos \omega t \end{pmatrix} =: \mathbf{A}_\kappa \mathbf{x} + \mathbf{b}(t).$$

Di questa, detto $\mu = -\kappa/2 - i\omega_\kappa \equiv \alpha + i\beta$ uno dei due autovalori complessi di $\mathbf{A}_\kappa$, ed ϵ_μ il corrispondente autovettore, la teoria generale fornisce la soluzione uscente dal dato $\mathbf{x}^0 := (x^0, y^0) \in \mathbb{R}^2$ mediante l'espressione

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{om}(t) + \mathbf{x}_p(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0.$$

Da un lato la soluzione dell'equazione omogenea associata uscente dalle condizioni iniziali: $\mathbf{x}_{om}(0) =: \tilde{\mathbf{P}}_\kappa \mathbf{c}$ con $\mathbf{c} = (c^x, c^y)^T \in \mathbb{R}^2$ e con $\tilde{\mathbf{P}}_\kappa$ la matrice che trasforma i vettori della base $\{e_1, e_2\}$ nei due vettori $\Re$ ed $\Im$ di ϵ_μ , si calcola anche ora in base alla teoria generale mediante la:

$$\mathbf{x}_{om}(t) = \Psi_\kappa(t, 0) \mathbf{x}_{om}(0) = e^{-\kappa t/2} \tilde{\mathbf{P}}_\kappa \tilde{\mathbf{C}}_\kappa(t) \tilde{\mathbf{P}}_\kappa^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_\kappa \mathbf{c},$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\kappa}{2} & \omega_\kappa \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}}_\kappa(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega_\kappa t & \sin \omega_\kappa t \\ -\sin \omega_\kappa t & \cos \omega_\kappa t \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{P}}_\kappa^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\kappa}{2\omega_\kappa} & \frac{1}{\omega_\kappa} \end{pmatrix}.$$

Dall'altro si tenta di esprimere la soluzione (particolare) uscente dalle condizioni iniziali: $\mathbf{x}_p(0) =: \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{a}$ con $\mathbf{a} = (a^x, a^y)^T$ mediante l'analoga, sebbene particolare, espressione:

$$\mathbf{x}_p(t) = \Psi(t, 0) \mathbf{x}_p(0) = \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{C}}(t) \tilde{\mathbf{P}}^{-1} \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{a}, \quad \text{con}$$

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}}(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{P}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\omega \end{pmatrix}.$$

Affinché $\mathbf{x}_p(t)$ rappresenti effettivamente una soluzione, occorre che sia vera la

$$\left(\tilde{\mathbf{P}} \dot{\tilde{\mathbf{C}}}(t) - \mathbf{A}_\kappa \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{C}}(t) \right) \mathbf{a} = \mathbf{b}(t)$$

e l'invertibilità della matrice a primo membro permette il calcolo di $\mathbf{a}$. La condizione infatti è verificata purché $\mathbf{a}$ sia tale che

$$[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t - \kappa \omega \sin \omega t] a^x + [(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \omega t + \kappa \omega \cos \omega t] a^y = f \cos \omega t$$

e questa fornisce le prime due relazioni della (CO). Infine, la condizione

$$\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_{om}(0) + \mathbf{x}_p(0) = \tilde{\mathbf{P}}_\kappa \mathbf{c} + \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{a}$$

fornisce:

$$(\mathbf{x}^0 - \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{a}) = \begin{pmatrix} x^0 - a^x \\ y^0 - \omega a^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\kappa/2 & \omega_\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^x \\ c^y \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{P}}_\kappa \mathbf{c},$$

ovvero le seconde della (CO).

Delle due notazioni usate, quest'ultima è particolarmente significativa: infatti l'espressione

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Psi(t, 0) \mathbf{x}_p(0) + \Psi_\kappa(t, 0) \mathbf{x}_{om}(0) \\ &= \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{C}}(t) \mathbf{a} + e^{-\kappa t/2} \tilde{\mathbf{P}}_\kappa \tilde{\mathbf{C}}_\kappa(t) \tilde{\mathbf{P}}_\kappa^{-1} (\mathbf{x}^0 - \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{a}), \end{aligned}$$

da leggersi come una espressione del tipo $\overrightarrow{\text{OP}}(t) = \overrightarrow{\text{OQ}}(t) + \overrightarrow{\text{QP}}(t)$, permette di costruire agevolmente la famiglia ad un parametro di trasformazioni: $\mathbf{x}^0 \mapsto \mathbf{x}(t)$. Data la particolare forzante, si scelgono $\bar{\theta} = \bar{t} = 0$ e $T = 2\pi/\omega$, e si ricava la mappa di Poincaré $P: \Sigma^0 \rightarrow \Sigma^0$ che sulle coordinate assegna la

$$\mathbf{x}^0 \mapsto \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{a} + e^{-\kappa\pi/\omega} \mathbf{M}_\kappa (\mathbf{x}^0 - \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{a}) \quad \text{con} \quad \mathbf{M}_\kappa := \tilde{\mathbf{P}}_\kappa \tilde{\mathbf{C}}_\kappa(2\pi/\omega) \tilde{\mathbf{P}}_\kappa^{-1}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(2\pi/\omega, 0, x^0, y^0) \\ y(2\pi/\omega, 0, x^0, y^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^x \\ \omega a^y \end{pmatrix} + e^{-\kappa\pi/\omega} \mathbf{M}_\kappa \begin{pmatrix} x^0 - a^x \\ y^0 - \omega a^y \end{pmatrix},$$

con

$$\mathbf{M}_\kappa := \begin{pmatrix} \cos 2\pi \frac{\omega_\kappa}{\omega} + \frac{\kappa}{2\omega_\kappa} \sin 2\pi \frac{\omega_\kappa}{\omega} & \frac{1}{\omega_\kappa} \sin 2\pi \frac{\omega_\kappa}{\omega} \\ -\frac{\omega_0^2}{\omega_\kappa} \sin 2\pi \frac{\omega_\kappa}{\omega} & \cos 2\pi \frac{\omega_\kappa}{\omega} - \frac{\kappa}{2\omega_\kappa} \sin 2\pi \frac{\omega_\kappa}{\omega} \end{pmatrix}.$$

Dunque la mappa P è una mappa affine, con un solo punto fisso $\mathbf{x}^0 = \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{a} = (a^x, \omega a^y)^T$, attrattivo giacché $\kappa > 0$ e la mappa (e la sua derivata) ha autovalori $\mu_{1,2} = \exp(-\kappa\pi/\omega \mp i2\pi\omega_\kappa/\omega)$; pertanto tale punto è un fuoco (stabile). $\square$

Esempio 5.2.9 In particolare, per l'equazione dell'oscillatore armonico non smorzato: $\kappa = 0$ e non risonante: $\omega_0 \neq \omega$, si ottengono: $\omega_\kappa = \omega_0$, $a^y = 0$, e quindi

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x + f \cos \theta \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \cos \omega t \end{pmatrix}$$

la cui soluzione per $t^0 = 0$ è

$$x : t \mapsto x(t) = (c_0^x \cos \omega_0 t + c_0^y \sin \omega_0 t) + a_0^x \cos \omega t, \quad \text{ove}$$

$$a_0^x := (\omega_0^2 - \omega^2)^{-1} f, \quad c_0^x := x^0 - a_0^x, \quad \omega_0 c_0^y := y^0,$$

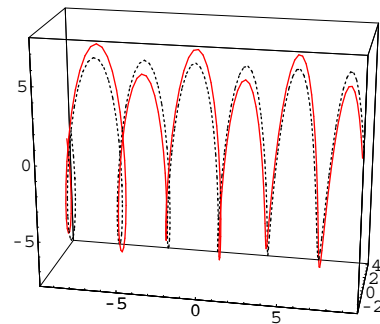
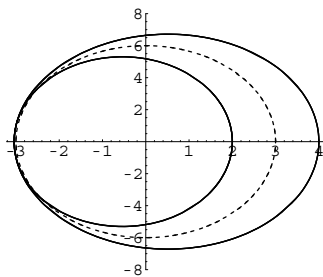
ovvero la

$$\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{C}}(t) \mathbf{a}_0 + \tilde{\mathbf{P}}_0 \tilde{\mathbf{C}}_0(t) \tilde{\mathbf{P}}_0^{-1} (\mathbf{x}^0 - \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{a}_0) \quad \text{con:}$$

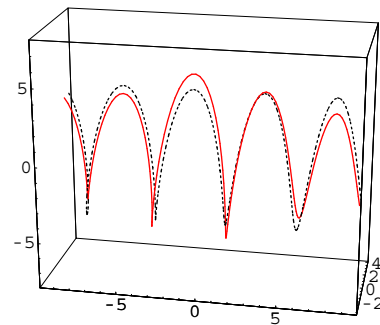
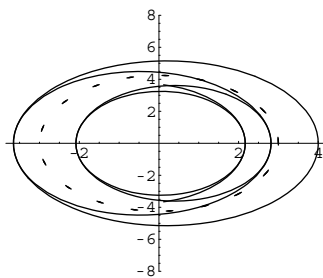
$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{P}}_0 := \tilde{\mathbf{P}}_\kappa \Big|_{\kappa=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}}_0(t) := \tilde{\mathbf{C}}_\kappa(t) \Big|_{\kappa=0}$$

$$\mathbf{a}_0 := \mathbf{a} \Big|_{\kappa=0} = \begin{pmatrix} a_0^x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x^0 - a_0^x \\ y^0 / \omega_0 \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{P}}_0^{-1} (\mathbf{x}^0 - \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{a}_0) = \mathbf{c} \Big|_{\kappa=0} =: \mathbf{c}_0.$$

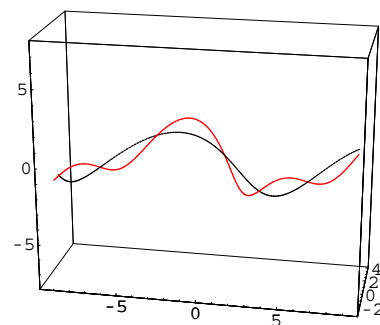
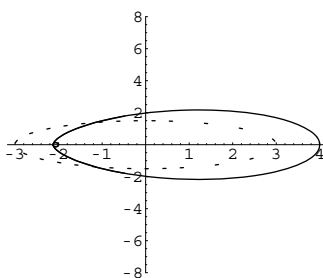
Queste alcune curve integrali nel caso particolare $\kappa = 0$, $\mathbf{c} = (1.0, 0.0)$, $a^x = 3.0$; in esse la “portante” è tratteggiata, e l'altra è spesso una curva aperta.



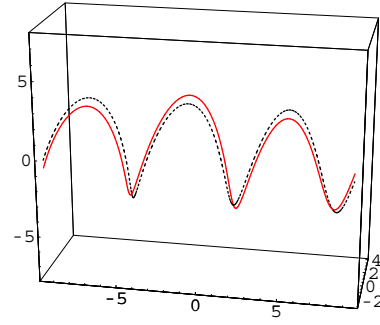
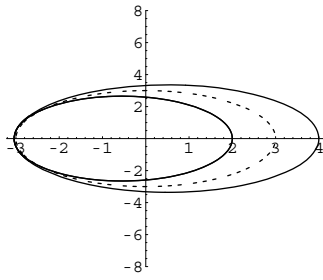
$$\omega = 2.0; \quad \omega_0 = 1.0$$



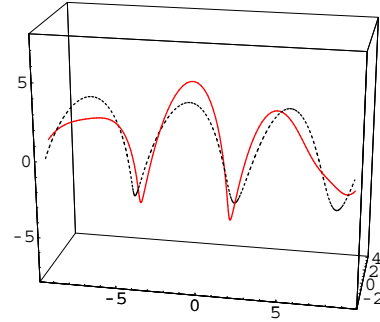
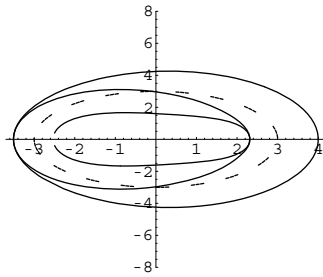
$$\omega = \sqrt{2}; \quad \omega_0 = 1.0$$



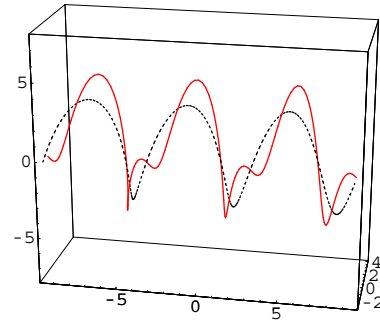
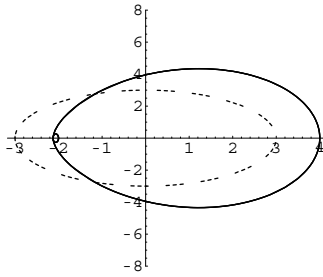
$$\omega = 0.5; \quad \omega_0 = 1.0$$



$$\omega = 1.0; \quad \omega_0 = 0.5$$



$$\omega = 1.0; \quad \omega_0 = \sqrt{2}$$



$$\omega = 1.0; \quad \omega_0 = 2.0$$

Anche in questo caso è agevole riconoscere le proprietà delle varie traiettorie se si pensano come descritte dai punti che sono estremo dei vettori

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathbf{x}_{om}(t) + \mathbf{x}_p(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$$

con

$$\mathbf{x}_p(t) = \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{C}}(t)\mathbf{a}_0 \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_{om}(t) = \tilde{\mathbf{P}}_0\tilde{\mathbf{C}}_0(t)\tilde{\mathbf{P}}_0^{-1}(\mathbf{x}^0 - \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{a}_0).$$

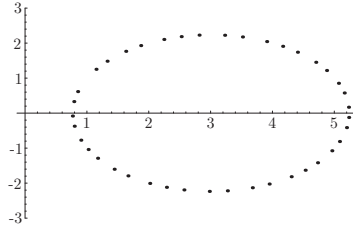
Le traiettorie quindi si avvolgono sulle superfici aventi come “asse” la traiettoria T-periodica corrispondente al punto fisso $\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{a}_0 \equiv (a_0^x, 0)^T$. Quest’ultima (nello spazio delle fasi ampliato) è un’elica di passo $2\pi/\omega$ e la cui proiezione su $\mathbb{M}$ è una ellisse di semiassi $a_0^x, \omega a_0^x$. Ogni traiettoria si appoggia sulla particolare superficie, fissata dalle proprie coordinate iniziali (x^0, y^0) , tale che la sua sezione con il piano di Poincaré è una ellisse di centro il punto $\mathbf{a}_0$ e semiassi $\rho^0, \omega_0\rho^0$, ove $\rho^0 := \sqrt{(x^0 - a_0^x)^2 + (y^0/\omega_0)^2}$. Su tale superficie essa compie un giro “longitudinale” in un tempo $T = 2\pi/\omega$ ed uno “trasversale” in un tempo $2\pi/\omega_0$.

La mappa di Poincaré è immediata: scelto anche ora $\bar{\theta} = 0$, e con la posizione: $\mathbf{M}_0 := \mathbf{M}_\kappa|_{\kappa=0}$ si ha la mappa $P: \Sigma^0 \rightarrow \Sigma^0$ data da

$$\mathbf{x}^0 \mapsto \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{a}_0 + \mathbf{M}_0(\mathbf{x}^0 - \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{a}_0) \quad \text{ovvero} \quad \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{M}_0 \begin{pmatrix} a_0^x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{con} \quad \mathbf{M}_0 := \begin{pmatrix} \cos 2\pi\omega_0/\omega & (1/\omega_0) \sin 2\pi\omega_0/\omega \\ -\omega_0 \sin 2\pi\omega_0/\omega & \cos 2\pi\omega_0/\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 - a_0^x \\ y^0 \end{pmatrix}.$$

La mappa è tuttora una mappa affine, con un solo punto fisso $(x^*, y^*) := (a_1, \omega a_2)$ attrattivo.



mappa di Poincaré nel caso: $\mathbf{c} = (.7, .7)$; $a^x = 3.0$; $\omega = \sqrt{2}$; $\omega_0 = 1.0$.

Il sistema compie un giro “longitudinale” in un tempo $T = 2\pi/\omega$ ed un “trasversale” in un tempo $2\pi/\omega_0$.

In definitiva, posto $\omega =: q\omega_0$,

- con $q =: n \in \mathbb{N}$ le traiettorie del sistema (continuo) percorrono più volte il circuito longitudinale prima di tornare al punto iniziale (*subarmoniche*),
- con $1/q =: m \in \mathbb{N}$ esse percorrono più volte il circuito trasversale prima di tornare al punto iniziale (*ultraarmoniche*),
- con $q =: n/m \in \mathbb{Q}$ si parla di ultrasubarmoniche. Nel primo caso e nel terzo si hanno, per ogni traiettoria, esattamente n punti sulla sezione Σ_0 uscenti da uno stesso punto iniziale: sono i punti fissi della mappa P^n o punti n -periodici.
- se invece il rapporto q è un numero irrazionale allora le traiettorie riempiono in modo *denso* la superficie del corrispondente arco di elica e, sulla Σ_0 , l'ellisse di centro $\mathbf{a}_0$ e semiassi $(x^0 - a_0^x, y^0/\omega_0)$.

□

Esempio 5.2.10 Per il caso meno banale della equazione di Mathieu

$\ddot{x} + (a^2 + b \cos \omega t) \sin x = 0$, $x \in \mathbb{R}$, si veda [Guckenheimer].

□

Per agevolare lo studio del terzo dei casi citati per le Mappe di Poincaré, si premetta ora la seguente definizione, da *non* confondere con quella di “almost periodic function”.

Funzione quasi periodica := una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}$ per la quale esistono:

- una m -pla $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^m$ di costanti reali $\{\omega^i =: 2\pi/T_i\}_{i=1,\dots,m}$ non fra loro razionalmente dipendenti;
- una m -pla $\boldsymbol{\theta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^m$ di funzioni lineari ciascuna a valori sul toro $\mathbb{T}$:

$$\theta^i(t) := \omega^i(t - t_0) + \theta_0^i \pmod{2\pi}, \quad i = 1, \dots, m;$$

- ed una funzione $g : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{M}$, tali che:

$$f(t) = g \circ \boldsymbol{\theta}(t), \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Alternativamente: una funzione f per la quale esiste una $\widehat{g} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{M}$ periodica in ciascuna delle sue m variabili con periodi non fra loro razionalmente dipendenti e tale che, identificate le m variabili con l'unica t , verifichi la $f(t) = \widehat{g}(t, \dots, t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Caso C.

Sia data l'equazione $\dot{x} = v(x, t)$, $x_0 \in \mathbb{M}$, con campo regolare e quasi periodico rispetto alla variabile t ; e se ne consideri una rappresentazione in coordinate: $\dot{x} = v(x, t)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Questa equivale all'equazione su $\mathbb{R}^{n+m}$ data da

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x, \theta) \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \theta = (\theta^1, \dots, \theta^m) \\ \omega = (\omega^1, \dots, \omega^m). \end{cases}$$

Ponendo $\theta^i : t \mapsto \theta^i(t) := \omega^i(t - t_0) + \theta_0^i$, $i = 1, \dots, m$, le sue soluzioni sono del tipo

$$t \mapsto \phi(t, t_0, x_0, \theta_0) := (x(t, t_0, x_0), \theta(t)).$$

Scelto $\ell \in \{1, \dots, m\}$, si definisca una sezione $\Sigma^{\bar{\theta}^\ell} \subset \mathbb{M} \times \mathbb{T}^m$ mediante la condizione $\Sigma^{\bar{\theta}^\ell} := \{(x, \theta) \in \mathbb{M} \times \mathbb{T}^m \mid \theta^\ell = \bar{\theta}^\ell\}$. Poi, fissati $\bar{t} := t_0 + (\bar{\theta}^\ell - \theta_0^\ell)/\omega^\ell$, e $T_\ell := 2\pi/\omega^\ell$, e quindi con $\theta^i(\bar{t}) = \theta_0^i + (\bar{\theta}^\ell - \theta_0^\ell)\omega^i/\omega^\ell$, $i = 1, \dots, m$, $i \neq \ell$, e con $\theta^i(\bar{t} + T_\ell) = \theta^i(\bar{t}) + 2\pi\omega^i/\omega^\ell$ ed $\theta^\ell(\bar{t} + T_\ell) = \bar{\theta}^\ell + 2\pi$, si ha la Mappa di Poincaré $P : \Sigma^{\bar{\theta}^\ell} \rightarrow \Sigma^{\bar{\theta}^\ell}$ data da

$$(x(\bar{t}), \theta(\bar{t})) \mapsto (x(\bar{t} + T_\ell), \theta(\bar{t} + T_\ell)).$$

Si noti che, per questa mappa, due sezioni $\Sigma^{\bar{\theta}^h}, \Sigma^{\bar{\theta}^k}$ non sono C^r -coniugate dal flusso a meno che le due frequenze ω^h, ω^k siano razionalmente dipendenti (vedi: [Wiggins 1]). Si osservi anche che per il tempo $\tau(x)$ di ogni traiettoria è stato scelto lo stesso valore $T_\ell = 2\pi/\omega^\ell$.

Nota 5.2.1 È importante riconoscere che una mappa di Poincaré $x \mapsto P(x)$ preserva l'orientamento. Infatti, scelto $t_0 = t$ essa è data da $P : x \mapsto P(x) := \phi(t + \tau(x), t, x)$ e quindi si ha che

- la sua derivata è $\partial P(x) \equiv \phi_*(t + \tau(x), t, x)$;
- qualora il tempo di primo ritorno $\tau(x)$ dipenda esplicitamente da x , detti x_e un punto (fisso) per la mappa e $\tau(x_e) =: T$ il tempo di primo ritorno (periodo) della corrispondente traiettoria, si ha che $\tau(x) \xrightarrow[x \in \Sigma]{x \rightarrow x_e} T$, e ciò comporta $\phi_*(t + \tau(x), t, x) \simeq \phi_*(t + T, t, x)$ per x sufficientemente vicino a x_e ;
- tale matrice è il valore in $t + T$ della soluzione dell'equazione variazionale

$$\frac{d}{dt'} X = v_*(\phi(t', t, x), t') X, \quad X(t) = \mathbb{I} ;$$

come tale essa è la matrice principale del sistema lineare $\frac{d}{dt'} y = v_*(\phi(t', t, x), t') y$, e quindi ha determinante (Wronskiano) mai nullo, ed anzi *positivo* perché positivo in t :

$$W(t') = \exp \int_t^{t'} \text{Tr } v_*(\phi(s, t, x), s) ds .$$

▷

Si noti inoltre che se la mappa è una mappa relativa al *Caso A*, la sua derivata avrà solo dimensione $(n - 1)$, mancando in essa la direzione della tangente alla traiettoria in x_e e che corrisponde all'autovalore 1 della $\phi_*(t + T, t, x_e)$. □

Nota 5.2.2 In generale (vedi: [Cap. I]) una qualunque mappa f da $\mathbb{R}^n$ in sé è contrattiva quando $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ con $k < 1$, ed in tal caso nel suo punto unito x_e si ha $|f(x) - x_e| \leq k|x - x_e|$, il che implica $\|\partial f(x_e)\| < 1$. Più debolmente, [si ricordi infatti, [Voyevodin § 83], che il modulo di un qualunque autovalore non supera il valore della sua norma], l'andamento della mappa f può essere paragonato con quello della $x_{n+1} := kx_n + (1 - k)x_e$, e la sua stabilità decisa paragonando il modulo degli autovalori di ∂f con l'unità.

In particolare, nel caso di una mappa di Poincaré $P = P(x)$ con punto fisso x_e e relativa ad *un campo anche non autonomo purché T periodico*, gli stessi motivi che si sono visti nella Nota 1 implicano che la derivata $\partial P(x^*)$ dia informazioni anche sulla stabilità lineare della corrispondente traiettoria T periodica $t \mapsto \phi(t, 0, x^*)$.

Infatti il sistema lineare $\dot{y} = v_*(\phi(t, 0, x_e), t)y$, risulta essere *lineare a coefficienti periodici*, e di esso la matrice $\partial P(x_e) = \partial_x \phi(T, 0, x_e)$ è una matrice monodroma come quelle viste nella teoria di Floquet. Come in quel caso ha interesse lo studio dei moltiplicatori caratteristici: detti $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ gli autovalori della matrice (reale) $\partial P(x_e)$, si ha che la traiettoria $\phi(t, 0, x_e)$ è stabile se $|\lambda_j| < 1$ per ogni $j \in (1, \dots, m)$, ed è instabile se $|\lambda_j| > 1$ per anche un solo $j \in (1, \dots, m)$. ▷

Caso D.

La costruzione delle mappe di Poincaré nel quarto dei casi citati, e cioè quello nel quale il sistema ammetta orbite omocline, od eterocline che diano luogo ad fenomeni di ritorno, verrà rinviata al prossimo § 4.

È ora agevole ritornare alla discussione dei principali tipi di biforcazioni per un sistema a parametro scalare. Qui di seguito, per illustrare tali biforcazioni, verrà principalmente usata la notazione e terminologia dei sistemi a tempo continuo, ma l'intera discussione si ripete per quelli a tempo discreto, salvo evidenti modifiche. Lo schema generale è il seguente (vedi: Guckenheimer § 3.4).

Per $x \in \mathbb{M}$, sia data la $\dot{x} = v(x, \mu)$ con $v(\cdot, \mu)$ una famiglia di campi regolari dipendente in modo regolare dal parametro μ . Quando si esamina il comportamento del sistema vicino ad un equilibrio, si cercano le soluzioni $\mu \mapsto x_e(\mu)$ della $v(x, \mu) = 0$. Il teorema del Dini assicura per esse un andamento regolare rispetto al parametro, espresso da una funzione regolare $x_e = x_e(\mu)$, salvo che per qualche valore $\mu = \mu^*$ del parametro e del conseguente punto di equilibrio $x^* = x_e(\mu^*)$ per i quali lo Jacobiano $\partial_x v(x^*, \mu^*)$ ha qualche autovalore nullo. In effetti, per avere una significativa modifica del comportamento dinamico del sistema, ed in particolare della stabilità delle soluzioni di equilibrio, già basta che qualcuno di questi autovalori abbia parte reale che attraversa lo zero.

I punti (x^*, μ^*) in cui ciò avviene sono i *punti di diramazione o di biforcazione*. In essi o avviene che la dipendenza della x_e dalla μ non è più compatibile con una (sola) funzione $\mu \mapsto x_e(\mu)$ regolare, oppure che cambia la stabilità degli equilibri.

[Nell'Esempio 4 il campo ha componenti $(\dot{\theta}, \nu(\theta, \mu))$ con ν definita nella (PR), pertanto l'equazione agli autovalori per lo Jacobiano $\partial_x v(x_e(\mu), \mu)$ è:

$$\lambda^2 = \frac{\partial \nu}{\partial \theta}(\theta_e) = \frac{g}{l} (\cos \theta_e (\mu \cos \theta_e - 1) - \mu \sin^2 \theta_e) =: \lambda^2(\theta_e, \mu).$$

In corrispondenza ai punti di equilibrio che così si trovano: $\theta_e = 0, \pm\pi$ oppure $\theta_e = \arccos 1/\mu$, si ricavano le determinazioni

$$\begin{aligned} l \lambda^2/g &= (1 - \mu^2)/\mu & \text{se } \theta_e = \arccos 1/\mu \neq 0, \pm\pi; \\ l \lambda^2/g &= \mu - 1 & \text{se } \theta_e = 0, \\ l \lambda^2/g &= \mu + 1 & \text{se } \theta_e = \pm\pi. \end{aligned}$$

In ogni caso, vi sono autovalori nulli per $(0 \leq) \mu^* = 1$ e quindi relativi a $\theta^* := \theta_e^\pm(1) = 0$.

I punti di biforcazione possono prendere nomi diversi, vedi oltre, anche a seconda del numero delle soluzioni della $v(x, \mu) = 0$, e cioè del numero di curve $x_e = x_e(\mu)$ che passano per il punto di diramazione, della forma e relativa posizione di queste, nonché delle caratteristiche di stabilità degli equilibri (delle quali generalmente si tiene memoria sui grafici biforcativi variando il tratto con cui la curva stessa viene disegnata). Inoltre, come già accennato, le varie definizioni si estendono in modo naturale alle mappe $f(\cdot, \mu) : x \mapsto f(x, \mu)$ ed alla loro dinamica definita dalla $x_{n+1} = f(x_n, \mu)$, e quindi ai loro punti periodici.

In particolare si osservi che i punti di biforcazione sono punti non iperbolici e, in ogni caso, punti di *non stabilità strutturale* per il sistema; in effetti essi possono essere anche *definiti* in questo modo. Così facendo si generalizza il concetto di biforcazione, ammettendo anche quei punti per i quali non c'è un "cambio" di struttura, ma che siano solo "estremali" per essa.

Le seguenti definizioni specificano quanto sopra anticipato.

Punto di biforcazione per $\dot{x} = v(x, \mu)$, $x \in \mathbb{M}$:= una determinazione dei parametri, dai quali dipende il sistema, attraversando la quale il diagramma di fase (ed il sistema in generale) presentano caratteristiche di non equivalenza topologica (locale o globale) tra le adiacenti configurazioni.

Più in generale si chiama

Insieme di biforcazione per $\dot{x} = v(x, \mu)$, $x \in \mathbb{M}$:= un insieme nello spazio dei parametri sul quale il sistema è strutturalmente instabile.

Nel caso specifico di equilibri del sistema si hanno i seguenti casi particolari.

Punto regolare, o non biforcativo, per $\dot{x} = v(x, \mu)$, $x \in \mathbb{M}$:= un punto (x^*, μ^*) per il quale la matrice Jacobiana $\partial_x v(x^*, \mu^*)$ non ha autovalori con parte reale nulla.

In un intorno di esso esiste una funzione regolare $x_e = x_e(\mu)$ tale che:

$$\begin{cases} v(x_e(\mu), \mu) = 0, & x_e(\mu^*) =: x^*, & \text{ed} \\ \partial_x v(x_e(\mu), \mu) \frac{dx_e}{d\mu}(\mu) + \partial_\mu v(x_e(\mu), \mu) = 0 & \text{in } \mathcal{N}(\mu^*). \end{cases}$$

Punto regolare, o non biforcativo, per $f(\cdot, \mu) : x \mapsto f(x, \mu)$, $x \in \mathbb{M}$:= un punto (x^*, μ^*) , fisso per la mappa f , e per il quale lo Jacobiano $\partial_x f(x^*, \mu^*)$ non ha alcun autovalore di modulo unitario.

In un intorno di esso esiste una funzione regolare $x_e = x_e(\mu)$ tale che:

$$\begin{cases} f(x_e(\mu), \mu) = x_e(\mu), & x_e(\mu^*) =: x^*, & \text{ed} \\ \left(\partial_x f(x_e(\mu), \mu) - 1 \right) \frac{dx_e}{d\mu}(\mu) + \partial_\mu f(x_e(\mu), \mu) = 0 & \text{in } \mathcal{N}(\mu^*). \end{cases}$$

Qualora ciò non avvenga, si hanno diversi casi possibili. Il più semplice di essi è rappresentato da un Punto di gomito per $\dot{x} = v(x; \mu)$, $x \in \mathbb{M} :=$ un punto (x^*, μ^*) per il quale:

$$\begin{cases} v(x^*, \mu^*) = 0; \\ \partial_x v(x^*, \mu^*) & \text{ha un solo autovalore } \lambda = 0 \text{ e semplice;} \\ \partial_\mu v(x^*, \mu^*) & \text{non appartiene allo span } \{\partial_x v(x^*, \mu^*)\} \text{ ed ha } \Re \lambda \neq 0; \\ x_e = x_e(\mu) & \text{ammette una qualche parametrizzazione } \sigma \mapsto x(\sigma), \mu(\sigma) \\ & \text{per la quale, con } x(\sigma^*) = x^* \text{ e } \mu(\sigma^*) = \mu^*, \text{ si ha} \\ & \frac{dv}{d\sigma}(\sigma^*) = 0 \quad \text{con} \quad \mu'(\sigma^*) = 0, \quad \text{e} \quad \mu''(\sigma^*) \neq 0. \end{cases}$$

[Per interpretare queste condizioni caratteristiche, o di “non degenerazione”, si pensi alla $\frac{dv}{d\sigma} = v_x x' + v_\mu \mu' \equiv 0$. L’annullarsi di $\partial_x v$ nel punto non deve implicare l’annullarsi di $\partial_\mu v$ ed in tal modo sarà necessariamente $\mu' = 0$; lo jacobiano ampliato: $(\partial_x v, \partial_\mu v)$ ha allora rango n (mentre è minore di n nella biforcazione a forchetta, vedi oltre). Inoltre si richiede che il contatto con $\mu = \text{cost}$ sia del secondo ordine affinché il punto sia di gomito e non di flesso].

In definitiva, quando la variabile x è anch’essa scalare le condizioni affinché il punto sia singolare e di gomito si riassumono nel richiedere che le seguenti derivate, calcolate nel punto (x^*, μ^*) , valgano:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \mu} \neq 0, \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \neq 0.$$

Altri possibili nomi per questo tipo di biforcazione sono:

biforcazione tangente, o nodo-sella, o “turning point”, o “fold-bifurcation”.

Si può mostrare (vedi: [Guckenheimer Teor. 3.4.1]) che questo tipo di biforcazione appare *genericamente* se si perturba di poco un sistema che ha Jacobiano (nel punto fisso) con un qualche autovalore nullo e semplice, e che quindi tale biforcazione è strutturalmente stabile, come biforcazione.

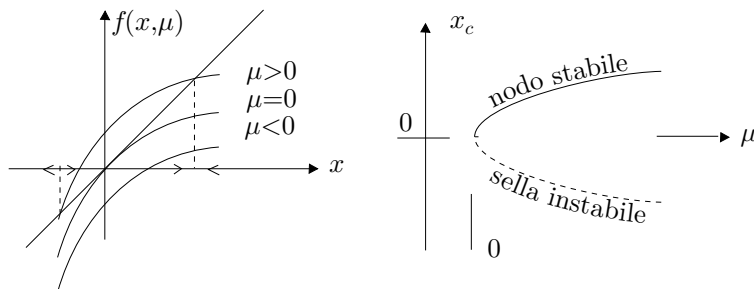
Si osservi che $\frac{\partial v}{\partial x}$ cambia segno nel punto di gomito che allora è un “punto di cambio di stabilità” per l’equilibrio.

Analoghe definizioni si danno per le mappe $f(\cdot, \mu) : x \mapsto f(x, \mu)$ pur di effettuare le evidenti modifiche (quali ad esempio cambiare “autovalore a parte reale nulla” con “autovalore di modulo unitario”) conseguenti al fatto che il punto di equilibrio per un flusso diviene quello di una mappa se alla derivata $\dot{x}$ si sostituisce la “derivata discreta”: $\partial x = x_{n+1} - x_n$; in tal modo si studia l’andamento di una mappa $f(x, \mu)$ paragonandolo con quello del campo $f(x, \mu) = v(x, \mu) + x$, e viceversa. Si vedrà tuttavia che le mappe, permettendo l’alternanza del segno della derivata, possono dar luogo ad un ulteriore tipo di biforcazione non presente nei campi.

Esempio 5.2.13 $\dot{x} = +\mu - x^2$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\mu \geq 0$.

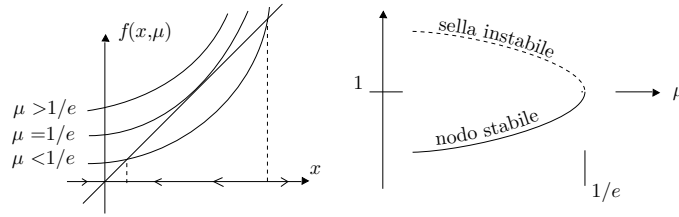
Gli equilibri sono $x_e = \pm\sqrt{\mu}$; e si ha $\partial_x v(x, \mu) = -2x$. Quest’ultima, calcolata negli equilibri, vale $-2\sqrt{\mu}$ oppure $+2\sqrt{\mu}$. Per cui il punto $(x^*, \mu^*) := (0, 0)$ è un nodo-sella, infatti $x_e = +\sqrt{\mu}$ è un nodo stabile, mentre $x_e = -\sqrt{\mu}$ è una sella. $\square$

Esempio 5.2.14 La mappa $f(\cdot, \mu) : x \in \mathbb{R} \mapsto \mu + x - x^2 \in \mathbb{R}$ ha anch’essa lo stesso diagramma biforcativo nel punto $(x^*, \mu^*) = (0, 0)$.



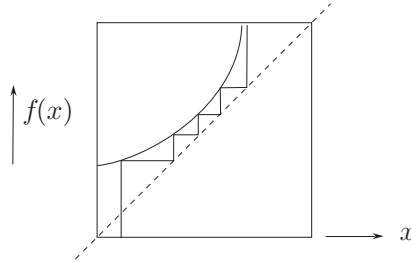
$\square$

Esempio 5.2.15 La mappa $f(\cdot, \mu) : x \in \mathbb{R} \mapsto \mu e^x \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$, ha un analogo diagramma biforcativo nel punto $(x^*, \mu^*) = (1, 1/e)$. [Si osservi infatti che la differenza $\mu e^x - x$ è minima in $x = \ln(1/\mu)$ ed il suo valore in tale punto è $1 + \ln \mu$].



□

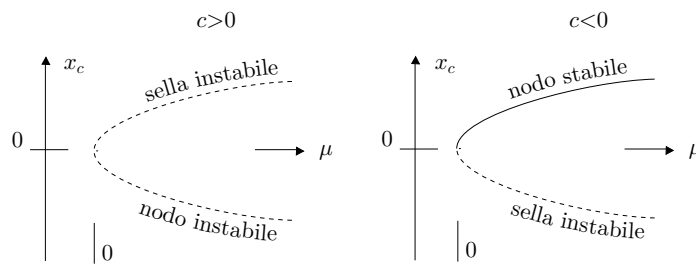
Nota 5.2.3 Nell'intorno del punto di tangenza, e dal lato in cui non si presentano punti di equilibrio, si può poi innescare un procedimento che secondo alcuni è alla base delle cosiddette “intermittenze”. È questo uno dei modi possibili con cui si schematizza un tipo di transizione al caos dei sistemi, qui intendendo con “caos” un comportamento non periodico né quasi periodico. Detto μ_T il valore del parametro per il quale si ha la tangenza, in un intorno di tale valore e dal lato di μ_T senza equilibri, si stabilisce una sorta di tempo caratteristico, di scala assai diversa da quella che il sistema mostra per valori di μ molto diversi da μ_T ; per cui se il sistema torna più volte a passare per tale “imbuto”, si genera un comportamento intermittente di imprevedibile cambio del tempo caratteristico del fenomeno.



▷

Esempio 5.2.17 Il sistema $\begin{cases} \dot{x} = \mu - x^2 \\ \dot{y} = cy \end{cases} \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}, \quad \mu > 0,$

ha diagramma, nel punto $(x^*, \mu^*) = (0, 0)$, dato da



□

Punto di biforcazione a forchetta per $\dot{x} = v(x, \mu)$, $x \in \mathbb{M}$:= un punto (x^*, μ^*) tale che:

$$\begin{cases} v(x^*, \mu^*) = 0; \\ \partial_x v(x^*, \mu^*) & \text{ha un solo autovalore } \lambda = 0 \text{ e semplice;} \\ \partial_\mu v(x^*, \mu^*) & \text{appartiene allo span } \{\partial_x v(x^*, \mu^*)\}; \\ x_e = x_e(\mu) & \text{consiste di due curve con tangenti in } (x^*, \mu^*) \\ & \text{distinte ed opportunamente trasversali.} \end{cases}$$

Si consideri ad esempio il caso in cui la variabile x è anch'essa scalare. Affinché il punto sia singolare (di tipo superiore alla biforcazione a gomito) occorre innanzi tutto che, in esso, siano: $\partial_x v = \partial_\mu v = 0$. Poi, parametrizzate con $x = x(\sigma)$ e $\mu = \mu(\sigma)$ le curve $x_e = x_e(\mu)$, dal teorema del Dini si ricava la seguente condizione, locale, necessaria per la loro esistenza

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{d\sigma} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \mu} \frac{dx}{d\sigma} \frac{d\mu}{d\sigma} + \frac{\partial^2 v}{\partial \mu^2} \left(\frac{d\mu}{d\sigma} \right)^2 = 0 ;$$

le loro tangenti devono allora essere tali che (valutando le derivate nel punto (x^*, μ^*)) sia:

$$\frac{dx/d\sigma}{d\mu/d\sigma} = - \frac{v_{x\mu}}{v_{xx}} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{v_{xx}^2}}, \quad \text{ove } \Delta := v_{x\mu}^2 - v_{xx}v_{\mu\mu} .$$

Perché possa avvenire una qualche intersezione fra le due curve, ed anzi affinché in (x^*, μ^*) vi sia una bi-forcazione, regolare, devono essere vere le

$$\Delta > 0 \quad \text{e} \quad v_{xx} \neq 0 ,$$

oppure (se $v_{\mu\mu} = 0$, o quando può essere $\mu' = 0$)

$$\Delta > 0 \quad \text{e} \quad 2v_{x\mu}\mu' + x'v_{xx} = 0 .$$

Il punto (x^*, μ^*) è un punto di biforcazione a forchetta quando non solo le tangenti alle due curve verificano le condizioni dette, ma anche quelle necessarie al non verificarsi di un punto di flesso ed al non cambiar segno della $d\mu/d\sigma$.

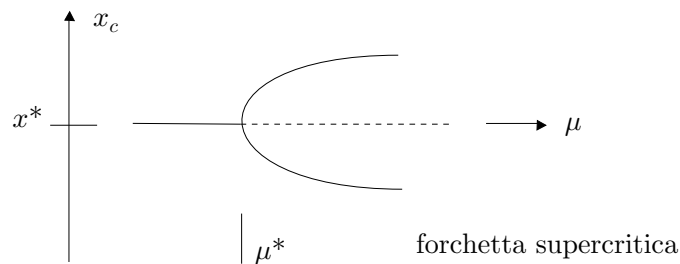
In definitiva, quando la variabile x è anch'essa scalare le condizioni affinché il punto sia un punto di biforcazione a forchetta richiedono che le seguenti derivate, calcolate nel punto (x^*, μ^*) , valgano

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \mu} \neq 0, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \neq 0.$$

Altri possibili nomi per questo tipo di biforcazione sono: *biforcazione a forchetta* o *"pitchfork"*.

Esempio 5.2.18 $\dot{x} = +\mu x - x^3 \quad x_0, \mu \in \mathbb{R}.$

Gli equilibri sono $x_e = 0$ ed $x_\pm = \pm\sqrt{\mu}$, e si ha $\partial_x v(x, \mu) = +\mu - 3x^2$. Quest'ultima, calcolata negli equilibri, vale μ oppure -2μ ; di conseguenza si annulla in $(x^*, \mu^*) = (0, 0)$. Il punto $x_0 = 0$, d'altra parte, è stabile (ed unico) per $\mu \leq 0$, mentre non lo è per $\mu > 0$ valori questi per i quali esistono anche le altre due soluzioni x_+, x_- che, quando esistono, sono stabili. La situazione pertanto è del tutto analoga a quella vista per il pendolo rotante, e anche per quanto riguarda la forma del potenziale. Nel punto $(x^*, \mu^*) = (0, 0)$ si ha una *biforcazione a forchetta supercritica*, in quanto si hanno soluzioni stabili da ambo le parti del valore biforcativo μ^* . $\square$



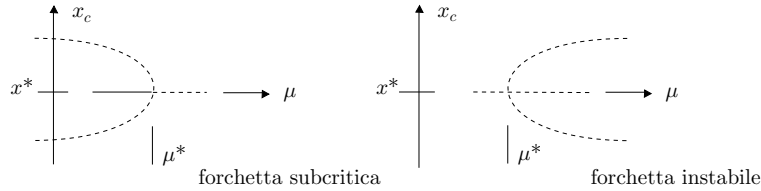
Esempio 5.2.19 (continuazione dell'Esempio 5.2.5)

Il pendolo rotante ha in $(\theta^*, \mu^*) = (0, 1)$ una biforcazione a forchetta [ciò se si accetta il fatto che la coordinata $\dot{\theta}$, necessariamente nulla nel punto di equilibrio ed indipendentemente dal parametro λ , non concorre ad aumentare la dimensionalità del problema, e che quindi il punto è *semplice* malgrado la $\partial_x v(0, 0, 1)$ abbia *doppio* l'autovalore nullo]. $\square$

Esempio 5.2.20 La mappa $f(\cdot, \mu) : x \in \mathbb{R} \mapsto +\mu x - x^3 \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, ha un analogo diagramma biforcativo nel punto $(x^*, \mu^*) = (0, +1)$. $\square$

Esempio 5.2.21 $\dot{x} = +\mu x + x^3, \quad x_0, \mu \in \mathbb{R}.$

Gli equilibri sono $x_e = 0$ ed $x_\pm = \pm\sqrt{-\mu}$; e si ha che $\partial_x v$, calcolata negli equilibri, vale μ oppure -2μ . Essa si annulla in $(x^*, \mu^*) = (0, 0)$; il punto $x_e = 0$ è stabile (ed unico) per $\mu \leq 0$, e non lo è per $\mu > 0$ mentre le altre due soluzioni esistono per $\mu < 0$ e, quando esistono, sono instabili. Nel punto $(x^*, \mu^*) = (0, 0)$ si ha una *biforcazione a forchetta subcritica*, in quanto si hanno soluzioni stabili solo da una parte del valore biforcativo μ^* . $\square$



Esempio 5.2.22 La mappa $f(\cdot, \mu) : x \in \mathbb{R} \mapsto +\mu x + x^3 \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, ha un analogo diagramma biforcativo nel punto $(x^*, \mu^*) = (0, 1)$. $\square$

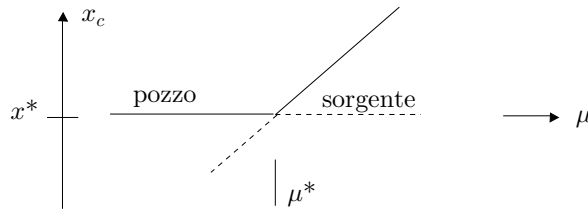
Punto di biforcazione transcritica $:=$ per $\dot{x} = v(x, \mu)$, $x \in \mathbb{M}$, un punto (x^*, μ^*) tale che:

$$\begin{cases} v(x^*, \mu^*) = 0; \\ \partial_x v(x^*, \mu^*) & \text{ha un solo autovalore } \lambda = 0 \text{ e semplice;} \\ \partial_\mu v(x^*, \mu^*) & \text{appartiene allo span } \{\partial_x v(x^*, \mu^*)\}; \\ x_e = x_e(\mu) & \text{consiste di due curve con tangenti in } (x^*, \mu^*) \\ & \text{distinte ed opportunamente trasversali.} \end{cases}$$

Se la variabile x è scalare, le ultime condizioni si specializzano nelle seguenti (le derivate valutate in (x^*, μ^*)):

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \neq 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \mu} \neq 0, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0.$$

Altri possibili nomi per questo tipo di biforcazione sono: *cambio di stabilità*.



Esempio 5.2.23 $\dot{x} = \mu x - x^2$, $x_0, \mu \in \mathbb{R}$.

Gli equilibri sono $x_e = 0$ ed $x_e = \mu$; e si ha che $\partial_x v$ calcolato negli equilibri vale μ oppure $-\mu$. Essa si annulla in $(x^*, \mu^*) = (0, 0)$; il punto $x_e = 0$ è stabile per $\mu \leq 0$, e non lo è per $\mu > 0$ mentre il contrario avviene per la soluzione $x_e = \mu$. Nel punto $(x^*, \mu^*) = (0, 0)$ si ha una biforcazione transcritica. $\square$

Esempio 5.2.24 La mappa $f(\cdot, \mu) : x \in \mathbb{R} \mapsto (1 + \mu)x + x^2 \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, ha un analogo diagramma biforcativo nel punto $(x^*, \mu^*) = (0, 0)$, così come lo ha la mappa quadratica $f_\mu : x \in \mathbb{R} \mapsto \mu x(1 - x)$ nel punto $(x^*, \mu^*) = (0, 1)$. $\square$

Si osservi ancora una volta il diverso comportamento della mappa quadratica nei due punti $(x^*, \mu^*) \equiv (0, 1)$ ed $(x^*, \mu^*) \equiv (1 - 1/\mu, \mu) \big|_{\mu=3}$, [quest'ultimo nel § 1 era stato indicato con $(\bar{x}_{\mu_2}, \mu_2)$]. Lo Jacobiano della mappa quadratica $f_\mu(x) = \mu x(1 - x) \in \mathbb{R}$ vale $\mu(1 - 2x)$, e quindi sul ramo $\bar{x}_\mu = 1 - 1/\mu$ vale $2 - \mu$. Come è noto, affinché $\bar{x}_\mu$ sia stabile deve essere $|2 - \mu| < 1$, e cioè $1 < \mu < 3$. Si osserva allora che nel valore $\mu^* = 3$ la $x^* = \bar{x}_\mu$ perde di stabilità ma, contrariamente al caso $(x^*, \mu^*) = (0, 1)$, *senza cederla ad alcun altro punto di equilibrio della stessa mappa*. Lo Jacobiano nei due punti ha valore rispettivamente $+1$ e -1 . Questo particolare tipo di comportamento, presente solo con le mappe, verrà esaminato più oltre. Proseguendo invece, per il momento, nella discussione dei campi vettoriali, si ha che il prossimo più semplice modo che ha un equilibrio per non essere iperbolico, e che però si può manifestare solo per dimensioni maggiori di uno, è il caso di un

Punto di biforcazione alla Hopf per $\dot{x} = v(x; \mu)$, $x \in \mathbb{M}$ $:=$ un punto (x^*, μ^*) tale che (necessariamente):

$$\begin{cases} v(x^*, \mu^*) = 0; \\ \partial_x v(x^*, \mu^*) & \text{ha una coppia di autovalori } \lambda_0, \bar{\lambda}_0 \in \mathbb{C}^1 \text{ semplici e} \\ & \text{tali che: } \Re \lambda_0 = 0, \quad \Im \lambda_0 \neq 0, \quad \frac{d}{d\mu}(\Re \lambda_0) \neq 0; \\ & \text{e tutti gli altri autovalori } \lambda \text{ hanno } \Re \lambda \neq 0; \end{cases}$$

inoltre, sia possibile verificare le condizioni qui sotto esposte sugli andamenti della $\dot{r}$ e della $\dot{\theta}$.

Il sistema non solo ammette un punto di equilibrio $x_e(\mu)$ che vale x^* per $\mu = \mu^*$ [e cioè, nello spazio delle coppie (x, μ) , un arco di linea $\{x(\mu), \mu\}_{\mu \in \mathcal{N}(0)}$ tutto corrispondente a punti di equilibrio e passante per il punto (x^*, μ^*)], ma in aggiunta e vicino ad esso, per un qualunque valore del parametro μ scelto da uno solo dei due lati rispetto a μ^* , si manifesta una *traiettoria periodica* il cui “raggio” aumenta all’allontanarsi del valore del parametro da quello di biforcazione: μ^* . Il punto di equilibrio varia di stabilità quando μ attraversa il valore μ^* e generalmente la cede alla soluzione periodica.

Il sistema ammette localmente un sistema di coordinate due delle quali: $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ descrivono una varietà localmente invariante; su di essa, la loro dinamica è data da:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \alpha(\mu)\xi - \beta(\mu)\eta + (a(\mu)\xi - b(\mu)\eta)(\xi^2 + \eta^2) + O(|\xi^5|, |\eta^5|) \\ \dot{\eta} = \beta(\mu)\xi + \alpha(\mu)\eta + (b(\mu)\xi + a(\mu)\eta)(\xi^2 + \eta^2) + O(|\xi^5|, |\eta^5|) \end{cases}$$

(si veda: [Wiggins II]) ove $\lambda =: \alpha + i\beta \in \mathbb{C}^1$, ed $a, b \in C^0(\mathbb{R})$.

Questo sistema ridotto può essere trasformato in coordinate polari e fornisce, in prima approssimazione,

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha(\mu)r + a(\mu)r^3 + O(r^5) \\ \quad \simeq c_1\nu r + c_2r^3 \\ \dot{\theta} = \beta(\mu) + b(\mu)r^2 + O(r^4) \\ \quad \simeq c_3 + c_4\nu + c_5r^2 \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \nu := \mu - \mu^* ; \\ c_1 := \frac{d}{d\mu}(\Re \lambda(\mu^*)) ; \\ c_4 := \frac{d}{d\mu}(\Im \lambda(\mu^*)) ; \\ c_2 := a(\mu^*) ; \\ c_5 := b(\mu^*) ; \\ c_3 := \Im \lambda(\mu^*) ; \end{cases}$$

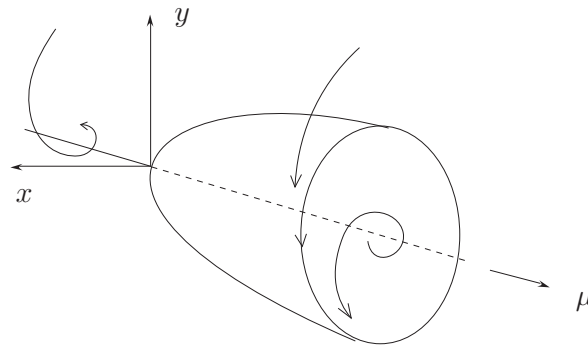
ed è facile quindi riconoscere la presenza della linea di equilibri $r = 0$ e della (famiglia di) soluzione periodica corrispondente alla radice di $c_1\nu + c_2r^2 = 0$.

La loro stabilità la si può riassumere nella tavola:

c_1	c_2	ν	origine	ciclo
+	+	+	u	
+	+	-	s	u
+	-	+	u	s
+	-	-	s	
-	+	+	s	u
-	+	-	u	
-	-	+	s	
-	-	-	u	s

(2.17)

La seguente figura si riferisce al caso $c_4 = c_5 = \mu^* = 0$; $c_1 = c_3 = 1$; $c_2 = -1$



Come si è visto, la condizione di biforcazione di un punto di equilibrio per un flusso si traduce, in modo analogo, in quella sulla biforcazione di un punto unito per una mappa. D'altra parte, queste ultime possono presentare un ulteriore tipo di comportamento biforcuto che è loro proprio e che non si manifesta con i flussi. Il successivo esempio di biforcazione non riguarda i campi, ma specificamente le mappe, ed in particolare non è raro che ne sia interessata una famiglia di mappe di Poincaré $P(x, \mu)$. Con esso si conclude qui l'esame dei principali tipi di biforcazioni che possono presentarsi nei punti fissi di una famiglia di mappe (regolari) dipendente in modo regolare dai parametri di controllo.

Si ricordi, come già osservato all'inizio del paragrafo, che la condizione che rende biforcuto: (x^*, μ^*) un punto di equilibrio (x_e, μ) per una famiglia di campi $v(x, \mu)$, e cioè che sia

$$v(x^*, \mu^*) = 0, \quad \text{insieme con: } \exists \lambda \in \text{spct}(\partial_x v(x^*, \mu^*)) \quad \text{con} \quad \Re \lambda = 0,$$

si trasforma, per una famiglia di mappe, $f(\cdot, \mu) \mapsto f(x, \mu)$ nell'analoga condizione:

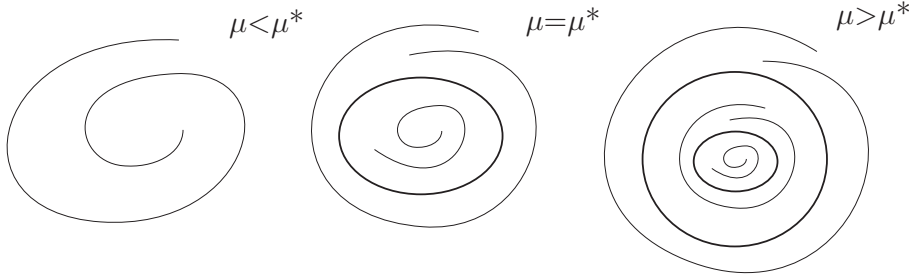
$$\begin{cases} f(x^*, \mu^*) - x^* = 0; & \text{insieme con} \\ \exists \lambda \in \text{spct}(\partial_x f(x^*, \mu^*) - \mathbb{I}) & \text{con } \Re \lambda = 0, \quad \text{ovvero} \\ \exists \lambda \in \text{spct}(\partial_x f(x^*, \mu^*)) & \text{con } \Re \lambda = 1. \end{cases}$$

Per le mappe, e solo per esse, risulta biforcuto anche un punto che, *pur non essendo come quelli detti qui sopra*, è tuttavia tale da produrre un *cambio di stabilità*: anche in esso si ha $f(x^*, \mu^*) - x^* = 0$, ma ora è $-1 \in \text{spct}(\partial_x f(x^*, \mu^*))$. Più in generale, risulta una biforcazione di questo tipo un punto (x^*, μ^*) per il quale $\partial_x f(x^*, \mu^*)$ ha qualche autovalore λ il cui modulo attraversa il valore uno quando μ attraversa il valore μ^* .

Se infatti si esamina una famiglia ad un parametro di mappe, siano ad esempio delle mappe di Poincaré $P(x, \mu)$, e si studia il modo in cui un qualche autovalore λ dell'operatore $\partial_x f(x^*, \mu^*)$ varia al variare dei parametri di controllo μ del sistema, si riconosce che esso ha più modi con i quali $|\lambda|$ attraversa il valore uno, i più semplici dei quali sono:

- (i) λ attraversa il valore $+1$ per $\mu = \mu^*$, ed è $\Im \lambda = 0$;
- (ii) λ attraversa il valore -1 per $\mu = \mu^*$, ed è $\Im \lambda = 0$;
- (iii) λ fa parte di una coppia di autovalori complessi coniugati, per la quale accade che $\Im \lambda = \Im \bar{\lambda} \neq 0$, e che $\rho := \sqrt{(\Re \lambda)^2 + (\Im \lambda)^2}$ attraversa la circonferenza unitaria per $\mu = \mu^*$.

Caso (i). La funzione $\nu(x, \mu) := f(x, \mu) - x$ ha uno zero nel punto (x^*, μ^*) e la $\partial_x \nu(x^*, \mu^*) \equiv \partial_x f(x^*, \mu^*) - \mathbb{I}$ ha un autovalore nullo e semplice, e quindi si ha un normale caso di diramazione. Esso consiste di uno dei possibili tipi di diramazione, quali ad esempio quelli visti precedentemente. In figura è un sistema continuo la cui mappa di Poincaré ammette un punto di gomito.



[Si noti che se l'autovalore non fosse semplice si potrebbero avere più traiettorie periodiche coesistenti, delle quali una è quella cui la mappa si riferisce, mentre le altre non ne fanno parte. Ad esempio può essere avvenuto un fenomeno di biforcazione (semplice) alla Hopf. (vedi: [Seydel])].

Caso (ii). La funzione $\nu(x, \mu) := f(x, \mu) - x$ pur annullandosi nel punto (x^*, μ^*) non ha in esso una biforcazione, perché il suo Jacobiano è non singolare: ha autovalore -2 e non 0 . Tuttavia, il fatto che -1 sia autovalore di $\partial_x f(x^*, \mu^*)$ fa sì che la mappa $f \circ f$ abbia (lo stesso punto di equilibrio (x^*, μ^*) ed in più) Jacobiano con autovalore unitario; infatti $\partial_x (f \circ f)(x, \mu) = \partial_x f(f(x, \mu), \mu) \cdot \partial_x f(x, \mu)$, e quindi $\partial_x (f \circ f)(x^*, \mu^*) = (\partial_x f(x^*, \mu^*))^2$. Si riconosce allora che, nel valore μ^* , il sistema presenta un

Punto di raddoppio di periodo per $f(\cdot, \mu) : x \mapsto f(x, \mu)$, $x \in \mathbb{M}$:= un punto (x^*, μ^*) per il quale è la mappa f^2 ad avere una biforcazione a forchetta:

$$\begin{cases} f(x^*, \mu^*) = x^*; \\ \partial_x f(x^*, \mu^*) & \text{ha un solo autovalore } \lambda = -1 \text{ e semplice;} \\ \partial_\mu f^2(x^*, \mu^*) & \text{appartiene allo } \text{span} \{ \partial_x f^2(x^*, \mu^*) - \mathbb{I} \}; \\ x_e = x_e(\mu) & \text{(soluzione della: } f^2(x_e) = x_e \text{), consiste di due curve con} \\ & \text{tangenti in } (x^*, \mu^*) \text{ distinte ed opportunamente trasversali.} \end{cases}$$

Si genera in tal modo, e per valori della μ “da un solo lato” del punto μ^* , una famiglia di traiettorie periodiche di periodo due.

Quando la variabile x è scalare, le ultime condizioni si specializzano nelle (valutate nel punto (x^*, μ^*)):

$$\frac{\partial f^2}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial^2 f^2}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f^2}{\partial x \partial \mu} \neq 0, \quad \frac{\partial^3 f^2}{\partial x^3} \neq 0.$$

Altri possibili nomi per questo tipo di biforcazione sono: *period doubling*, o “*flip-bifurcation*”.

Esempio 5.2.25 (continuazione dell'Esempio 5.2.24) La mappa quadratica nel punto $\mu^* = 3$ □

Esempio 5.2.26 La mappa $f : x \in \mathbb{R} \mapsto -(1 + \mu)x + x^3 \in \mathbb{R}$, ha lo stesso diagramma biforcivo: nel punto $(x^*, \mu^*) = (0, 0)$ nasce un ciclo di periodo 2 dato da $x = \pm\sqrt{\mu}$. $\square$

Si osservi infine che, qualora la mappa che presenta un punto di raddoppio di periodo sia una mappa di Poincaré P , il corrispondente sistema continuo è tale da avere un ciclo che da T -periodico diviene $2T$ -periodico al passaggio della μ attraverso il valore biforcivo μ^* .

Caso (iii). La $\partial_x f(x, \mu)$ ammette due autovalori complessi coniugati $\lambda_0, \bar{\lambda}_0$ i quali, al passaggio del parametro μ per μ^* , attraversano la circonferenza unitaria nel piano di Gauss. Esiste allora un piano sul quale la restrizione della famiglia di mappe di Poincaré risulta convenientemente rappresentata da

$$f : \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r' \\ \theta' \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} r + r^3 \Re c / \lambda_0 \\ \theta + \varphi + \frac{1}{2\pi} r^2 \Im c / \lambda_0 \end{pmatrix} \quad \text{con } c, \lambda_0, \varphi \text{ dipendenti da } \mu.$$

Come visto nel caso della biforcazione alla Hopf per i flussi, al passaggio di μ per μ^* (supposto in $\mathbb{R}$), si può generare da uno dei lati di μ^* un ciclo invariante che può o meno essere stabile. La mappa $f(x, \mu)$ ammette cioè una curva chiusa invariante, nel senso che trasporta ogni punto della curva in un punto che sta sulla curva stessa. Quando la mappa sia una Poincaré possono allora verificarsi, limitatamente a condizioni iniziali sulla curva in questione, i vari casi di armoniche visti in precedenza o, se $\varphi/2\pi \notin \mathbb{Q}$, ognuna delle corrispondenti traiettorie riempie in modo denso il toro la cui sezione con la superficie Σ definisce la curva. In tal caso il sistema di cui la f è Poincaré, mostra una

Biforcazione secondaria alla Hopf := l'orbita periodica cede stabilità ad un toro invariante che può o meno essere stabile, che la circonda, e che per $\mu \rightarrow \mu^*$ tende alla traiettoria periodica $x(t, t^*, x^*)$

Altri possibili nomi per questo tipo di biforcazione sono: “*torus bifurcation*”.

Così come la cascata di raddoppi di periodi, anche questo tipo di biforcazione può dar luogo a fenomeni caotici.

5.3 “Classici” esempi di mappe caotiche

Nel paragrafo 5.1 si sono esaminati alcuni casi di sistemi discreti in dimensione uno e con dinamica caotica. Ci si aspetta che, aumentando la dimensione dello spazio, le eventualità di generare caos non possano che aumentare. Qui di seguito verranno richiamate alcune delle più note mappe che presentano fenomeni complessi o caotici.

Esempio 5.3.1 La mappa di Henon $\mathcal{H} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da

$$\begin{pmatrix} \xi_{n+1} \\ \eta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \eta_n - \alpha \xi_n^2 \\ \beta \xi_n \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - by_n - x_n^2 \\ x_n \end{pmatrix}$$

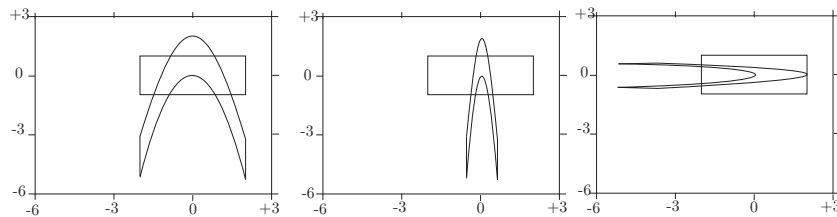
che sono equivalenti, giacché la seconda si ottiene dalla prima mediante la trasformazione $(x, y) := (\alpha \xi, \alpha \beta^{-1} \eta)$, e dove $\alpha \equiv a$ e $\beta \equiv -b < 1$ sono costanti positive.

Si nota che lo Jacobiano vale in ogni punto $-\beta = \text{cost}$ e quindi, a meno che sia $\beta = 1$, la mappa non conserva l'area.

Essa può essere considerata come la composizione successiva di:

$$\begin{cases} \xi' = \xi \\ \eta' = 1 + \eta - \alpha \xi^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi' = \beta \xi \\ \eta' = \eta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi' = \eta \\ \eta' = \xi \end{cases}$$

In figura è illustrato il caso $\alpha = 1.3$ $\beta = 0.3$.



Non è difficile verificare che, per opportuni valori di α, β , esiste un'ampia zona del piano formata dai punti i quali, al crescere del numero di iterazioni della mappa, non si perdono verso l'infinito. Essi, al contrario, hanno dinamica che dopo un breve transiente, ed indipendentemente dal punto di partenza (purché scelto nella zona detta), si svolge su una tipica figura “di area nulla” sulla quale la dinamica rimane viva ed erratica.

Tale insieme prende il nome di Attrattore di Henon . Esso naturalmente contiene i due punti fissi della mappa e cioè i punti $\xi_e^\pm = (\xi_e^\pm, \eta_e^\pm)$ dati da

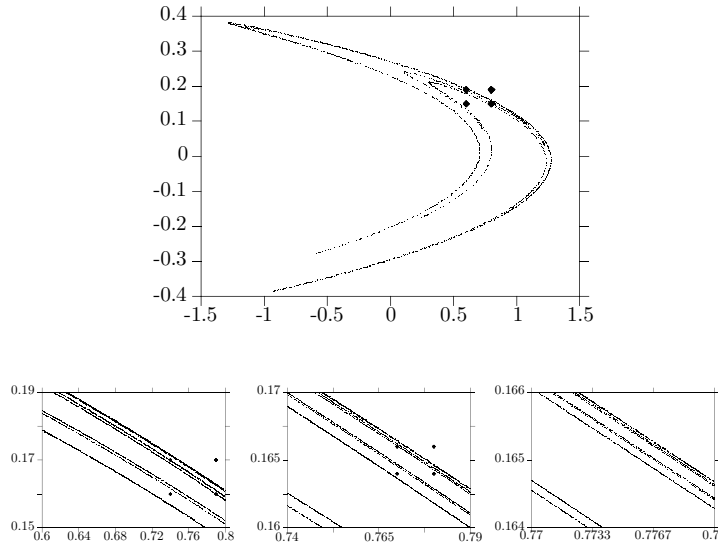
$$\xi_e^\pm := -\frac{1-\beta}{2\alpha} \left(1 \pm \sqrt{1+\delta}\right); \quad \eta_e^\pm = \beta \xi_e^\pm; \quad \delta := \frac{4\alpha}{(1-\beta)^2};$$

Studiando la linearizzata in $\xi_e^\pm$, che ha autovalori $\lambda_{1,2} = -\alpha \xi_e \pm \sqrt{\alpha^2 \xi_e^2 + \beta}$, ed esaminando le condizioni per le quali una delle due autodirezioni sia espansiva (e l'altra contrattiva), si riconosce che la posizione (ξ_e^+, η_e^+) è comunque instabile, mentre l'altra lo è solo se $\alpha > \alpha_1 := 3\alpha_0 := 3\left(\frac{1}{4}(1-\beta)^2\right)$.

Si ottiene un attrattore dalle caratteristiche ben distinte con il valore $\beta = 0.3$ e quindi $\alpha_0 \sim 0.12$. Inoltre, chiamati $\alpha_2 := 1.06$, ed $\alpha_3 := 1.55$, si ha

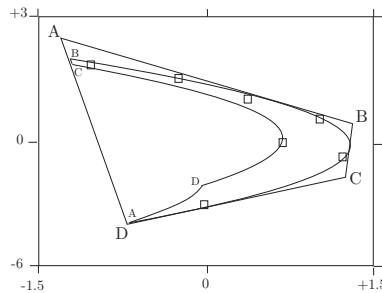
$\alpha < \alpha_0$	i punti vanno all'infinito;
$\alpha_0 < \alpha < \alpha_3$	dipende dai valori iniziali:
$\alpha_0 < \alpha < \alpha_1$	l'attrattore è il punto fisso stabile;
$\alpha_2 < \alpha < \alpha_3$	l'attrattore può essere espansivo;
$\alpha_3 < \alpha$	i punti vanno all'infinito.

Con i valori $\beta = 0.3$, $\alpha = 1.4$ si ha la nota figura:



nella quale si riconosce che l'attrattore ha sensibilmente una struttura di prodotto fra una varietà unidimensionale regolare (e tangente all'autovettore instabile relativo all'autovalore $\lambda = -1.923 \dots$) ed un insieme di Cantor.

Per confronto, si veda qui di seguito l'effetto della mappa dopo una sola iterazione nel caso $\beta = 0.3$, $\alpha = 1.3$; in essa è anche mostrato l'attrattore che, in questo caso, è costituito da sette punti periodici, e quindi del tutto regolare.



Sempre numericamente si nota che l'errore (e quindi l'incertezza) cresce rapidamente con il numero di iterate: $d(\xi_n, \xi'_n) \propto \alpha^n d(\xi_0, \xi'_0)$, $\alpha \approx 1.52$.

Pertanto per quasi tutti gli ξ_0 , e con l'ipotesi che $d(\xi_0, \xi'_0) \ll 1$, si ha che l'esponente di Liapunov $\lambda(\xi) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|df^n(\xi)\|$ vale $\lambda \approx 0.42$ ed il fatto che esso sia positivo fa dichiarare espansivo (o "strano") l'attrattore.

Va detto però che l'attrattore si ripiega su se stesso e non interseca trasversalmente alcuna varietà stabile: esso è non iperbolico (vedi oltre).

Si può notare inoltre che per $\alpha \in (1.052, 1.082)$ si genera una cascata di raddoppi di periodi nel piano $(\xi; \alpha)$ del tutto analoga a quella della mappa quadratica.

La storia di questo modello si può riassumere nel seguente grafico:

PDE : Navier Stokes	→	(Fourier)	→	Lorenz
Lorenz	→	(Runge Kutta)	→	Flusso
Flusso	→	(Sezione)	→	m. di Poincaré
m. di Poincaré	→	(Ipotesi)	→	m. di Henon
m. di Henon	→	(Numerico)	→	Attrattore

□

Esempio 5.3.2 Il ferro di cavallo di Smale, o “Smale horseshoe”.

È un esempio di mappa $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ che sul quadrato $D := [0, 1] \times [0, 1]$ ha infiniti punti periodici eppure è strutturalmente stabile.

Siano dati $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$, e $\mu > 2$. La mappa f è definita da

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix}$$

a seconda che il punto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartenga ai rettangoli

$$H_0 := [0, 1] \times \left[0, \frac{1}{\mu}\right] \quad \text{oppure} \quad H_1 := [0, 1] \times \left[1 - \frac{1}{\mu}, 1\right].$$

Pertanto, dette $V_0 := f(H_0)$ ed $V_1 := f(H_1)$ le immagini dei due rettangoli H_0 ed H_1 rispettivamente, si vede facilmente che è

$$V_0 := [0, 1/\lambda] \times [0, 1] \quad \text{e} \quad V_1 := [1 - \lambda, 1] \times [0, 1].$$

Sull'insieme $(H_0 \cup H_1)^c$ è conveniente non definire la mappa e lasciare che sia nilpotente: $f((H_0 \cup H_1)^c) = \emptyset$; o anche, e ciò facilita l'immaginazione, la si può rendere interpretabile con una deformazione “plastica” del quadrato D (vedi figura). In ogni caso, detto $D_0 := D \setminus (H_0 \cup H_1)$, e quindi con $(H_0 \cup H_1)^c = D^c \cup D_0 = H_0^c \cap H_1^c$, si assume che

$$D \cap f((H_0 \cup H_1)^c) = (D \cap f(D^c)) \cup (D \cap f(D_0)) = \emptyset.$$

Segue allora che

$$D \cap f^2(D) = D \cap (f(D \cap f(D)) \cup f(D^c \cap f(D))) = D \cap f(D \cap f(D))$$

e cioè che la mappa f^2 porta in D solo punti provenienti da $D \cap f(D)$; essa inoltre li lascia in $D \cap f(D)$. Sussiste, anzi, la più generale relazione

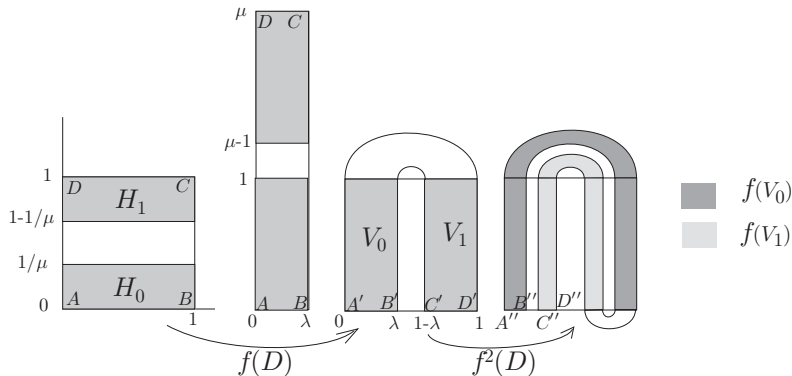
$$J_k := D \cap f^k(D) = D \cap f(D \cap f^{k-1}(D)) = [D \cap f]^{\circ k}(D) \subseteq J_{k-1};$$

e questa, per $0 \leq j \leq k$, fornisce

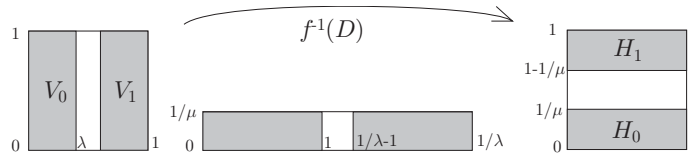
$$J_k \cap J_j = J_k, \quad \text{o anche} \quad D \cap f^j(D) \cap f^k(D) = D \cap f^k(D).$$

Da queste, con $J_0 := D$ e per $k = 0, 1, \dots$ si ricava la

$$\begin{aligned} J_{k+1} &= D \cap f(D) \cap \dots \cap f^{k+1}(D) = J_k \cap f^{k+1}(D) \\ &= J_k \cap f(D \cap f^k(D)) = J_k \cap f(J_k) = D \cap f(J_k). \end{aligned}$$



È chiaro allora che la mappa inversa risulta tale che



La prima cosa da notare è che segmenti “orizzontali” e “verticali” vengono trasformati in segmenti aventi gli stessi caratteri; e ciò a causa della linearità della mappa e del fatto che essa ha matrice diagonale. Inoltre, se V è un qualsiasi rettangolo verticale di altezza unitaria, dato che esso interseca totalmente entrambi i rettangoli H_0 ed H_1 si riconosce che $f(V) \cap D$ è costituito esattamente da due rettangoli verticali: l'uno in V_0 l'altro in V_1 , di ampiezza orizzontale λ volte quella di V ed altezza unitaria. Analoghe conclusioni valgono per i rettangoli orizzontali $H := \tilde{\mu} \times [0, 1]$ con $\tilde{\mu} \leq \mu$ e le loro preimmagini $f^{-1}(H) \cap D$.

Si osservi che, pur *esistendo unica* l'immagine inversa $f^{-1}(x) \in D$ di ogni $x \in V_0 \cup V_1$, la mappa f non è *invertibile su* D giacché tutti i punti che sono in $D \setminus (V_0 \cup V_1)$ si perdono sotto l'azione delle f^{-1} ; ed allo stesso modo, un qualsiasi V (o, rispettivamente, H) non può essere l'immagine inversa (l'immagine) di alcun sottoinsieme di D . Ad esempio:

$$f^{-1}(f^2(D)) \neq f(D) \quad \text{ed} \quad f^{-1}(f(V)) \neq V, \quad \text{ed anche} \quad f(f^{-1}(H)) \neq H.$$

Per lo stesso motivo, ad esempio i punti del rettangolo $[B'', C''] \times [0, 1]$ non sono f^2 -immagini di *alcun punto* in D ; infatti la loro f^{-1} -immagine è una striscia verticale, contenuta in H_0 , e fatta da punti che non sono f -immagini di alcun $x \in D$ giacché essa ha intersezione non vuota con la striscia $[\lambda, 1 - \lambda] \times [0, 1]$. L'unica invertibilità valida è quella per la quale

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(H_\sigma)) &= H_\sigma, & \text{ed} & & f(f^{-1}(V_\sigma)) &= V_\sigma, & \text{in quanto} \\ V_\sigma &= f(H_\sigma), & \text{ed} & & H_\sigma &= f^{-1}(V_\sigma), & \sigma \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Si osservi poi che:

- l'insieme $J_1 = D \cap f(D) = V_0 \cup V_1 =: \bigcup_{\sigma_{-1} \in \{0,1\}} V_{\sigma_{-1}}$, è l'insieme di quei punti che erano in H_0 o in H_1 al passo precedente quello “attuale”; ciò perché le $V_0 = f(H_0)$ ed $V_1 = f(H_1)$ implicano $x \in V_\sigma$ quando $f^{-1}(x) \in H_\sigma$.
- L'insieme $J_2 = D \cap f(D \cap f(D)) = D \cap f(D) \cap f^2(D)$ consiste di quattro strisce verticali:

$$\begin{aligned} D \cap f(D \cap f(D)) &= D \cap f(V_0 \cup V_1) = \bigcup_{\sigma_{-2} \in \{0,1\}} D \cap f(V_{\sigma_{-2}}) \\ &= \bigcup_{\substack{\sigma_{-i} \in \{0,1\} \\ i=1,2}} V_{\sigma_{-1}} \cap f(V_{\sigma_{-2}}) = \bigcup_{\substack{\sigma_{-i} \in \{0,1\} \\ i=1,2}} D \cap f(H_{\sigma_{-1}}) \cap f^2(H_{\sigma_{-2}}) \end{aligned}$$

esso infatti coincide esattamente con quei punti che erano in H_0 o in H_1 sia per $t = -1$ che per $t = -2$.

Introducendo un deponente per ogni iterazione, tale insieme può essere scritto sotto la forma:

$\bigcup_{\sigma_{-1}, \sigma_{-2} \in \{0,1\}} V_{\sigma_{-1}\sigma_{-2}}$; ciò mette in risalto il fatto che $f^{-1}(V_{\sigma_{-1}\sigma_{-2}}) \subseteq H_{\sigma_{-1}}$ e che $f^{-2}(V_{\sigma_{-1}\sigma_{-2}}) \subseteq H_{\sigma_{-2}}$. Risulta in definitiva $V_{\sigma_{-1}\sigma_{-2}} = V_{\sigma_{-1}} \cap f(V_{\sigma_{-2}}) = f(H_{\sigma_{-1}}) \cap f^2(H_{\sigma_{-2}})$.

- Induttivamente, osservando che le $V_{\sigma'} \setminus f(V_\sigma) \subset V_{\sigma'}$ e $f(V_\sigma) \setminus V_{\sigma'} \subset V_{\sigma'}^c$ implicano, tramite la (R3) del § V.1, che $f(V_{\sigma'} \cap f(V_\sigma)) = f(V_{\sigma'}) \cap f^2(V_\sigma)$, si prova che l'insieme

$$\begin{aligned} {}^{\circ k}(D) &= \bigcup_{\substack{\sigma_{-i} \in \{0,1\} \\ i=1, \dots, k}} V_{\sigma_{-1}} \cap f(V_{\sigma_{-2}} \cap f(\dots \cap f(V_{\sigma_{-k+1}} \cap f(V_{\sigma_{-k}}))) \dots) \\ &= \bigcup_{\substack{\sigma_{-i} \in \{0,1\} \\ i=1, \dots, k}} V_{\sigma_{-1}} \cap f(V_{\sigma_{-2}}) \cap f^2(V_{\sigma_{-3}}) \cap \dots \cap f^{k-1}(V_{\sigma_{-k}}) \\ &= J_k = D \cap f^k(D) = D \cap f(D) \cap f^2(D) \cap \dots \cap f^k(D) \end{aligned}$$

consiste di 2^k strisce verticali; esso è formato da quei punti che erano in H_0 o in H_1 sia per $t = -1$, che per $t = -2, \dots$, che per $t = -k$. Indicando tali strisce con

$$V_{\sigma_{-1} \dots \sigma_{-k}} := V_{\sigma_{-1}} \cap f(V_{\sigma_{-2} \dots \sigma_{-k}}) = V_{\sigma_{-1}} \cap f(V_{\sigma_{-2}}) \cap \dots \cap f^{k-1}(V_{\sigma_{-k}}),$$

si ottiene (con “ $\bigwedge$ ” indicante la condizione di “AND” logico)

$$\begin{aligned} {}^{\circ k}(D) &= \bigcup_{\substack{\sigma_{-i} \in \{0,1\} \\ i=1,\dots,k}} V_{\sigma_{-1}\dots\sigma_{-k}} \\ &= \left\{ x \in D \mid \bigwedge_{i=1}^k \bigcup_{\sigma_{-i} \in \{0,1\}} f^{-i+1}(x) \in V_{\sigma_{-i}} \right\} \\ &= \left\{ x \in D \mid \bigwedge_{i=1}^k \bigcup_{\sigma_{-i} \in \{0,1\}} f^{-i}(x) \in H_{\sigma_{-i}} \right\}. \end{aligned}$$

Ciascuna striscia $V_{\sigma_{-1}\dots\sigma_{-k}}$ è di larghezza λ^k ed altezza unitaria; la famiglia $\{V_{\sigma_{-1}\dots\sigma_{-k}}\}_{k=1,2,\dots}$ è una famiglia di compatti, non vuoti, che forma un sistema centrato. Pertanto, per $k \rightarrow \infty$, l’intersezione totale è non vuota. Infine, dato che $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^k = 0$, ogni successione $\sigma := (\sigma_{-1}, \sigma_{-2}, \dots, \sigma_{-k}) \in \mathbb{Y}_2^{\mathbb{N}}$, $\sigma_{-i} \in \{0,1\}$, individua (una ed) una sola linea verticale.

- In modo del tutto analogo si ragiona per la mappa f^{-1} , cambiando cioè tempi positivi con tempi negativi e corrispondentemente H con V . Ad esempio, definiti per $\sigma_k \in \{0,1\}$ ed $h = 0,1,\dots$ i rettangoli $H_{\sigma_0\dots\sigma_k} := H_{\sigma_0} \cap f^{-1}(H_{\sigma_1\dots\sigma_k})$ si ha

$$\begin{aligned} D \cap f^{-1}(D) \cap f^{-2}(D) &= \bigcup_{\sigma_0, \sigma_1 \in \{0,1\}} H_{\sigma_0\sigma_1} \\ &= \left\{ x \in D \mid \bigwedge_{i=0}^1 \bigcup_{\sigma_i \in \{0,1\}} f^{+i}(x) \in H_{\sigma_i} \right\} \end{aligned}$$

- Ne segue che una successione bilatera $(\dots, \sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_{+1}, \dots)$ individua uno ed un solo punto x nel quadrato D :

$$x := V_{\sigma_{-1}\sigma_{-2}\dots\sigma_{-k}\dots} \cap H_{\sigma_0\sigma_{+1}\dots\sigma_{+k}\dots} = \left\{ x \in D \mid f^i(x) \in H_{\sigma_i}, \quad i \in \mathbb{Z} \right\};$$

sotto l’azione della mappa f esso è tale da restare nel quadrato per ogni $t \in \mathbb{Z}$, si trova al tempo “attuale” nel rettangolo H_{σ_0} , e si muove come indicato dall’operatore di shift $\mathcal{S}$ secondo la successione σ ad esso associata. La posizione dell’evoluto di x al tempo j , ovvero l’appartenenza di $f^j(x)$ ad H_0 o ad H_1 , viene riconosciuta spostando lo zero di j posti verso destra se $j > 0$, ed esaminando il nuovo valore $\sigma'_0 \equiv \mathcal{S}^{+j}(\sigma)|_0$.

Questa struttura è estendibile a vari altri casi (vedi: [Wiggins 2 teor.3.3] opp. [Guckenheimer]), e si possono incontrare modelli in cui è presente anche una matrice di raggiungibilità $\mathbf{A}$. Esiste allora $\mathcal{A} \subset D$ sul quale la dinamica è coniugata ad un subshift finito $(\mathbb{Y}_{\mathcal{A}}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{S})$ e, se $\mathbf{A}$ è irriducibile (vedi: [Walters]), $\mathcal{A}$ è un insieme di Cantor.

Scelta infine una metrica su $\mathbb{Y}_2^{\mathbb{Z}}$, ad esempio la $d(\sigma, \sigma') = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|\sigma_i - \sigma'_i|}{2^{|i|}}$, si riconosce che lo shift $\mathcal{S}$ è continuo, e siccome nel caso delle successioni bilatere $\mathcal{S}$ è anche invertibile su $\mathbb{Y}_2^{\mathbb{Z}}$, esso risulta un omeomorfismo su $\mathbb{Y}_2^{\mathbb{Z}}$, così come f lo è (non su D , ma) su $\mathcal{A}$. È proprio questo omeo che rappresenta su $\mathcal{A}$ la dinamica di Smale che è pertanto caotica (punti periodici densi, orbite dense, dipendenza sensibile dal dato), infatti i due sistemi costituiti dallo shift $\mathcal{S}$ su $\mathbb{Y}_2^{\mathbb{Z}}$ e dalla f su D sono coniugati.

Si noti che in ogni caso $\mathcal{A}$ non è un attrattore, esso infatti non è un insieme attrattivo: infinitamente vicino ad ogni suo punto c’è qualche orbita periodica; tuttavia esso è il più grande insieme invariante dell’insieme D . In definitiva, la presenza di una horseshoe in un sistema fa sì che (quasi tutti) i punti di $\mathcal{A}$ abbiano dinamiche che, seppure raggiungono un qualche moto periodico, comunque instabile, lo fanno dopo un non prevedibile transiente.

L’essere $\dim > 1$ d’altronde permette qualche ulteriore complicazione. Può succedere ad esempio che esistano punti che ammettono contemporaneamente direzioni lungo le quali il sistema espande ed altre lungo le quali contrae. Può anzi accadere che ciò si verifichi per molti o addirittura per tutti i punti di D .

Per rendersene conto in questo specifico caso si consideri ad esempio un punto fisso: $x_0 := (\dots 00.000\dots)$. Si ha che tutto il segmento orizzontale $h_0 \ni x_0$ è parte della $W^s(x_0)$, e certo non solo lui: lo sono anche le controimmagini f^{-n} di questo (che sono esattamente 2^n segmenti orizzontali); per esse infatti accade che se $m > n$ allora $|f^m(f^{-n}(y_0)) - x_0| < 1$ per ogni $y_0 \in h_0$, e quindi i punti di $f^{-n}(h_0)$ collassano in x_0 . Analogamente le mappe future del segmento verticale $v_0 \ni x_0$ sono nella $W^u(x_0)$. Queste due infinità di segmenti si intersecano in infiniti punti (omoclini per x_0), che risultano essere una infinità numerabile e densa in $\mathcal{A}$ (vedi: [Guckenheimer]), e ciascuno tale da ammettere una varietà stabile ed una instabile (coincidenti con le famiglie di segmenti di cui sopra). $\square$

Esempio 5.3.3 La “twist-map”, si veda: [Guckenheimer § 2.4].

Una palla si muove verticalmente rimbalzando su un piano orizzontale in moto traslatorio rettilineo in direzione verticale e debolmente oscillante con legge armonica: $z(t) = -r \sin(\omega t + \phi_0)$. Detta $w(t) = -r\omega \cos(\omega t + \phi_0)$ la velocità del tavolo, e con u^- ed u^+ le velocità che la palla possiede subito prima e subito dopo un singolo urto, la condizione di urto (anelastico con coefficiente: $\alpha \in [0, 1]$) assegna

$$u^+(t_j) - w(t_j) = -\alpha(u^-(t_j) - w(t_j)).$$

Per il volo (a potenziale) l'ipotesi di piccole ampiezze di oscillazione da parte del tavolo dà con buona approssimazione $u^-(t_{j+1}) = -u^+(t_j)$, che insieme con la $u^-(t_{j+1}) = -(t_{j+1} - t_j)g + u^+(t_j)$ fornisce $2u^+(t_j) = (t_{j+1} - t_j)g$. A sua volta, la condizione d'urto fornisce $u^+(t_{j+1}) - \alpha u^+(t_j) = w(t_{j+1})(1 + \alpha)$.

In definitiva, introducendo le

$$\phi_j := \omega t_j + \phi_0, \quad v_j := \frac{2}{g} \omega u^+(t_j), \quad \gamma = \frac{2}{g} \omega^2 r(1 + \alpha),$$

si ottiene l'espressione della cosiddetta twist-map, definita su $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ dalla

$$f := \begin{pmatrix} \phi_{j+1} \\ v_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_j + v_j \\ \alpha v_j - \gamma \cos(\phi_j + v_j) \end{pmatrix}.$$

La mappa f è chiaramente un diffeomorfismo:

$$f^{-1} := \begin{cases} \phi_{j-1} = \phi_j - \frac{1}{\alpha}(\gamma \cos \phi_j + v_j) \\ v_{j-1} = \frac{1}{\alpha}(\gamma \cos \phi_j + v_j) \end{cases}$$

con

$$\partial f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \gamma \sin(\phi_j + v_j) & \alpha + \gamma \sin(\phi_j + v_j) \end{pmatrix},$$

e quindi $\det \partial f = \alpha$. Numericamente si trova che esistono condizioni iniziali per le quali il moto rimane limitato, e non periodico, anche se $\alpha = 1$.

Se $\alpha < 1$, siccome per ogni $\tilde{\phi}$ è certamente $|\alpha v - \gamma \cos \tilde{\phi}| \leq \alpha|v| + \gamma$, e siccome $\alpha|v| + \gamma$ diviene minore di $|v|$ non appena $|v| > \gamma(1 - \alpha)^{-1}$, se $|v_j|$ verifica questa limitazione si ha $|v_{j+1}| < |v_j|$. A lungo andare, la striscia $D \subset \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ definita dalla condizione: $D := \{(\phi, v) \mid |v| \leq \epsilon + \gamma(1 - \alpha)^{-1}\}$, risulta una regione positivamente invariante, (infatti non ci può essere fuori di essa alcun punto di accumulazione perché esso sarebbe anche punto fisso, e quindi risolvere $v = \alpha v - \gamma \cos \tilde{\phi}$ che invece dà punti dentro D).

Esisterà quindi un attrattore compatto non vuoto $\mathcal{A} := \bigcap_{n \geq 0} f^n(D)$.

Sia n_0 il più grande intero tale che $2\pi n_0 < \gamma(1 - \alpha)^{-1}$. È facile verificare che f ammette allora $2(n_0 + 1)$ punti fissi su $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$, le coordinate dei quali sono soluzioni dell'equazione

$$\begin{cases} \phi + 2n\pi = \phi + v \\ (1 - \alpha)v = -\gamma \cos(\phi + v) \end{cases} \quad (\phi, v) \in \mathbb{R}^2,$$

essi quindi sono dati da

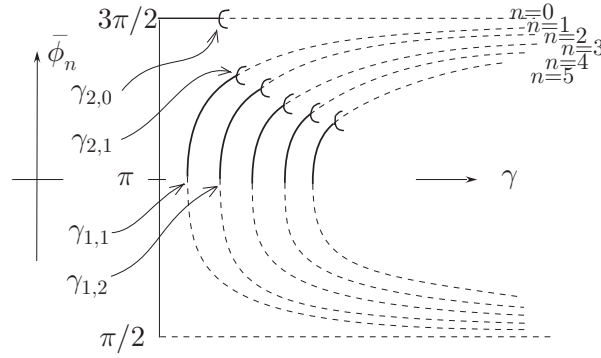
$$(\bar{\phi}_n, \bar{v}_n) := \left(\arccos\left(\frac{1}{\gamma} 2n\pi(\alpha - 1)\right), 2n\pi \right), \quad n \in (0, \pm 1, \dots, \pm n_0).$$

La loro stabilità si determina mediante lo studio degli autovalori della $\partial f(\bar{\phi}_n, \bar{v}_n)$ e l'eventuale passaggio dei loro moduli attraverso il valore uno. In tal modo, oltre agli evidenti punti di gomito che si hanno per i valori di γ tali che $2n\pi(1 - \alpha)/\gamma = 1$, si trovano ulteriori biforcazioni in corrispondenza ai cambi di stabilità dei punti fissi (dal lato $\bar{\phi}_n > \pi$ e cioè se $\sin(\bar{\phi}_n + \bar{v}_n) < 0$).

Chiamati

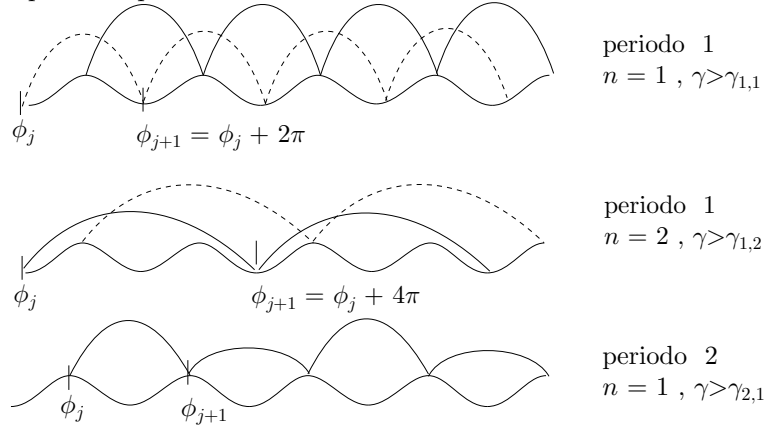
$$\gamma_{1,n} := 2n\pi(1 - \alpha) \quad \text{e} \quad \gamma_{2,n} := 2\sqrt{n^2\pi^2(1 - \alpha)^2 + (1 + \alpha)^2}$$

si ricava in definitiva il seguente diagramma biforcativo



che mostra come in $\gamma_{1,n}$ si generino dei nodi-selle, mentre in $\gamma_{2,n}$ si hanno raddoppi di periodi.

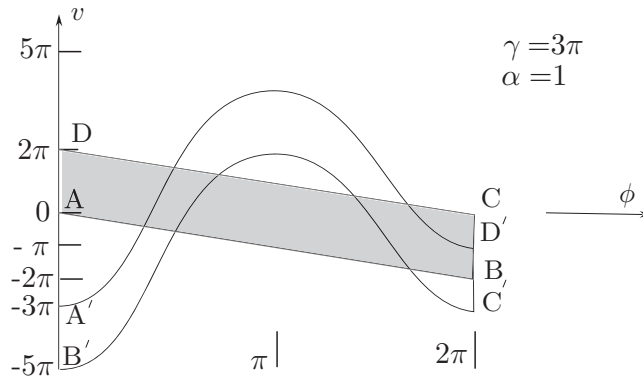
In figura, $z = z(t)$ con $v = 2n\pi$, sono accennati alcuni dei possibili moti fisici corrispondenti a possibili punti fissi della mappa o a cicli periodici per essa.



Quando $\alpha = 1$ la mappa non contrae (gli equilibri stabili sono centri). La sua azione può essere ricostruita sul piano (ϕ, v) osservando che l'immagine della famiglia dei segmenti di retta $\phi + v = \text{cost} = \kappa$, $\kappa \in [0, 2\pi]$, è la famiglia di segmenti

$$\phi = \kappa, \quad v = \xi - \gamma \cos \phi \quad \text{con} \quad \xi \in (\kappa - 2\pi, \kappa],$$

e quindi il parallelogramma $R := ABCD$ viene trasformato nella figura $A'B'C'D'$.



La presenza di infinite orbite periodiche può essere riconosciuta con un ragionamento simile a quello dell'esempio precedente; infatti se $\gamma = 2\omega^2 r(1 + \alpha)/g$ è sufficientemente grande ($\gamma > 4\pi$ per $\alpha = 1$, e cioè se il punto D' è al di sotto del punto B) le intersezioni di R con $f(R)$ sono una coppia di “rettangoli” disgiunti V_1, V_2 contenuti in strisce le cui controimmagini sono proprio due parallelogrammi disgiunti H_1, H_2 per cui $f(H_i) \supset V_i$; ne segue la classica struttura di horseshoe sulle intersezioni $f^2(H) \cap f^1(H) \cap H \cap f^{-1}(H) \cap f^{-2}(H)$ etc.

Anche in questo caso sembra esistere, oltre alle possibili orbite periodiche, un attrattore “strano”, localmente $\text{Cantor} \times \text{varietà-1-dim}$, che è la chiusura delle W^u della horseshoe. $\square$

Esempio 5.3.4 Gli automorfismi del toro (vedi Es.1.4) sono le trasformazioni

$$\mathcal{F} : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n, \quad \mathcal{F}(\theta) := \mathcal{A}\theta \pmod{2\pi}, \quad \text{con} \quad \mathcal{A} \in \mathbb{L}(n, \mathbb{Z}), \quad \det \mathcal{A} = \pm 1,$$

e cioè le trasformazioni agenti sui vettori $\theta \in \mathbb{R}^n$ identificati dalle relazioni: $\theta \sim \theta'$ quando $(\theta^i - \theta'^i)/2\pi \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, n$, e rappresentate da matrici A , $n \times n$ e ad elementi interi e determinante unitario.

Limitandosi al caso $\dim=2$, sono allora trasformazioni lineari (e quindi dei diffeomorfismi del piano in sé) con $A \in \mathbb{L}(2, \mathbb{Z})$, $\det A = 1$, e condizioni periodiche. Essi si dicono *iperbolici* (ed in tal caso sono anche ergodici) se accade che $|\lambda_{1,2}| \geq 1$, e cioè se ammettono direzioni (rispettivamente) di espansività e di contrattività. Come si è già detto i punti periodici per tali morfismi sono densi su $\mathbb{T}^2$. [Basta che sia $p = \begin{pmatrix} m/k \\ n/k \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2$ per vedere che tale punto è periodico di periodo al più k^2 (tante sono le coppie (m, n) , $n, m \leq k$) dato che $Ap = \begin{pmatrix} m'/k \\ n'/k \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2$]. $\square$

Sotto-Esempio 3.4.1

Esempio 5.3.5 (continuazione dell'Esempio 5.3.4)

Il gatto di Arnold : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

L'operatore A ha autovalori $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5}) \simeq \begin{cases} 2.6 \\ 0.4 \end{cases}$ entrambi reali e tali che $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det A = 1$. L'equazione agli autovettori $(r + s) = \lambda_{1,2} \cdot s$ implica che gli autovettori sono (si ponga $\lambda := \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$)

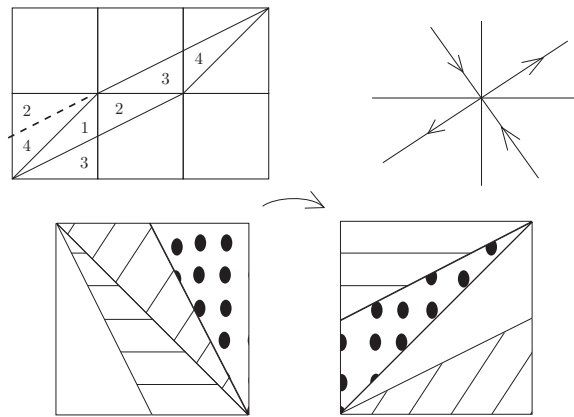
$$\epsilon_u = \begin{pmatrix} \lambda - 1 \\ 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1.6 \\ +1 \end{pmatrix}; \quad \epsilon_s = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\lambda} \\ -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0.6 \\ -1 \end{pmatrix},$$

l'uno nella direzione di espansività, l'altro di contrattività della mappa.

Si nota poi che, essendo la trasformazione lineare, i segmenti vengono trasformati in segmenti (ovviamente su $\mathbb{R}^2$), ed in particolare i seguenti punti si trasformano come indicato:

$$(0, 0) \mapsto (0, 0), \quad (0, 1) \mapsto (1, 1), \quad (1, 1) \mapsto (3, 2), \quad (1, 0) \mapsto (2, 1);$$

pertanto si ha



Le due rette passanti per l'origine, che è l'unico punto fisso della mappa, e parallele rispettivamente ad ϵ_s ed ϵ_u , rappresentano in $\mathbb{R}^2$ le varietà $W^{s,u}(0,0)$, e si avvolgono in modo denso sul toro $\mathbb{T}^2$; esse infatti hanno inclinazioni che sono irrazionali, e come si è visto solo i punti con coordinate razionali sono periodici. Pertanto le dette varietà si intersecano trasversalmente sul toro, e lo fanno in una infinità di punti, omoclini per l'origine. D'altra parte la linearità della trasformazione impone che tali linee rette siano anche varietà stabile ed instabile *per ciascuno di questi punti*, ed anzi la coppia di rette parallele ad $\epsilon_{s,u}$ e che si interseca in un qualunque punto di $(0,1] \times (0,1]$ rappresenta le varietà stabile ed instabile di quel punto su $\mathbb{T}^2$ (e si avvolgono anch'esse in modo denso su $\mathbb{T}^2$).

La presenza di un insieme denso di punti omoclini, ad esempio per l'origine, permette di verificare facilmente la transitività topologica della mappa: basta infatti, dati i due aperti U, V della definizione, scegliere in ciascuno di essi un omoclino a zero, far evolvere l'intorno instabile di uno di essi e vederne l'intersezione, che sarà vicina all'origine, con l'evoluto per tempi negativi dell'intorno sulla varietà stabile dell'altro; tale intersezione appartiene ad una traiettoria che congiunge i due aperti.

La dipendenza sensibile dal dato è, infine, banalmente verificata data l'espansività. La mappa pertanto è caotica su tutto $\mathbb{T}^2$. $\square$

Esempio 5.3.6 (sotto-esempio dell'Esempio 5.3.4)

Sia dato l'automorfismo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'operatore $\mathcal{A}$ ha autovalori $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}) \simeq \begin{cases} 1.6 \\ -0.6 \end{cases}$ entrambi reali e tali che $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \text{Det } \mathcal{A} = -1$.

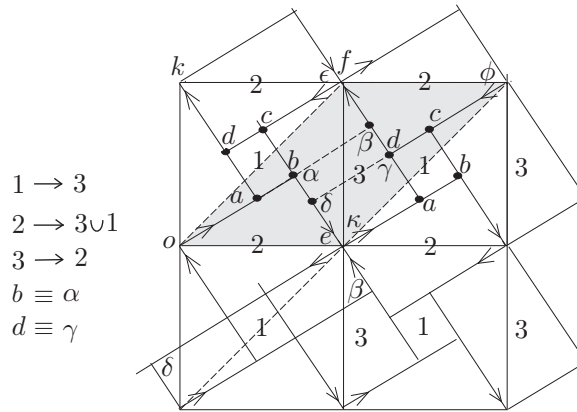
Posto $\lambda := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ l'equazione agli autovettori $(r + s) = \lambda_{1,2} \cdot s$ implica che gli autovettori sono

$$\epsilon_u = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda - 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} +1 \\ 0.6 \end{pmatrix}; \quad \epsilon_s = \begin{pmatrix} 1 \\ -(1 + \frac{1}{\lambda}) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ -1.6 \end{pmatrix},$$

l'uno nella direzione di espansività, l'altro di contrattività della mappa. Anche questa trasformazione è lineare, e quindi trasforma segmenti in segmenti (su $\mathbb{R}^2$).

È agevole in questo caso riconoscere la coniugazione topologica con lo shift su $\mathbb{Y}_3^{\mathbb{N}}$. A tale scopo si chiamino a, b, c, d i “primi” omoclini dell'origine, e cioè le intersezioni, più vicine all'origine, delle rette $y - \delta_1 = -\lambda_{1,2}(x - \delta_2)$, $\delta_{1,2} \in \{0, 1\}$, e si considerino i tre rettangoli 1, 2, 3, che hanno per vertici i punti $0, a, b, c, d$, (ed i loro identificati modulo 1). Tali rettangoli, (ed i loro identici mod 1), ripartiscono il piano ed hanno immagini future che sono totalmente e separatamente contenute nei rettangoli stessi.

Nella figura qui sotto sono stati messi in evidenza due gruppi di punti e, rispettivamente, i loro trasformati $(a, b, c, d) \mapsto (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ ed $(o, e, f, k) \mapsto (o, \epsilon, \phi, \kappa)$



Ciò permette di scrivere la matrice di raggiungibilità di Markov (prescindendo dai bordi, per i quali sarà necessario un procedimento di identificazione quando si hanno delle ripetizioni) data da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

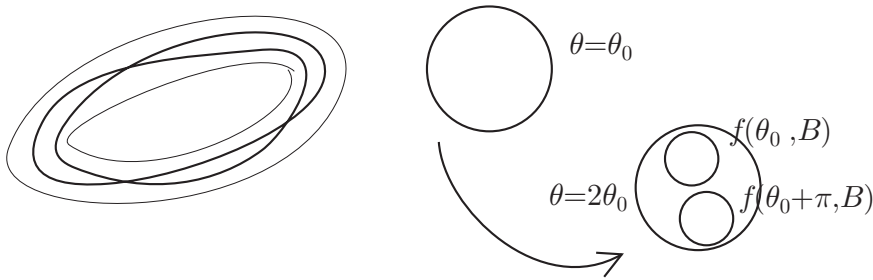
In definitiva si ottiene un sub-shift finito su $\mathbb{Y}_3^{\mathbb{N}}$, in quanto la presenza di una direzione di contrattività fa sì che le intersezioni infinite selezionino i punti di $\mathbb{T}^2$. $\square$

Esempio 5.3.7 Il solenoide .

Siano $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ e $D := \mathbb{T} \times B$. Su D sia definita la mappa $f : D \rightarrow D$ data, per ogni $\mathbf{b} \in B$, dalla funzione

$$f(\theta, \mathbf{b}) := \left(2\theta ; \frac{1}{10} \begin{pmatrix} b^x \\ b^y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right) := \left(2\theta ; \frac{\mathbf{b}}{10} + \frac{e^{2\pi i \theta}}{2} \right)$$

[È facile vedere che per ogni $\bar{\theta} \in \mathbb{T}$ l'insieme $f(\bar{\theta}, B) := \{f(\bar{\theta}, \mathbf{b})\}_{\mathbf{b} \in B}$ è un cerchio di raggio $1/10$, e che il termine $\frac{1}{2}e^{2\pi i \theta}$ colloca il centro di $f(\theta, B)$ nel punto $\frac{1}{2}(\cos \theta, \sin \theta)$ del cerchio B situato in $\theta' = 2\theta$; in questo stesso cerchio c'è poi anche l'immagine di $f(\theta + \pi, B)$ con centro in $-\frac{1}{2}(\cos \theta, \sin \theta)$].



È evidente che le iterazioni successive della mappa selezionano un insieme invariante $\mathcal{A} \subset D := \bigcap_{n>0} f^n(D)$ chiuso e non vuoto perché intersezione di immagini compatte di compatti. L'insieme $\mathcal{A}$ è invariante anche per tempi negativi: ogni suo punto necessariamente ammette un'intera storia. Inoltre su ogni disco B di fissato θ si ha che l'insieme $B \cap \mathcal{A}$ è un insieme di Cantor (l'evoluto al passo n -esimo è costituito da 2^n dischi di raggio 10^{-n} , e per ciascun punto di essi il disco stesso rappresenta la varietà stabile W^s). Per ogni punto di $\mathcal{A}$ passa poi una varietà W^u di dimensione uno e tangente ad $\mathcal{A}$ stesso in quel punto. È questa iperbolicità che assicura la dipendenza sensibile dal dato, mentre la densità dell'insieme dei punti f -periodici e la transitività topologica di $\mathcal{A}$ si dimostrano sfruttando le proprietà di contrazione della mappa su un arbitrario settore cilindrico $C(\theta_0, \mathbf{b}_0) := B_{\epsilon_1}(\theta_0) \times B_{\epsilon_2}(\mathbf{b}_0)$ (vedi: [Devaney]). $\square$

In questo ultimo esempio si vede con molta chiarezza perché l'insieme $\mathcal{A}$ venga chiamato attrattore. In generale infatti si definisce:

Attrattore $\mathcal{A}$ per un sistema dinamico := un insieme *non decomponibile*, compatto, invariante, contenuto in un intorno (Lebesgue positivo) che sia positivamente invariante e del quale contenere l'insieme ω -limite.

Talvolta si accettano, per la definizione di attrattore, anche proprietà meno restrittive: ad esempio si permette che l'insieme attratto non sia tutto un intorno di $\mathcal{A}$ ma solo un insieme di misura positiva e contenente $\mathcal{A}$; o addirittura può accadere di chiamare attrattore un insieme che, nemmeno essendo attrattivo, risulti chiuso invariante non decomponibile né costituito solo da orbite periodiche, (ad esempio l'attrattore di Feigenbaum o quello di Henon).

Comunque si assume che prendendo a caso condizioni iniziali nell'intorno di $\mathcal{A}$ la probabilità di trovarsi su $\mathcal{A}$ sia strettamente positiva.

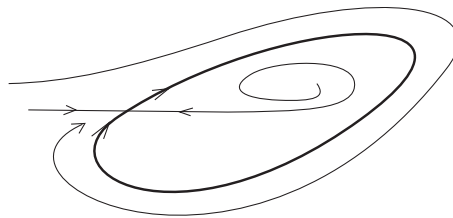
N.B. 5.3.8 Si ricordino le definizioni di

Insieme non decomponibile $V \subset \mathbb{M}$:= per ogni $p, q \in V$ ed $\epsilon > 0$ esiste una ϵ -catena fatta di punti di V che connette p con q .

ϵ -catena che connette p, q := un insieme finito $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, con $x_0 = p$, $x_n = q$, ed i punti $\{x_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ tali che esistano altrettanti istanti $\{t_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ per i quali è $d(\phi(t_i, t_{i-1}, x_{i-1}), x_i) < \epsilon$.

Si osservi che questa proprietà è conseguenza della più forte: Transitività topologica, (che, si ricorderà, è l'esistenza di almeno una traiettoria densa nell'insieme), in quanto è chiaro che un'orbita è una particolare ϵ -catena. $\diamond$

In ogni caso si richiede che l'attrattore sia “quasi tutto” interessato alla dinamica. Si consideri ad esempio il seguente diagramma:



Detta γ l'omoclina e p_e il punto di equilibrio (instabile) si ha che $\gamma \cup \{p_e\}$ è un insieme attrattivo, ed è anzi un attrattore dato che $[\gamma] \equiv \gamma \cup \{p_e\}$.

Si noti (vedi: [Ruelle '85]) che attrattori quasi periodici sono strutturalmente instabili e che sistemi conservativi *non* danno luogo ad attrattori, malgrado spesso abbiano caratteristiche di dipendenza sensibile dal dato. Inoltre sistemi quasi periodici, pur avendo aspetto assai irregolare e suggestiva turbolenza, non hanno necessariamente dipendenza sensibile dal dato. [Ruelle '85]

L'aggettivo “strano” viene aggiunto alle specifiche di un attrattore se esso contiene qualche coppia di omocline trasverse, o comunque una qualche direzione di espansività: su di esso la dinamica ha dipendenza sensibile dal dato.

Un “buon” modo per misurare tale espansività è calcolare gli esponenti di Liapunov (vedi: [Guckenheimer], opp. [Seydel, Cap.5]) e vedere se sono maggiori di zero.

[Si è già richiamata nel paragrafo 1, la nozione di esponente di Liapunov $\eta := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\partial f^n(x)|$ per una mappa f ; esso vuole essere una misura della capacità di amplificazione che ha la mappa, nel senso che vuole approssimativamente verificare la $|f^n(x + \delta) - f^n(x)| \simeq |\delta|e^{n\eta}$, e tutto ciò per tempi lunghi. Per una equazione differenziale, se r è il raggio di una sfera intorno ad x_0 ed $r_i(t)$ gli assi principali del “ellissoide” che essa diviene al variare di t , si ha che $\eta_i(x_0) := \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{r_i(t)}{r} \right|$. Essi risultano pertanto anche dei misuratori del quanto orbite vicine siano mutuamente convergenti o divergenti. Per ulteriori particolari si suggerisce [Guckenheimer § 5.8]

La presenza di almeno un esponente di Liapunov *strettamente positivo* lascia supporre che il sistema ammetta dinamica caotica (eventualmente intesa, più semplicemente, come una dinamica con dipendenza sensibile dal dato)].

Nei vari esempi visti qui sopra si nota che molti attrattori, ad esempio quello della mappa di Smale, hanno in comune il fatto di ammettere definite direzioni di dilatazione e di contrazione in ogni punto dell’insieme. Ciò si riassume brevemente dicendo che essi hanno proprietà di iperbolicità. Si rammenti la seguente definizione formale valida, (vedi: [Guckenheimer]), nel caso di un diffeomorfismo $\mathcal{F}$ di classe C^r con $r \geq 1$.

Insieme iperbolico per un diffeomorfismo $\mathcal{F} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$:= Un insieme $I \subset \mathbb{M}$ che sia: chiuso, non vuoto, $\mathcal{F}$ -invariante, per il quale

- (i) per ogni $p \in I$, esistono spazi vettoriali $\mathbb{E}^s(p)$, $\mathbb{E}^u(p)$ tali che

$$\begin{cases} \mathbb{E}^s(p) \oplus \mathbb{E}^u(p) = T_p I, \\ \mathcal{F}_*(p) \mathbb{E}^s(p) = \mathbb{E}^s(\mathcal{F}(p)), \\ \mathcal{F}_*(p) \mathbb{E}^u(p) = \mathbb{E}^u(\mathcal{F}(p)); \end{cases}$$

e ciò accade ad esempio se hanno come base gli autovettori di $\mathcal{F}_*(p)$;

- (ii) esistono $c > 0$, e $\rho \in (0, 1)$ tali che, per ogni $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} x^s \in \mathbb{E}^s(p) & \Rightarrow & \|\mathcal{F}_*^{+m}(p) x^s\| \leq c\rho^m \|x^s\| \\ x^u \in \mathbb{E}^u(p) & \Rightarrow & \|\mathcal{F}_*^{-m}(p) x^u\| \leq c\rho^m \|x^u\| \end{cases}$$

e cioè $\mathcal{F}_*^m(p)$ contrae i vettori di $\mathbb{E}^s$, per tempi futuri, almeno esponenzialmente ed uniformemente rispetto ad $p \in D$; e contrae quelli di $x^u \in \mathbb{E}^u$ per tempi passati;

- (iii) gli spazi $\mathbb{E}^u(p), \mathbb{E}^s(p)$ sono almeno continui al variare di p in I , e ciò accade ad esempio se così sono le loro basi.

Se il sistema ammette un attrattore iperbolico allora sussiste un teorema simile a quello visto per un solo punto iperbolico di equilibrio:

Teorema 5.3.1 Sia $I \subset \mathbb{M}$ iperbolico per un diffeomorfismo $\mathcal{F}$. Allora, dato $\epsilon > 0$, per ogni $p \in I$ esistono

$$\begin{aligned} W_{loc}^s(p) &:= \left\{ q \in I \mid d(\mathcal{F}^{+n}(p), \mathcal{F}^{+n}(q)) \leq \epsilon, \quad \forall n \geq 0 \right\} \\ W_{loc}^u(p) &:= \left\{ q \in I \mid d(\mathcal{F}^{-n}(p), \mathcal{F}^{-n}(q)) \leq \epsilon, \quad \forall n \geq 0 \right\} \end{aligned}$$

tali che

- (i) $W_{loc}^s(p), W_{loc}^u(p)$ sono due varietà di regolarità C^r tangenti rispettivamente a $\mathbb{E}^s(p), \mathbb{E}^u(p)$ e con le stesse dimensioni (e quindi la linearizzazione è significativa);

- (ii) esistono $c > 0$, e $\rho \in (0, 1)$ tali che

$$\begin{aligned} q \in W_{loc}^s(p) &\Rightarrow d(\mathcal{F}^{+n}(q), \mathcal{F}^{+n}(p)) \leq c\rho^n d(p, q) \\ q \in W_{loc}^u(p) &\Rightarrow d(\mathcal{F}^{-n}(q), \mathcal{F}^{-n}(p)) \leq c\rho^n d(p, q) \end{aligned}$$

e cioè la $\mathcal{F}^n$ contrae almeno esponenzialmente;

- (iii)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{+1}(W_{loc}^s(p)) &\subset W_{loc}^s(\mathcal{F}^{+1}(p)) \\ \mathcal{F}^{-1}(W_{loc}^u(p)) &\subset W_{loc}^u(\mathcal{F}^{-1}(p)); \end{aligned}$$

(iv) $T_p W_{loc}^s(p)$, e $T_p W_{loc}^u(p)$ variano in modo continuo al variare di p .

Si definiscono di conseguenza, (e si trovano numericamente in questo modo), le

Varietà stabile $W^s(p) := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^{-n}(W_{loc}^s(\mathcal{F}^{+n}(p)))$ ed è

$$W^s(p) \equiv \left\{ q \in I \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln d(\mathcal{F}^n(p), \mathcal{F}^n(q)) < 0 \right\}.$$

Varietà instabile $W^u(p) := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^{+n}(W_{loc}^u(\mathcal{F}^{-n}(p)))$ ed è

$$W^u(p) \equiv \left\{ q \in I \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln d(\mathcal{F}^{-n}(p), \mathcal{F}^{-n}(q)) < 0 \right\}.$$

N.B. 5.3.9 Le varietà $W^s(p), W^u(p)$, malgrado localmente regolari, hanno spesso l'abitudine di ripiegarsi su se stesse ed accumularsi in modo infinito. $\diamond$

N.B. 5.3.10 Le varietà $W^s(p), W^u(p)$ si hanno in corrispondenza rispettivamente al più grande negativo ed al più piccolo positivo degli esponenti caratteristici (vedi: [Ruelle p.635]), nel senso che ad esempio, per $\eta \leq \max_i \{\eta_i < 0\}$,

$$W^s(p) = W^s(p, \eta) := \left\{ q \in I \mid d(\mathcal{F}^n(p), \mathcal{F}^n(q)) \leq \epsilon e^{\eta n}, \quad n \geq 0 \right\},$$

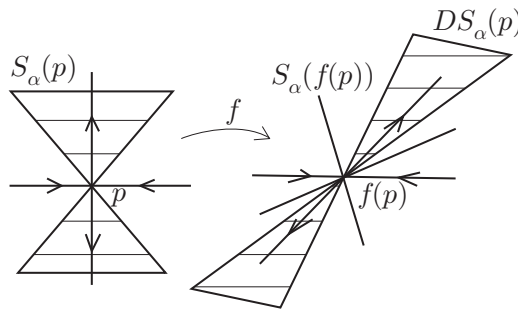
$\diamond$

Nel caso di mappe bidimensionali, il teorema di Morse [Guckenheimer Teor 5.2.4] è utile per mostrare quando un insieme I , invariante per la mappa, è anche iperbolico. Esso, in breve, riconosce iperbolico l'attrattore I quando esistono campi di coni S_α (di apertura $\alpha < 1$)

$$S := \bigcup_{p \in I} S_\alpha(p), \quad \tilde{S} := \bigcup_{p \in I} S_\alpha^c(p)$$

tali che

$$\begin{aligned} \partial \mathcal{F} S &\subset S && \text{pur espandendo ogni vettore in } S \\ \partial \mathcal{F} \tilde{S} &\subset \tilde{S} && \text{pur contraendo ogni vettore in } \tilde{S}. \end{aligned}$$



L'interesse nello stabilire se un attrattore sia o meno iperbolico risiede nel fatto che queste condizioni, se unite a quelle di "ritorno" per esempio conseguenti alla presenza di orbite omocline, sono sufficienti (vedi: [Wiggins p.130]) ad assicurare la coniugazione con lo shift su $\mathbb{Y}^{\mathbb{N}}$. Sussistono a tale proposito i due teoremi di Moser e di Smale.

Quando non tutte le direzioni sono fortemente espansive o contrattive, ci può ancora essere la coniugazione con lo shift su $\mathbb{Y}^{\mathbb{N}}$, però si ottengono degli insiemi di Cantor fatti con superfici e non con punti, in quanto tali risultano essere le intersezioni tra le W^s, W^u , rimanendo "scoperte" delle direzioni e delle intere varietà sulle quali la dinamica non è facilmente determinabile.

5.4 "Classici" esempi di flussi caotici

Per illustrare alcuni dei casi tipici di generazione di caos in sistemi governati da equazioni differenziali, oltre che per concludere l'esame dei tipi più comuni di mappe di Poincaré (vedi: [§ 2]), verrà qui esaminato il

Caso D.

Costruzione della mappa di Poincaré relativa ad un sistema di equazioni differenziali che ammetta (almeno) un'orbita omoclina ad un qualche punto di equilibrio (iperbolico).

In tutto questo paragrafo si seguirà da vicino, anche nella notazione, i due citati testi [Wiggins 1] e [Wiggins 2], ai quali si rimanda per una più ampia discussione dell'argomento

Sia $\mathcal{F} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ un flusso (o una mappa) che ammette un insieme invariante I ; ad esempio, uno o più punti di equilibrio: $I = \{p_e, p'_e, \dots\}$. Si definisce

Punto omoclino per I := un qualunque punto $q \in \mathbb{M} \setminus I$ tale che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, q) \in I \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, q) \in I.$$

Se $I \equiv p_e$ è un singleton che possiede varietà stabile $W^s(p_e)$ ed instabile $W^u(p_e)$, dire che q è omoclino per p_e equivale a dire che $q \in W^s(p_e) \cap W^u(p_e)$ e quindi, per loro stessa definizione, tutta l'orbita $\gamma(q) := \{\phi(t, q)\}_{t \in \mathbb{R}}$ appartiene a $W^s(p_e) \cap W^u(p_e)$, (o, nel caso di mappe, $\gamma(q) := \{\mathcal{F}^n(q)\}_{n \in \mathbb{Z}}$). Tale orbita si chiamerà orbita omoclina a p_e .

In modo analogo si hanno le definizioni di punti eteroclini e di orbite eterocline fra due punti di equilibrio p_e ed p'_e . In questo secondo caso la somma delle dimensioni di $W^s(p_e)$ e di $W^u(p'_e)$ può anche essere maggiore di n .

Si osservi che l'intersezione $W^s(p_e) \cap W^u(p'_e)$, cui l'eteroclina (o l'omoclina) necessariamente appartiene, può sia coincidere con le varietà stesse sia esserne solo un sottoinsieme.

Intersezione trasversa fra $W^s(p_e)$ e $W^u(p'_e)$:= un'intersezione tale che

$$\text{in ogni } q \in W^s(p_e) \cap W^u(p'_e) \quad \text{si ha} \quad T_q \mathbb{M} = T_q W^s(p_e) \oplus T_q W^u(p'_e);$$

e dovrà pertanto essere

$$n = \dim T_q W^s + \dim T_q W^u - \dim (T_q W^s \cap T_q W^u).$$

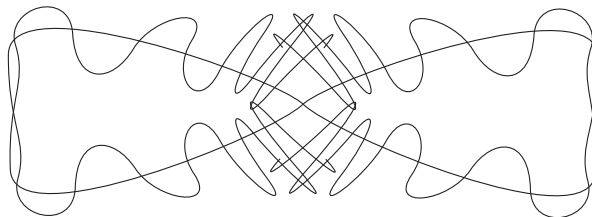
N.B. 5.4.1 In $\dim = 2$, due varietà (di dimensione uno) $W^u(p_e)$ e $W^s(p_e)$ di uno stesso punto p_e possono intersecarsi in modo trasverso, pur rispettando l'unicità della dinamica, solo se il sistema dinamico è discreto, mentre ciò non è possibile per i sistemi continui. Il motivo dipende dal fatto che ciascuna orbita di una mappa è una famiglia *discreta* di punti, mentre per un flusso essa stessa è un (arco connesso di) varietà regolare di dimensione uno. Quindi il sapere che una traiettoria discreta $\{\mathcal{F}^n(q)\}_{n \in \mathbb{N}}$ appartiene *totalmente* a un arco V di una varietà regolare di dimensione uno invariante per una mappa $\mathcal{F}$, *non basta a concludere che essa coincida con l'arco V* . Questo invece è il caso se il sistema è continuo, se l'arco V è privo di equilibri, e se $\phi(t, t_0, x_0)$ esiste localmente ed è in V .

Nel caso particolare delle due varietà $W^s(p_e)$ e $W^u(p_e)$, il fatto che esse siano invarianti assicura che $\{\mathcal{F}^n(q)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ appartiene a $W^s(p_e) \cap W^u(p_e)$ se $q \in W^s(p_e) \cap W^u(p_e)$; tuttavia questo non implica che la traiettoria coincida né con la $W^s(p_e)$ né con la $W^u(p_e)$, né che siano $W^s(p_e) \equiv W^u(p_e)$; ed anzi, per continuità, se l'intersezione in q è trasversa tali saranno le intersezioni fra le due varietà in ciascun punto della traiettoria $\gamma(q)$, che allora prende il nome di *omoclina trasversa*, e può ancora essere sia contenuta che coincidere con tutto l'insieme $W^s(p_e) \cap W^u(p_e)$. $\diamond$

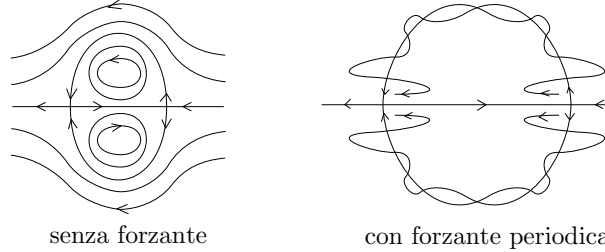
Alcuni esempi ben noti di omocline sono qui accennati:

- Il pendolo semplice presenta due omocline per il punto di equilibrio instabile; ciascuna di esse è simultaneamente W^s e W^u del punto di equilibrio. Se il pendolo non è forzato esse non si possono intersecare in modo trasverso data la bassa dimensione dello spazio, (vedi: [Guckenheimer p.22]), e risultano solo delle separatrici.
- L'equazione di Duffing con potenziale a due pozzi: $\ddot{x} - x + x^3 = 0$ ammette due omocline. Se si forza il sistema con un termine del tipo $\mu \cos \omega t$, con $\mu \ll 1$, l'equilibrio instabile $(0, 0)$ diviene un'orbita periodica instabile ($T = \frac{2\pi}{\omega}$), il cui punto di Poincaré ha varietà W^s e W^u che si possono intersecare trasversalmente anche altrove, (vedi oltre). Le orbite di tali intersezioni convergono verso quella periodica instabile per $t \rightarrow \pm\infty$.

Sulla Poincaré stroboscopica ($T = 2\pi/\omega$) si intuisce il caratteristico comportamento:



- L'equazione di Eulero non forzata nelle variabili $p_i := a_i \omega_i$, $i = 1, 2, 3$. Se $a_1 > a_2 > a_3$, sulla sfera $|\mathcal{K}^2| = \sum_{i=1}^3 a_i^2 \omega_i^2 = l^2 = \text{cost}$ si hanno selle in $(0, \pm l, 0)$ con quattro orbite eterocline che le connettono. Piccole forzanti possono dare luogo ad eterocline trasverse.
- Vortici puntiformi nello spazio fisico, distanti 2ℓ , con circolazione $c := \oint \vec{v} \cdot d\vec{\tau}$, e che traslano con velocità $\vec{v} = \frac{c}{4\pi\ell} \vec{e}_1 \in \mathbb{R}^3$. Nel sistema relativo al profilo delle linee di flusso si hanno tre eterocline che si rompono facilmente se forzate con un potenziale periodico (vedi: [Wiggins 1]).



□

Per poter studiare l'andamento asintotico della dinamica in presenza di omocline e deboli forzanti (periodiche) è spesso conveniente costruire una Mappa di Poincaré che sfrutti il fenomeno di ritorno dovuto alla presenza dell'omoclina. A tale scopo si consideri il seguente “esempio guida”, espresso in coordinate.

Sia $\dot{\sigma} = v(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, $v \in C^{r \geq 1}(D)$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, un sistema con un punto di equilibrio iperbolico: p_e , individuato in coordinate dal vettore σ_e , e sia $\gamma(\sigma_0) := \{\phi(t, t_0, \sigma_0)\}_{t \in \mathbb{R}}$ una sua omoclina (non erratica). La mappa verrà costruita come composizione di due mappe: una che agisce solo nelle immediate vicinanze del punto fisso p_e , l'altra che trasporta, lungo l'omoclina, punti di un intorno del punto di equilibrio fino a tornare nell'intorno stesso. Questa seconda, non risentendo degli effetti dovuti al punto di equilibrio, è sostanzialmente una “rettificazione” quale quella vista nel Cap. III.

La costruzione della mappa di Poincaré può procedere secondo i seguenti passi, i primi quattro dei quali sono solo preliminari semplificativi:

Passo 1. Si trasporta il punto fisso p_e nell'origine. Si agisce cioè con una traslazione: $\sigma =: \sigma_e + w$, tale che

$$\dot{\sigma} = v(\sigma) \longrightarrow \dot{w} = v(\sigma_e + w) =: v_e(w), \quad v_e(0) = 0.$$

Passo 2. Si opera una trasformazione lineare, cosa possibile in virtù dell'iperbolicità dell'origine, che cambi la base in una rispetto alla quale la matrice $\partial v_e(0)$ sia della forma:

$$\partial v_e(0) = \begin{pmatrix} A^s & 0 \\ 0 & A^u \end{pmatrix},$$

ove le matrici A^s, A^u sono di dimensioni $[m^s \times m^s], [m^u \times m^u]$ rispettivamente, con $m^s + m^u = n$, ed hanno rispettivamente $\Re \lambda_{A^s} < 0$, $\Re \lambda_{A^u} > 0$. Si ottiene il sistema alle variazioni, equivalente a quello dato,

$$\begin{cases} \dot{\xi}^s = A^s \xi^s + h^s(\xi^s, \xi^u) \\ \dot{\xi}^u = A^u \xi^u + h^u(\xi^s, \xi^u) \end{cases}; \quad w \equiv (\xi^s, \xi^u) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^u \equiv \mathbb{R}^n$$

con $h^s, h^u \in C^{r-1}(D)$; $h^s(0, 0) = h^u(0, 0) = 0$, $\partial h^s(0, 0) = \partial h^u(0, 0) = 0$.

Passo 3. Gli spazi

$$\mathbb{E}^s(0) := \left\{ \xi \equiv \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^u \end{pmatrix} \mid \xi^u = 0 \right\} \quad \text{ed} \quad \mathbb{E}^u(0) := \left\{ \xi \equiv \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^u \end{pmatrix} \mid \xi^s = 0 \right\}$$

sono invarianti rispetto alla dinamica dell'equazione variazionale, ed il teorema della varietà stabile (vedi § IV.1 e § V.3) assicura l'esistenza delle varietà W_{loc}^s, W_{loc}^u relative all'origine, localmente invarianti rispetto alla dinamica

dell'equazione alle variazioni, tangenti rispettivamente ad $\mathbb{E}^s$ ed $\mathbb{E}^u$, ed esprimibili localmente come grafici di funzioni (regolari quanto la ν):

$$\begin{aligned}\psi^s : \mathcal{N}^s(0) \subset \mathbb{R}^s &\rightarrow \mathbb{R}^u \quad \text{e} \quad \psi^u : \mathcal{N}^u(0) \subset \mathbb{R}^u \rightarrow \mathbb{R}^s \\ W_{loc}^s &= \text{graph } \psi^s(\xi^s) := \left\{ (\xi^s, \psi^s(\xi^s)) \right\}_{\xi^s \in \mathcal{N}(0) \cap \mathbb{E}^s} \\ W_{loc}^u &= \text{graph } \psi^u(\xi^u) := \left\{ (\xi^u, \psi^u(\xi^u)) \right\}_{\xi^u \in \mathcal{N}(0) \cap \mathbb{E}^u}\end{aligned}$$

Per poter meglio paragonare il flusso lineare con quello non lineare converrà poi usare come sistema di coordinate locali proprio le ψ^s e ψ^u , e cioè introdurre le coordinate

$$\begin{cases} x^s = \xi^s - \psi^u(\xi^u), \\ x^u = \xi^u - \psi^s(\xi^s) \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^u \end{pmatrix} \in \mathcal{N}(0)$$

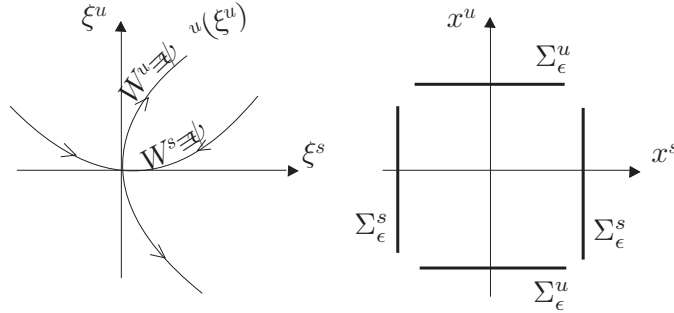
ed ottenere per esse il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}^s = A^s x^s + \nu^s(x^s, x^u) \\ \dot{x}^u = A^u x^u + \nu^u(x^s, x^u) \end{cases} \quad (4.18)$$

nella quale $\nu^s(0, x^u) = 0$, perché lungo $\xi^s = \psi^u(\xi^u)$ il campo è tangente alla W_{loc}^u e quindi ha nulle le sue s -componenti. In effetti $\dot{x}^s(\xi(x))|_{x=(0, x^u)}$ è necessariamente nullo lungo le linee $\xi = \xi(t)$ che appartengono alla superficie W_{loc}^u di equazione: $x^s(\xi) \equiv \xi^s - \psi^u(\xi^u) = 0$.

Analoghe conclusioni si traggono per $\nu^u(x^s, 0) = 0$. In tal modo le varietà $W_{loc}^s(0, 0)$, $W_{loc}^u(0, 0)$ risultano "rettificate".

A questo punto l'orbita γ , omoclina per l'origine, risulta trasformata in una curva $\Gamma(q) := \{\phi(t, t_0, q)\}_{t \in \mathbb{R}}$, ove q è relativo ad un suo punto, e $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \phi(t, t_0, q) = 0$.



Passo 4. Si definiscono ora due sezioni che siano trasverse alle W_{loc}^s e W_{loc}^u rispettivamente, e cioè due porzioni di superfici $(n-1)$ -dimensionali:

$$\begin{aligned}\Sigma_\epsilon^s &:= \left\{ x \equiv \begin{pmatrix} x^s \\ x^u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^u \mid |x^s| = \epsilon, |x^u| < \epsilon \right\} \\ \Sigma_\epsilon^u &:= \left\{ x \equiv \begin{pmatrix} x^s \\ x^u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^u \mid |x^s| < \epsilon, |x^u| = \epsilon \right\}\end{aligned}$$

con ϵ tale che $[\Sigma_\epsilon^s] \cup [\Sigma_\epsilon^u] \subset \mathcal{N}^s(0) \times \mathcal{N}^u(0)$, ove quest'ultimo è contenuto nell'intorno di definizione delle ψ^s , ψ^u . Chiamati $n_s(x)$, $n_u(x)$ i versori normali alle sezioni, si è certi che la Σ^s sia in ogni suo punto trasversa al campo per ogni $x \in \Sigma_\epsilon^s$ se accade che $n_s(x) \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}^s \\ \dot{x}^u \end{pmatrix} \equiv n_s(x) \cdot \begin{pmatrix} A^s x^s + \nu^s \\ A^u x^u + \nu^u \end{pmatrix} \neq 0$, (ed analoga per Σ_ϵ^u). Ciò accade senz'altro se ϵ è sufficientemente piccolo data l'assunta iperbolicità dell'origine, ed anzi il campo è entrante su Σ_ϵ^s ed uscente su Σ_ϵ^u .

Sulle sezioni trasverse si definiscono poi le (superfici) sezioni di queste con le varietà $W_{loc}^s(0, 0)$, $W_{loc}^u(0, 0)$ e quindi di dimensioni rispettivamente $(n-1-m^s) = (m^s-1)$ ed $(n-1-m^u) = (m^u-1)$, date da

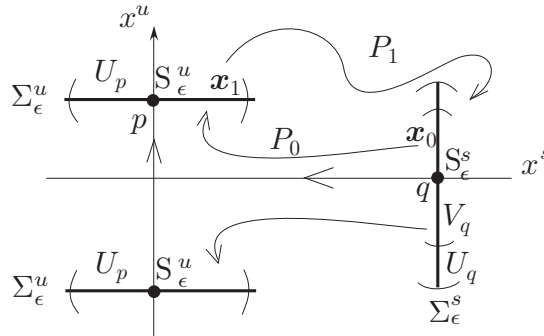
$$\begin{aligned}S_\epsilon^s &:= \Sigma_\epsilon^s \cap W_{loc}^s = \left\{ x \equiv \begin{pmatrix} x^s \\ x^u \end{pmatrix} \in \Sigma_\epsilon^s \mid |x^s| = \epsilon, |x^u| = 0 \right\} \\ S_\epsilon^u &:= \Sigma_\epsilon^u \cap W_{loc}^u = \left\{ x \equiv \begin{pmatrix} x^s \\ x^u \end{pmatrix} \in \Sigma_\epsilon^u \mid |x^s| = 0, |x^u| = \epsilon \right\}.\end{aligned}$$

Passo 5. Sia $\mathbf{x}_0 \in \Sigma_\varepsilon^s \setminus S_\varepsilon^s$. Il flusso $\phi : t \mapsto \phi(t, \mathbf{x}_0) =: (\mathbf{x}^s(t, \mathbf{x}_0); \mathbf{x}^u(t, \mathbf{x}_0))$, soluzione della (CA), per le proprietà dei punti fissi iperbolici trasporta, dopo un certo tempo $\tau_0 = \tau_0(\mathbf{x}_0)$ i punti $\mathbf{x}_0 \in \Sigma_\varepsilon^s \setminus S_\varepsilon^s$ in punti appartenenti a $\Sigma_\varepsilon^u \setminus S_\varepsilon^u$, (e si ha, evidentemente, $\lim_{\mathbf{x}_0^u \rightarrow 0} \tau_0(\mathbf{x}_0) = \infty$).

Si definisce innanzi tutto la mappa di Poincaré risultato di tale evoluzione, e cioè

$$\mathcal{P}_0 : \Sigma_\varepsilon^s \setminus S_\varepsilon^s \rightarrow \Sigma_\varepsilon^u \setminus S_\varepsilon^u \quad \text{data da} \quad \mathbf{x}_0 \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0^s \\ \mathbf{x}_0^u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x}^s(\tau_0(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0) \\ \mathbf{x}^u(\tau_0(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0) \end{pmatrix}.$$

Passo 6. Chiamati p e q i (punti) intersezioni dell'omoclina con le sezioni $\Sigma_\varepsilon^u, \Sigma_\varepsilon^s$ rispettivamente, e quindi contenuti in $S_\varepsilon^u, S_\varepsilon^s$ rispettivamente, siano $U_p \subset \Sigma_\varepsilon^u$ ed $U_q \subset \Sigma_\varepsilon^s$ due intorno di tali punti nelle $\Sigma_\varepsilon^u, \Sigma_\varepsilon^s$ rispettivamente. Dato che entrambi p e q sono su una stessa orbita che non contiene equilibri, e cioè l'arco della omoclina "lontano" dall'origine, esiste un tempo finito T tale che $\phi(T, p) = q$, ed inoltre, dato che la soluzione ϕ è regolare almeno di classe $r \geq 2$, si può scegliere U_p così piccola che per ogni $\mathbf{x}_1 \in U_p$ esista $\tau_1(\mathbf{x}_1)$ tale che $\phi(\tau_1(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_1) \in U_q$; ed è chiaro che $\tau_1(p) = T$.



Si definisce la mappa individuata da questa seconda evoluzione mediante le

$$\mathcal{P}_1 : U_p \rightarrow U_q \quad \text{data da} \quad \mathbf{x}_1 \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^s \\ \mathbf{x}_1^u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x}^s(\tau_1(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_1) \\ \mathbf{x}^u(\tau_1(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_1) \end{pmatrix}.$$

Passo 7. Si supponga esista un aperto $V_q \subset U_q$ tale che $\mathcal{P}_0(V_q) \subset U_p$. Ciò è possibile date le ipotesi di regolarità e di iperbolicità. In tal modo si verifica la $V_q \subseteq \mathcal{P}_1(\mathcal{P}_0(V_q))$.

Passo 8. La mappa di Poincaré completa resta definita dalla composizione delle due

$$\mathcal{P} := \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_0 : V_q \rightarrow U_q \quad V_q \xrightarrow{\mathcal{P}_0} U_p \xrightarrow{\mathcal{P}_1} U_q.$$

□

È chiaro che per conoscere l'esatta forma di tale mappa è necessario conoscere il flusso ϕ e quindi conoscere il moto.

Il procedimento, tuttavia, è in parte locale nell'intorno di un equilibrio iperbolico e per il resto non risente di altri equilibri; si può perciò agire in modo variazionale e sostituire alla $\mathcal{P}_0$ la sua linearizzata $\mathcal{P}_0^\ell$, calcolata mediante il flusso linearizzato. Si ottiene

$$\mathcal{P}_0^\ell : V_q \subset \Sigma_\varepsilon^s \rightarrow \Sigma_\varepsilon^u \quad \text{data, con} \quad \tau_0 = \tau_0(\mathbf{x}_0), \quad \text{da}$$

$$\mathbf{x}_0 \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0^s \\ \mathbf{x}_0^u \end{pmatrix} \mapsto \mathcal{P}_0^\ell(\mathbf{x}_0^s, \mathbf{x}_0^u) := \phi^\ell(\tau_0, \mathbf{x}_0^s, \mathbf{x}_0^u) := \begin{pmatrix} e^{\mathbf{A}^s \tau_0} \mathbf{x}_0^s \\ e^{\mathbf{A}^u \tau_0} \mathbf{x}_0^u \end{pmatrix}.$$

Allo stesso modo si sostituisce alla $\mathcal{P}_1$ la sua linearizzata

$$\mathcal{P}_1^\ell : U_p \subset \Sigma_\varepsilon^u \rightarrow U_q \subset \Sigma_\varepsilon^s \quad \text{data da}$$

$$\mathbf{x}_1 \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^s \\ \mathbf{x}_1^u \end{pmatrix} =: \mathbf{p} + \mathbf{u} \mapsto \mathcal{P}_1(\mathbf{p} + \mathbf{u}) \equiv \mathcal{P}_1(\mathbf{p}) + \partial \mathcal{P}_1(\mathbf{p}) \mathbf{u} \equiv \mathbf{q} + \partial \mathcal{P}_1(\mathbf{p}) \mathbf{u},$$

e si noti che, siccome per costruzione $\mathbf{x}_1 \equiv (\mathbf{x}_1^s, \mathbf{x}_1^u)^T =: \mathbf{p} + \mathbf{u}$ è scelto in Σ_ε^u , e siccome è $\mathbf{p} = (0, \mathbf{x}_1^u)^T$, il vettore $\mathbf{u}$ ha necessariamente espressione: $\mathbf{u} = (\mathbf{x}_1^s, 0)^T$, (con $\mathbf{x}_1^s$ convenientemente piccolo ed $|\mathbf{x}_1^u| = \varepsilon$).

Si può mostrare (vedi: [Wiggins 1]) che tutte le approssimazioni fatte sono lecite all'ordine ε^2 data l'iperbolicità del punto p_e , che se la mappa $\mathcal{P}^\ell := \mathcal{P}_1^\ell \circ \mathcal{P}_0^\ell$ ha un punto fisso iperbolico allora ciò accade, all'ordine ε^2 anche alla $\mathcal{P}$, e che le due mappe hanno corrispondenti proprietà di stabilità strutturale rispetto ai parametri, (almeno per regolarità superiore a due).

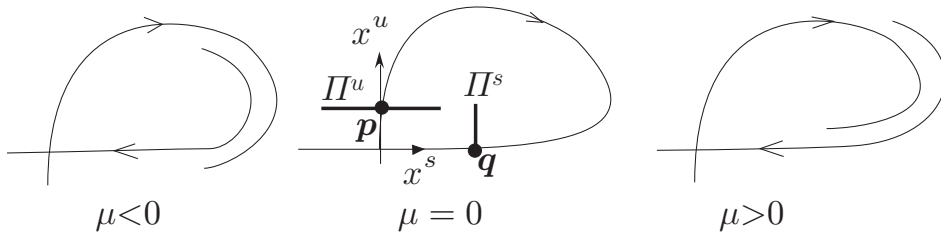
Esempio 5.4.2 Equazioni differenziali ordinarie autonome in dimensione due.

Siano dati $\lambda_1, \lambda_2, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, $\lambda_1 \neq -\lambda_2$, ed

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x + \nu^x(x, y; \mu) \\ \dot{y} = \lambda_2 y + \nu^y(x, y; \mu) \end{cases}$$

Per tale sistema si ha allora $x^s \equiv x$ ed $x^u \equiv y$. Inoltre, l'origine ammetta, per $\mu = 0$ un'omoclina Γ , intersezione (tangente) delle varietà $W^s(0, 0), W^u(0, 0)$, che scompare per $\mu \neq 0$, e lo fa in modo tale che per $\mu < 0$ la $W^u(0, 0)$ si avvolge "all'esterno" della varietà $W^s(0, 0)$, mentre accade il contrario per $\mu > 0$. Sia cioè: $\mu \leq 0 \Rightarrow \phi^y(T, 0, 0^+) \leq 0$.

[Hanno un comportamento di questo tipo, ad esempio, le varietà dell'equazione di Duffing $\ddot{x} + \mu \dot{x} - x + x^3 = 0$; tuttavia questa equazione *non* verifica l'ipotesi $\lambda_1 \neq -\lambda_2$, e quindi per essa occorre modificare leggermente la discussione che segue].



Sulle sezioni $\Sigma_\varepsilon^s, \Sigma_\varepsilon^u$ si specializzano i sottoinsiemi

$$\begin{aligned} \Pi^s &:= \left\{ \mathbf{x} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Sigma_\varepsilon^s \mid x = \varepsilon, \quad y \in (0, \varepsilon] \right\} \subset \Sigma_\varepsilon^s \setminus W_{loc}^s \\ \Pi^u &:= \left\{ \mathbf{x} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Sigma_\varepsilon^u \mid |x| \leq \varepsilon, \quad y = \varepsilon \right\} \subset \Sigma_\varepsilon^u \setminus W_{loc}^u. \end{aligned}$$

$\mathbf{x}_0$ individua un punto che è in Π^s se $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}_0^s, \mathbf{x}_0^u)^T \equiv (\varepsilon, y_0)^T$ con $0 < y_0 \leq \varepsilon$. Per esso il flusso linearizzato è $\phi^\ell(t, x_0, y_0) = (e^{\lambda_1 t} x_0, e^{\lambda_2 t} y_0)^T$, e quindi l'istante $\tau_0 = \tau_0(\varepsilon, y_0)$ per il quale $\phi^\ell(\tau_0(\varepsilon, y_0), \varepsilon, y_0)$ appartiene a Π^u è soluzione della $e^{\lambda_2 \tau_0} y_0 = \varepsilon$, e ciò indipendentemente dal parametro μ purché piccolo. Pertanto è non vuoto l'insieme $U_q \cap \Pi^s$ sul quale definire la

$$\mathcal{P}_0^\ell : U_q \cap \Pi^s \rightarrow \Pi^u \quad \text{è data da} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon \\ y_0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 \tau_0} \varepsilon \\ e^{\lambda_2 \tau_0} y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon(\varepsilon/y_0)^{\lambda_1/\lambda_2} \\ \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Per le citate proprietà di regolarità si ha che esiste a sua volta $U_p \subset \Pi^u$, intorno di $\mathbf{p} \equiv (0, \varepsilon)^T$, tale che $\mathcal{P}_1(x, \varepsilon; \mu) \subset \Sigma_\varepsilon^s$ per ogni punto

$$\mathbf{x}_1 \equiv (x, \varepsilon)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} =: \mathbf{p} + \mathbf{u} \in U_p;$$

ed in particolare si ha $\mathcal{P}_1(0, \varepsilon; 0) = (\varepsilon, 0)^T \equiv \mathbf{q}$. Con uno sviluppo di Taylor di centro il punto $(\mathbf{p}; 0) \equiv (0, \varepsilon; 0)$ con incremento spaziale $\mathbf{u} \equiv (x, 0)^T$ e per μ piccoli, si valuta allora

$$\mathcal{P}_1^\ell(\mathbf{p} + \mathbf{u}; \mu) = \mathcal{P}_1^\ell(\mathbf{p}) + \partial \mathcal{P}_1^\ell(\mathbf{p}) \mathbf{u} + \partial_\mu \mathcal{P}_1^\ell(\mathbf{p}) \mu = \mathbf{q} + \mathbf{s} + \mathbf{b}$$

ed è necessariamente $\mathbf{s} \equiv (0, \cdot)^T$ e $\mathbf{b} \equiv (0, \cdot)^T$ affinché il punto $\mathcal{P}_1^\ell(\mathbf{p} + \mathbf{u}; \mu)$ possa essere un punto di Σ_ε^s ; più esplicitamente si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1^\ell(x, \varepsilon; \mu) &= \mathcal{P}_1^\ell(0, \varepsilon; 0) + \partial \mathcal{P}_1^\ell(0, \varepsilon; 0) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \partial_\mu \mathcal{P}_1^\ell(0, \varepsilon; 0) \mu \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdot \\ a & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ ax + b\mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(la matrice ha necessariamente nullo l'elemento (1, 1) in modo che i punti $\mathcal{P}_1^\ell(x, \varepsilon; \mu)$, così come $\mathbf{q} \equiv (\varepsilon, 0)^T$, siano tutti punti di Σ^s . Inoltre le ipotesi sul segno del parametro μ , e sul fatto che la W^u è "meno curva" quando μ aumenta, danno $b > 0$).

Pertanto, con $V_q := \mathcal{P}_0^{\ell-1} U_p \cap U_q$, si ricava la mappa completa

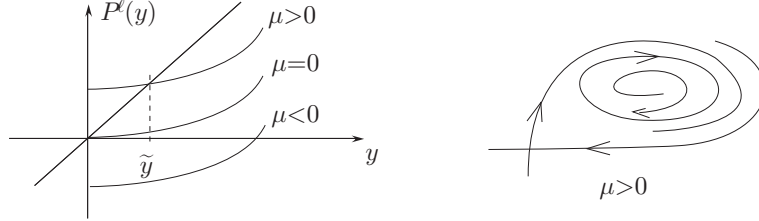
$$\mathcal{P}^\ell : V_q \cap \Pi^s \rightarrow \Pi^s \quad \text{data da} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon \\ y_0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varepsilon \\ a\varepsilon(y_0)^\varepsilon \lambda_1/\lambda_2 + b\mu \end{pmatrix};$$

e quindi, posto $\tilde{a} := a\varepsilon^{1+\lambda_1/\lambda_2}$ e $\delta := -\lambda_1/\lambda_2$ si ha infine

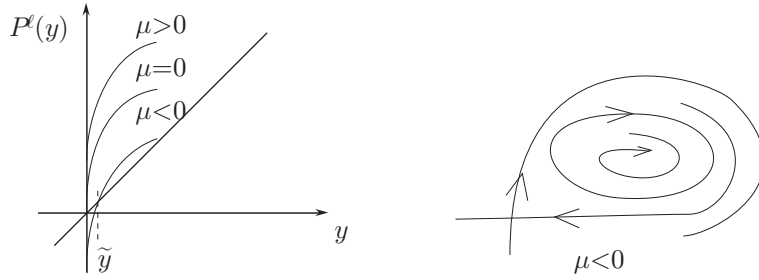
$$(y, \mu) \in (0, \varepsilon] \times (0, \varepsilon] \mapsto \mathcal{P}^\ell(y; \mu) = \tilde{a}y^\delta + b\mu.$$

Stanti le ipotesi fatte, sussistono le seguenti possibilità:

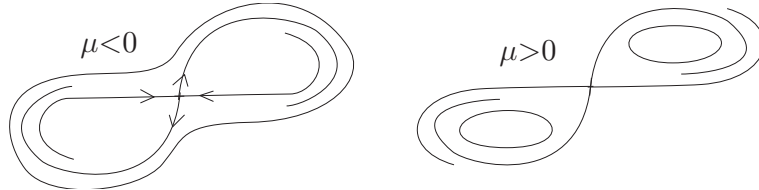
- (i) $\delta > 1$, che dà $\partial_y \mathcal{P}^\ell(0, 0) = 0$. Per $\mu > 0$ e piccolo, la $\mathcal{P}^\ell$ ha un punto fisso con $\tilde{y} > 0$ *stabile ed iperbolico*, e quindi il sistema ammette un'orbita periodica attrattiva (un ciclo limite stabile)



- (ii) $\delta < 1$, che dà $(\partial_y \mathcal{P}^\ell(0, 0))^{-1} = 0$. Per $\mu < 0$ e piccolo in valore assoluto, la $\mathcal{P}^\ell$ ha un punto fisso con $\tilde{y} > 0$ *instabile ed iperbolico*, e quindi il sistema ammette un'orbita periodica repulsiva (un ciclo limite instabile)



Eventuali simmetrie del campo possono portare a *coppie* di orbite del genere detto ed anche ad altre orbite periodiche esterne all'intorno in esame



Comunque si vede che nel caso di flussi in $\dim = 2$ non si generano comportamenti caotici, almeno per la presenza di omocline. $\square$

Esempio 5.4.3 Equazioni differenziali ordinarie autonome in dimensione tre, e con un'omoclina relativa ad un punto fisso iperbolico.

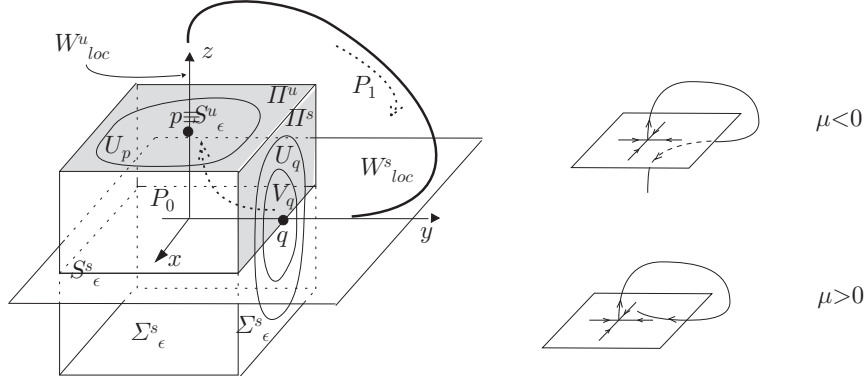
La linearizzata può avere o tutte le $\lambda_{1,2,3}$ reali, oppure l'una reale e le altre due complesse coniugate. Sia, ad esempio, $-, -, +$ la segnatura degli autovalori nel primo caso, e $+, -, -$ la segnatura rispettivamente della terza radice e delle parti reali delle altre due nel secondo caso; (e basta cambiare t con $-t$ per vedere che questi due casi sono esaustivi).

Caso 2.1. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3$

Il sistema sia ridotto a

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x + \nu^1(x, y, z; \mu) \\ \dot{y} = \lambda_2 y + \nu^2(x, y, z; \mu) \\ \dot{z} = \lambda_3 z + \nu^3(x, y, z; \mu) \end{cases}$$

con $\nu^{1,2,3} \in C^{r \geq 2} \cap O(x^2 + y^2 + z^2)$. In questo caso si ha $\mathbf{x}^s \equiv (x, y)$ ed $\mathbf{x}^u \equiv z$. Inoltre l'origine ammetta per $\mu = 0$ un'omoclina Γ tangente nell'origine agli assi z ed y , e che scompare per $\mu \neq 0$ in modo che si abbia $\mu \leq 0 \Rightarrow \phi^z(\Gamma, 0, 0, 0^+) \leq 0$. Per convenienza, si userà la norma $|\cdot|_\infty$.



Sulle sezioni Σ_ε^s , Σ_ε^u si specializzano i sottoinsiemi

$$\begin{aligned}\Pi^s &:= \left\{ (x, y, z) \in \Sigma_\varepsilon^s \mid |x| \leq \varepsilon, y = \varepsilon, z \in (0, \varepsilon] \right\} \subset \Sigma_\varepsilon^s \setminus W_{loc}^s \\ \Pi^u &:= \left\{ (x, y, z) \in \Sigma_\varepsilon^u \mid |x| \leq \varepsilon, |y| \leq \varepsilon, z = \varepsilon \right\} \subset \Sigma_\varepsilon^u \setminus W_{loc}^u.\end{aligned}$$

Un punto $\mathbf{x}_0$ è in Π^s se $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}_0^s; \mathbf{x}_0^u)^T \equiv (x_0, \varepsilon; z_0)^T$ con $-\varepsilon < x_0 \leq \varepsilon$ e $0 < z_0 \leq \varepsilon$; per esso il flusso linearizzato è

$$\phi^\ell : (t, x_0, y_0, z_0) \mapsto (e^{\lambda_1 t} x_0, e^{\lambda_2 t} y_0, e^{\lambda_3 t} z_0),$$

e quindi l'istante $\tau_0 = \tau_0(x_0, \varepsilon, z_0)$ per il quale $\phi^\ell(\tau_0(x_0, \varepsilon, z_0), x_0, \varepsilon, z_0)$ appartiene a Π^u è soluzione della $e^{\lambda_3 \tau_0} z_0 = \varepsilon$. Pertanto è possibile definire la

$$\mathcal{P}_0^\ell : U_q \cap \Pi^s \rightarrow \Pi^u \quad \text{data da} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ \varepsilon \\ z_0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_0(\varepsilon/z_0)^{\lambda_1/\lambda_3} \\ \varepsilon(\varepsilon/z_0)^{\lambda_2/\lambda_3} \\ \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Per le assunte proprietà di regolarità, è non vuoto l'insieme $U_p \subset \Pi^u$, intorno di $\mathbf{p} \equiv (0, 0, \varepsilon)^T$, e tale che $\mathcal{P}_1(x, y, \varepsilon; \mu) \subset \Sigma_\varepsilon^s$ per ogni $\mathbf{x}_1 \equiv (x, y, \varepsilon)^T =: \mathbf{p} + \mathbf{u} \in U_p$; ed in particolare si ha $\mathcal{P}_1(0, 0, \varepsilon; 0) = (0, \varepsilon, 0)^T \equiv \mathbf{q}$. Con uno sviluppo di Taylor si valuta allora

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1^\ell(x, y, \varepsilon; \mu) &= \mathcal{P}_1^\ell(0, 0, \varepsilon; 0) + \partial \mathcal{P}_1^\ell(0, 0, \varepsilon; 0) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \partial_\mu \mathcal{P}_1^\ell(0, 0, \varepsilon; 0) \mu \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \\ c & d & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e\mu \\ 0 \\ f\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + e\mu \\ \varepsilon \\ cx + dy + f\mu \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(la matrice ha senz'altro nulli gli elementi della seconda riga per permettere che i punti $\mathcal{P}_1^\ell(x, y, \varepsilon; \mu)$, così come $\mathbf{q} \equiv (0, \varepsilon, 0)^T$, siano tutti punti di Σ^s . Inoltre le ipotesi sul segno del parametro μ danno $f > 0$).

Pertanto, con $V_q := \mathcal{P}_0^{\ell-1} U_p \cap U_q$, e con $\tilde{a} := a\varepsilon^{\lambda_1/\lambda_3}$, $\tilde{b} := b\varepsilon^{\lambda_2/\lambda_3}$, $\tilde{c} := c\varepsilon^{\lambda_1/\lambda_3}$, $\tilde{d} := d\varepsilon^{\lambda_2/\lambda_3}$, la mappa finale risulta essere (per $z > 0$)

$$\mathcal{P}^\ell : V_q \cap \Pi^s \rightarrow \Pi^s \quad \text{data da} \quad \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{a}xz^{|\lambda_1|/\lambda_3} + \tilde{b}z^{|\lambda_2|/\lambda_3} + e\mu \\ \tilde{c}xz^{|\lambda_1|/\lambda_3} + \tilde{d}z^{|\lambda_2|/\lambda_3} + f\mu \end{pmatrix}.$$

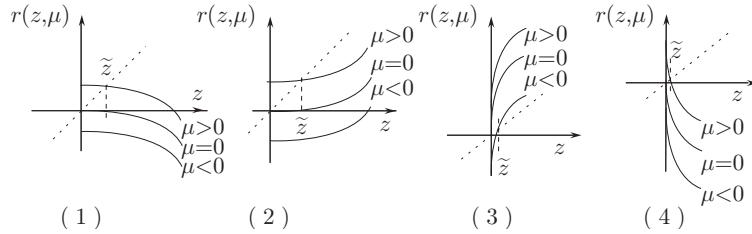
La condizione di punto fisso $\mathcal{P}^\ell(x, z) = (x, z)$, che permette di verificare la presenza di eventuali cicli nei quali possa essersi biforcata l'omoclina, fornisce (con buona approssimazione vicino a questa) la relazione

$$\begin{aligned}x &= (1 - \tilde{a}z^{|\lambda_1|/\lambda_3})^{-1}(e\mu + \tilde{b}z^{|\lambda_2|/\lambda_3}) \sim (e\mu + \tilde{b}z^{|\lambda_2|/\lambda_3}) \\ z &\sim r(z; \mu) := f\mu + \tilde{c}z^{|\lambda_1|/\lambda_3} (e\mu + \tilde{b}z^{|\lambda_2|/\lambda_3}) + \tilde{d}z^{|\lambda_2|/\lambda_3}.\end{aligned}$$

Siccome $\mathcal{P}_1^\ell$ è invertibile, senz'altro $\tilde{a}\tilde{d} - \tilde{c}\tilde{b} \neq 0$ e quindi $\tilde{d}, \tilde{c}$ non possono essere simultaneamente nulli; ne segue che la derivata in $z = 0$ di $r(z; \mu)$ può avere valore

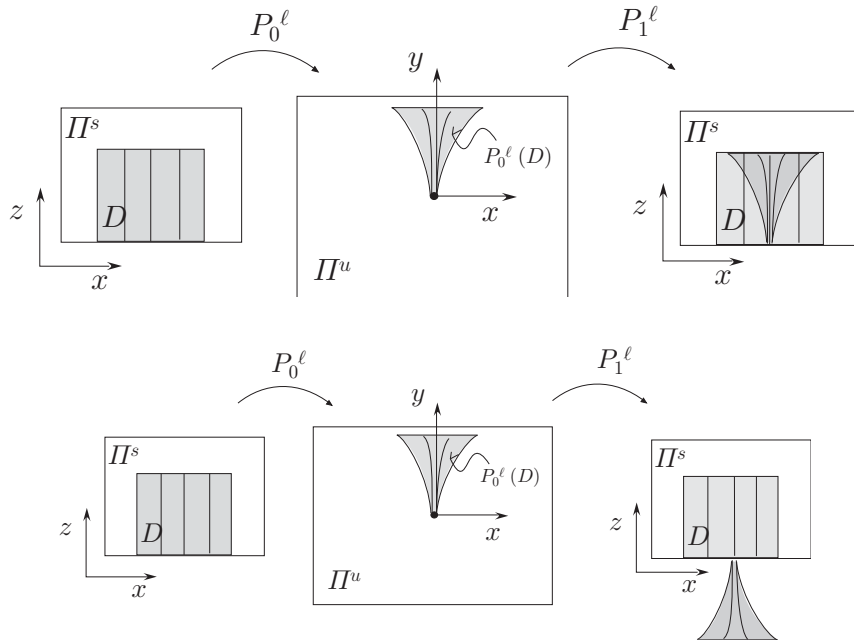
$$\partial_z r(0; \mu) =: \Delta = \begin{cases} \infty & \text{se } |\lambda_2| < \lambda_3, \quad \text{o } |\lambda_1| < \lambda_3; \\ 0 & \text{se } |\lambda_1| > \lambda_3, \quad \text{e } |\lambda_2| > \lambda_3. \end{cases}$$

In definitiva si hanno, localmente, i seguenti quattro casi (generici) l'evenienza dei quali dipende da effetti globali della dinamica:



- (1) $\Delta = 0$ ed $r(\tilde{z}; \mu) < f\mu$. In tal caso, per $\mu > 0$ e piccolo, la $\mathcal{P}^\ell$ ha un punto fisso $\tilde{z} > 0$ stabile ed iperbolico, e quindi il sistema ammette un'orbita periodica attrattiva (un ciclo limite stabile)
- (2) $\Delta = 0$ ed $r(\tilde{z}; \mu) > f\mu$. In tal caso, per $\mu > 0$ e piccolo, la $\mathcal{P}^\ell$ ha un punto fisso $\tilde{z} > 0$ stabile ed iperbolico, e quindi il sistema ammette un'orbita periodica attrattiva (un ciclo limite stabile)
- (3) $\Delta = \infty$ ed $r(\tilde{z}; \mu) > f\mu$. In tal caso, per $\mu < 0$ e piccolo, la $\mathcal{P}^\ell$ ha un punto fisso $\tilde{z} > 0$ instabile ed iperbolico, e quindi il sistema ammette un'orbita periodica repulsiva (un ciclo limite instabile)
- (4) $\Delta = \infty$ ed $r(\tilde{z}; \mu) < f\mu$. In tal caso, per $\mu > 0$ e piccolo, la $\mathcal{P}^\ell$ ha un punto fisso $\tilde{z} > 0$ instabile ed iperbolico, e quindi il sistema ammette un'orbita periodica repulsiva (un ciclo limite instabile).

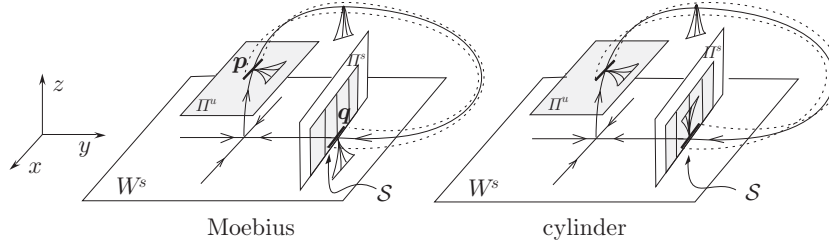
il fatto che negli ultimi due casi la condizione di punto fisso si è potuta manifestare per valori di μ con entrambi i segni, e cioè sia alla destra che alla sinistra (ma non in entrambe) del valore $\mu = 0$, si spiega osservando che il meccanismo di ritorno può avvenire, nei due casi, secondo le seguenti due possibilità (a dipendere dagli effetti globali della dinamica, che assegnano i segni delle costanti $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}$). Si osservi anzitutto che l'essere $\lambda_1 < \lambda_2$ implica che le mappe $\mathcal{P}_0^\ell$ e $\mathcal{P}_1^\ell$ agiscono, per $\mu = 0$, come in figura:



oppure

Infatti: si denoti con T il tubo di flusso di basi U_p, U_q che evolve intorno all'omoclina Γ , durante un "periodo evolutivo" di durata $\Delta t \approx \tau_1$ necessario per passare da Π^u a Π^s ; e di questo si considerino solo le traiettorie che passano per i punti $\mathbf{x}_0$ del "segmento" $S := T \cap U_q \cap W^s$. Si congiungano poi (arbitrariamente e linearmente) i punti di questo segmento con quelli del "segmento": $S' := U_p \cap W^u \cap \{\phi^\ell(-\tau_1(\mathbf{x}_0), t_0, \mathbf{x}_0)\}$. Come accennato nella seguente figura, il risultato di tale costruzione è una superficie omeomorfa o ad un cilindro, oppure ad un

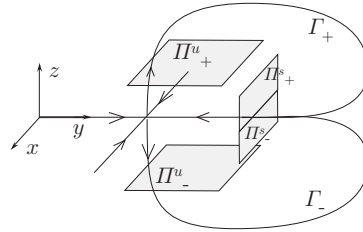
nastro di Moebius. Più in generale, il sistema può “avvolgersi” intorno a Γ o un numero intero o un numero semi-intero di giri rispettivamente, e corrispondentemente si ha $r(z^+; \mu) > f\mu$ o $r(z^+; \mu) < f\mu$.



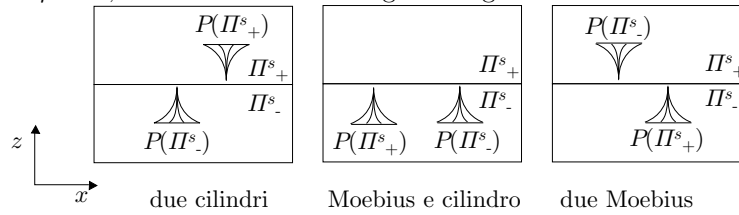
In tal modo si vede che la biforcazione può dar luogo a un ciclo solo se l'immagine $\mathcal{P}^\ell(D)$ viene spostata, variando il parametro μ , verso le z positive (risp. negative) nel caso del nastro di Moebius (risp. del cilindro), e quindi per valori di μ positivi (risp. negativi).

Anche in questo caso comunque il sistema biforca in una traiettoria periodica, e quindi il moto si mantiene regolare.

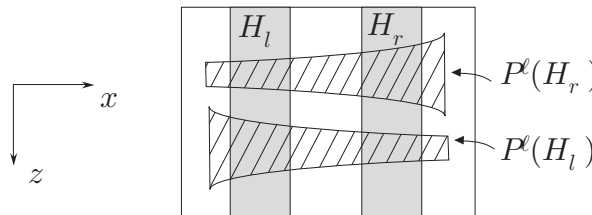
Se però il campo è tale da ammettere per $\mu = 0$ due omocline, (ad esempio perché simmetrico), e quindi una delle due possibilità accennate qui in figura



allora, attribuito un indice $+$ e $-$ alle sezioni relative a ciascuna omoclina Γ_+ e Γ_- rispettivamente, si ha che le varie possibilità, per $\mu = 0$, sono riassunte nella seguente figura



Pertanto, se il parametro μ viene variato opportunamente, può accadere che il meccanismo di ritorno sulla sezione Π^s generi strisce “orizzontali” e “verticali” con un comportamento strutturalmente simile a quello della mappa a ferro di cavallo, e come tale caotico.



In tal caso, come è anche possibile mostrare direttamente, la mappa $\mathcal{P}^\ell$ ammette insiemi invarianti che sono iperbolici. $\square$

Caso 2.2. $\lambda_1 =: \rho + i\omega$, $\rho < 0$, $\omega > 0$; $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$; $\lambda_3 =: \lambda > 0$.

Il sistema sia ridotto a

$$\begin{cases} \dot{x} = \rho x - \omega y + \nu^1(x, y, z; \mu) \\ \dot{y} = \omega x + \rho y + \nu^2(x, y, z; \mu) \\ \dot{z} = \lambda z + \nu^3(x, y, z; \mu) \end{cases}$$

con $\lambda > -\rho > 0$, e con $\nu^{1,2,3} \in C^{r \geq 2} \cap O(x^2 + y^2 + z^2)$. Anche in questo caso si ha $\mathbf{x}^s \equiv (x, y)$ ed $\mathbf{x}^u \equiv z$, tuttavia ora sono trasversali al campo (entrante) sezioni del tipo: $\Sigma_\varepsilon^s := \{\mathbf{x} \equiv (x, y, z) \mid |x| \leq \varepsilon, y = 0, z \in (0, \varepsilon]\}$.

Per $\mu = 0$ l'origine ammetta un'omoclina Γ che scompare per $\mu \neq 0$ e, come nel caso precedente, si abbia $\mu \leq 0 \Rightarrow \phi^z(T, 0, 0, 0^+) \leq 0$; tuttavia, diversamente dal caso precedente, l'omoclina deve seguire il campo nelle sue rotazioni attorno all'asse z e quindi non sarà tangente ad alcun asse del piano (x, y) che passi per l'origine.

Si consideri dapprima $\mu = 0$. Sulle sezioni $\Sigma_\varepsilon^s, \Sigma_\varepsilon^u$, come primo tentativo, si specializzano le

$$\begin{aligned}\Pi^s &:= \left\{ (x, y, z) \in \Sigma_\varepsilon^s \mid |x| \leq \varepsilon, y = 0, z \in (0, \varepsilon] \right\} \subset \Sigma_\varepsilon^s \setminus W_{loc}^s \\ \Pi^u &:= \left\{ (x, y, z) \in \Sigma_\varepsilon^u \mid |x| \leq \varepsilon, |y| \leq \varepsilon, z = \varepsilon \right\} \subset \Sigma_\varepsilon^u \setminus W_{loc}^u.\end{aligned}$$

Siccome il flusso linearizzato è

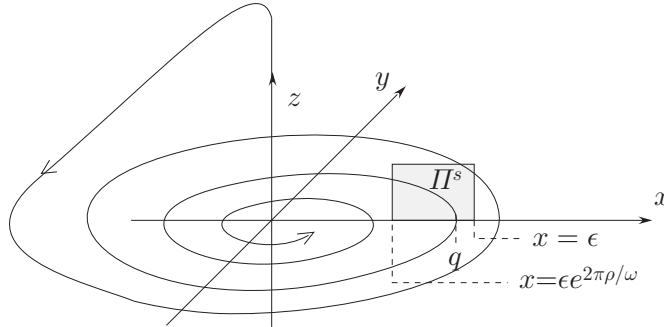
$$\phi^\ell(t, x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} e^{\rho t}(x_0 \cos \omega t - y_0 \sin \omega t) \\ e^{\rho t}(x_0 \sin \omega t + y_0 \cos \omega t) \\ e^{\lambda t} z_0 \end{pmatrix},$$

l'istante $\tau_0 = \tau_0(x_0, 0, z_0)$ per il quale il punto $\phi^\ell(\tau_0(x_0, 0, z_0), x_0, 0, z_0)$ appartiene a Π^u verifica la $e^{\lambda \tau_0} z_0 = \varepsilon$. Pertanto è

$$\mathcal{P}_0^\ell : U_q \Pi^s \rightarrow \Pi^u \quad \text{data da} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_0(\varepsilon/z_0)^{\rho/\lambda} \cos(\frac{\omega}{\lambda} \ln \varepsilon/z_0) \\ x_0(\varepsilon/z_0)^{\rho/\lambda} \sin(\frac{\omega}{\lambda} \ln \varepsilon/z_0) \\ \varepsilon \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Per poter stabilire la coniugazione con lo shift occorre che la mappa sia un omeomorfismo sulle sezioni trasverse, si devono perciò evitare ritorni multipli su Π_s prima che la traiettoria uscente da un qualsiasi (x_0, z_0) arrivi in Π^u . Siccome la coordinata “radiale” contrae secondo $e^{\rho t}$, ed il tempo di volo *per un giro* è $2\pi/\omega$, si ottiene quanto detto scegliendo la Π^s in modo non centrato rispetto all'origine e convenientemente piccola, e cioè assumendo:

$$\begin{aligned}\Pi^s &:= \left\{ (x, y, z) \in \Sigma_\varepsilon^s \mid e^{2\pi\rho/\omega} \varepsilon < x \leq \varepsilon, y = 0, z \in (0, \varepsilon] \right\} \subset \Sigma_\varepsilon^s \setminus W_{loc}^s \\ \Pi^u &:= \left\{ (x, y, z) \in \Sigma_\varepsilon^u \mid z = \varepsilon, \text{ ed } \exists (x_0) \in \Pi^s : \mathcal{P}_0^\ell(x_0) \in \Pi^u \right\} \subset \Sigma_\varepsilon^u \setminus W_{loc}^u.\end{aligned}$$



Trasformando le coordinate su Π^u in coordinate polari (r, θ) di centro il punto p , la mappa $\mathcal{P}_0^\ell$ è più opportunamente espressa dalla:

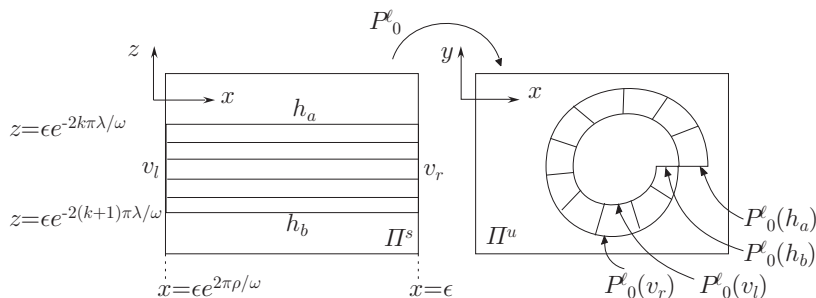
$$\mathcal{P}_0^\ell : U_q \cap \Pi^s \rightarrow \Pi^u \quad \text{data da} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r(x_0, z_0) \\ \theta(x_0, z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0(\varepsilon/z_0)^{\rho/\lambda} \\ (\omega/\lambda) \ln \varepsilon/z_0 \end{pmatrix},$$

e quindi

$$\theta(x_0, z_0) = \frac{\omega}{\lambda} \ln \frac{\varepsilon}{z_0} \quad \text{appartiene a } (2k\pi, 2(k+1)\pi)$$

se e solo se

$$z_0 \quad \text{appartiene a} \quad \left(\varepsilon e^{-2(k+1)\pi\lambda/\omega}, \quad \varepsilon e^{-2k\pi\lambda/\omega} \right).$$



D'altra parte, per le proprietà di regolarità del sistema, esiste un intorno $U_p \subset \Pi^u$ di $\mathbf{p} \equiv (0, 0, \varepsilon)^T$, la cui immagine secondo $\mathcal{P}_1$ cade in Σ^s , e cioè $\mathcal{P}_1(x, y, \varepsilon; 0) \in \Sigma^s$ quando $(x, y, \varepsilon) \in U_p$, e per il quale $\mathcal{P}_1(0, 0, \varepsilon; 0) = \mathbf{q} \equiv (q^x, 0, 0)^T := \Gamma \cap \Pi^s$, ove: $q^x = \frac{\varepsilon}{2}(1 + e^{2\pi\rho/\omega})$.

Con uno sviluppo di Taylor si ha allora

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1^\ell(x, y, \varepsilon; 0) &= \mathcal{P}_1^\ell(0, 0, \varepsilon; 0) + \partial \mathcal{P}_1^\ell(0, 0, \varepsilon; 0) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q^x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \\ c & d & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

(la matrice ha nulli gli elementi della seconda riga in modo che i punti $\mathcal{P}_1^\ell(x, y, \varepsilon; \mu)$ così come $(q^x, 0, 0)$, siano punti di Σ^s).

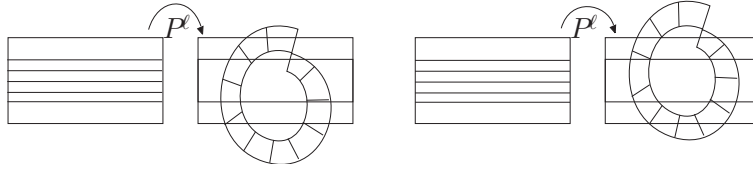
Pertanto la Poincaré lineare, per $\mu = 0$, sarà

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mu=0}^\ell : V_q \cap \Pi^s &\rightarrow \Pi^s \quad \text{data da} \\ \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x(\varepsilon z)^{\rho/\lambda} [a \cos(\frac{\omega}{\lambda} \ln \varepsilon z) + b \sin(\frac{\omega}{\lambda} \ln \varepsilon z)] + q^x \\ x(\varepsilon z)^{\rho/\lambda} [c \cos(\frac{\omega}{\lambda} \ln \varepsilon/z) + d \sin(\frac{\omega}{\lambda} \ln \varepsilon/z)] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si chiamino Q_k i rettangoli

$$Q_k := \left(\varepsilon e^{\frac{2\pi}{\omega}\rho}, \varepsilon \right] \times \left(\varepsilon e^{-\frac{2(k+1)\pi}{\omega}\lambda}, \varepsilon e^{-\frac{2k\pi}{\omega}\lambda} \right] \subset V \subset \Pi^s.$$

Intersezioni di $\mathcal{P}_{\mu=0}^\ell(Q_k)$ con altri rettangoli Q_i si possono avere secondo le due modalità mostrate qui di seguito.



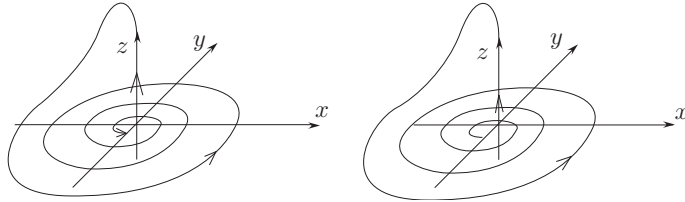
(•) Sotto l'ipotesi $\lambda > -\rho > 0$, fissato $\alpha \in [1, \frac{\lambda}{-\rho})$ è possibile scegliere (vedi: [Wiggins 2 Lem. 4.8.3]) $k_0 \in \mathbb{N}$ ed $N \in \mathbb{N}$ abbastanza grandi da far sì che ogni immagine $\mathcal{P}^\ell(Q_k)$ intersechi in (almeno) due disgiunte "striscie verticali" *ciascun rettangolo* Q_i avente $i \geq \frac{k_0 + N}{\alpha} \geq k_0$. Pertanto il rettangolo

$$Q := \left(\varepsilon e^{2\pi\rho/\omega}, \varepsilon \right] \times \left(\varepsilon e^{-2(k_0+N)\pi\lambda/\omega}, \varepsilon e^{-2k_0\pi\lambda/\omega} \right] \subset V \subset \Pi^s$$

è coniugato ad un alfabeto a $2N$ simboli, (una coppia di simboli per ogni striscia Q_{k_0+h} con $0 \leq h < N$), e la dinamica rimane coniugata allo shift su $\mathbb{Y}_{2N}^{\mathbb{Z}}$.

(•) Nel secondo dei due casi in figura, (vedi ancora [Wiggins 1]) l'alfabeto avrà infiniti simboli e lo shift sarà un subshift finito. Inoltre l'arbitrarietà di N mostra che si ha un infinità numerabile di "ferri di cavallo" ciascuno con la sua infinità numerabile di punti di equilibrio, e sue proprietà caratteristiche.

Quando il parametro μ venga fatto variare l'omoclina, come si è detto, varierà anch'essa



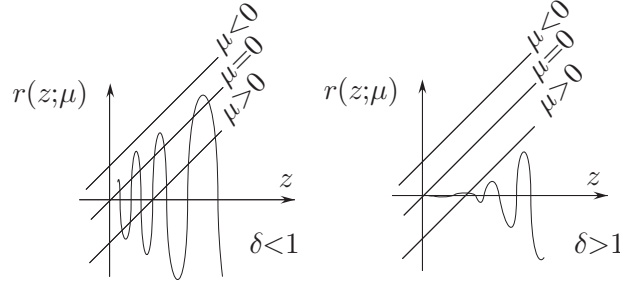
e corrispondentemente la $\mathcal{P}^\ell$ diviene con buona approssimazione $\mathcal{P}_{\mu=0}^\ell + \begin{pmatrix} e\mu \\ f\mu \end{pmatrix}$ con $f > 0$. Rinominando le costanti e ponendo $\delta := |\rho|/\lambda$ si ottiene

$$\mathcal{P}_{\mu \neq 0}^\ell : V_q \cap \Pi^s \rightarrow \Pi^s \quad \text{data da} \quad \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha x z^\delta \cos(\gamma \ln z + \varphi_1) + e\mu + q^x \\ \beta x z^\delta \cos(\gamma \ln z + \varphi_2) + f\mu \end{pmatrix}.$$

Imponendo poi la condizione di punto fisso $\mathcal{P}^\ell(x, z) = (x, z)$ allo scopo di verificare la presenza di eventuali cicli nei quali possa essersi biforcata l'omoclina, si ottiene (in prossimità di questa) la relazione

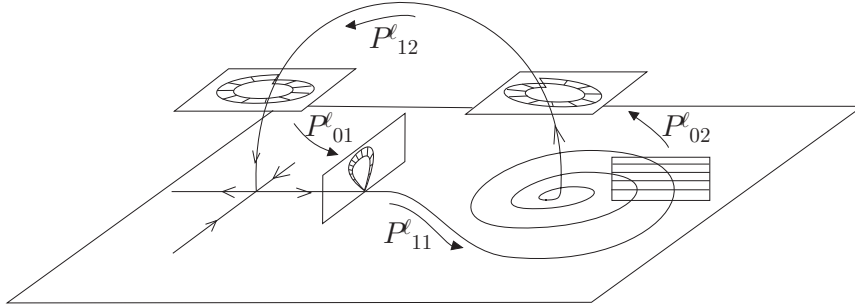
$$z = r(z; \mu) := f\mu + (e\mu + q^x)\beta z^\delta \cos(\gamma \ln z + \varphi_2)$$

e quindi qualcosa con il seguente comportamento



Per cui, se $\delta < 1$ e $\mu = 0$ si hanno una infinità numerabile di orbite periodiche, (come si è detto), mentre solo un numero finito se $\mu \leq 0$. Viceversa, se $\delta > 1$ si ha una sola orbita periodica e solo se $\mu > 0$, ed altrimenti la sola omoclina. La loro stabilità non è banale. Nel caso $\delta > 1$ si ha stabilità come per l'omoclina, e la si studia con gli invarianti di $\partial \mathcal{P}^\ell$. Per $\delta < 1$ tale studio è complicato dalla presenza di possibili biforcazioni tangenti nel grafico qui sopra (vedi: [Wiggins 1]). È chiaro infine che eventuali simmetrie peggiorano la situazione. $\square$

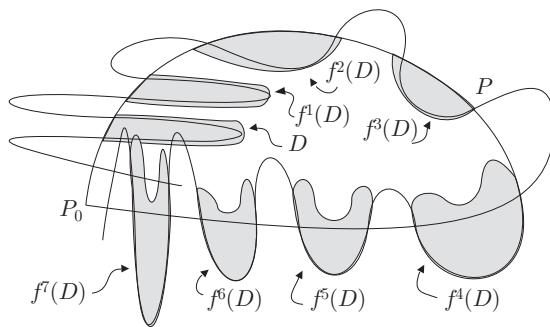
N.B. 5.4.4 Il meccanismo di ritorno dovuto alla presenza di un'orbita omoclina, e che via la horseshoe innesca il procedimento di generazione del caos, non si può realizzare se una sola eteroclina è presente. Se però le eterocline sono più di una, esse possono essere collegate fra loro in modo tale da permettere tale innesco. Nella seguente figura si accenna ad un caso che permette una infinità di horseshoes purché $(\lambda_2 \rho)/(\lambda \lambda_1) < 1$, ed altrimenti il ciclo eteroclino è attrattivo con transienti caotici. Un'eventuale perturbazione poi dà luogo ad una infinità numerabile di horseshoes. $\diamond$



Come ultimo esempio, ma non meno importante, di innesco del procedimento di ritorno nel caso di mappe, verrà qui accennato il caso in cui una coppia di varietà $W^s(p_0)$ e $W^u(p_0)$, relative ad un punto di equilibrio p_0 , che per un certo valore del parametro hanno intersezione non trasversa, rompono tale tangenza ed ammettono intersezione trasversa. In tal caso la loro invarianza genera la presenza di una traiettoria omoclina che può portare ad una geometria capace di generare horseshoes. Il teorema di Smale-Birkhoff, (vedi: [Guckenheimer p.188 e 252]), assicura allora l'esistenza di un insieme sul quale la dinamica è topologicamente coniugata allo shift finito.

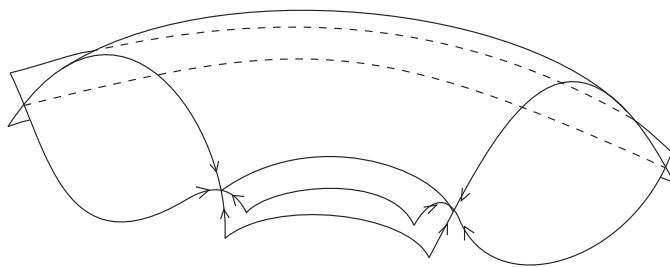
Esempio 5.4.5 Sia $\mathcal{F}$ un diffeomorfismo da $\mathbb{R}^2$ in sé, e sia p_0 un suo punto fisso ed iperbolico. Ad esempio la $\mathcal{F}$ può essere la mappa di Poincaré di un'equazione alle derivate ordinarie che ammette un ciclo iperbolico (instabile). Si supponga inoltre che le due varietà (non locali) $W^s(p_0)$ e $W^u(p_0)$ si intersechino in qualche punto $q \neq p_0$ in modo trasverso; sia cioè $q \in W^s(p_0) \cap W^u(p_0)$. Come si è già detto, siccome entrambe $W^s(p_0), W^u(p_0)$ sono invarianti, anche l'orbita $\{\mathcal{F}^n(q)\}_{n \in \mathbb{N}}$ deve appartenere a $W^s(p_0) \cap W^u(p_0)$. Si genera pertanto una omoclina "trasversa" relativa a p_0 e comportamenti come quello in figura. Detta D una regione a forma di "lobo" che contenga una sola "ansa" tra le due varietà, la sua $\mathcal{F}$ -immagine non può che essere anche lei un lobo da uno dei due lati della varietà, (a seconda della parità di $\mathcal{F}$), magari con qualche salto. Dopo un numero finito di iterazioni della mappa $\mathcal{F}$ si ha che, seguendo la $W^u(p_0)$ prima e la $W^s(p_0)$ poi, si ritorna nell'intorno di p_0 dal quale si era partiti.

È chiaro come questo comportamento inneschi le horseshoes.



□

Esempio 5.4.6 Sia $\mathcal{F}$ un diffeomorfismo da $\mathbb{R}^3$ in sé, e sia $\mathcal{F}$ (e cioè le direzioni iperboliche vengano espanse e contratte più di quanto avvenga per quella tangente, [Wiggins 1]). Si assuma anche che le varietà stabile ed instabile del toro si intersechino trasversalmente (per cui $\dim(T_q W^s(p_0) \cap T_q W^u(p_0)) = 1$ per ogni punto $p_0 \in \mathbb{T}_0$ e per ogni $q \in W^s(p_0) \cap W^u(p_0)$), e che l'intersezione sia un altro toro $\mathbb{T}$ che risulta allora un toro omoclino trasverso. Anche in questo caso l'invarianza di $W^s(p_0), W^u(p_0)$ impone che le orbite di $\mathbb{T}$ appartengano anch'esse a $W^s(p_0) \cap W^u(p_0)$, e quindi la presenza di un $\mathbb{T}$ ne implica infiniti altri. Su ciascun piano "radiale" si ottiene una figura come quelle viste più sopra. Partendo cioè da un "lobo" $D \times \mathbb{T}$ si ottiene un insieme invariante che è un $\text{Cantor} \times \mathbb{T}$. Naturalmente rimane incognita la dinamica relativa alla coordinata $\theta \in \mathbb{T}$.



□

Capitolo 6

Alcuni Metodi Perturbativi

6.1 Gli sviluppi asintotici

Data una famiglia di campi $v : (t, x, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times \mathbb{M} \times \mathbb{V} \mapsto v(t, x, \varepsilon) \in T_x \mathbb{M}$ indicata da un parametro $\varepsilon \in N(0) \subset \mathbb{V} \equiv \mathbb{R}^m$ (e sufficientemente regolari rispetto a tutte le variabili), si consideri la famiglia di equazioni

$$\dot{x} = v(t, x; \varepsilon), \quad x(t_0) = x_0. \quad (1.1)$$

Come è noto, salvo aumentare la dimensione dello spazio delle fasi ed aggiungere l'equazione $\dot{\varepsilon} = 0$, tale famiglia può essere riscritta nella forma

$$\dot{s} = V(t, s), \quad \text{con} \quad s = \begin{pmatrix} x \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v(t, x; \varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \varepsilon \end{pmatrix},$$

ed è quindi lecito fare ricorso al teorema di dipendenza continua dal dato iniziale sia per quanto riguarda il modo con cui la soluzione del problema (1.1) dipende dal dato x_0 , sia per come dipende dal parametro ε ; (si veda a questo proposito anche il Teorema 3.1 del §I.3).

Si supponga di conoscere la soluzione $\phi_0 : t \mapsto \phi_0(t, t_0, x_0)$ della

$$\dot{x} = v(t, x; 0), \quad x(t_0) = x_0; \quad (1.2)$$

ci si vuole servire di tale conoscenza per individuare l'andamento delle soluzioni $\phi : t \mapsto \phi(t, t_0, x_0)$ della (1.1) anche per valori non nulli del parametro ε , purché “convenientemente piccoli”: $\|\varepsilon\| \in B_\delta(0)$.

Segue dalle proprietà di dipendenza continua dal dato che, se ci si limita ad esaminare solo ciò che accade per tempi limitati, si riconosce che la soluzione ϕ del sistema “perturbato”: (1.1) e quella ϕ_0 del sistema non perturbato: (1.2) non solo sono tanto più vicine fra loro quanto più piccola è la perturbazione, ma sono anche tali che la funzione che esprime lo scarto è ben approssimata nell'intorno dell'istante iniziale dalla soluzione dell'equazione variazionale

$$\dot{u} = \partial_x v(t, \phi_0(t, t_0, x_0); 0)u + \partial_\varepsilon v(t, \phi_0(t, t_0, x_0); 0)1_m$$

con condizioni iniziali $u(t_0) = u_0$ finito, arbitrario, ed anzi scelto spesso $u_0 = 0$. Naturalmente tutto ciò è valido purché il campo sia abbastanza regolare rispetto a (x, ε) .

I metodi *Perturbativi* sono quelli che si servono di tale circostanza per studiare più in dettaglio la funzione scarto: $u_{(\varepsilon)} := \phi - \phi_0$.

Per sua stessa natura tale studio è locale rispetto a tutte le variabili presenti; e se, come talvolta accade, i risultati così ottenuti hanno validità globale, generalmente questo non può essere assunto apriori. Anche per questo motivo, *nel seguito non si distingueranno i punti sulla varietà dai loro rappresentanti su una qualche carta, ed i problemi si intenderanno sempre assegnati in opportune coordinate, e quindi su prescelti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$.*

I metodi di calcolo approssimato possono pensarsi suddivisi in

- *Metodi locali:* quelli che fin dall'inizio abbandonano la speranza di essere significativi anche lontano dai dati assegnati, e qualora ciò accada è cosa non facilmente dimostrabile a priori. Essi sviluppano le funzioni in esame mediante tecniche *la cui validità è, in generale, ristretta a regioni limitate dello spazio delle fasi ampliato e contenenti il dato iniziale*. Se ne possono considerare come esempio i metodi che esprimono le soluzioni mediante serie di potenze rispetto alla variabile indipendente (vedi Cap. I) o, più in generale, i vari metodi perturbativi che cercano sviluppi delle soluzioni mediante somme di funzioni di una variabile “piccola” ε , che nel caso precedente può essere identificata con l'incremento: $(t - t_0)$ della variabile indipendente.
- *Metodi globali:* quelli che si occupano di raccordare fra loro parti di soluzioni che siano valide solo localmente in certe zone dello spazio delle fasi, ampliato sia con quello delle variabili indipendenti sia con quello dei parametri, e di costruirne in tal modo una valida globalmente, o almeno in regioni più ampie delle precedenti e che le contengono. Per essi il criterio conduttore è di eliminare quelle inconsistenze che provengono dalla inesattezza degli sviluppi locali, spesso ridefinendo i parametri e le variabili in uso. Ne sono esempi i metodi di strato limite o di scale multiple, o di sviluppi in ampiezza/fase.

- *Metodi di Media:* che studiano sistemi dotati di una qualche forma di periodicità e di regolarità, e cercano di valutare i vari contributi, qualitativamente e quantitativamente diversi fra loro, dai quali sono composte le soluzioni, certo esistenti su tutto lo spazio di definizione delle variabili. Essi si servono di tale periodicità per individuare i diversi andamenti, per esempio a “tempi brevi” ed a “tempi lunghi”, che si producono nelle soluzioni come conseguenza dei termini di campo più o meno rapidamente variabili. In generale tuttavia tali metodi rimangono comunque locali rispetto ai valori dei parametri dello sviluppo.

Nel seguito, per semplicità, il parametro ε verrà supposto reale scalare. Inoltre, per poter essere più precisi sul significato del termine: “piccolo”, si userà la seguente nomenclatura che, d'altra parte, è del tutto indipendente dal fatto che quelle che si cercano sono soluzioni di un problema differenziale; ciò mostra, anzi, che la logica di fondo dei metodi perturbativi è utilizzabile per risolvere in modo approssimato anche problemi non differenziali o con campo non C^1 rispetto al parametro ε che, nelle definizioni che qui seguono, non è necessariamente “piccolo” né positivo.

Siano $f, g : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ non identicamente nulle in un intorno $N(\varepsilon_0)$ di un certo punto $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^1$.

$\underline{f = o(g)}$ per $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$, o anche $\underline{f \ll (g)}$ per $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$, significa che *esiste ed è nullo* il $\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} (f/g)$.
Si assume pertanto che la f si annulli in almeno tutti i punti nei quali si annulla la g o, più in generale, che esista una funzione positiva $h(\varepsilon)$ tale che $|f/g| \leq h(\varepsilon)$ per $\varepsilon \in N(\varepsilon_0)$.

Esempi $\varepsilon^2 = o(\varepsilon)$ in $\varepsilon_0 = 0$; $\varepsilon \sin(1/\varepsilon) \neq o(\varepsilon)$ in $\varepsilon_0 = 0$;
 $\varepsilon \neq o(\varepsilon^2)$ in $\varepsilon_0 = 0$; $\varepsilon \sin(1/\varepsilon) = o(\sin(1/\varepsilon))$ in $\varepsilon_0 = 0$.

$\underline{f = O(g)}$ per $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ significa che esistono $\varepsilon_+ > 0$ ed $M > 0$ tali che per $\varepsilon \in B_{\varepsilon_+}(\varepsilon_0)$ si ha $|f(\varepsilon)| < M|g(\varepsilon)|$.

Esempi: $\varepsilon^2 = O(\varepsilon)$ in $\varepsilon_0 = 0$; $\varepsilon \sin(1/\varepsilon) = O(\varepsilon)$ in $\varepsilon_0 = 0$;
 $\varepsilon \neq O(\varepsilon^2)$ in $\varepsilon_0 = 0$; $\varepsilon \sin(1/\varepsilon) = O(\sin(1/\varepsilon))$ in $\varepsilon_0 = 0$;
 $\varepsilon^2 = O(\sin \varepsilon)$ in $\varepsilon_0 = 0$; $\varepsilon \neq O(\sin(1/\varepsilon))$ in $\varepsilon_0 = 0$.

$\underline{f = O_s(g)}$ per $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ (o: f è strettamente dell'ordine di g), significa che: $f = O(g)$ e non è $f = o(g)$.

Esempi: $\varepsilon \sin(1/\varepsilon) = O_s(\varepsilon)$ in $\varepsilon_0 = 0$; $\varepsilon^2 \neq O_s(\sin \varepsilon)$ in $\varepsilon_0 = 0$;
 $\varepsilon \sin(1/\varepsilon) \neq O_s(\sin(1/\varepsilon))$ in $\varepsilon_0 = 0$; $\varepsilon^2 \neq O_s(\varepsilon)$ in $\varepsilon_0 = 0$;

$\underline{f \sim g}$, o anche: $\underline{f \approx g}$ per $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ (si legga: f e g sono asintotiche, oppure: f “va come” g), significa che $f = O(g)$ e, simultaneamente, $g = O(f)$.

Esempi: $\varepsilon \sin(1/\varepsilon) \not\sim \varepsilon$ in $\varepsilon_0 = 0$, $3\varepsilon \sim \varepsilon$ in $\varepsilon_0 = 0$.

$\underline{f_{aa}}$ di $\underline{f}$ per $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ (si legga: f_{aa} è approssimazione asintotica di f), significa che $f = f_{aa} + o(f_{aa})$ e cioè che $\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} (f/f_{aa}) = 1$.

Esempi: $\sin \varepsilon = (\varepsilon)_{aa}$ in $\varepsilon_0 = 0$, $3\varepsilon \neq (\varepsilon)_{aa}$ in $\varepsilon_0 = 0$.

N.B. 6.1.1 Si osservi il cattivo uso di alcune locuzioni: ε e ε^2 sono “circa” zero per $\varepsilon \rightarrow 0$ ma non sono asintotiche fra loro né lo sono a zero. La loro differenza ha la ε come approssimazione asintotica, infatti $(\varepsilon - \varepsilon^2) - \varepsilon = o(\varepsilon)$; la loro differenza non ha la ε^2 come approssimazione asintotica, infatti $(\varepsilon - \varepsilon^2) - \varepsilon^2 \neq o(\varepsilon^2)$. In ciò risiede il motivo per cui, nella definizione di approssimazione asintotica, si usa il rapporto $(f - f_{aa})/f_{aa} = o(1)$ e non la differenza $(f - f_{aa}) = o(1)$ (vedi: [N.B. 6.1.4]).

Si ricordi, d'altra parte, che se $\lim f/g = 1$ allora anche $\lim g/f = 1$; dunque la relazione di approssimazione asintotica tra f ed f_{aa} è simmetrica. Si noti, infine, che se g è monotona l'essere $g = O_s(1)$ equivale a che sia $1/g = O_s(1)$.

◇

N.B. 6.1.2 Nell'ipotesi che esista il $\ell := \lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} |f/g|$ si ha che

$$\begin{array}{llll} f = O(g) & \iff & f/g = O(1), & \text{ovvero: } \ell < \infty; \\ f = o(g) & \iff & f/g = o(1), & \text{ovvero: } \ell = 0; \\ f = O_s(g) & \iff & f/g = O_s(1), & \text{ovvero: } 0 < \ell < \infty; \\ f \sim g & \iff & f/g \sim 1; & \end{array}$$

ove naturalmente

$$f/g = \begin{cases} O(1) & \text{significa } |f/g| \text{ limitata per } \varepsilon \rightarrow \varepsilon_0; \\ o(1) & \text{significa } \lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} f/g = 0; \\ O_s(1) & \text{significa } |f/g| \text{ limitata ma non infinitesima per } \varepsilon \rightarrow \varepsilon_0; \\ \sim 1 & \text{significa } \exists L, M > 0 \text{ tali che } L|f| < |g| < M|f|. \end{cases}$$

Attenzione. Si badi a non commettere errori di logica: $10^5 = O(1)$ è un nonsense, così come anche $1.2 = O(1)$; non si confondano, cioè, gli o.d.g. asintotici con “l'ordine di grandezza di un numero”, che è la parte intera del $\log_{10}$ del numero, e non ha nulla a che fare con la ε . $\diamond$

N.B. 6.1.3 Sussistono, per $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$, le

$$\begin{array}{llll} \text{se } f = o(g) & \text{ed è } g = O(h), & \text{allora è anche } f = o(h); \\ \text{se } f = o(g) & \text{ed è } g = O_s(h), & \text{allora è anche } f = o(h); \\ \text{se } f = O_s(g) & \text{ed è } g \sim h, & \text{allora è anche } f = O_s(h); \\ \text{se } f = O_s(h) & \text{ed è } g \sim f, & \text{allora è anche } g = O_s(h). \\ \text{se } f = O_s(g) & \text{ed è } g = o(h), & \text{allora è anche } f = o(h). \end{array}$$

Infatti: $f/h = (f/g)(g/h)$ lì dove $g \neq 0$; ed i valori per i quali è $g = 0$ sono anche tali che $f = 0$. La prima condizione implica subito la seconda. Per la terza occorre che i valori per i quali è $|f| \geq L|h|$ siano anche tali che $|g| \geq M|h|$, per certi $L, M < \infty$. Per l'ultima: $|f| < M|g| < s|h|$, per qualsiasi $s > 0$ comunque piccolo. $\diamond$

N.B. 6.1.4 $g = f_{aa}$ equivale a $f = g_{aa}$ ed implica $f \sim g$ che implica $f = O_s(g)$; tuttavia i viceversa non sussistono: si pensi agli esempi visti sopra; è però vero che $f \sim g$ equivale a $f = O_s(g)$ quando esiste il $\ell = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f/g$.

Si osservi poi che

$$f - g = o(g) \quad \text{equivale a} \quad (f - g)/g \xrightarrow[\varepsilon_0]{\varepsilon} 0$$

e quindi, per la stessa ragione,

$$f - g = o(1) \quad \text{equivale a} \quad (f - g) \xrightarrow[\varepsilon_0]{\varepsilon} 0,$$

ma queste due coppie non sono fra loro equivalenti. In effetti

$$f - g = o(g) \quad \text{non implica} \quad f - g = o(1) \quad \text{se } f \text{ e } g \text{ sono non limitate,}$$

si pensi per esempio alle $f(\varepsilon) = \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2}$ e $g(\varepsilon) = \varepsilon^{-2}$ per $\varepsilon \rightarrow 0$; così come

$$f - g = o(1) \quad \text{non implica} \quad f - g = o(g) \quad \text{se } f \text{ e } g \text{ sono infinitesime,}$$

si pensi per esempio alle $f(\varepsilon) = \varepsilon$ e $g(\varepsilon) = \varepsilon^2$, per $\varepsilon \rightarrow 0$.

La prima delle due condizioni implica la $-\varepsilon g \leq (f - g) \leq \varepsilon g$ in $N(\varepsilon_0)$, e quindi implica la seconda qualora $g = O(1)$ e (quindi) $f = O(1)$.

La seconda delle due condizioni implica la prima se $g = O_s(1)$ e se si assume che f si annulli almeno in tutti i punti dove si annulla la g . (Infatti: se $(f - g) = o(1)$ e se $g = O_s(1)$ allora anche $f = O_s(1)$, giacché certo f è limitata visto che g lo è, ed è chiaro che se g ammette limite anche f lo fa. Viceversa, se g non ammette limite allora non lo può ammettere nemmeno f . Dunque se entrambe ammettono lo stesso limite (non nullo) allora $\lim f/g = 1$; se invece entrambe non ammettono limite, ma lo ammette la loro differenza e si annullano entrambe simultaneamente, allora il rapporto $(f - g)/g$ ammette limite nullo). $\diamond$

Sia ora $\varepsilon \in N(0) := (0, \varepsilon_+]$ e l'asintoticità resta intesa per $\varepsilon \rightarrow 0$. Si definisce:

Funzione d'ordine (o: Funzione di gauge) $\delta(\varepsilon)$:= una funzione $\delta : (0, \varepsilon_+] \rightarrow \mathbb{R}^+$ continua, monotona (in generale strettamente), e tale che esista il $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

N.B. 6.1.5 La monotonia permette di escludere multipli zeri in $N(\varepsilon_0)$: si pensi agli esempi con $\sin(1/\varepsilon)$. $\diamond$

N.B. 6.1.6 Se δ_1 e δ_2 sono due funzioni d'ordine (monotone nello stesso verso) allora anche $\delta_1 \cdot \delta_2$ lo è. $\diamond$

In questo capitolo si parlerà sempre di funzioni d'ordine *monotone non decrescenti su* $(0, \varepsilon_+]$, e l'asintoticità resta intesa sempre per ε che tende a zero. Inoltre, sarà generalmente utile alla chiarezza indicare le funzioni con la notazione generalmente riservata ai loro valori in un punto; per esempio, le funzioni d'ordine della ε potranno essere anche indicate con $\delta_n(\varepsilon)$ per rimarcare la variabile indipendente.

Successione Asintotica di funzioni d'ordine := $\left\{ \delta_n : (0, \varepsilon_+] \rightarrow \mathbb{R}^+ \right\}_{n=0,1,2,\dots}$ una successione di funzioni d'ordine $\delta_n = \delta_n(\varepsilon)$ tale che per ciascun $n > 0$ si abbia

$$\delta_n = o(\delta_{n-1}), \quad \text{con } \delta_0 \text{ tale che } \delta_n = o(\delta_0) \quad \text{per ogni } n.$$

Si dimostra che tale δ_0 esiste sempre, e che è possibile sceglierlo $o(1)$ se tutte le δ_n sono $o(1)$.

Comoda famiglia di funzioni d'ordine è senz'altro quella dei monomi $\left\{ \varepsilon^n \right\}_{n=0,1,\dots}$ ma va tenuto presente che queste non sono certo le uniche possibili funzioni d'ordine, né è necessario che le funzioni d'ordine siano funzioni così regolari.

Successione Asintotica di funzioni $f_n(\varepsilon)$:= una successione $\left\{ f_n : (0, \varepsilon_+] \rightarrow \mathbb{R}^1 \right\}_{n=0,1,2,\dots}$ di funzioni della ε tali che per ogni n si abbia $f_n = O_s(\delta_n)$ per una qualche successione asintotica di funzioni d'ordine δ_n .

Somma Asintotica di funzioni $f_n(\varepsilon)$:= una somma $\sum_{n=0}^m a_n f_n(\varepsilon)$, con $m \in \mathbb{N}$, con $a_n \in \mathbb{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e tale che la $\{f_n\}_{n=0,1,\dots}$ sia una qualche successione asintotica di funzioni della ε .

Le precedenti definizioni si estendono al caso di funzioni le quali, oltre che della ε , lo siano anche di altre variabili.

Sia $\phi = \phi(\xi, \varepsilon) : D \times (0, \varepsilon_+] \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^{m_2}$ aperto; e siano fissati un certo $\xi_0 \in D$ ed un certo $D_0 \subseteq D$, (e l'asintoticità resta intesa per $\varepsilon \rightarrow 0$).

$\phi = O(\delta)$ in ξ_0 significa che tale è la $f(\varepsilon) := \phi(\xi_0, \varepsilon)$.

$\phi = O(\delta)$ in D_0 significa che tale è ciascuna delle $f(\varepsilon) := \phi(\xi_0, \varepsilon)$ ottenute per ciascun fissato ξ_0 nell'insieme D_0 .

$\phi = O(\delta)$ uniformemente in D_0 significa che tale è la famiglia delle $f(\varepsilon) := \phi(\xi, \varepsilon)$ in modo uniforme rispetto alle ξ nell'insieme D_0 .

Se $\phi = O(\delta)$ in D_0 , è generalmente possibile, eventualmente limitandosi a convenienti sottoinsiemi di D_0 , scegliere una qualche norma $\|\cdot\|_{D_0}$ la cui scelta dipende da D_0 rispetto alla quale individuare l'ordine della ϕ , e cioè per la quale la funzione della ε data da $f(\varepsilon) := \|\phi(\xi, \varepsilon)\|_{D_0}$ risulta tale che $f = O(\delta)$. In particolare si ha l'uniformità se la norma è la $\|\cdot\|_\infty$ su D_0 . Per esempio $\xi \varepsilon^2 = o(\varepsilon)$ *non uniformemente su* $\mathbb{R}$ se la $\|\cdot\|_\mathbb{R}$ è quella del *sup*; in tal caso lo studio sui sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ va ristretto ai sottoinsiemi compatti. Allo stesso modo si può dichiarare $\xi^{-1/2} \varepsilon^2 = o(\varepsilon)$ addirittura in modo uniforme su $(0, 1]$, se ci si accontenta della misura $\int_0^1 \xi^{-1/2} \varepsilon^2 d\xi =: \|\phi(\xi, \varepsilon)\|_{(0,1]} = 2\varepsilon^2$.

Considerazioni analoghe si possono fare, ed analoghe definizioni vengono date, per le relazioni $\phi = O_s(\delta)$ e $\phi = o(\delta)$.

A una funzione $\phi = \phi(\xi, \varepsilon)$ si attribuisce un *ordine di grandezza* quando, fissati il modo (in particolare, per il terzo di essi sia fissata una norma su D_0) ed il tipo di asintoticità ($\varepsilon \rightarrow 0$), si verifica una (rispettivamente) delle relazioni *di ordine stretto* rispetto ad una qualche funzione d'ordine scelta in un qualche insieme di funzioni d'ordine. In tal caso, tutto ciò viene riassunto con la locuzione “ ϕ è dell'ordine di δ ” o anche con: “ δ esprime l'ordine di grandezza di g ” (nel modo prescelto in D_0 , ed asintoticità per $\varepsilon \rightarrow 0$):

g è dell'ordine di grandezza di δ := esiste una funzione d'ordine δ tale che

$$\|\phi(\xi, \varepsilon)\|_{D_0} = O_s(\delta), \quad \text{o, più brevemente,} \quad \phi = O_s(\delta).$$

Data una funzione $f = f(\varepsilon)$ continua e non identicamente nulla in ciascun $(0, \varsigma]$ con $\varsigma \in (0, \varepsilon_+]$, si può dimostrare (vedi: [Eckhaus Lemma 1.1.1]) che esiste una qualche δ_0 tale che sia $f = O_s(\delta_0)$, e quindi $f/\delta_0 = O_s(1)$. In altre parole, *a una tale funzione è possibile attribuire un ordine di grandezza*.

Successione Asintotica, in D_0 , di funzioni $\phi_n = \phi_n(\xi, \varepsilon) :=$ una successione $\left\{ \phi_n(\xi, \varepsilon) \right\}_{n=0,1,2,\dots}$ tale che le $f_n(\varepsilon) := \|\phi_n(\xi, \varepsilon)\|_{D_0}$ diano luogo ad una successione asintotica di funzioni della ε ,

e cioè che si abbia $\{\|\phi_n(\xi, \varepsilon)\|_{D_0}\}_{n=0,1,\dots} = O_s(\delta_n)$ per una comune $\|\cdot\|_{D_0}$ ed una certa successione asintotica di funzioni d'ordine $\{\delta_n(\varepsilon)\}_{n=0,1,\dots}$; e pertanto che per ciascun $n \geq 0$ risulti $\phi_n(\xi, \varepsilon) = \phi_n(\xi, \varepsilon)\delta_n(\varepsilon)$, con $\phi(\xi, \varepsilon = O_s(1))$, o almeno $O(1)$.

Somma Asintotica (generalizzata), per $\xi \in D_0 :=$ una somma $\sum_{n=0}^m \phi_n(\xi, \varepsilon)$ tale che la successione di funzioni $\{\|\phi_n(\xi, \varepsilon)\|_{D_0}\}_{n=0,1,\dots,m}$ risulti (appartenere a) una successione asintotica.

Somma Asintotica (ordinaria), per $\xi \in D_+ := D_0 \times D_p :=$ una somma della forma: $\sum_{n=0}^m \phi_n(\xi, p)\delta_n(\varepsilon)$, nella quale le ϕ_n sono funzioni della $\xi \in D_0$ e di eventuali altri parametri $p \in D_p$, ma non della ε .

Le somme asintotiche vengono anche chiamate serie asintotiche, ma per ognuna di esse l'estremo superiore m della somma è, di regola, finito.

La seguente è una *restrizione* della definizione data per le funzioni della ε .

Approssimazione Asintotica di $\phi(\xi, \varepsilon)$, in $D_0 :=$ una funzione $\phi_{aa}(\xi, \varepsilon)$ tale che, una volta determinata una funzione d'ordine $\delta_0(\varepsilon)$ che esprime in D_0 l'ordine di grandezza della ϕ , in D_0 risulti

$$\phi(\xi, \varepsilon) - \phi_{aa}(\xi, \varepsilon) = o(\delta_0), \quad \text{con } \delta_0 \text{ tale che } \|\phi(\xi, \varepsilon)\|_{D_0} = O_s(\delta_0).$$

Pertanto si ha che la $\phi_{aa} =: \phi_{aa}^{(0)}$ è anche lei dell'ordine (stretto) δ_0 e che $\phi_0 := \phi_{aa}^{(0)}/\delta_0$ verifica la

$$\frac{\phi}{\delta_0} = \phi_0 + o(1) \quad \text{con} \quad \phi_0 = O_s(1).$$

Talvolta è utile ammettere la possibilità che la δ_0 non sia $O(1)$, e anzi che sia illimitata per $\varepsilon \rightarrow 0$. Quando anche sia $\delta_0 = O(1)$, è poi utile definire una approssimazione asintotica che sia “di ordine maggiore”, e cioè tale che

$$\phi(\xi, \varepsilon) - \phi_{aa}(\xi, \varepsilon) = o(\delta_k), \quad \text{per qualche } \delta_k = o(\delta_0).$$

Nell'ipotesi che la ϕ e la ϕ_{aa} siano simultaneamente nulle tutto ciò equivale a dire che $(\phi - \phi_{aa}) = o(\phi_{aa})$. È bene osservare inoltre che la ϕ_{aa} è fortemente non univoca.

Il procedimento può essere iterato. Si chiami $\phi^{(1)}$ tale $o(1)$. Si definisca cioè

$$\phi^{(1)} := \frac{\phi}{\delta_0} - \phi_0 = o(1).$$

Se $\|\phi^{(1)}\|_{D_0}$ è continua e non identicamente nulla in $(0, \varepsilon_+]$ si cerca, e si determina, il suo ordine di grandezza, e quindi $\widehat{\delta}_1$ tale che $\phi^{(1)} = O_s(\widehat{\delta}_1)$. Per costruzione è certamente $\widehat{\delta}_1 = o(1)$.

Poi si cerca un'approssimazione asintotica della $\phi^{(1)}$, e cioè una $\phi_{aa}^{(1)}$ tale che $\phi^{(1)} - \phi_{aa}^{(1)} = o(\widehat{\delta}_1)$. La $\phi_1 := \phi_{aa}^{(1)}/\widehat{\delta}_1$ risulta un'approssimazione asintotica della $\phi^{(1)}/\widehat{\delta}_1$, e verifica la

$$\frac{\phi^{(1)}}{\widehat{\delta}_1} = \phi_1 + o(1) \quad \text{con} \quad \phi_1 = O_s(1).$$

D'altra parte risulta $\delta_0 \cdot o(\widehat{\delta}_1) = o(\delta_0 \widehat{\delta}_1)$. Ne segue

$$\phi = \delta_0 \left[\phi_0 + \phi^{(1)} \right] = \delta_0 \left[\phi_0 + \widehat{\delta}_1 [\phi_1 + o(1)] \right] = \delta_0 \phi_0 + \delta_0 \widehat{\delta}_1 \phi_1 + o(\delta_0 \widehat{\delta}_1).$$

Al successivo passo si pone $\phi^{(2)} := \phi^{(1)}/\widehat{\delta}_1 - \phi_1$. Si troveranno $\widehat{\delta}_2 = o(1)$ e ϕ_2 tali che

$$\frac{\phi^{(2)}}{\widehat{\delta}_2} = \phi_2 + o(1) \quad \text{con} \quad \phi_2 = O_s(1).$$

Ne segue $\phi = \delta_0 \left[\phi_0 + \widehat{\delta}_1 \left[\phi_1 + \widehat{\delta}_2 [\phi_2 + o(1)] \right] \right]$ e quindi

$$\phi = \delta_0 \phi_0 + \delta_0 \widehat{\delta}_1 \phi_1 + \delta_0 \widehat{\delta}_1 \widehat{\delta}_2 \phi_2 + o(\delta_0 \widehat{\delta}_1 \widehat{\delta}_2).$$

Sviluppo Asintotico (generalizzato), in D_0 , di ϕ ad $m+1$ termini := la particolare approssimazione asintotica all'ordine δ_m , per la funzione $\phi(\xi, \varepsilon)$, che si costruisce mediante il procedimento iterativo visto sopra, che usa una qualche fissata norma $\|\cdot\|_{D_0}$, una qualche successione (non necessariamente asintotica) di funzioni d'ordine $\{\widehat{\delta}_n(\varepsilon)\}_{n=1,2,\dots}$, e la serie asintotica, ad m termini, costruita come detto:

$$\begin{cases} \frac{\phi(\xi, \varepsilon)}{\delta_0} = \phi_0(\xi, \varepsilon) + \sum_{n=1}^m \delta_n(\varepsilon) \phi_n(\xi, \varepsilon) + o(\delta_m(\varepsilon)) & \text{ove} \\ \phi_n := O_s(1) \quad (\text{o almeno } O(1)) & \text{per } n = 0, 1, \dots, m \\ \delta_n := \widehat{\delta}_1 \cdots \widehat{\delta}_n = o(\delta_{n-1}), & \text{per } n \geq 1, \quad \delta_0 = 1; \end{cases}$$

la successione $\{\delta_n(\varepsilon)\}_{n=1,2,\dots}$ infatti è una successione asintotica giacché, per costruzione, ciascuna delle $\widehat{\delta}_i$, per $i = 1, 2, \dots, n$, è $o(1)$.

Generalmente le funzioni $\phi_n(\xi, \varepsilon)$ si cercano *indipendenti dalla ε* ; (si veda il N.B. 6.1.26).

Sviluppo di Taylor

Sia $x(\varepsilon) \in C^\infty(N(0))$ (infinitamente differenziabile in ogni $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, +\varepsilon_0)$). Si chiama *Polinomio di Taylor* all'ordine k il polinomio:

$$p_k(\varepsilon) = a_0 + a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + \dots + a_k \varepsilon^k, \quad \text{con } a_h := \frac{1}{h!} \frac{d^h x}{d\varepsilon^h}, \quad h = 0, \dots, k < \infty.$$

Teorema. Se $x(\varepsilon) \in C^r(N(0))$ (derivate continue fino all'ordine r compreso in un intorno $N(0)$ dell'origine) allora per ogni $k < r$ il resto $R_k(\varepsilon)$ è definito su $N(0)$ e vale:

$$R_k(\varepsilon) := x(\varepsilon) - p_k(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \frac{d^h x}{d\varepsilon^h}(\eta) \frac{(\varepsilon - \eta)^h}{h!} d\eta;$$

per cui, per ogni $\varepsilon_+ \in N(0)$ ed $|\varepsilon| \leq \varepsilon_+$ risulta:

$$|R_k(\varepsilon)| \leq \frac{M_k(\varepsilon_+)}{(k+1)!} |\varepsilon|^{k+1} \quad \text{con} \quad M_k(\varepsilon_+) := \max_{|\varepsilon| \leq \varepsilon_+} \left| \frac{d^h x}{d\varepsilon^h}(\varepsilon) \right|.$$

Equivalentemente: dato $\varepsilon_+ \in N(0)$ esiste una costante $c > 0$ per la quale:

$$|R_k(\varepsilon)| \leq c |\varepsilon|^{k+1}, \quad \text{o anche } |R_k(\varepsilon)| = O(|\varepsilon|^{k+1}).$$

□

Se esiste il $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k(\varepsilon) \equiv \sum_{k=0}^\infty a_k \varepsilon^k =: f(\varepsilon)$, e se tale limite coincide con la funzione $x(\varepsilon)$, allora la funzione $x(\varepsilon)$ si dice *analitica (reale)*, o anche $x \in C^\omega(N(0))$. Una funzione è analitica (reale) se e solo se $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k(\varepsilon) = 0$ per ogni $|\varepsilon| < \varepsilon_+$.

Esempio 6.1.7 $\sum_{n=0}^\infty a_n(\xi - \xi_0)^n$ è uno sviluppo asintotico rispetto alle funzioni d'ordine $(\xi - \xi_0)^n$ di una funzione $f(\xi)$, con l'asintoticità intesa per $\xi \rightarrow \xi_0$, quando si ha che:

$$\begin{cases} \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} (f(\xi) - a_0) = 0 \\ \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \frac{1}{(\xi - \xi_0)} (f(\xi) - a_0) - a_1 = 0 \\ \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \frac{1}{(\xi - \xi_0)} \left(\frac{1}{(\xi - \xi_0)} (f(\xi) - a_0) - a_1 \right) - a_2 = 0 \end{cases}$$

con $a_0 \neq 0$ se $f = O_s(1)$, $\delta_0 = 1$, $\phi_0 = a_0$, $\delta_1 = (\xi - \xi_0)$, $\widehat{\delta}_k = (\xi - \xi_0)$, $\delta_k = (\xi - \xi_0)^k$; e cioè quando, posto $s_n := \sum_{k=0}^n a_k (\xi - \xi_0)^k$, si ha

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \frac{(f(\xi) - s_n)}{(\xi - \xi_0)^{n+1}} = a_{n+1} \quad \text{per } n = 1, 2, \dots$$

Più in generale $f(\xi) \sim \sum_{n=0} a_n(\xi - \xi_0)^{\alpha n}$, con $\alpha > 0$, [e quindi $|a_n(\xi - \xi_0)^{\alpha n}| = o(a_{n-1}(\xi - \xi_0)^{\alpha(n-1)})$], se accade che

$$r_N(\xi) := f(\xi) - \sum_{n=0}^N a_n(\xi - \xi_0)^{\alpha n} = o((\xi - \xi_0)^{\alpha N}) .$$

□

N.B. 6.1.8 Si osservi che se f ammette una serie asintotica di potenze positive della $(\xi - \xi_0)$ i suoi coefficienti sono univocamente determinati. Allo stesso modo si riconosce che se una certa funzione ammette uno sviluppo asintotico ordinario rispetto ad una assegnata successione asintotica di funzioni d'ordine tale sviluppo è univoco. Non è vero tuttavia il viceversa: una serie asintotica non individua una sola funzione ϕ . Esistono infatti funzioni “trascendentalmente piccole”; ad esempio per le $\delta_n(\varepsilon) = \varepsilon^n$ tale risulta la $e^{-\xi/\varepsilon}$ che, come è noto, non ammette sviluppo in serie di potenze della ε . Analogamente si ha che, ad esempio, ξ^{-1} non ammette in zero una serie asintotica di potenze (positive). ◇

N.B. 6.1.9 Una data serie è asintotica a molte funzioni diverse. Una data funzione ammette molte diverse serie asintotiche. ◇

N.B. 6.1.10 Una serie di Taylor è asintotica alla funzione che l'ha generata. Tuttavia lo è anche ad una che le sia diversa per un addendo la cui serie asintotica di potenze sia nulla *fino all'ordine prescelto*. Per esempio, la funzione somma ad m termini della serie stessa. ◇

N.B. 6.1.11 Se la serie, per esempio di potenze, è *convergente* certo il suo resto r_N verifica, per ogni fissato $\tilde{\xi}$ all'interno del cerchio di convergenza, la

$$r_N(\tilde{\xi}) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(\tilde{\xi} - \xi_0)^n \xrightarrow[N]{\infty} 0 ,$$

ma ciò non è affatto necessario affinché la serie possa essere una serie asintotica: il resto di quest'ultima deve solo tendere a zero più velocemente di $(\xi - \xi_0)^N$ per $\xi \rightarrow \xi_0$ ma non necessariamente per $N \rightarrow \infty$. Anzi generalmente accade che le serie asintotiche divergono per N grandi: si tratta quasi sempre di stimare il valore ottimale per N per il quale l'approssimazione è la migliore possibile *dati i valori delle funzioni d'ordine* (e quindi del parametro ε) e dei loro coefficienti (e quindi della variabile ξ) .

In effetti mentre la proprietà di essere convergente è una proprietà della sola serie, il fatto che una serie sia o meno asintotica ad una certa funzione è una proprietà da verificare su entrambe, e quindi occorrerebbe conoscerle entrambe. Se però si riesce in qualche modo a stimare quale sia il più piccolo *dei coefficienti* di una serie, che si spera essere asintotica ad una certa incognita funzione, è opportuno interrompere la serie al termine precedente. ◇

N.B. 6.1.12 Siano

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \varepsilon) &= \hat{\phi}(\xi, \varepsilon) + o(\delta_m) := \sum_{n=0}^m \phi_n(\xi) \delta_n(\varepsilon) + o(\delta_m) \\ \psi(\xi, \varepsilon) &= \hat{\psi}(\xi, \varepsilon) + o(\delta_m) := \sum_{n=0}^m \psi_n(\xi) \delta_n(\varepsilon) + o(\delta_m) \end{aligned}$$

due sviluppi asintotici ordinari e rispetto alla stessa successione asintotica di funzioni d'ordine. Sussistono le seguenti proprietà.

- $\phi(\xi, \varepsilon) + \psi(\xi, \varepsilon) = \hat{\phi}(\xi, \varepsilon) + \hat{\psi}(\xi, \varepsilon) + o(\delta_m) := \sum_{n=0}^m (\phi_n(\xi) + \psi_n(\xi)) \delta_n(\varepsilon) + o(\delta_m)$.
- $c \phi(\xi, \varepsilon) = \sum_{n=0}^m c \phi_n(\xi) \delta_n(\varepsilon) + o(\delta_m)$, per $c \in \mathbb{R}$.
- $\phi(\xi, \varepsilon) \cdot \psi(\xi, \varepsilon) = (\sum_{n=0}^m \phi_n(\xi) \delta_n(\varepsilon)) \cdot (\sum_{n=0}^m \psi_n(\xi) \delta_n(\varepsilon)) + o(\delta_0 \delta_m)$.
- Se $\delta_h \cdot \delta_k = \delta_{h+k}$, (e allora $\delta_0 = 1$) si ha che

$$\phi(\xi, \varepsilon) \cdot \psi(\xi, \varepsilon) = \left(\sum_{n=0}^m \left(\sum_{h+k=n} \phi_h(\xi) \cdot \psi_k(\xi) \right) \right) \delta_n(\varepsilon) + o(\delta_0 \delta_m) .$$

- Generalmente la differenziazione termine a termine non è lecita, contrariamente alle operazioni elementari viste qui sopra. Tuttavia, se si assume che la funzione $\phi(\xi, \varepsilon)$ sia $C^r(N(0))$, e come tale ammetta sviluppo di Taylor fino all'ordine r , e quindi un resto integrale con kernel $(\partial^{r+1}\phi(\xi, \varepsilon)/\partial\varepsilon^{r+1})_{\varepsilon=s}(\varepsilon-s)^r/r!$, la sua approssimazione asintotica può essere derivata fino all'ordine $r-2$ (ed $r-1$ se anche l'ultima derivata è limitata).

Così, si può derivare una serie asintotica ordinaria che sia uniforme sui compatti rispetto alla ξ ; ad esempio quella di una funzione periodica rispetto alla ξ .

Analogamente, quando la funzione $\phi(\xi, \varepsilon)$ sia soluzione di una qualche equazione lineare a coefficienti sviluppabili, si può usare a ritroso l'equazione stessa per trovare che le derivate della funzione hanno come serie asintotiche proprio le derivate della serie asintotica della funzione, (vedi: [Bender §3.8]).

◇

Come prima applicazione del concetto di serie asintotica si cercherà ora di approssimare le radici di una equazione algebrica “dipendente da un parametro”. Si indicheranno i punti sostanziali il metodo in forma generale, in modo da poterli riconoscere, in seguito, anche nella risoluzione di problemi di altra natura. Si consideri una famiglia di equazioni algebriche

$$\phi(x, \varepsilon) = 0, \quad \text{con } \phi(x, \varepsilon) \in C^r(D_0, (0, \varepsilon_+]) ;$$

ad esempio:

$$x^2 + (\varepsilon - 4)x + (3 + 2\varepsilon) = 0 .$$

Ipotesi di lavoro. Si sa risolvere (o almeno stimare) la soluzione del caso “imperturbato”: $\varepsilon = 0$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \iff (x-1)(x-3) = 0 ,$$

dalla quale si legge che le due radici sono: $x_0^{(1)} = 1$ ed $x_0^{(2)} = 3$.

Ipotesi aggiuntiva.

Le soluzioni: $x^{(1)}(\varepsilon)$ ed $x^{(2)}(\varepsilon)$ sono funzioni regolari della $\varepsilon \in (0, \varepsilon_+]$, e tali che $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x^{(1)}(\varepsilon) = x_0^{(1)}$ e $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x^{(2)}(\varepsilon) = x_0^{(2)}$. Esse pertanto ammettono uno sviluppo di Taylor in $N(0)$.

Poi:

- Si inizia con il provare la cosa più semplice: e cioè i polinomi:

$$\begin{aligned} x^{(1)}(\varepsilon) &\cong \hat{x}^{(1)}(\varepsilon) := x_0^{(1)} + x_1^{(1)}\varepsilon + x_2^{(1)}\varepsilon^2 + \dots \\ x^{(2)}(\varepsilon) &\cong \hat{x}^{(2)}(\varepsilon) := x_0^{(2)} + x_1^{(2)}\varepsilon + x_2^{(2)}\varepsilon^2 + \dots \end{aligned}$$

- Si ignorano le potenze superiori della ε , decidendo un qualche ordine k al quale fermare lo sviluppo.

Qui sia $k = 2$.

- Si sostituiscono, una per volta, ciascuna delle due radici approssimate $\hat{x}^{(1)}(\varepsilon)$ ed $\hat{x}^{(2)}(\varepsilon)$ nell'equazione $\phi(x, \varepsilon) = 0$.
- Si sviluppa, *totalmente rispetto alla variabile* ε , ciascuna delle funzioni $\phi(\hat{x}^{(1)}(\varepsilon), \varepsilon)$ e $\phi(\hat{x}^{(2)}(\varepsilon), \varepsilon)$ così ottenute. Cominciando con la prima: $\hat{x}(\varepsilon) := \hat{x}^{(1)}(\varepsilon)$, si calcola cioè la:

$$\begin{aligned} \phi(\hat{x}(\varepsilon), \varepsilon) &\cong \phi \Big|_{(\hat{x}(0), 0)} + \partial_x \phi \Big|_{(\hat{x}(0), 0)} \Delta x + \partial_\varepsilon \phi \Big|_{(\hat{x}(0), 0)} \Delta \varepsilon \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_x (\partial_x \phi \Delta x + \partial_\varepsilon \phi \Delta \varepsilon) \Big|_{(\hat{x}(0), 0)} \Delta x + \frac{1}{2} \partial_\varepsilon (\partial_x \phi \Delta x + \partial_\varepsilon \phi \Delta \varepsilon) \Big|_{(\hat{x}(0), 0)} \Delta \varepsilon \\ &= \phi \Big|_{(x_0, 0)} + \partial_x \phi \Big|_{(x_0, 0)} (x_1 \varepsilon + x_2 \varepsilon^2) + \partial_\varepsilon \phi \Big|_{(x_0, 0)} \varepsilon \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_x (\partial_x \phi (x_1 \varepsilon + x_2 \varepsilon^2) + \partial_\varepsilon \phi \varepsilon) \Big|_{(x_0, 0)} (x_1 \varepsilon + x_2 \varepsilon^2) + \frac{1}{2} \partial_\varepsilon (\partial_x \phi (x_1 \varepsilon + x_2 \varepsilon^2) + \partial_\varepsilon \phi \varepsilon) \Big|_{(x_0, 0)} \varepsilon \\ &= \phi(x(0), 0) + (\phi_x x_1 + \phi_\varepsilon) \Big|_{(x_0, 0)} \varepsilon + \frac{1}{2} (\phi_{xx} x_1^2 + 2\phi_{x\varepsilon} x_1 + \phi_{\varepsilon\varepsilon} + 2\phi_{x\varepsilon} x_2) \Big|_{(x_0, 0)} \varepsilon^2 . \end{aligned}$$

- Si richiede che il tutto valga zero, e cioè che la $\hat{x}(\varepsilon)$ sia soluzione, approssimata, del problema iniziale. Si ricavano quindi *ricorsivamente dalle equazioni valide per ciascun ordine di grandezza* i valori delle $x_1, x_2, \dots$ necessari a tale scopo, *e sempre che il problema sia non degenerare*, e cioè che sia $\phi_x(x_0, 0) \neq 0$. Si trovano:

$$x_1 = [-\phi_\varepsilon / \phi_x] \Big|_{(x_0, 0)}, \quad x_2 = [(-\phi_{xx}x_1^2 + 2\phi_{x\varepsilon}x_1 + \phi_{\varepsilon\varepsilon}) / (2\phi_x)] \Big|_{(x_0, 0)}.$$

- L'unicità dello sviluppo di Taylor e le proprietà della ϕ fanno sì che in tal caso, e cioè nelle ipotesi dette, la soluzione (ovvero ciascuna delle radici dell'equazione $\phi = 0$) esista, unica, regolare, e tale che $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(\varepsilon) = x_0$. Pertanto, sempre in tali ipotesi, lo sviluppo $\hat{x}(\varepsilon)$ esiste, unico, e con un errore $O(\varepsilon^{k+1})$ se la $\hat{x}(\varepsilon)$ è stata calcolata fino all'ordine k . Dunque tale $\hat{x}(\varepsilon)$ è proprio una approssimazione asintotica (all'ordine k) della $x(\varepsilon)$. Infatti (sia $k = 1$) il Teorema della funzione implicita e quello di Taylor assicurano che è possibile stimare l'errore:

$$|x(\varepsilon) - \hat{x}(\varepsilon)| =: |R(\varepsilon)| \leq M\varepsilon^2/2 \quad \text{con} \quad M := \max_{|\varepsilon| \leq \varepsilon_+} |\partial_\varepsilon^2 x(\varepsilon)|.$$

Esempio 6.1.13 Il seguente esempio è in qualche senso irragionevole dato che la $x(\varepsilon)$ risulta facilmente calcolabile in modo analitico. Tuttavia è utile per rendersi conto del metodo.

Sia data l'equazione

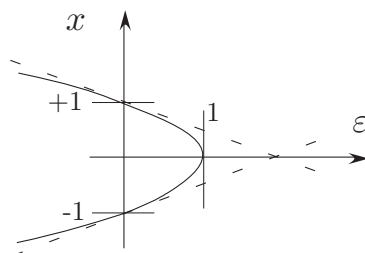
$$\phi(x, \varepsilon) = x^2 - 1 + \varepsilon = 0$$

che ha soluzioni (esatte) $x^{(1)}(\varepsilon) = +\sqrt{1-\varepsilon}$ ed $x^{(2)}(\varepsilon) = -\sqrt{1-\varepsilon}$. Si imponga $\hat{x}^{(1)}(\varepsilon) = 1 - \varepsilon/2 - \varepsilon^2/8 + \dots$, che è la soluzione approssimata proveniente dallo sviluppo di Taylor della $x^{(1)}(\varepsilon) = +\sqrt{1-\varepsilon}$, e l'errore è limitato dalla derivata seconda di tale funzione nell'intorno $[-\varepsilon_+, +\varepsilon_+]$. È chiaro che il ragionamento non può essere ripetuto in generale quando la soluzione non è nota. Al variare di ε_+ si ricava la seguente tabella (le due ultime colonne sono l'errore valutato relativamente a $\varepsilon = 0.37$ e $\varepsilon = 0.5$).

TABLE 1.3.1

ε	$\sqrt{1-\varepsilon}$	$1 - \frac{1}{2}\varepsilon$	Error	$(0.249976503)\varepsilon^2$	$(0.353553391)\varepsilon^2$
0.01	0.994987437	0.995	0.000012563	0.000024998	—
0.05	0.974679435	0.975	0.000320566	0.000624941	—
0.10	0.948683298	0.950	0.001316702	0.002499765	—
0.30	0.836660027	0.870	0.013339974	0.022497885	—
0.37	0.793725393	0.815	0.021274607	0.034221783	—
0.40	0.774596669	0.800	0.025403331	not relevant	0.056568543
0.50	0.707106781	0.750	0.042893219	not relevant	0.088388348
1.00	0	0.500	0.500000000	not relevant	not relevant
2.00	complex	0	complex	not relevant	not relevant
3.00	complex	-0.50	complex	not relevant	not relevant

Il grafico mostra la relativa disposizione delle radici.



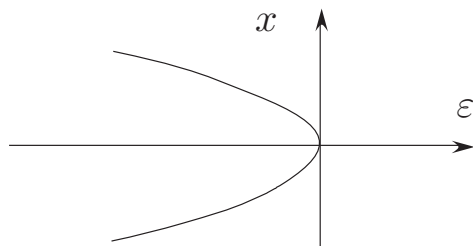
Le linee tratteggiate danno le approssimazioni al primo ordine delle radici relative ai due valori imperturbati, di tangenza, e non danno luogo a biforcazioni.

□

Esempio 6.1.14 In questo esempio il problema è degenerare; per esso il metodo *non funziona*, e vanno trovate altre vie per trattarlo (cfr. oltre).

$$\phi(x, \varepsilon) = x^2 + \varepsilon = 0.$$

È chiaro che per questa equazione il problema imperturbato non ha soluzione sviluppabile; infatti $\phi(x, 0) = x^2 - 1 = 0$ ha soluzioni $x_0 := x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = 0$ e quindi $\phi_x(x_0, 0) = 0$. Il seguente grafico mostra le due soluzioni esatte ed è evidente che non si possano sviluppare in zero: la soluzione esatta, e cioè la funzione $\sqrt{-\varepsilon}$, non ammette sviluppo di Taylor nell'origine.



Il punto di biforcazione coincide con il valore imperturbato, cosa tipica dei problemi degeneri.

□

Esempio 6.1.15 In questo esempio il problema è *quasi degenero*.

$$\phi(x, \varepsilon) = x^2 + (\varepsilon - 2.01)x + 1.01 = 0.$$

Il problema imperturbato ammette le due radici $x_0^{(1)} = 1$, ed $x_0^{(2)} = 1.01$ e un successivo calcolo, per la prima, fornisce $x^{(1)} \cong 1 + 100\varepsilon$. È quindi un caso nel quale una piccola variazione di ε provoca una forte instabilità dei risultati e solo valori “veramente piccoli” per la ε possono essere (alla disperata) accettati.

Domanda. Cosa fare nel caso di un tale problema quasi degenero? I segni indicatori sono:

- Le due radici imperturbate sono molto simili fra loro.
- La derivata $\partial_x \phi$ in esse è molto piccola.
- Anche il primo coefficiente x_1 risulta molto grande.
- Il valore della $\phi(\hat{x}(\varepsilon), \varepsilon)$ risulta molto grande.

Le prime due rendono (o possono rendere) le soluzioni fortemente instabili, le seconde due rendono (o possono rendere) i termini successivi degli sviluppi asintotici paragonabili o molto simili ai precedenti, e non decrescenti.

Risposta. Trattare il problema come se fosse degenero e ricorrere a metodi più potenti. In questo esempio si tratta di specificare l'equazione $\phi(x, \varepsilon) = x^2 + (\varepsilon - 2.01)x + 1.01 = 0$ per qualche ε ragionevolmente piccolo, ad esempio $\varepsilon = -0.1$, e scrivere quella che si ottiene: $x^2 - 2.11x + 1.01 = 0$ nel seguente modo $x^2 - 2x + 1 - 0.11x + 0.01 = 0$ e quindi risolvere:

$$\phi(x, \varepsilon) = (x - 1)^2 - 1.0\varepsilon x + 0.1\varepsilon = 0.$$

□

Un secondo metodo che fa uso del concetto di serie asintotica è detto

Metodo del Bilancio Dominato

Esso è di particolare interesse in quei casi nei quali una serie di potenze non può assolvere all'incarico, e che quindi si dimostra utile ad esempio nei problemi degeneri o nel caso di equazioni differenziali lineari con punti singolari irregolari, (vedi: [Cap.I § 6]).

Si consideri dapprima un caso di problema algebrico degenero, ad esempio: $(x - 2)^2(x - 3) + \varepsilon = 0$, per il quale il problema imperturbato ha radice $x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = 2$ doppia e tale che $\phi_x(2, 0) = 0$.

L'idea è cercare le due radici $x^{(1)}(\varepsilon)$ ed $x^{(2)}(\varepsilon)$ sotto la forma:

$$\hat{x}(\varepsilon) = x_0 \delta_0(\varepsilon) + x_1 \delta_1(\varepsilon) + x_2 \delta_2(\varepsilon) \dots + x_k \delta_k(\varepsilon)$$

per una qualche successione asintotica $\{\delta_h(\varepsilon)\}_{h=0,1,\dots}$, e supponendo che biforchino da essa. Ciò comporta, in questo esempio, che il termine dominante $x_0 \delta_0(\varepsilon)$ dovrà essere tale che $x_0 = 2$ e $\delta_0 = 1$.

Domanda. Come trovare le altre?

Risposta. Certo ricorsivamente!

Inoltre. ciascuna delle δ_h deve essere “distintiva” e “bilanciante”,

ovvero tale da rendere (almeno) due termini di ciascuna equazione per il calcolo della corrispondente x_h :

- dello stesso ordine di grandezza fra loro, e cioè “bilanciati”;
- entrambi dominanti rispetto agli altri, e cioè “distinti”;

ed è ovvio che conviene scegliere la più semplice di tutte quelle che danno luogo a questi risultati, e che occorre scegliere (ove possibile) quelle che hanno un ricco problema all'ordine zero, quindi in particolare che non sia degenere, e che forniscono risposte e/o soluzioni univoche.

Esempio 6.1.16 Si introduca, come primo tentativo, $x \cong 2 + x_1 \delta_1$ nell'equazione:

$$\phi(x, \varepsilon) = (x - 2)^2(x - 3) + \varepsilon = 0. \quad (1.3)$$

Se ne ricava la

$$-x_1^2 \delta_1^2 + x_1^3 \delta_1^3 + \varepsilon \cong 0.$$

Delle tre funzioni d'ordine: $\delta_1^2(\varepsilon)$, $\delta_1^3(\varepsilon)$, ε , la seconda rende il termine subdominante, e quindi è da escludere. Per bilanciare i due termini rimanenti è possibile scegliere: $\delta_1 = \sqrt{\varepsilon}$. È chiaro che si sarebbe potuto scegliere anche altre funzioni d'ordine, ad esempio: $2\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon \ln \varepsilon$, etc. ma queste non sono altrettanto semplici. Ne seguono, e solo per $\varepsilon > 0$, le

$$x^{(1)} \cong 2 + \sqrt{\varepsilon}, \quad x^{(2)} \cong 2 - \sqrt{\varepsilon}.$$

Per il termine del secondo ordine, e relativo alla prima di queste due, si sostituisce $x \cong 2 + \sqrt{\varepsilon} + x_2 \delta_2$ nella (1.3), ottenendo:

$$-2x_2 \sqrt{\varepsilon} \delta_2 - x_2^2 \delta_2^2 + (\sqrt{\varepsilon})^3 + 3x_2 \varepsilon \delta_2 + 3x_2^2 \sqrt{\varepsilon} \delta_2^2 + x_2^3 \delta_2^3 \cong 0.$$

Si hanno $\delta_2^3 \ll \delta_2^2$, $\sqrt{\varepsilon} \delta_2^2 \ll \delta_2^2$, $\varepsilon \delta_2 \ll \sqrt{\varepsilon} \delta_2$. Pertanto, omettendo i termini subdominanti (gli ultimi due rispetto al secondo, il 4° rispetto al primo), si ricava

$$-2x_2 \sqrt{\varepsilon} \delta_2 - x_2^2 \delta_2^2 + (\sqrt{\varepsilon})^3 \cong 0. \quad (1.4)$$

A questo punto vanno decisi i termini distintivi, qui: 1° e 2° ; 1° e 3° ; 2° e 3° ; che danno, rispettivamente: $\delta_2 = \sqrt{\varepsilon}$, $\delta_2 = \varepsilon$, $\delta_2 = \varepsilon^{3/4}$. Ne seguono sette possibilità per δ_2 :

$$\delta_2 \gg \varepsilon^{1/2}; \quad \delta_2 \sim \varepsilon^{1/2}; \quad \varepsilon^{1/2} \gg \delta_2 \gg \varepsilon^{3/4}; \quad \delta_2 \sim \varepsilon^{3/4}; \quad \varepsilon^{3/4} \gg \delta_2 \gg \varepsilon; \quad \delta_2 \sim \varepsilon; \quad \delta_2 \ll \varepsilon.$$

Di queste: la 1^a e la 2^a rendono $\delta_2 \sim \delta_1$ e quindi da scartare. La 3^a produce $\varepsilon^{1/2} \delta_2 \gg \delta_2^2 \gg \varepsilon^{3/2}$, e quindi solo il primo termine dominante nella (1.4), che darebbe $x_2 = 0$ e quindi in tal caso la successione non migliora. La 4^a implica che gli ultimi due termini della (1.4) bilanciano fra loro ma non sono dominanti, e quindi ancora $x_2 = 0$. Anche la 5^a assegna come dominante il solo primo termine, e la 7^a assegna il solo secondo. Rimane pertanto solo la 6^a possibilità, che permette di porre (come scelta più semplice) $\delta_2 = \varepsilon$, scartare il secondo termine della (1.4), e ricavare $x_2 = 1/2$. Se ne conclude la $x^{(1)} \cong 2 + \varepsilon^{1/2} + \varepsilon/2$ e, in definitiva, le tre radici

$$x^{(1)} \cong 2 + \varepsilon^{1/2} + \varepsilon/2, \quad x^{(2)} \cong 2 - \varepsilon^{1/2} + \varepsilon/2, \quad x^{(3)} \cong 3 - \varepsilon/2.$$

□

N.B. 6.1.17 Talvolta il metodo si applica anche a problemi per i quali la soluzione imperturbata: $\varepsilon = 0$ non esiste. In tal caso può essere necessario ammettere $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_0(\varepsilon) = \infty$; il problema allora viene detto (generalmente) *singolare*. ◇

N.B. 6.1.18 Il metodo può diventare molto laborioso, e quindi essere preferibile il ricorso ad altri, ancora più potenti, quali ad esempio la stiramento (o “straining”) delle coordinate. Se ne esamineranno alcuni esempi più avanti. Qui di seguito, invece, si accenna ad uno in particolare, di grande interesse anche per altri suoi sviluppi successivi. ◇

Esempio 6.1.19 Un particolare straining di coordinate è quello che *definisce a priori un cambio di coordinate*, che sembri il più opportuno e che magari sia suggerito da altri procedimenti quale il precedente Bilancio Dominato. Per illustrarlo, si consideri l'equazione

$$\phi(x, \varepsilon) = (x - 1)^3 + \varepsilon x = 0. \quad (1.5)$$

Inserendovi la $x \cong 1 + x_1 \delta_1$ si ricava $x_1^3 \delta_1^3 + \varepsilon = 0$ da cui $\delta_1 = \varepsilon^{1/3}$ ed $x_1 = -1$.

A questo punto, invece di considerare lo straining: $x = 1 - \varepsilon^{1/3}$, e cioè x_1 costante, si introduce la

$$\text{trasformazione di coordinate } x \leftrightarrow y \text{ data da: } x =: 1 + y \varepsilon^{1/3}.$$

Attenzione. La trasformazione vale in senso esatto, e non approssimato.

La trasformazione $x = x(y)$ nella (1.5) fornisce $\varepsilon y^3 + \varepsilon + \varepsilon^{4/3} y = 0$; per cui è opportuno introdurre una nuova variabile asintotica: $\mu := \varepsilon^{1/3}$ ed un nuovo problema dato da:

$$\psi(y, \mu) = y^3 + 1 + \mu y = 0. \quad (1.6)$$

A partire dall'unica soluzione reale della (1.6) imperturbata, si prova con $\hat{y} := -1 + y_1 \mu + y_2 \mu^2 + \dots + y_k \mu^k$ nella (1.6) (non essendoci necessità di eventuali gauges μ_h) i cui coefficienti restano valutati con facilità, e permettono di esprimere la ricercata soluzione dalla (1.5) nella forma

$$x \sim 1 + y \varepsilon^{1/3} = 1 + (-1 + y_1 \mu + y_2 \mu^2 + \dots + y_k \mu^k) \mu \sim 1 - \varepsilon^{1/3} + y_1 \varepsilon^{2/3} + y_2 \varepsilon + \dots + y_k \varepsilon^{(k+1)/3}$$

È importante osservare, sempre che si badi a *tenere conto anche dei termini subdominanti*, e si completino i calcoli iniziali in modo esatto, che in tal modo

- il problema assegnato si è trasformato in un problema *ad esso del tutto equivalente*;
- il nuovo problema *ha radici semplici*; quella che era una radice tripla è diventata una terna di radici semplici costituita da una reale e due complesse.
- Il problema degenerare aveva “le coordinate sbagliate”, e una poco felice unità di misura asintotica; il problema trasformato è, invece, ben definito rispetto alla sua variabile e una giusta “scala” asintotica μ .

□

All'occorrenza si possono usare più di una scala per studiare le diverse soluzioni, anche a seconda delle loro caratteristiche, e adattare una propria scala a ciascuna di esse, come nel prossimo esempio.

Esempio 6.1.20 Si consideri l'equazione

$$\phi(x, \varepsilon) = x^3 + \varepsilon x + 2\varepsilon^2 = 0. \quad (1.7)$$

Il metodo del bilancio dominato avrebbe necessità di due scelte per la prima gauge: $\delta_1 = \sqrt{-\varepsilon}$ e $\delta_1 = \varepsilon$. Infatti, inserendovi la $x \cong 0 + x_1 \delta_1$ si ricava $x_1^3 \delta_1^3 + x_1 \varepsilon \delta_1 + 2\varepsilon^2 = 0$ da cui $\delta_1 = \varepsilon^{1/2}$ (primi due termini), oppure $\delta_1 = \varepsilon^{2/3}$ (primo e terzo), oppure $\delta_1 = \varepsilon$ (ultimi due). La seconda, pur distintiva perché permette di bilanciare il primo ed il terzo termine, non è significativa perché entrambi non dominanti. La prima fornisce $x_1 = \pm \sqrt{-1}$ e quindi soluzioni accettabili solo per $\varepsilon < 0$, ovvero $x^{(1)} \cong \sqrt{-\varepsilon}$ e $x^{(2)} \cong -\sqrt{-\varepsilon}$; l'ultima fornisce $x^{(3)} \cong -2\varepsilon$.

Invece del precedente procedimento in questo esempio si può seguire il metodo del cambio di coordinate, che ha necessità di una sola scala. Infatti, se si introducono la $\mu := \sqrt{-\varepsilon}$ insieme con $x =: \mu y$ nella (1.7) questa diviene

$$\psi(y, \mu) = y^3 - y + 2\mu = 0. \quad (1.8)$$

La (1.8) imperturbata ammette tre soluzioni reali semplici: $y = \pm 1$ e $y = 0$, a partire dalle quali si ricavano le serie di potenze:

$$y^{(1)} = 1 - \mu + O(\mu^2), \quad y^{(2)} = -1 - \mu + O(\mu^2), \quad y^{(3)} = 0 + 2\mu + O(\mu^2).$$

Queste permettono di esprimere le ricercate soluzioni della (1.7) nella forma $x = \sqrt{\varepsilon} y$. Queste però *contrariamente alle $y^{(1,2,3)}$ sussistono solo per valori negativi della ε* . A tale proposito si noti che, ad esempio se non si fosse riusciti a determinare anche la terza radice con la stessa μ usata per le altre due, si sarebbe potuto ricorrere all'altra δ_1 , e cioè porre $\mu := \varepsilon$. Si sarebbe ottenuto $y^{(3)} = -2\varepsilon + O(\varepsilon^2)$ e cioè *un risultato migliore del precedente*, dato che:

- ha errore più piccolo: $O(\varepsilon^2)$ invece di $O(|\varepsilon|^{3/2})$;
- non adopera potenze razionali ma solo intere;
- individua la $y^{(3)}$ anche per $\varepsilon > 0$.

□

Qui di seguito viene illustrato un ulteriore esempio di uso del metodo del bilancio dominato in un caso nel quale la soluzione non ammette uno sviluppo in serie di potenze. Si tratta infatti di una E.D.O. ordinaria lineare con un punto singolare irregolare. Il metodo si applica come segue.

- Si consideri, per fissare le idee, l'equazione

$$x'' + p(\xi)x' + q(\xi)x = 0, \quad \text{per la quale } \xi_0 \text{ sia singolare irregolare}$$

cioè tale che almeno una delle due funzioni: la $(\xi - \xi_0)p(\xi)$ oppure la $(\xi - \xi_0)^2 q(\xi)$ è non analitica in ξ_0 .

- Si pone $x(\xi) =: e^{\sigma(\xi)}$, ove $\sigma(\xi)$ è detto *Fattore di Controllo*, e si ottiene

$$\sigma'' + (\sigma')^2 + p(\xi)\sigma' + q(\xi) = 0;$$

- Di questa equazione si trascurano i termini piccoli per $\xi \rightarrow \xi_0$ e cioè si bilanciano i soli termini dominanti [con ξ_0 irregolare si può pensare ad un andamento in ξ_0 del tipo: $\sigma(\xi) \sim (\xi - \xi_0)^{-\alpha}$ con $\alpha > 0$, e di conseguenza $\sigma''/\sigma'^2 \sim (\xi - \xi_0)^\alpha = o(1)$], e si risolve l'equazione così ottenuta, controllando che la sua soluzione $\sigma_0(\xi)$ sia effettivamente tale da verificare l'assunto $\sigma'' \ll \sigma'^2$, e/o le altre ipotesi fatte.
- Si pone $\sigma_0 := \sigma$ e calcola il termine correttivo sostituendo $x(\xi) = e^{\sigma_0(\xi) + \sigma_1(\xi)}$ nell'equazione iniziale, di nuovo risolvendola rispetto a σ_1 , (magari in modo approssimato)
- Si continua in tal modo fino a che il punto ξ_0 risulti non più irregolare, oppure finché si sappia risolvere in modo esatto ciò che rimane.
- Con un pò di fortuna la soluzione resta espressa o, almeno, localmente ben approssimata dalla

$$x(\xi) \sim e^{[\sigma_0(\xi) + \sigma_1(\xi) + \dots]} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\xi - \xi_0)^{\alpha+n} \right) \quad \text{con } a_0 = 1, \text{ ed } \alpha > 0.$$

Esempio 6.1.21 Sia data l'equazione di Airy (vedi: [Bender §3.4]):

$$\xi^3 x'' = x, \quad \text{in } \xi_0 = 0. \quad (1.9)$$

Se esistesse una serie di Frobenius: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^{\alpha+n}$ con $a_0 \neq 0$ e soluzione dell'equazione data, si avrebbe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha+n)(\alpha+n-1)a_n \xi^{(\alpha+n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^{(\alpha+n)};$$

tuttavia, la presenza di un unico termine di grado α : $a_0 \xi^\alpha$ contraddice l'assunto $a_0 \neq 0$.

Se invece si prova con la $x(\xi) \cong e^{\sigma(\xi)}$ si ha

$$\xi^3 (\sigma'' + \sigma'^2) = 1 \quad (1.10)$$

e questa fa sperare che sia plausibile il tentativo: $\sigma'_0{}^2(\xi) \sim \xi^{-3}$. Se ne ricava $\sigma_0(\xi) \sim \pm 2\xi^{-1/2}$, che in effetti verifica la $\sigma'' = \pm \frac{3}{2}\xi^{-5/2} \ll \xi^{-3} = \sigma'^2$. Si sono così trovate le due soluzioni indipendenti, e quindi la soluzione generale, in via approssimata.

Si assume poi che per ciascuna delle due σ_0 (si inizi con $\sigma_0 = +2\xi^{-1/2}$) la σ ammetta uno sviluppo del tipo:

$$\sigma(\xi) = 2\xi^{-1/2} + \sigma_1(\xi), \quad \text{con } \sigma_1 \ll \sigma_0. \quad (1.11)$$

Sostituendo ancora la $x(\xi) = e^{\sigma(\xi)}$ nell'equazione iniziale (1.9), e quindi in questo esempio sostituendo la (1.11) nella (1.10), si ha

$$\frac{3}{2}\xi^{-5/2} + \sigma_1'' + \xi^{-3} - 2\xi^{-3/2}\sigma_1' + \sigma_1'^2 = \xi^{-3}. \quad (1.12)$$

Ma è $\sigma_0(\xi) \sim \xi^{-1/2}$, dunque ha senso assumere $\sigma_1 \sim \xi^{\beta-1/2}$ con $\beta > 0$ e ricavarne la stima $\sigma_1' \sim \xi^\beta \sigma_0'$ che implica $\sigma_1' \ll \xi^{-3/2}$. Pertanto non solo il secondo ma anche l'ultimo addendo nella (1.12) sono subdominanti, e rimane la condizione

$$\frac{3}{2}\xi^{-5/2} \sim 2\xi^{-3/2}\sigma_1' \quad \text{che fornisce: } \sigma_1(\xi) \sim \frac{3}{4} \ln \xi.$$

Si controlla infine che questa stima fornisca $\sigma_1''(\xi) \sim -\frac{3}{4}\xi^{-2} \ll \xi^{-5/2}$ e che in effetti sia $\frac{3}{4} \ln \xi \sim \sigma_1 \ll 2\xi^{-1/2}$.

È ora possibile proseguire, e cercare un'ulteriore correzione ponendo

$$\sigma(\xi) = 2\xi^{-1/2} + \frac{3}{4} \ln \xi + \sigma_2(\xi) \quad \text{con} \quad \sigma_2(\xi) \ll \ln \xi .$$

Sostituendo nuovamente $x(\xi) = e^{\sigma(\xi)}$ nell'equazione di partenza (1.9), dalla (1.10) si ha

$$-\frac{3}{16}\xi^{-2} + \sigma_2'' + \sigma_2'^2 - 2\xi^{-3/2}\sigma_2' + \frac{3}{2}\xi^{-1}\sigma_2' = 0.$$

In questa, il primo ed il quarto addendo sono dominanti, e si ricava quindi $\sigma_2(\xi) \sim -\frac{3}{16}\xi^{1/2} + \text{cost}$.

Contrariamente ai termini già trovati, questa assegna alla $x = x(\xi)$ un fattore indipendente dalla ξ ed uno correttivo piccolo per ξ piccole.

Tale σ_2 *non viene compresa* nello sviluppo di $\sigma(\xi)$. Al contrario, prevedendo di dover trovare un termine moltiplicativo del tipo $w(\xi) = \text{cost} + o(\xi)$, si sostituisce nell'equazione (1.9) la particolare forma

$$x(\xi) = w(\xi) \cdot \exp\left(2\xi^{-1/2} + \frac{3}{4} \ln \xi\right) .$$

Si ricava, per la $w(\xi)$, la condizione necessaria:

$$w'' + \left(\frac{3}{2}\xi^{-1} - 2\xi^{-3/2}\right) w' - \frac{3}{16}\xi^{-2}w = 0 .$$

Di questa si calcola la soluzione mediante la sostituzione diretta di una serie sul tipo di quelle di Frobenius, ma per intuire la quale occorre ancora un pò di lavoro, di nuovo mediante l'uso del bilancio dominato giacché l'origine è ancora singolare irregolare.

Si ricava dapprima una stima dell'errore: $e(\xi) := 1 - w(\xi)$ ed infine la

$$w(\xi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi^{n/2} \quad \text{con} \quad a_n = \frac{-1}{\pi 4^n n!} \Gamma(n - \frac{1}{2}) \Gamma(n + \frac{3}{2}) .$$

È disperante a questo punto riconoscere, servendosi della identità $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, che:

$$\text{tale serie ha raggio di convergenza} \quad \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{16(n+1)}{(2n-1)(2n+3)} \right| = 0 .$$

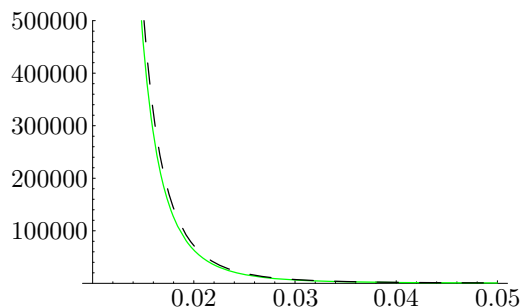
È rassicurante invece constatare, servendosi delle identità

$$a_0 = \frac{-1}{\pi} \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = 1 \quad \text{e} \quad a_1 = \frac{-1}{4\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{3}{16} ,$$

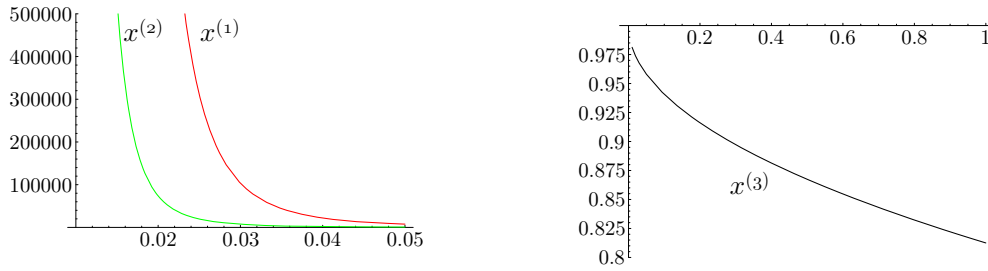
che l'approssimazione

$$x^{bd}(\xi) = e^{2/\sqrt{\xi}} \xi^{3/4} \left(1 - \frac{3}{16} \xi^{1/2}\right) ,$$

paragonata con la soluzione (in questo esempio) per $x(1) = 6$, $x'(1) = -0.3$, e calcolata in modo numerico, *sia particolarmente accurata*. In figura è tracciato in tratteggio il grafico della funzione $x^{bd}(\xi)$ calcolata con il bilancio dominato, e quello tracciato in linea continua della soluzione $x^{num}(\xi)$ della stessa equazione, trovata con metodi numerici.



Il seguente grafico mostra i primi due termini correttivi: $x^{(1)} := e^{2/\sqrt{\xi}}$ e $x^{(2)} := e^{2/\sqrt{\xi}} \xi^{3/4}$, insieme con il fattore dovuto all'uso del procedimento di Frobenius: $x^{(3)} := (1 - 3\sqrt{\xi}/16)$.



□

Il successivo esempio applica il metodo del bilancio dominato a un caso nel quale esso non è strettamente necessario, tuttavia mostra che, come nell'esempio precedente, con esso si possono ottenere informazioni ulteriori non facilmente ricavabili con altri metodi.

Esempio 6.1.22 La funzione $x(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n / (n!)^2$ è definita per ogni $\xi \in \mathbb{R}$, ma per ottenerne una buona approssimazione per ξ grandi occorrono molti termini: per esempio per $\xi \sim 10000$ occorrono circa 150 termini.

Se invece si nota che essa è soluzione dell'equazione

$$\xi x'' + x' = x$$

e si pone $x(\xi) = e^{\sigma(\xi)}$ si ricava la condizione necessaria $\xi \sigma'' + \xi (\sigma')^2 + \sigma' = 1$.

Per $\xi \rightarrow \infty$ ci si aspetta una rapida crescita, e quindi è ragionevole l'ipotesi $\sigma'' \ll \sigma'^2$, che dà

$$\sigma'_0(\xi) \sim \left(-1 \pm (1 + 4\xi)^{1/2} \right) / 2\xi \sim \pm \xi^{-1/2};$$

d'altra parte, accettare $\sigma'' \sim (\sigma')^2$ comporterebbe $\sigma \sim \log \xi$ e questo non verifica $\sigma' = 1$ (conseguenza dell'equazione in tale ipotesi). Così invece si calcola $\sigma_0 = 2\xi^{1/2}$ che, correttamente, fornisce (per $\xi \rightarrow \infty$) la stima $|\sigma''| = \xi^{-3/2}/2 \ll (\xi^{-1/2})^2$.

Per il passo successivo si pone $\sigma(\xi) = 2\xi^{1/2} + \sigma_1(\xi)$ e si ricava

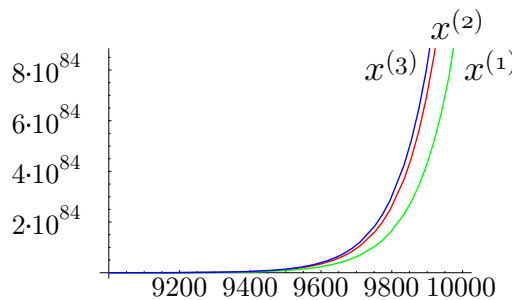
$$\xi \sigma_1'' + \xi (\sigma_1')^2 + (2\xi^{1/2} + 1)\sigma_1' + \xi^{-1/2}/2 = 0$$

con $\xi^{1/2} \gg 1$, e $\sigma_1(\xi) \ll \xi^{1/2}$; per esempio: $\sigma_1 \sim \xi^{1/2-\beta}$ con $\beta > 0$ implica le stime $\xi \sigma_1'(\xi) \ll \xi^{1/2}$, e $\xi \sigma_1''(\xi) \ll \xi^{-1/2}$. Pertanto sono dominanti il 3° e 4° termine, che forniscono $\sigma_1' = -\xi^{-1}/4$ e cioè l'approssimazione asintotica

$$x_{aa}(\xi) \sim c \xi^{-1/4} e^{2\xi^{1/2}}$$

che è uno sviluppo assai più veloce della serie precedente.

In figura sono tracciati i grafici di due somme $\sum_{n=0}^m \xi^n / (n!)^2$, la $x^{(1)}$ con $m = 100$ termini e la $x^{(2)}$ con $m = 110$ termini; quest'ultima è praticamente identica a quelle che si ottengono per valori superiori della m . Insieme con esse è tracciato il grafico dell'approssimazione asintotica $x^{(3)} := c \xi^{-1/4} e^{2\xi^{1/2}}$ per $c = x(1)/e^2$, valore che la rende in $\xi = 1$ uguale alla $x(1) = \sum_{n=0}^{\infty} 1/(n!)^2$.



Si osservi che il procedimento è lecito in quanto quella che si cerca è una sola (rispetto ai dati sulla ξ) soluzione della equazione assegnata e non tutta la famiglia delle soluzioni generali dell'equazione stessa. □

Nelle espressioni appena viste, come d'altra parte nel metodo di Frobenius, la differenza $(\xi - \xi_0)$ fra la variabile indipendente ed il suo valore di riferimento, ha il ruolo di *parametro piccolo*.

N.B. 6.1.23 In generale, nell'uso dei metodi perturbativi il primo problema da risolvere è proprio quello di procurarsi il *parametro piccolo*, ε , rispetto al quale eseguire lo sviluppo asintotico. Spesso la natura stessa del problema è tale da permettere di individuare la ε fin dall'inizio, ma questo non è sempre il caso, né è sempre evidente quale debba essere la successione di funzioni d'ordine $\delta_n(\varepsilon)$ rispetto alle quali calcolare la serie asintotica. A tale scopo, è buona pratica “riscalfare” le coordinate in modo da scrivere il problema rispetto a delle variabili *adimensionali*. Successivamente si cerca di stabilire quale dei parametri o dei coefficienti sia, o sia opportuno considerare, nettamente più piccolo degli altri presenti. Si passa poi ad applicare il particolare metodo prescelto *mantenendosi costantemente in contatto* con il problema iniziale, e ciò al fine anche di evitare vertiginosi quanto inutili calcoli. $\diamond$

Si riassumerà qui brevemente la logica del principale procedimento usato negli esempi visti sopra, per poi poterlo correggere all'occorrenza quando esso si dimostri poco attendibile.

Si indichi con P un problema assegnato, e che dipenda dal parametro ε ; (solo per fissare le idee si può pensare a quello delle (1.1) più sopra, ma la tecnica vale comunque purché sussista una qualche forma di dipendenza continua dai parametri). Si chiami poi P_0 il problema che si ricava quando in P si pone $\varepsilon = 0$.

Ipotesi di lavoro. (senza la quale tutto il procedimento va riproposto).

Il problema P_0 si sa risolvere e fornisce una certa soluzione ϕ_0 che si è in grado di valutare e può essere quindi usata come punto di partenza.

Si noti che questa ipotesi può essere interpretata come un ulteriore vincolo sulla scelta della ε .

Accettata l'ipotesi detta, generalmente si inizia con il seguente metodo, del quale gli altri possono essere intesi come “correzioni”.

Il Metodo perturbativo diretto

(o) Si calcola (o si stima) la soluzione ϕ_0 del problema “imperturbato”: P_0 .

(i) Si assume che tale soluzione ϕ_0 sia approssimazione asintotica di grado zero della (incognita) soluzione ϕ del problema P . Si assume cioè che sussista la

$$\phi - \phi_0 = o(\delta_0) \quad \text{con} \quad \|\phi_0\|_{D_0} = O_s(\delta_0).$$

Si osservi che siccome la ϕ_0 non dipende da ε questa ipotesi implica (generalmente) che $\delta_0 = 1$, e cioè che il problema imperturbato abbia soluzione né troppo piccola né troppo grande rispetto alla scala dei coefficienti e dei parametri. Anche questa ipotesi rappresenta un ulteriore vincolo sul procedimento di scelta delle scale oltre che della ε .

(ii) Si sceglie, talvolta arbitrariamente, una certa successione asintotica di funzioni d'ordine: $\{\delta_n(\varepsilon)\}_{n=1,2,\dots}$. Quando non si hanno altri vincoli o motivi particolari la scelta canonica è quella dei monomi: $\delta_n(\varepsilon) := \varepsilon^n$ con $n = 0, 1, \dots$. Altre volte, occorre calcolare le $\delta_n(\varepsilon)$ una per una in modo che il problema continui ad essere sensato ad ogni passo (vedi oltre).

(iii) Si suppone che la ϕ sia sviluppabile in somma asintotica; e cioè (nella notazione usata precedentemente salvo rinominare le δ_n) che sussista la

$$\begin{cases} \phi(\xi, \varepsilon) \sim \widehat{\phi}(\xi, \varepsilon) + o(\delta_m(\varepsilon)) := \sum_{n=0}^m \phi_n(\xi, \varepsilon) \delta_n(\varepsilon) + o(\delta_m(\varepsilon)), \\ \text{con tutte le } \phi_n(\xi, \varepsilon) = O_s(1), \text{ o nulle, e le } \delta_n = o(\delta_{n-1}) \text{ per } n > 0. \end{cases}$$

(iv) Si sostituisce questo sviluppo nell'originario problema P e si eseguono le varie operazioni presenti in esso (cosa lecita dato che lo sviluppo è ad un numero finito di termini).

(v) Si determinano “in cascata” le funzioni ϕ_n richiedendo che esse verifichino il problema *singolarmente ad ogni ordine delle δ_n* : $n = 1, 2, \dots, m$.

Tale richiesta equivale ad assumere che il presunto sviluppo sia effettivamente un'approssimazione *asintotica alla ϕ almeno fino all'ordine m* .

N.B. 6.1.24 Il procedimento è semplice; il difficile è decidere quale sia il migliore m al quale arrestarlo, e quale ne sia la validità rispetto alla variabile ξ . $\diamond$

N.B. 6.1.25 Nello sviluppo di Taylor si ha il caso particolare:

$$\delta_n = (\xi - \xi_0)^n \quad \text{e} \quad \phi_n(\xi, \varepsilon) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\xi^n} \phi(\xi) \Big|_{\xi=\xi_0}.$$

N.B. 6.1.26 Generalmente le funzioni $\phi_n(\xi, \varepsilon)$ si cercano *indipendenti dalla ε* ; anzi si parla di:

Sviluppo Regolare, o Uniforme, in D_0 := uno sviluppo per il quale esistono $\{\phi_n\}_{n=1,2,\dots}$ dipendenti dalla sola ξ , tali che le $\|\phi_n(\xi)\|_{D_0}$ siano limitate in D_0 e per $n = 1, \dots, m$, e che sussista la

$$\phi(\xi, \varepsilon) = \sum_{n=0}^m \phi_n(\xi) \delta_n(\varepsilon) + o(\delta_m(\varepsilon)), \quad n = 1, 2, \dots, m. \quad (1.13)$$

Sviluppo Singolare, in D_0 , (lo sviluppo non il problema), := uno sviluppo per il quale, da un certo n_0 in poi, la seconda delle (1.13) non è più verificata. Tipicamente ciò accade in certe regioni del dominio D_0 nel quale la variabile ξ assume valori; per esempio per ξ “grandi”, oppure lungo linee di frontiera, dette *Zone di non uniformità*. In tal senso lo sviluppo si può indicare come “non uniforme”. $\diamond$

Si esamini ora il seguente esempio, di natura quasi universale, nel quale si applica il metodo diretto. In esso e nel seguito verrà usata la notazione: v_ε per indicare la $\partial_\varepsilon v(x, \varepsilon)$ e analogamente v_x per indicare $\partial_x v(x, \varepsilon)$, etc. Inoltre, la successione $\{\delta_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ è a priori la successione dei monomi $\{\varepsilon^n\}_{n=0,1,2,\dots}$. Infine, si farà generalmente riferimento alla risoluzione di una E.D.O. rispetto alla variabile temporale t , ma è chiaro che questo servirà solo a titolo esplicativo.

ESEMPIO PILOTA

Sia x appartenente ad un opportuno spazio funzionale $\mathbb{X}$ il cui spazio dei valori abbia la struttura di varietà n -dimensionale. Sia $v(x, \varepsilon) : \mathbb{X} \times N(0) \rightarrow T_x \mathbb{X}$ una famiglia di campi vettoriali dipendente dal parametro $\varepsilon \in \mathbb{R}^1$; e sia $\mathcal{L} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ un operatore lineare sulla x e indipendente dalla ε . L'operatore $\mathcal{L}$ sia regolare rispetto a una variabile indipendente ξ che, anche in vista delle applicazioni che si faranno nel seguito, verrà qui assunta scalare reale, e generalmente indicata con la lettera t per intendere il tempo in un problema dinamico; è chiaro tuttavia che il procedimento si estende anche al caso di variabili più generali o vettoriali. Il caso $\varepsilon \in \mathbb{R}^m$, così come quello non autonomo: $v = v(t, x; \varepsilon)$ è meno semplice, anche se spesso solo nella notazione, e verrà tralasciato.

Sia dato il problema P , da risolversi nello spazio $\mathbb{X}$:

$$\text{Problema } P : \quad \begin{cases} \mathcal{L}(x) = v(x, \varepsilon) \\ b(x, \varepsilon) = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

ove $b(x, \varepsilon) = 0$ indica un insieme di condizioni iniziali e/o al contorno necessarie affinché il problema P risulti ben posto, e cioè ammetta in $\mathbb{X}$ soluzione (incognita, esatta) $x = \tilde{x}(\cdot, \varepsilon)$ unica e dipendente in modo regolare dai dati.

(i) Si calcola la funzione $x = \tilde{x}(\cdot, 0) =: x_0(t)$, soluzione del problema “imperturbato”, generalmente non lineare,

$$\text{Problema } P_0 : \quad \begin{cases} \mathcal{L}(x) = v(x, 0) \\ b(x, 0) = 0 \end{cases}$$

(ii) Scelta, per cominciare, la comoda successione dei monomi $\{\delta_k(\varepsilon)\}_{k=1,2,\dots} = \{\varepsilon^k\}_{k=1,2,\dots}$, si ipotizza

$$\tilde{x}(t, \varepsilon) \sim \hat{x}(t, \varepsilon) + o(\varepsilon^k) := x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots + \varepsilon^k x_k(t) + o(\varepsilon^k).$$

(iii) In tale ipotesi si sostituisce $\hat{x}$ (qui per $k = 2$) al posto della $\tilde{x}$ nella (1.14), e la si sviluppa rispetto al parametro ε (per brevità senza indicare la dipendenza dalla t)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\tilde{x}) &\sim \mathcal{L}(\hat{x}) + o(\varepsilon^2) = \mathcal{L}(x_0) + \varepsilon \mathcal{L}(x_1) + \varepsilon^2 \mathcal{L}(x_2) + o(\varepsilon^2) \\ &= v(\hat{x}, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} + \varepsilon \frac{d}{d\varepsilon} v(\hat{x}, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{d^2}{d\varepsilon^2} v(\hat{x}, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} + o(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (1.15)$$

(iv) Con l'aiuto del N.B. 6.1.27, più oltre, si ottiene (al secondo ordine e con tutte le derivate calcolate in $(x_0, 0)$)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\hat{x}) &= \mathcal{L}(x_0) + \varepsilon \mathcal{L}(x_1) + \varepsilon^2 \mathcal{L}(x_2) \\ &= v(x_0, 0) + \varepsilon \left(x_1 v_x + v_\varepsilon \right) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(x_1^2 v_{xx} + 2 \left[x_2 v_x + x_1 v_{x\varepsilon} \right] + v_{\varepsilon\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

- (v) Di questa si cercano le soluzioni, e cioè le funzioni $\{x_i\}_{i=0,1,\dots}$ che rendono vera la presupposta identità (1.15). A tale scopo occorre individuare le opportune condizioni ausiliarie, come segue.
- (vi) Un analogo procedimento si esegue sulle condizioni ausiliarie, sulle quali si agisce come fatto sul campo v ottenendo (al secondo ordine e con tutte le derivate calcolate in $(x_0, 0)$)

$$b(x, \varepsilon) = b(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2; \varepsilon) = 0 \quad \text{da cui}$$

$$b(x_0, 0) + \left(b_x x_1 + b_\varepsilon\right) \varepsilon + \frac{1}{2} \left(b_{xx} x_1^2 + 2[b_x x_2 + b_{x\varepsilon} x_1] + b_{\varepsilon\varepsilon}\right) \varepsilon^2 = 0.$$

Per esempio, se $b(x, \varepsilon) = 0$ specifica una condizione iniziale del tipo

$$\begin{cases} \tilde{x}(t=0; \varepsilon) - (a_0 + a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + \dots) = 0 \\ \tilde{\dot{x}}(t=0; \varepsilon) - (c_0 + c_1 \varepsilon + c_2 \varepsilon^2 + \dots) = 0 \end{cases}$$

le corrispondenti condizioni sono le

$$\begin{cases} x_0(0) - a_0 = 0 \\ \dot{x}_0(0) - c_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) - a_1 = 0 \\ \dot{x}_1(0) - c_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2(0) - a_2 = 0 \\ \dot{x}_2(0) - c_2 = 0 \end{cases} \quad \dots$$

- (vii) Se ne ricava la successione di problemi *tutti lineari, e distinti fra loro solo per i termini noti*, nei quali le derivate del campo sono tutte calcolate per $x = x_0(t)$ e $\varepsilon = 0$, e pertanto *sono tutte funzioni note della (sola) variabile indipendente t* . Il primo, dopo il P_0 , è il problema

$$\text{Problema P1 :} \quad \begin{cases} \mathcal{L}(x_1) = v_x x_1 + v_\varepsilon \\ \text{con condizioni ausiliarie sulla } x \text{ all'ordine } O_s(\varepsilon) \end{cases} \quad (1.16)$$

dal quale si determina la particolare funzione $x_1 = x_1(t)$ che verifica le specificate condizioni iniziali. Questa, insieme con la $x_0 = x_0(t)$ permette di scrivere il successivo problema al secondo ordine:

$$\text{Problema P2 :} \quad \begin{cases} \mathcal{L}(x_2) = v_x x_2 + \frac{1}{2} \left[x_1^2 v_{xx} + 2x_1 v_{x\varepsilon} + v_{\varepsilon\varepsilon} \right] \\ \text{con condizioni ausiliarie sulla } x \text{ all'ordine } O_s(\varepsilon^2) \end{cases}$$

del quale si calcola la soluzione $x_2 = x_2(t)$. Poi, mediante le $x_0(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$, si scrive il problema al terzo ordine:

$$\text{Problema P3 :} \quad \begin{cases} \mathcal{L}(x_3) = v_x x_3 + \frac{1}{6} \left[x_1^3 v_{xxx} + 6x_1 x_2 v_{xx} \right. \\ \quad \left. + 3x_1^2 v_{x\varepsilon} + 6x_2 v_{x\varepsilon} + 3x_1 v_{x\varepsilon\varepsilon} + v_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} \right] \\ \text{con condizioni ausiliarie sulla } x \text{ all'ordine } O_s(\varepsilon^3) \end{cases}$$

e così via procedendo “a cascata”.

N.B. 6.1.27 La struttura dei calcoli è molto semplice: indicando brevemente con $x(\varepsilon)$ la funzione $x(\cdot, \varepsilon)$, e cioè sottointendendo l'insieme delle variabili indipendenti del problema $\mathcal{L}(x) = v(x)$, indicando con gli apici le derivate totali rispetto alla variabile asintotica ε :

$$x' := \frac{d}{d\varepsilon} x(\varepsilon), \quad x'' := \frac{d^2}{d\varepsilon^2} x(\varepsilon), \quad \text{etc,}$$

indicando con i deponenti le derivate parziali, e con i campi calcolati in $(x(\varepsilon), \varepsilon)$, quando $v = v(x)$ si hanno le

$$\begin{cases} v'(x(\varepsilon)) = v_x x_\varepsilon \\ v''(x(\varepsilon)) = v_{xx} x_\varepsilon^2 + v_{x\varepsilon} x_{\varepsilon\varepsilon} \\ v'''(x(\varepsilon)) = v_{xxx} x_\varepsilon^3 + 3v_{xx} x_\varepsilon x_{\varepsilon\varepsilon} + v_{x\varepsilon\varepsilon} x_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} \end{cases}$$

Quando invece $v = v(x; \varepsilon)$, sussistono le

$$\begin{cases} v'(x(\varepsilon), \varepsilon) = v_x x_\varepsilon + v_\varepsilon \\ v''(x(\varepsilon), \varepsilon) = (v_{xx} x_\varepsilon^2 + v_x x_{\varepsilon\varepsilon}) + 2v_{\varepsilon x} x_\varepsilon + v_{\varepsilon\varepsilon} \\ v'''(x(\varepsilon), \varepsilon) = (v_{xxx} x_\varepsilon^3 + 3v_{xx} x_\varepsilon x_{\varepsilon\varepsilon} + v_x x_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}) \\ \quad + 3(v_{\varepsilon xx} x_\varepsilon^2 + v_{\varepsilon x} x_{\varepsilon\varepsilon}) + 3v_{\varepsilon\varepsilon x} x_\varepsilon + v_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} . \end{cases}$$

Stante la posizione $\hat{x} = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots + \varepsilon^k x_k$, e dato che le derivate della $\hat{x}$ devono essere calcolate nel punto $\varepsilon = 0$, si ha che

$$\hat{x}_\varepsilon(0) = x_1, \quad \hat{x}_{\varepsilon\varepsilon}(0) = 2! x_2, \quad \hat{x}_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}(0) = 3! x_3, \quad \text{etc.}$$

Pertanto si conclude che i vari termini della (1.15) sono dati da

$$\begin{cases} v'(\hat{x}, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = v_x x_1 + v_\varepsilon \\ v''(\hat{x}, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = v_{xx} x_1^2 + 2v_x x_2 + 2v_{\varepsilon x} x_1 + v_{\varepsilon\varepsilon} \\ v'''(\hat{x}, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = v_{xxx} x_1^3 + 6v_{xx} x_1 x_2 + 6v_x x_3 \\ \quad + 3(v_{\varepsilon xx} x_1^2 + 2v_{\varepsilon x} x_2) + 3v_{\varepsilon\varepsilon x} x_1 + v_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} \end{cases}$$

ed in tutti i termini i campi sono calcolati in $(x_0(t), 0)$. $\diamond$

N.B. 6.1.28 La linearizzazione studia solo il termine $x_1 = x_1(t)$ con l'equazione variazionale (1.16). $\diamond$

N.B. 6.1.29 Data la complessità della espressione generale, la cosa migliore è senz'altro ripetere volta per volta i passaggi (i), ... , (iv) sul particolare problema in esame. $\diamond$

I seguenti due esempi mostrano che, sebbene la struttura vista sopra sia del tutto generale, tuttavia non è l'unica possibile nell'uso degli sviluppi asintotici, e può essere ulteriormente adattata ai singoli problemi in esame.

Esempio 6.1.30 Trovare le soluzioni dell'equazione algebrica:

$$x^3 - 4.001x + 0.002 = 0.$$

Si denoti $\varepsilon = 0.001$; si ha l'equivalente equazione

$$x^3 - (4 + \varepsilon)x + 2\varepsilon = 0$$

le cui soluzioni ordine zero sono: $x_0 = \{-2, 0, +2\}$. Posto poi $x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2$, si ricava (all'ordine 2)

$$x_0^3 + 3x_0^2 x_1 \varepsilon + 3x_0 x_1^2 \varepsilon^2 + 3x_0^2 x_2 \varepsilon^2 - 4x_0 - 4\varepsilon x_1 - 4\varepsilon^2 x_2 - \varepsilon x_0 - \varepsilon^2 x_1 + 2\varepsilon = 0.$$

Per $x_0 = -2$, per esempio, questa fornisce

$$(12x_1 - 4x_1 + 4)\varepsilon + (-6x_1^2 + 12x_2 - 4x_2 - x_1)\varepsilon^2 = 0$$

da cui $x_1 = -1/2$ ed $x_2 = 1/8$ e cioè

$$x = -2 - 0.0005 + 0.1 \cdot 10^{-6} + o(10^{-6}) = -2 - 5 \cdot 10^{-4} + o(10^{-6}).$$

□

Esempio 6.1.31 Sia $f : t \mapsto f(t)$ continua, e sia dato il problema

$$\begin{cases} \ddot{x} = f(t)x \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1. \end{cases}$$

Si considera, *arbitrariamente*, un'altra equazione:

$$\ddot{x} = \varepsilon f(t)x$$

e si riservano per la x_0 la totalità delle condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x_0(0) = 1 \\ \dot{x}_0(0) = 1 \end{cases} \quad \text{e quindi, per } n > 0, \quad \text{si lascia} \quad \begin{cases} x_n(0) = 0 \\ \dot{x}_n(0) = 0 \end{cases}.$$

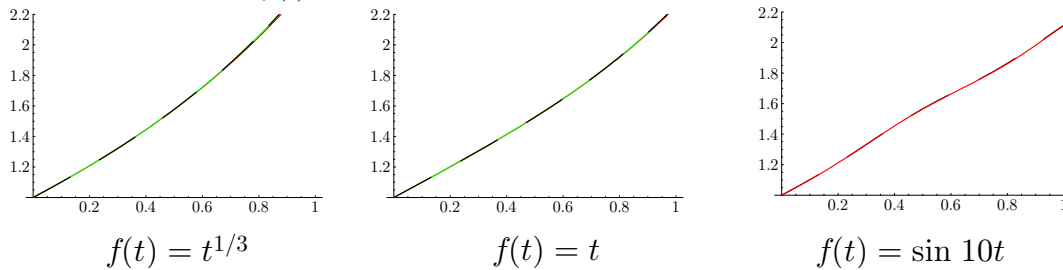
Se ne ricava: $x_0 = t + 1$; e siccome d^2/dt^2 è lineare ne segue la catena di equazioni, *risolubili per integrazione semplice*,

$$\ddot{x}_n = f(t) x_{n-1} \quad n = 1, 2, \dots$$

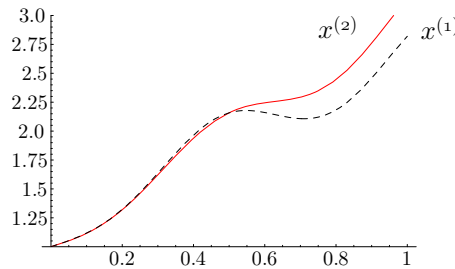
Per esempio si ha

$$x_1(t) = \int_0^t \int_0^s (1 + \varsigma) f(\varsigma) d\varsigma ds, \quad x_{n+1}(t) = \int_0^t \int_0^s x_n(\varsigma) f(\varsigma) d\varsigma ds.$$

A solo titolo di esempio per mostrare la bontà delle approssimazioni così trovate, in figura vi sono i grafici delle funzioni trovate con il metodo detto (linea piena) e di quelle valutate numericamente (tratteggio) per tre diversi valori della funzione coefficiente $f(t)$.



Il seguente grafico è stato tracciato con la $f(t) = 10 \sin 10t$ e mostra che, invece, l'approssimazione $x^{(2)}$ e la soluzione numerica $x^{(1)}$ si possono discostare sensibilmente qualora la funzione $f(t)$ assuma valori sensibilmente maggiori della x_0 (qui: $O_s(1)$).



□

Esempio 6.1.32 L'Oscillatore armonico debolmente smorzato.

$$m x'' + \eta x' + \kappa x = 0, \quad \text{ove: " ' " := } d/d\tau \text{ " , e con } x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1.$$

Si divida per m e si definiscano $\omega_0 := \sqrt{\kappa/m}$ e (per futuri usi) $\varepsilon := \frac{\eta}{2m\omega_0} \equiv \frac{\eta}{2\sqrt{m\kappa}}$. Si ottiene la:

$$x'' + \frac{\eta}{m} x' + \omega_0^2 x = x'' + 2\varepsilon \omega_0 x' + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.17)$$

Successivamente, si può ulteriormente dividere tale equazione per ω_0^2 , e riscalarare la variabile temporale: $\omega_0 \tau \mapsto t$. In tal caso si ottiene il

$$\text{Problema } P: \quad \begin{cases} \ddot{x} + 2\varepsilon \dot{x} + x = 0 \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1. \end{cases}$$

Nell'ipotesi $\varepsilon \ll 1$, con il metodo perturbativo diretto si ricava dapprima:

$$\text{Problema } P0: \quad \begin{cases} \ddot{x}_0 + x_0 = 0 \\ x_0(0) = 0, \quad \dot{x}_0(0) = 1 \end{cases}$$

che fornisce $x_0(t) = \sin t$. Quindi

$$\text{Problema } P1: \quad \begin{cases} \ddot{x}_1 + x_1 = -2\dot{x}_0 = -2 \cos t = -2\Re e^{it} \\ x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0 \end{cases}$$

che fornisce $x_1(t) = -t \sin t$. Poi

$$\text{Problema } P2: \quad \begin{cases} \ddot{x}_2 + x_2 = -2\dot{x}_1 = 2(\sin t + t \cos t) \\ x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0 \end{cases}$$

e questa, ricorrendo alla formula con il nucleo risolvete, fornisce

$$x_2(t) = \int_0^t \sin(t-s)(2 \sin s + 2s \cos s) ds = \frac{1}{2} (t^2 \sin t - t \cos t + \sin t).$$

N.B. 6.1.33 Come è noto questo risultato, così come il precedente, si sarebbe anche potuto ottenere mediante il “metodo delle ampiezze complesse”, e cioè svolgendo, come qui di seguito, il calcolo supponendo le coordinate complesse.

Stante il fatto che l'assegnata equazione $\dot{x} = v(t, x)$ ha campo tale che $v(t, \bar{x}) = \overline{v(t, x)}$, se x è soluzione della data equazione e uscente da un certo x_0 allora anche $\bar{x}$ è soluzione della stessa equazione e uscente da $\bar{x}_0$. Dunque in tal caso condizioni iniziali reali implicano soluzioni reali, e non lede la generalità considerare l'assegnata equazione nella variabile x come la parte reale di un'identica equazione su una variabile complessa z , e nel cercare come soluzione particolare della prima la parte reale della (corrispondente) soluzione particolare della seconda.

Nel caso $P1$ l'equazione è $\ddot{z} + z = -2it$ per cui, dato il particolare termine noto e data la risonanza fra la parte omogenea e il termine noto, si cerca una soluzione della forma: $z(t) = (z_1 + z_2 t)e^{it}$ con $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^1$. Dunque: $\dot{z} = (i(z_1 + z_2 t) + z_2)e^{it}$, e quindi (a parte il comune fattore e^{it}) si ha la: $(-z_1 - z_2 t + 2iz_2) + z_1 + z_2 t = -2$, che implica z_1 arbitrario e $z_2 = i$. L'identità $\Re(i e^{it}) = -\sin t$ permette di concludere che $x_1(t) = a \cos t + b \sin t - t \sin t$, ed il dato iniziale dà $a = b = 0$.

In modo analogo, sostituendo $(z_1 + z_2 t + z_3 t^2)e^{it}$ nell'equazione $\ddot{z} + z = -2\frac{d}{dt}(i t e^{it})$ del problema $P2$ si ottiene $2iz_2 + 4iz_3 t + 2z_3 = -2i + 2t$ da cui: $z_3 = -i/2$ e $z_2 = -1/2$, ovvero: $x_2 = a \cos t + b \sin t - \frac{1}{2}t \cos t + \frac{1}{2}t^2 \sin t$. Imponendo su questa le condizioni ausiliarie si ottengono $a = 0$, e $b = 1/2$. $\diamond$

In definitiva, il metodo perturbativo diretto fornisce per l'incognita $\tilde{x}(t, \varepsilon)$ la seguente somma asintotica a tre termini (e quindi a meno di $o(\varepsilon^2)$):

$$x^{dir}(t, \varepsilon) := \sin t - \varepsilon t \sin t + \frac{1}{2} \varepsilon^2 (t^2 \sin t - t \cos t + \sin t).$$

Quello trovato è uno sviluppo regolare, ma solo fintanto che $t \sin t$ è dell'ordine dell'unità. Ciò significa che per $t > O_s(1)$ lo sviluppo non è uniforme e l'errore commesso diviene sensibile.

In questo esempio il tutto si può paragonare alla soluzione esatta, infatti l'ansatz: $ze^{\alpha t}$ con $\alpha^2 + 2\varepsilon\alpha + 1 = 0$ ed $\varepsilon < 1$ fornisce

$$\tilde{x}(t, \varepsilon) = ae^{-\varepsilon t} \sin(\sqrt{1-\varepsilon^2} t + \varphi_0) \quad \text{ove} \quad a = 1/\sqrt{1-\varepsilon^2}, \quad \varphi_0 = 0, \quad (1.18)$$

che è analitica in $(t, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times (0, 1)$ e pertanto ammette un'unico sviluppo in serie di potenze della ε e valido per ogni t . I suoi primi termini sono forniti (si veda il prossimo N.B.) dalla:

$$\tilde{x}^{app}(t, \varepsilon) = \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2\right) \left(1 - \varepsilon t + \frac{1}{2} \varepsilon^2 t^2\right) \left(\sin t - \frac{1}{2} \varepsilon^2 t \cos t\right), \quad (1.19)$$

la quale all'ordine $O(\varepsilon^2)$ uguaglia esattamente lo sviluppo x^{dir} trovato sopra.

N.B. 6.1.34 In questo e nei seguenti calcoli verranno adoperati i noti sviluppi, validi per piccoli valori della variabile:

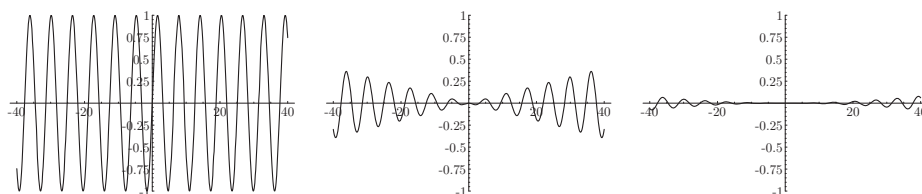
$$\begin{aligned} \ln(1+\varepsilon) &\sim \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \frac{1}{3} \varepsilon^3 - \frac{1}{4} \varepsilon^4 + \dots \\ \sin \varepsilon &\sim \varepsilon - \frac{1}{3!} \varepsilon^3 + \frac{1}{5!} \varepsilon^5 - \dots \\ \sqrt{1-\varepsilon} &\sim 1 - \frac{1}{2} \varepsilon - \frac{1}{8} \varepsilon^2 - \dots \\ \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} &\sim 1 + \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{3}{8} \varepsilon^2 + \dots \\ \frac{1}{1+\varepsilon} &\sim 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \dots \end{aligned}$$

e quindi, in particolare

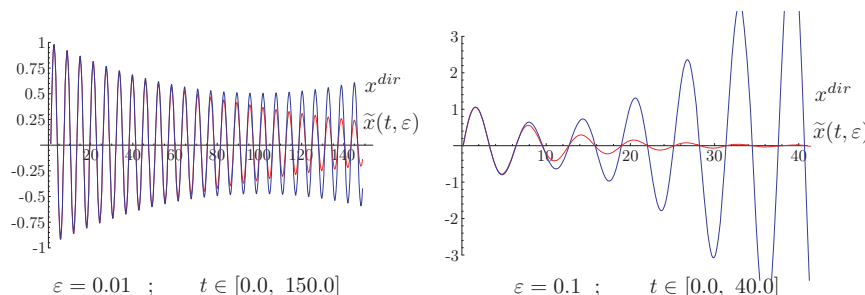
$$\sin(\sqrt{1-\varepsilon^2} t) \sim \sin\left(t\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right)\right) \sim \sin t \cos\left(\frac{\varepsilon^2 t}{2}\right) - \sin\left(\frac{\varepsilon^2 t}{2}\right) \cos t \sim \sin t - \frac{1}{2} \varepsilon^2 t \cos t.$$

$\diamond$

In figura sono riportati i grafici delle funzioni x_0 , εx_1 , ed $\varepsilon^2 x_2/2$, valutate per $\varepsilon = 0.01$; la loro somma è x^{dir} .



Nella successiva figura sono invece riportati, in corrispondenza a due valori della ε , i grafici delle due funzioni: la soluzione esatta $\tilde{x}(t, \varepsilon)$ del problema, e lo sviluppo $x^{dir}(t, \varepsilon)$.



È confortante constatare che l'espressione $\tilde{x}^{app}(t, \varepsilon)$ trovata nella (1.19) approssimando al secondo ordine la soluzione esatta $\tilde{x}(t, \varepsilon)$ coincide precisamente, come si è notato, con la $x^{dir}(t, \varepsilon)$ determinata con il metodo perturbativo. È però anche evidente che l'esponenziale ha bisogno di tutti i suoi infiniti termini per convergere correttamente, e che già lo sviluppo del seno dà luogo a termini non uniformi. Quindi, sebbene la ricordata analicità della funzione assicuri che lo sviluppo trovato non possa essere “sbagliato”, nel senso che esso è certamente l'inizio di una serie tale che aggiungendo a quelli trovati tutti gli altri infiniti termini si raggiunge il risultato corretto e per ogni coppia dei valori t ed ε , tuttavia *fermandosi ad un numero finito, ed anzi piccolo, di termini la stima risulta accettabile solo limitatamente a valori piccoli della t* . $\square$

Nell'Esempio 6.1.32 si è incorsi in uno *sviluppo non uniforme*; ciò comporta che, per t grandi, è necessario correggere il metodo diretto con altri metodi. Danno risultati accettabili, per quel sistema, i metodi di Media, di Stiramento delle coordinate, di Scale Multiple (vedi oltre).

Esempio 6.1.35 L'equazione di Lighthill

$$\begin{cases} (t + \varepsilon x)\dot{x} + x = 1 & t \in [0, 1] \\ x(1) = 2 \end{cases} \quad (1.20)$$

L'equazione è debolmente non lineare, ma la ε moltiplica il termine di ordine massimo, e il problema perturbativo rientra allora fra i cosiddetti *Problemi di perturbazioni singolari*; (quello in esame, tuttavia, è debolmente singolare giacché non riduce l'ordine del problema differenziale).

Si noti subito, dal punto di vista qualitativo, che l'equazione permette di valutare esplicitamente la $\dot{x}(1) = [(1 - x(t))/(t + \varepsilon x(t))] \big|_{t=1} < 0$ e quindi di concludere che la $\tilde{x}(t, \varepsilon)$, che è positiva in $t = 1$, cresce quando t decresce dal valore 1 verso lo zero; infatti il denominatore non cambia segno né lo fa il numeratore. Tuttavia, siccome su $[0, 1]$ la $\dot{x}$ è limitata (il valore minimo del suo denominatore in quella zona è 2ε), ci si aspetta che tale sia anche la $\tilde{x}$. Si osservi poi che la parte non lineare della equazione è il solo termine

$$\begin{aligned} \varepsilon x \dot{x} &= \frac{\varepsilon}{2} \frac{d}{dt} (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots)^2 \\ &= \frac{d}{dt} \left(\varepsilon \frac{x_0^2}{2} + \varepsilon^2 x_0 x_1 + \varepsilon^3 \left(x_0 x_2 + \frac{x_1^2}{2} \right) \right) + o(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (1.21)$$

circostanza, questa, che in questo esempio permette la risoluzione analitica dell'intera (1.20). È questo un caso assai raro, che sarà di grande utilità per meglio interpretare alcuni dei metodi perturbativi che verranno usati per correggere il metodo diretto.

Si cominci con quest'ultimo metodo. Servendosi della (1.21) il primo membro della (1.20) vale (all'ordine ε^3):

$$t(\dot{x}_0 + \varepsilon \dot{x}_1 + \varepsilon^2 \dot{x}_2 + \varepsilon^3 \dot{x}_3) + (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3) + \varepsilon \frac{d}{dt} \left(\frac{x_0^2}{2} \right) + \varepsilon^2 \frac{d}{dt} (x_0 x_1) + \varepsilon^3 \frac{d}{dt} \left(x_0 x_2 + \frac{x_1^2}{2} \right)$$

Il problema imperturbato consiste nel

$$\text{Problema } P0: \quad \begin{cases} t\dot{x}_0 + x_0 = 1 \\ x_0(1) = 2 \end{cases}$$

da cui:

$$\frac{1}{1-x_0} dx_0 = \frac{1}{t} dt \quad \text{e quindi} \quad \frac{1-x_0}{1-2} = \frac{1}{t} \quad \text{che dà:} \quad x_0(t) = 1 + \frac{1}{t};$$

più velocemente, si può notare che l'equazione fornisce $\frac{d}{dt}(tx_0 - t) = 0$.

Ne segue il problema:

$$\text{Problema } P1: \quad \begin{cases} t\dot{x}_1 + x_1 = -x_0\dot{x}_0 = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}x_0^2\right) \\ x_1(1) = 0 \end{cases}$$

da cui $tx_1 + \frac{1}{2}x_0^2 = \text{cost}$ e quindi $tx_1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^2 = 2$, ovvero

$$x_1(t) = \frac{1}{2t} \left(4 - \left(1 + \frac{1}{t}\right)^2\right) = -\frac{1}{2t^3}(1-t)(1+3t).$$

Il successivo problema è il:

$$\text{Problema } P2: \quad \begin{cases} t\dot{x}_2 + x_2 = -(x_0\dot{x}_1 + \dot{x}_0x_1) = -\frac{d}{dt}(x_0x_1) \\ x_2(1) = 0 \end{cases}$$

ovvero $tx_2 + \text{cost} = -x_0x_1$ da cui $x_2 = \frac{1}{2t^5}(1-t^2)(1+3t)$.

Allo stesso modo, e data la

$$\frac{1}{2} \left(\xi_0 + \xi_1\varepsilon + \xi_2\varepsilon^2 + \xi_3\varepsilon^3 \right)^2 \sim \frac{\xi_0^2}{2} + \xi_0\xi_1\varepsilon + \left(\frac{\xi_1^2}{2} + \xi_0\xi_2 \right) \varepsilon^2 + (\xi_1\xi_2 + \xi_0\xi_3)\varepsilon^3 + \left(\frac{\xi_2^2}{2} + \xi_1\xi_3 \right) \varepsilon^4 + O(\varepsilon^5)$$

si trovano:

$$tx_3 + \text{cost} = -(x_0x_2 + x_1^2/2), \quad \text{e} \quad tx_4 + \text{cost} = -(x_0x_3 + x_1x_2);$$

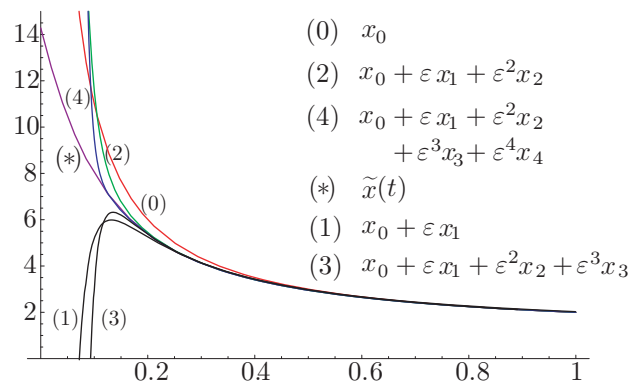
e quindi

$$x_3(t) = -\frac{1}{8t^7}(1-t)(1+3t)(5+10t+t^2) \quad \text{e} \quad x_4(t) = \frac{1}{8t^9}(1-t^2)(1+3t)(7+14t-5t^2).$$

In definitiva, e sostituendovi queste ultime relazioni, risulta

$$x^{dir}(t) = \frac{1+t}{t} - \varepsilon \frac{(1-t)(1+3t)}{2t^3} + \varepsilon^2 \frac{(1-t^2)(1+3t)}{2t^5} + \varepsilon^3 x_3(t) + \varepsilon^4 x_4(t) + o(\varepsilon^4).$$

Nella seguente figura la x^{dir} è tracciata insieme alle varie correzioni per $\varepsilon = 0.01$, ed alla soluzione esatta $\tilde{x}(t)$.



Si può osservare che la rappresentazione trovata è uniforme per tempi lunghi, ma il procedimento ha introdotto (nel campo e) nella soluzione un punto di singolarità: $t = 0$ che non appartiene al dominio iniziale né è presente nella

soluzione esatta. Quest'ultima, come si è notato, si determina esplicitamente risolvendo la $\frac{d}{dt} \left(tx + \frac{1}{2} \varepsilon x^2 - t \right) = 0$, ed è:

$$\tilde{x}(t, \varepsilon) = -\frac{t}{\varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^2 + 2\left(\frac{1+t}{\varepsilon}\right) + 4} \quad .$$

Da questa si vede che la $\tilde{x}(t, \varepsilon)$ è del tutto regolare su $[0, 1]$, è limitata (per $\varepsilon \neq 0$), e diviene tanto più singolare quanto più piccola è la ε . Il procedimento ha trasferito *le singolarità della derivata $\dot{x}$* , che si trovano sulla retta $t + \varepsilon x = 0$, alla “soluzione” stessa e all'interno della regione in esame, e cioè per $t = 0$. Lo sviluppo diretto fallisce per $t \sim 0$.

È opportuno d'altra parte riconoscere che in virtù della

$$\sqrt{1 + \xi_1 \varepsilon + \xi_2 \varepsilon^2 + \xi_3 \varepsilon^3} \sim 1 + \frac{\xi_1}{2} \varepsilon + \left(-\frac{\xi_1^2}{8} + \frac{\xi_2}{2} \right) \varepsilon^2 + \left(\frac{\xi_1^3}{16} - \frac{\xi_1 \xi_2}{4} + \frac{\xi_3}{2} \right) \varepsilon^3 + o(\varepsilon^3)$$

la soluzione esatta $\tilde{x}(t, \varepsilon)$ ammette il seguente sviluppo in serie rispetto alla ε e fintanto che la t rimane $O_s(1)$

$$\tilde{x}(t, \varepsilon) = \frac{t}{\varepsilon} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon}{t} \left(1 + \frac{1}{t} \right) + \frac{4\varepsilon^2}{t^2}} \right) \sim \frac{t}{\varepsilon} \left[\frac{\varepsilon}{t} \left(1 + \frac{1}{t} \right) + \frac{\varepsilon^2}{2t^2} \left(4 - \left(1 + \frac{1}{t} \right)^2 \right) \right]$$

e quindi, a parte la richiesta che sia lecito dividere per t/ε , la $\tilde{x}$ ha sviluppo i cui primi termini *coincidono esattamente con la x^{dir} trovata sopra*. Ci si aspetta, tuttavia, che questo sviluppo diventi sempre meno affidabile man mano che la t si avvia ad assumere valori sempre più piccoli.

Opportune correzioni per questo esempio si hanno con i metodi di Lighthill, o del Matching, (si veda oltre). $\square$

6.2 Metodi di Stiramento delle Coordinate

In questo paragrafo vengono esposti alcuni dei principali metodi con i quali si cerca, e spesso si riesce, a correggere gli sviluppi asintotici ottenuti con il metodo perturbativo diretto quando questo dia luogo ad espansioni non uniformi. I primi di natura locale, sono poi seguiti da due metodi che hanno proprietà globali.

Notazione. Nel seguito si userà la seguente notazione.

$\mathcal{P}er(T) :=$ la famiglia delle funzioni periodiche rispetto a un periodo T ;

$f \in \mathcal{P}er(T) :=$ la funzione f è periodica di periodo T ;

$f \in \mathcal{AP} :=$ la funzione f è quasi-periodica (cfr. § IV.2).

Metodo di Lindstedt

Si inizierà qui con una breve giustificazione del metodo di Lindstedt, un metodo che ha particolare rilievo in problemi per i quali ci si aspetta una soluzione periodica, o strettamente o approssimativamente, rispetto a un qualche periodo T . Il periodo stesso può essere noto a priori o incognito, e in entrambi i casi può o meno dipendere dal parametro asintotico ε . Per tali sistemi le soluzioni (periodiche o approssimativamente tali) sono generalmente descritte in modo non corretto dal metodo perturbativo diretto, che fornisce per esse soluzioni approssimate contenenti termini non uniformi rispetto a t , e cioè *termini secolari*. Un tipico esempio può essere il seguente:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(t, x, \dot{x}; \varepsilon) \quad (2.22)$$

con la funzione f periodica di periodo $T(\varepsilon)$ rispetto al tempo, o indipendente da esso, e quindi comunque $f \in \mathcal{P}er(T(\varepsilon))$ per la variabile t ; per quanto riguarda le altre variabili, la funzione f si intenderà regolare quanto basta.

N.B. 6.2.1 In via del tutto preventiva, è conveniente notare che una E.D.O. lineare del tipo $\ddot{x} + a \dot{x} + b x = 0$ può essere convenientemente trasformata in una che, sebbene ad essa equivalente, non contiene il termine di smorzamento (quello proporzionale alla derivata prima). Inoltre, se il secondo coefficiente: a è piccolo rispetto al terzo: b , l'equazione equivalente ha carattere oscillatorio o iperbolico a seconda del segno del solo coefficiente b . Si osserva infatti che

$$\begin{cases} \text{l'equazione} & \ddot{x} + a \dot{x} + b x = 0 \\ \text{con:} & z(t) := e^{at/2} x(t), \quad c := b - a^2/4 \end{cases} \quad \text{diviene:} \quad e^{-at/2} (\ddot{z} + c z) = 0 \quad .$$

$\diamond$

N.B. 6.2.2 Sia $\phi(t, \varepsilon)$ una funzione regolare ed in $\mathcal{P}er(T)$ per ogni $\varepsilon \in (0, \varepsilon_+]$, con T indipendente dalla ε . Un qualsiasi troncamento del suo sviluppo di Taylor (rispetto alla ε) è anche uno sviluppo asintotico uniforme rispetto alla t . Il metodo di Lindstet vuole servirsi di questa particolarità anche nel caso di periodi $T = T(\varepsilon)$. A tale scopo, ed in questo caso, il metodo propone una trasformazione della coordinata (indipendente):

$$\tau = \tau(t) := \omega(\varepsilon) t \quad \text{con} \quad \omega(\varepsilon) := 2\pi/T(\varepsilon)$$

mediante la quale si trasforma l'assegnata funzione ϕ nella ψ data da: $\psi(\tau, \varepsilon) := \phi(\tau/\omega, \varepsilon)$. In tal modo risulta

$$\phi(t, \varepsilon) \in \mathcal{P}er(T(\varepsilon)) \quad \Longleftrightarrow \quad \psi(\tau, \varepsilon) \in \mathcal{P}er(2\pi),$$

infatti:

$$\begin{aligned} \tau(t) + 2\pi &= \omega t + 2\pi = (t + T)\omega = \tau(t + T) \quad \text{e quindi} \\ \phi(\tau(t)/\omega) &= \phi(\tau(t + T)/\omega) = \psi(\tau + 2\pi). \end{aligned}$$

Ciò comporta che se uno sviluppo della funzione $\phi(t, \varepsilon)$ esiste (troncato a qualche k) della forma:

$$\textbf{Sviluppo di Lindstet} \quad \phi(t, \varepsilon) \cong \widehat{\psi}(\tau(t), \varepsilon) := \psi_0(\omega t) + \varepsilon \psi_1(\omega t) + \dots + \varepsilon^k \psi_k(\omega t).$$

Il fatto che la ϕ sia in $\mathcal{P}er(T(\varepsilon))$ implica che tale sviluppo, pur *non essendo uno sviluppo ordinario* e cioè pur avendo le funzioni ψ_k ancora dipendenti dal parametro asintotico ε , eppure risulta uno sviluppo (generalizzato) uniforme rispetto alla τ (data la 2π -periodicità della ψ) e quindi rispetto alla t . In più, e ancora per il fatto che 2π non dipende da ε , si conclude anche che ciascuna delle funzioni $\psi_k(\tau)$ è in $\mathcal{P}er(2\pi)$. È chiaro però che la pulsazione ω deve essere “esatta”, e cioè esattamente uguale alla pulsazione della funzione ϕ . $\diamond$

Quando si voglia usare lo sviluppo di Lindstet in un problema del quale si ignori (insieme alla soluzione esatta del problema anche) l'esatta pulsazione, il precedente N.B. può essere ancora di aiuto. Infatti, occorrendo ora approssimare anche la pulsazione ω mediante la $\widehat{\omega}(\varepsilon) := \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots + \varepsilon^k \omega_k$, in generale diversa dalla esatta ω del problema, si conclude che la differenza fra la soluzione esatta $\tilde{x}$ e quella approssimata $\widehat{x}$ non rimane costante ma cresce, a partire dall'istante $t_0 = 0$, secondo la funzione lineare $\tau = \omega t$. Tuttavia *ciò accade solo all'interno dell'intervallo di periodicità*, se questo esiste. D'altra parte, l'assunta regolarità della soluzione (anche approssimata) ed il teorema di Taylor assicurano che

$$\begin{aligned} \text{esistono} \quad \ell &:= \max_{\substack{\tau \in [0, 2\pi] \\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_+]}} \left| \frac{\partial \widehat{x}}{\partial \tau} \right| \quad \text{e una costante} \quad c_0 > 0 \\ \text{tali che} \quad &|\widehat{x}(\omega t) - \widehat{x}(\widehat{\omega} t)| < c_0 \ell \varepsilon^{k+2} |t|. \end{aligned}$$

Pertanto, se si usa la $\widehat{x}$ (all'ordine k) come sviluppo di una $\tilde{x}(t, \varepsilon)$ che sia regolare e periodica di periodo $T(\varepsilon)$, l'errore su di essa sarà valutato da

$$|\tilde{x}(\omega t) - \widehat{x}(\widehat{\omega} t)| < c_1 \varepsilon^{k+1} + c_0 \ell \varepsilon^{k+2} |t| \leq (c_1 + c_0 \ell L) \varepsilon^{k+1},$$

purché i tempi nei quali si osserva tale errore siano tali che $|t| \leq L/\varepsilon$, e cioè siano all'interno di un **Intervallo espansivo di ordine** $O(1/\varepsilon)$. In altre parole, quando la pulsazione della soluzione approssimata è diversa da quella della soluzione esatta, l'uniformità è assicurata, ma soltanto per tempi $O(1/\varepsilon)$.

In definitiva il metodo di Lindstet consiste nei seguenti punti.

- Si riscalda la variabile indipendente t mediante una funzione lineare $\tau := \omega t$ per la quale si assume valido uno sviluppo asintotico; di questo vanno determinati i vari termini

$$\omega := \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots, \quad \text{con} \quad \omega_i = \text{cost}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (2.23)$$

All'ordine 2 si ha

$$\tau = \tau(t) = (\omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2) t = \left(1 + \varepsilon \frac{\omega_1}{\omega_0} + \varepsilon^2 \frac{\omega_2}{\omega_0}\right) \omega_0 t. \quad (2.24)$$

- Considerata la variabile τ come indipendente, si ricavano le corrispondenti relazioni fra gli operatori di derivazione. Per esempio, con $\partial_t := d/dt$, ed $\partial_\tau := d/d\tau$, etc., si ricavano (all'ordine 2)

$$\begin{aligned} \partial_t &= \omega \partial_\tau = (\omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2) \partial_\tau, \\ \partial_t^2 &= \omega^2 \partial_\tau^2 = [\omega_0^2 + 2\varepsilon \omega_0 \omega_1 + \varepsilon^2 (2\omega_0 \omega_2 + \omega_1^2)] \partial_\tau^2, \end{aligned} \quad (2.25)$$

e quindi

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= (\omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2) \partial_\tau (X_0 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2) \\
 &= \omega_0 X'_0 + \varepsilon (\omega_0 X'_1 + \omega_1 X'_0) + \varepsilon^2 (\omega_2 X'_0 + \omega_1 X'_1 + \omega_0 X'_2) \\
 \ddot{x} &= (\omega_0^2 + 2\varepsilon \omega_0 \omega_1 + \varepsilon^2 (2\omega_0 \omega_1 + \omega_1^2)) \partial_\tau^2 (X_0 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2) \\
 &= \omega_0^2 X''_0 + \varepsilon (2\omega_0 \omega_1 X''_0 + \omega_0^2 X''_1) + \varepsilon^2 (2\omega_0 \omega_2 X''_0 + \omega_1^2 X''_0 + 2\omega_0 \omega_1 X''_1 + \omega_0^2 X''_2)
 \end{aligned}$$

con le condizioni ausiliarie

$$\begin{aligned}
 X_0(0) + \varepsilon X_1(0) + \varepsilon^2 X_2(0) &= \alpha, \\
 \omega_0 X'_0(0) + \varepsilon (\omega_0 X'_1(0) + \omega_1 X'_0(0)) + \varepsilon^2 (\omega_2 X'_0(0) + \omega_1 X'_1(0) + \omega_0 X'_2(0)) &= 0.
 \end{aligned}$$

- A partire dal problema iniziale si scrive il conseguente problema nella variabile τ , e su quest'ultimo problema si applica il metodo perturbativo diretto:

$$x(t(\tau)) =: X(\tau) \sim X_0(\tau) + \varepsilon X_1(\tau) + \varepsilon^2 X_2(\tau) + \dots$$

- Si esprime la funzione $X(\tau)$ così determinata nuovamente mediante la variabile iniziale t servendosi della

$$x(t) \cong X_0(\tau(t)) + \varepsilon X_1(\tau(t)) + \dots$$

- Se la x si suppone in $\mathcal{P}er(2\pi/\omega)$ allora ciascuna delle $X_k(\tau)$ va cercata in $\mathcal{P}er(2\pi)$. In particolare ciò specifica il valore di ω_0 in quello della pulsazione del problema imperturbato P_0 , che deve esistere ed essere periodico altrimenti non è sostenibile l'assunto (2.23); inoltre, la stessa ipotesi indica per i termini ω_k i valori che rendono nulli gli eventuali termini secolari introdotti dal procedimento "diretto".
- In definitiva, si usano le $\tau := \omega(\varepsilon) t$, ed $\alpha(\varepsilon) = \alpha_0 + \varepsilon \alpha_1$ per trasformare la (2.22) (nella quale per brevità si supponga $f = f(x, \dot{x})$):

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) \\ x(0) = \alpha, \quad \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \quad \text{nella:} \quad \begin{cases} \omega^2 X'' + \omega_0^2 x = \varepsilon f(X, \omega X') \\ X(0) = \alpha, \quad \omega x'(0) = 0 \end{cases}$$

e da questa ottenere la successione di problemi:

$$\text{Problema } P_0: \quad \begin{cases} \omega_0^2 (X''_0 + X_0) = 0 \\ X_0(0) = \alpha, \quad \omega_0 X'_0(0) = 0 \end{cases} \quad (2.26a)$$

$$\text{Problema } P_1: \quad \begin{cases} \omega_0^2 (X''_1 + X_1) = f(X_0, \omega_0 X'_0) - 2\omega_0 \omega_1 X''_0 \\ X_1(0) = 0, \quad \omega_0 X'_1(0) + \omega_1 X'_0(0) = 0 \end{cases} \quad (2.26b)$$

$$\text{Problema } P_2: \quad \begin{cases} \omega_0^2 (X''_2 + X_2) = \partial_X f(X_0, \omega_0 X'_0) X_1 + \partial_{\omega X'} f(X_0, \omega_0 X'_0) (\omega_0 X'_1 + \omega_1 X'_0) \\ \quad - 2\omega_0 \omega_2 X''_0 - \omega_1^2 X''_0 - 2\omega_0 \omega_1 X''_1 \\ X_2(0) = 0, \quad \omega_2 X'_0(0) + \omega_1 X'_1(0) + \omega_0 X'_2(0) = 0 \end{cases} \quad (2.26c)$$

nelle quali ci si è serviti dello sviluppo (con tutte le derivate calcolate in $(X_0, \omega_0 X'_0)$):

$$\begin{aligned}
 f(y, z) \Big|_{\substack{y=X \\ z=\omega X'}} &\cong f(X_0 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2, \omega_0 X'_0 + \varepsilon (\omega_0 X'_1 + \omega_1 X'_0) + \varepsilon^2 (\omega_2 X'_0 + \omega_1 X'_1 + \omega_0 X'_2)) \\
 &\cong f(X_0, \omega_0 X'_0) + f_y X_1 + \varepsilon [f_z (\omega_0 X'_1 + \omega_1 X'_0)] \\
 &\quad + \varepsilon^2 [f_{yy} X_2 + f_{zz} (\omega_2 X'_0 + \omega_1 X'_1 + \omega_0 X'_2) + f_{yz} X_1 (\omega_0 X'_1 + \omega_1 X'_0)].
 \end{aligned}$$

Esempio 6.2.3 (continuazione dell'Esempio 6.1.32)

$$\ddot{x} + 2\varepsilon \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{con } x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1.$$

Con il metodo di Lindstedt si pone $\tau = (\omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \dots)t$, e all'ordine due si ricava

$$\begin{aligned} & [\omega_0^2 + 2\varepsilon\omega_0\omega_1 + \varepsilon^2(2\omega_0\omega_2 + \omega_1^2)] (\partial_\tau^2 X_0 + \varepsilon\partial_\tau^2 X_1 + \varepsilon^2\partial_\tau^2 X_2) + \\ & + 2(\omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2) \omega_0 \varepsilon (\partial_\tau X_0 + \varepsilon\partial_\tau X_1 + \varepsilon^2\partial_\tau X_2) + \omega_0^2 (X_0 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2) = 0 \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{cases} \omega_0^2 (\partial_\tau^2 X_0 + X_0) = 0 \\ \omega_0^2 (\partial_\tau^2 X_1 + X_1) = -2\omega_0\omega_1 \partial_\tau^2 X_0 - 2\omega_0^2 \partial_\tau X_0 \\ \omega_0^2 (\partial_\tau^2 X_2 + X_2) = -2\omega_0\omega_2 \partial_\tau^2 X_0 - \omega_1^2 \partial_\tau^2 X_0 - 2\omega_0\omega_1 \partial_\tau^2 X_1 \\ \quad - 2\omega_0 (\omega_0 \partial_\tau X_1 + \omega_1 \partial_\tau X_0) . \end{cases} \quad (2.27)$$

consistenti con le (2.26) visto che in questo esempio

$$f(y, z) \equiv -2\omega_0 z \quad \text{e quindi} \quad \varepsilon f(X, \omega X') \cong 0 - 2\varepsilon\omega_0^2 X'_0 - 2\varepsilon^2 \omega_0 (\omega_0 X'_1 + \omega_1 X'_0) .$$

Ne segue $X_0(\tau) = r_0 \cos(\tau + \varphi_0)$ e quindi

$$\partial_\tau^2 X_1 + X_1 = 2 \frac{\omega_1}{\omega_0} r_0 \cos(\tau + \varphi_0) + 2 r_0 \sin(\tau + \varphi_0) .$$

Per non avere disuniformità bisogna ora evitare le risonanze, ma la cosa può non riuscire in modo semplice: in questo esempio non basta scegliere $\omega_1 = 0$ giacché i termini risonanti sono troppi e l'unica possibilità è la soluzione banale $r_0 = 0$. $\square$

N.B. 6.2.4 Malgrado quanto appena visto sembri mostrare una scarsa utilità del metodo, è giusto notare che *in questo particolare esempio* proprio il metodo di Lindstedt avrebbe potuto dare un'ottima stima del risultato, e ciò trasferendo tutto nel piano complesso.

Quando si cercano soluzioni periodiche infatti, se si ricorre a frequenze complesse (e quindi a correzioni che possiedano ampiezze e fasi) si riesce spesso ad evitare termini non uniformi e a produrre un'ampiezza dipendente dalla t . Va detto che tali adattamenti o funzionano bene o non funzionano affatto.

Nel caso in esame si pone $X_0(\tau) = \Re(Z_0(\tau))$ con $Z_0(\tau) := \alpha e^{i\tau}$ ed $\alpha \in \mathbb{C}$. Per trovare le opportune condizioni iniziali da imporre sulla funzione Z_0 occorre ripartire dalle $x(0) = 0$ ed $\dot{x}(0) = 1$. Dato che $t = 0$ implica $\tau = 0$, e che $\partial_t = \omega \partial_\tau$, per la $Z(\tau)$ le (2.25) forniscono le

$$\Re[Z(0)] = 0, \quad \text{e} \quad \Re[(\omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots)\partial_\tau Z(0)] = 1 .$$

All'ordine zero, e ponendo $Z_0(0) \equiv \alpha =: r_0 e^{i\varphi_0}$ con $r_0, \varphi_0 \in \mathbb{R}$, dalla prima di queste si può ricavare $\varphi_0 = \pm\pi/2$ e cioè $\alpha = \pm i r_0$; ma allora dalla seconda risulta $\mp \Re(\omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots) r_0 = 1$. Questa condizione non basta a determinare una ω non banale, e quindi per calcolare i coefficienti dell'espansione asintotica della ω è necessario proseguire nell'esame dei problemi agli ordini maggiori.

Di nuovo con $Z_0 = \alpha e^{i\tau}$, dalla seconda delle (2.27) si ricava, all'ordine uno,

$$\omega_0^2 (\partial_\tau^2 Z_1 + Z_1) = 2(\omega_0\omega_1 - i\omega_0^2) \alpha e^{i\tau}, \quad \text{con} \quad Z_1(\tau), \omega_0, \omega_1, \alpha \in \mathbb{C} .$$

Se allora si pone $\omega_1 = i\omega_0$, si può assumere $Z_1(\tau) = 0$ e ottenere dalla terza delle (2.27) il semplice problema al secondo ordine

$$\partial_\tau^2 Z_2 + Z_2 = (2\omega_0^{-1}\omega_2 - 1 + 2) \alpha e^{i\tau} ,$$

che fornisce soluzioni non risonanti (e quindi τ -uniformi) purché si scelga $\omega_2 = -\omega_0/2$.

In definitiva $\tau = (1 + i\varepsilon - \varepsilon^2/2)\omega_0 t$ e di conseguenza dalla $\alpha = \pm i r_0$ si ricava

$$\begin{cases} x(t) = \Re\left(\alpha e^{i(1+i\varepsilon-\varepsilon^2/2)\omega_0 t}\right) = e^{-\varepsilon\omega_0 t} \Re\left(\pm i r_0 e^{i(1-\varepsilon^2/2)\omega_0 t}\right) \\ \quad = \mp r_0 e^{-\varepsilon\omega_0 t} \sin((1-\varepsilon^2/2)\omega_0 t); \quad \text{con} \quad r_0 = r_0(\varepsilon) \in \mathbb{R} . \end{cases}$$

Le condizioni iniziali forniscono quindi $\mp(1-\varepsilon^2/2)r_0 = 1$ da cui $r_0 = (1+\varepsilon^2/2)$. $\diamond$

Questo esempio mostra che *quando i metodi di stiramento delle coordinate funzionano, allora il loro risultato è molto buono*: si è trovata l'esatta dipendenza dal tempo (al secondo ordine in ε) sia dell'ampiezza che della parte oscillatoria. Purtroppo però questo non è facilmente prevedibile a priori e quindi conviene ricorrere comunque ad altri metodi, se non altro che per controllo.

In ogni modo, per avere ulteriori informazioni su come affrontare il problema nel caso generale accennato nella (2.22) è suggeribile la seguente strategia.

La “Determining Equation”

Passo 1. Si introducono opportune coordinate di fase che trasformino il problema in uno equivalente, del primo ordine. Per l'equazione (2.22) opportune coordinate sono (u, v) tali che $u \equiv x$ e

$$\begin{cases} \dot{u} = \omega_0 v \\ \dot{v} = -\omega_0 u + \frac{\varepsilon}{\omega_0} f(u, \omega_0 v) \end{cases} \quad (2.28)$$

Ad esempio per l'oscillatore lineare la f si specializza nella $f_{osc.} = -2\omega_0 \dot{x} \equiv -2\omega_0^2 v$ e la seconda delle (2.28) fornisce la nota $\dot{y} = \omega_0 \dot{v} = -\omega_0^2 x - 2\varepsilon \omega_0 y$.

Il problema imperturbato $P0$ della (2.28) mostra chiaramente l'esistenza di un punto di equilibrio nell'origine: $(x_e, 0) \equiv (0, 0)$, circondato da tutta un'infinità di traiettorie chiuse (e quindi periodiche).

Passo 2. Si introducono opportune coordinate “azione-angolo” che possano mettere in luce l'eventuale esistenza di cicli, o di moti periodici, che in via asintotica si avvicinano a quelli del $P0$. In questo esempio le opportune coordinate sono (r, θ) tali che

$$\begin{cases} u = r \cos \theta \\ v = r \sin \theta \end{cases}$$

Passo 3. Mediante le coordinate (r, θ) il problema (2.28) si trasforma in uno *ad esso ancora equivalente* dato da

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{\varepsilon}{\omega_0} f(r \cos \theta, \omega_0 r \sin \theta) \sin \theta \\ \dot{\theta} = -\omega_0 + \frac{\varepsilon}{\omega_0 r} f(r \cos \theta, \omega_0 r \sin \theta) \cos \theta \end{cases} \quad (2.29)$$

Il problema imperturbato $P0'$ del (2.29) mostra ancora chiaramente l'esistenza di un'infinità di traiettorie ($r = \text{cost}$, $\theta = -\omega_0 t$) che risultano “periodiche” nella varietà del toro unidimensionale (e cioè per identificazione dei valori di θ “modulo 2π ”).

Passo 4. Per risolvere tale difficoltà, si deduce dal problema (2.29) un'equazione, *solo conseguenza della* (2.29) *e non ad essa equivalente*, servendosi del fatto che, per ipotesi, è possibile di eliminare la variabile t dall'equazione (2.29). Infatti si è assunto che la funzione f *non dipende dalla t* , e per ε convenientemente piccoli la $\theta(t)$ è senz'altro invertibile in virtù della: $\theta(t) \sim -\omega_0 t$. La citata equazione si calcola sostituendo d/dt con $-\omega_0 d/d\theta$ nella prima delle (2.29), ottenendo:

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0^2} f(r \cos \theta, \omega_0 r \sin \theta) \sin \theta + O(\varepsilon^2) \quad (2.30)$$

Passo 5. Il teorema della funzione implicita assicura che per $\varepsilon \neq 0$, purché convenientemente piccolo, anche il sistema (2.28) ammette un punto di equilibrio vicino all'origine. Inoltre, siccome $\dot{\theta}(\varepsilon = 0)$ è ben diverso da zero, anche le traiettorie con dati iniziali $(u(0), v(0)) = (\alpha, 0)$ ed α piccolo, si avvolgono (per θ decrescenti) almeno una volta intorno a tale equilibrio. Esiste cioè una funzione (regolare) $\Phi(\alpha, \varepsilon)$ della $\alpha = r(\theta = 0)$ che individua il valore della $r(\theta = -2\pi, \varepsilon)$, ed è certo tale che $\alpha = \Phi(\alpha, 0)$. In particolare, se per qualche $\alpha_0 = r(0)$ accade che anche $r(-2\pi) = \alpha_0$ (almeno al primo ordine) allora essa individua una traiettoria $r(\theta, \varepsilon) \sim \text{cost}$ per il sistema (2.29) che per $\varepsilon \rightarrow 0$ si avvicina alla sua corrispondente $r(\theta, 0) = \alpha_0$ del problema imperturbato.

In altre parole, si assume di poter sviluppare la $r(\theta)$ soluzione della (2.30) a partire dalla condizione iniziale $r(0) = \alpha$ in modo che (almeno al primo ordine) la sua approssimazione asintotica sia costante quando lo è quella all'ordine zero. Dalla (2.30) e con la posizione $r(\theta) \sim r_0(\theta) + \varepsilon r_1(\theta) + \dots$, si ottiene innanzi tutto la

$$r_0(0) = \alpha = r_0(\theta), \quad \text{e} \quad (2.31a)$$

$$\frac{dr_1}{d\theta} = -\frac{1}{\omega_0^2} f(\alpha \cos \theta, \omega_0 \alpha \sin \theta) \sin \theta \quad (2.31b)$$

Passo 6. Si usa poi la (2.31b) (il cui secondo membro *non dipende dalla ε*) e la 2π -periodicità della funzione f (che per ipotesi non dipende da t) per concludere che

$$r_1(-2\pi) = \frac{1}{\omega_0^2} \int_0^{2\pi} f(\alpha \cos \theta, \omega_0 \alpha \sin \theta) \sin \theta d\theta =: \frac{F(\alpha)}{\omega_0^2}$$

Passo 7. La prima intersezione dell'orbita $(u(t), v(t))$ uscente dalle condizioni iniziali $(\alpha, 0)$ con l'asse $v = 0$ risulta ben approssimata già al primo ordine dalla cosiddetta *Mappa di primo ritorno* o

$$\text{Mappa di Poincaré} \quad \widehat{\Phi}(\alpha, \varepsilon) := \alpha + \varepsilon r_1(-2\pi),$$

e sono significative le seguenti osservazioni.

- L'equazione $F(\alpha) = 0$, e cioè la $\Phi(\alpha, \varepsilon) = \alpha$, individua le condizioni iniziali α_0 sulla retta $r(\theta = 0)$ per le quali anche la variata ha soluzione $r \sim \text{cost}$. Essa prende il nome di

$$\text{Determining Equation} \quad F(\alpha) = 0 = \int_0^{2\pi} f(\alpha \cos \theta, \omega_0 \alpha \sin \theta) \sin \theta \, d\theta. \quad (2.32)$$

- La condizione

$$F(\alpha_0) = 0 \quad \text{insieme con} \quad F'(\alpha_0) \neq 0$$

individua una soluzione semplice (non molteplice) della $F(\alpha) = 0$, e corrisponde a condizioni iniziali per le quali la soluzione è del tipo $r \sim \text{cost}$ ed è isolata. Essa prende il nome di *ciclo limite della* (2.28). Il segno della derivata $F'(\alpha_0)$ dà inoltre informazioni sulla stabilità del ciclo stesso.

- Per ogni α_0 soluzione semplice (non molteplice, positiva) della $F(\alpha) = 0$ esiste $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ tale che $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha(\varepsilon) = \alpha_0$ e che per ε piccoli la traiettoria $(u(t), v(t))$ uscente da $(u(0), v(0)) = (\alpha(\varepsilon), 0)$ è periodica con periodo $T(\varepsilon)$ regolare e tale che $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(\varepsilon) = T(0) \equiv 2\pi/\omega_0$. Ciò implica che anche in questo caso lo sviluppo di Lindstedt sussiste, uniforme in intervalli $O(1/\varepsilon)$.
- Dei problemi ricorsivi (2.26) relativi allo sviluppo di Lindstedt vanno cercate le soluzioni 2π -periodiche rispetto alla variabile τ , cosa possibile se α_0 è soluzione semplice della (2.32).

□

Nel caso dell'oscillatore lineare: $\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + x = 0$ visto nell'Esempio 6.1.32, la funzione $f = f(x, \dot{x})$ si specializza nella: $f_{osc.}^{lin.}(x, \dot{x}) = -2\omega_0 \dot{x} \equiv -2\omega_0^2 v$; pertanto la determining equation risulta:

$$F(\alpha) = \int_0^{2\pi} f(\alpha \cos \theta, \omega_0 \alpha \sin \theta) \sin \theta \, d\theta = 2\alpha \omega_0^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta,$$

che si annulla se e solo se $\alpha = 0$. In altre parole, l'oscillatore smorzato non ha soluzioni periodiche diverse dalla soluzione costante. Diverso è il caso seguente.

Esempio 6.2.5 Si consideri la

$$\text{equazione di Van Der Pol} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon \omega_0 (1 - x^2) \dot{x} \quad (2.33)$$

e cioè la f dell'Eq. (2.22) si specializza per l'equazione di Van der Pol nella $f_{VdP}(x, \dot{x}) = \omega_0 (1 - x^2) \dot{x}$.

È chiaro che la soluzione del problema $P0$ è oscillatoria, pertanto ci si aspetta che, per ε convenientemente piccoli lo sia anche quella del problema (2.33). Tuttavia, il termine di smorzamento cambia segno (non solo con la $\dot{x}$ stessa come nell'esempio 6.1.32, ma anche) con la $|x|$ quando questa transita per 1, ed anzi nell'intorno del punto $(x = 0, \dot{x} = 0)$ il segno è l'opposto di quello della 6.1.32. Pertanto è possibile, ma non così evidente, che vi sia una qualche oscillazione autonoma (e cioè non forzata).

Su di essa si agisce con le posizioni introdotte nella (2.25):

$$t = (\omega_0 + \varepsilon\omega_1) \tau, \quad \text{e} \quad x(t(\tau)) =: X(\tau) \sim X_0(\tau) + \varepsilon X_1(\tau)$$

che forniscono

$$\partial_t = (\omega_0 + \varepsilon\omega_1) \partial_\tau, \quad \text{e} \quad \partial_t^2 = (\omega_0^2 + 2\varepsilon\omega_0\omega_1) \partial_\tau^2.$$

e quindi

$$\begin{cases} \dot{x} = (\omega_0 + \varepsilon\omega_1) \partial_\tau(X_0 + \varepsilon X_1) = \omega_0 X'_0 + \varepsilon(\omega_0 X'_1 + \omega_1 X'_0) \\ \ddot{x} = (\omega_0^2 + 2\varepsilon\omega_0\omega_1) \partial_\tau^2(X_0 + \varepsilon X_1) = \omega_0^2 X''_0 + \varepsilon(2\omega_0\omega_1 X''_0 + \omega_0^2 X''_1) \\ X_0(0) + \varepsilon X_1(0) = \alpha, \quad X'_0(0) + \varepsilon X'_1(0) = 0. \end{cases}$$

Il problema $P0$ assegna $X_0(\tau) = \alpha \cos(\tau)$ e quindi il problema $P1$

$$\omega_0^2 X''_1 + \omega_0^2 X_1 = -2\omega_0\omega_1 X''_0 + (1 - X_0^2)\omega_0^2 X'_0$$

diviene

$$\begin{cases} X''_1 + X_1 = 2 \frac{\omega_1}{\omega_0} \alpha \cos \tau - \alpha (1 - \alpha^2 \cos^2 \tau) \sin \tau, \\ X_1(0) = 0, \quad X'_1(0) = 0. \end{cases}$$

La sua soluzione è:

$$X_1(\tau) = -\frac{\alpha}{16} \left[2(\alpha^2 - 4) \tau \cos(\tau) + \left(8 - \alpha^2(3 - \cos(2\tau)) - 16 \frac{\omega_1}{\omega_0} \tau \right) \sin(\tau) \right]$$

e mostra che ($\alpha \neq 0$) esiste un termine secolare:

$$secol(\tau; \alpha, \omega_1) := 2(\alpha^2 - 4) \tau \cos(\tau) - 16 \frac{\omega_1}{\omega_0} \tau \sin(\tau) .$$

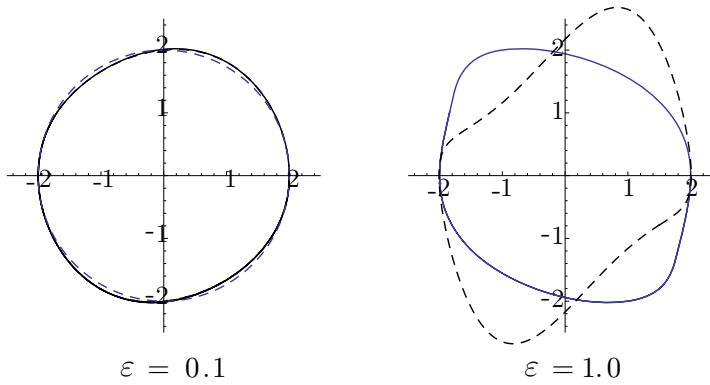
D'altra parte, la determining equation vale:

$$F(\alpha) = \alpha \omega_0^2 \int_0^{2\pi} (1 - \alpha^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta d\theta = \alpha \pi \omega_0^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{4} \right)$$

e quindi si annulla per $\alpha = 2$. Inoltre, in tale valore, la $F'(\alpha = 2)$ è negativa.

Se ne conclude l'esistenza di un ciclo limite attrattivo tanto più vicino alla circonferenza $\sqrt{x^2 + \dot{x}^2} = 2$ quanto più ε è vicino a 0. Si osserva inoltre che per $\alpha = 2$ il termine secolare $secol(\tau; \alpha = 2, \omega_1)$ si annulla solo se $\omega_1 = 0$, e cioè se l'approssimazione (all'ordine uno) costruita con il metodo di Lindstedt (e per $\alpha = 2$) coincide con quella del metodo perturbativo diretto il quale, si osservi, in questo esempio e per $\alpha = 2$ *non contiene termini secolari*.

Le due seguenti figure mostrano il ciclo limite dell'equazione (2.33), costruito numericamente e con la soluzione trovata qui sopra, in corrispondenza ai due valori $\varepsilon = .1$ e $\varepsilon = 0$. Nel grafico di sinistra i due cicli sono praticamente indistinguibili, e la curva tracciata a tratti è, per confronto, la circonferenza di raggio 2; in quello di destra invece i due cicli sono sensibilmente diversi.



□

Metodo di Rinormalizzazione

Si procede inizialmente come nel metodo di Lindstedt, ma non si applica il perturbativo diretto sulla (assunta) funzione $x(t(\tau))$; si ricava invece lo sviluppo $x(\tau)$ direttamente a partire dallo sviluppo (non uniforme) $x^{dir}(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots$ trovato con il metodo perturbativo diretto nel problema iniziale, e sostituendo *in tale sviluppo* l'espressione inversa della (2.24)

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\omega} \tau \sim \frac{1}{\omega_0} \left(1 + \varepsilon \frac{\omega_1}{\omega_0} + \varepsilon^2 \frac{\omega_2}{\omega_0} \right)^{-1} \tau \\ &\sim \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_0} \varepsilon + \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} - \frac{\omega_2}{\omega_0} \right) \varepsilon^2 - \dots \right) \frac{\tau}{\omega_0} . \end{aligned}$$

Infatti, data la forma presunta per la ω , si possono usare i seguenti sviluppi validi (all'ordine due) per $\xi \ll 1$

$$(1 + a\xi + b\xi^2)^{-1} \sim 1 - a\xi + (a^2 - b)\xi^2 , \quad (2.34a)$$

$$(1 + a\xi + b\xi^2)^{-2} \sim 1 - 2a\xi + (3a^2 - 2b)\xi^2 . \quad (2.34b)$$

Alla base di questo metodo (e, in seguito, di altri simili) c'è la seguente idea. La scelta dei coefficienti ω_n introdotti dal procedimento va fatta seguendo la:

REGOLA DI LIGHTHILL: *rendere ciascun termine dello sviluppo non più singolare del precedente.*

Non è difficile rendersi conto che entrambi i metodi di Lindstet e di Rinormalizzazione, che suppongono $\tau = 0$ quando $t = 0$, sono inefficaci nel caso dell'equazione di Lighthill. Un'applicazione del metodo di rinormalizzazione può essere vista nel prossimo § 3. Qui, invece, è preferibile estendere il procedimento dello stiramento delle coordinate introducendo metodi sempre più potenti, in quanto sempre più elaborati, il primo dei quali è il seguente.

Metodo di Lighthill

Si riscalda la variabile indipendente t mediante uno sviluppo in funzioni *non necessariamente lineari* e da determinarsi, di una nuova variabile τ :

$$t = t(\tau) \cong \tau + \varepsilon t_1(\tau) + \varepsilon^2 t_2(\tau) + \dots \quad \text{con} \quad t_i = t_i(\tau) \text{ regolari, } i = 1, 2, \dots \quad (2.35)$$

Poi, a partire dal problema iniziale si scrive il conseguente problema nella variabile τ , e su quest'ultimo problema (come nel caso di Lindstet) si applica il metodo perturbativo diretto:

$$x(t(\tau)) =: X(\tau) \sim X_0(\tau) + \varepsilon X_1(\tau) + \varepsilon^2 X_2(\tau) + \dots \quad (2.36)$$

Le espressioni trovate sopra:

$$t \cong \left[1 - \varepsilon \frac{\omega_1}{\omega_0} + \varepsilon^2 \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} - \frac{\omega_2}{\omega_0} \right) \right] \frac{\tau}{\omega_0} =: [\nu_0 + \varepsilon \nu_1 + \varepsilon^2 \nu_2] \tau$$

mostrano che il metodo di Lindstet è in realtà un caso particolare del metodo di Lighthill.

Considerata la variabile τ come indipendente, e con $t' = t'(\tau) = \partial_\tau t = (1 + \varepsilon t'_1 + \varepsilon^2 t'_2 + \dots)$, si ricavano le relazioni

$$\partial_t = \frac{1}{t'} \partial_\tau \quad \partial_t^2 = \left(\frac{1}{t'} \right)^2 \partial_\tau^2 + \frac{1}{t'} \left(\partial_\tau \frac{1}{t'} \right) \partial_\tau = \frac{1}{(t')^2} \partial_\tau^2 - \frac{t''}{(t')^3} \partial_\tau.$$

Queste, mediante le (2.34a), si possono specializzare (al secondo ordine) nelle

$$\begin{aligned} \partial_t &= \frac{1}{(1 + \varepsilon t'_1 + \varepsilon^2 t'_2)} \partial_\tau \sim (1 - \varepsilon t'_1 + (t_1'^2 - t_2')\varepsilon^2) \partial_\tau, \\ \partial_t^2 &= \frac{1}{(1 + \varepsilon t'_1 + \varepsilon^2 t'_2)^2} \left[\partial_\tau^2 - \frac{(\varepsilon t_1'' + \varepsilon^2 t_2'')}{(1 + \varepsilon t'_1 + \varepsilon^2 t'_2)} \partial_\tau \right] \\ &\sim \left(1 - 2\varepsilon t'_1 + \varepsilon^2 (3t_1'^2 - 2t_2') \right) \left[\partial_\tau^2 - \left[\varepsilon t_1'' + \varepsilon^2 (t_2'' - 2t_1' t_1'') \right] \partial_\tau \right]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Servendosi di queste espressioni si ricavano (qui all'ordine uno) le relazioni

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &\sim (1 - \varepsilon t'_1) (X'_0 + \varepsilon X'_1) \\ \frac{d^2x}{dt^2} &\sim (1 - 2\varepsilon t'_1) \left[(X''_0 + \varepsilon X''_1) - \varepsilon t_1'' (X'_0 + \varepsilon X'_1) \right] \end{aligned}$$

ovvero, più specificamente, le trasformazioni

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &\sim X'_0 + \varepsilon (X'_1 - t'_1 X'_0) \\ \frac{d^2x}{dt^2} &\sim X''_0 + \varepsilon (X''_1 - t_1'' X'_0 - 2t'_1 X''_0). \end{aligned}$$

Queste vanno usate per determinare non solo le $x_1, x_2, \dots$ ma anche le funzioni $t_1, t_2, \dots$. Come si è già accennato, nel metodo di Lighthill, come negli altri metodi di stiramento delle coordinate, l'idea guida è quella di scegliere i parametri $\omega_1, \omega_2, \dots$, e qui le funzioni $t_1(\tau), t_2(\tau), \dots$ introdotte dal metodo, *in modo tale da rendere uniforme lo sviluppo ottenuto*. Ove questo non fosse possibile, le scelte vanno operate in modo da seguire la regola di Lighthill.

Ultimato il procedimento, e servendosi delle inverse delle (2.35) e delle (2.36), si esprime la funzione $x(t(\tau))$ nuovamente mediante la variabile iniziale t .

Esempio 6.2.6 (continuazione dell'Esempio 6.1.35)

$$\begin{cases} (t + \varepsilon x)\dot{x} + x = 1 \\ x(1) = 2, \quad t \in [0, 1] . \end{cases}$$

Si provi con il Metodo di Lighthill: $t = \tau + \varepsilon t_1(\tau) + \dots$, e quindi (si veda la (2.34b))

$$\partial_t = \frac{1}{1 + \varepsilon t'_1} \partial_\tau, \quad \text{e} \quad x(t(\tau)) = X_0(\tau) + \varepsilon X_1(\tau) + \varepsilon^2 X_2(\tau) + \dots$$

Sostituendole nella (6.2.6) si ottiene (all'ordine uno)

$$\begin{cases} (\tau + \varepsilon t_1 + \varepsilon X_0)(\partial_\tau X_0 + \varepsilon \partial_\tau X_1) + (1 + \varepsilon t'_1)(X_0 + \varepsilon X_1) = (1 + \varepsilon t'_1) \\ X_0(\tau^*) + \varepsilon X_1(\tau^*) + \dots = 2 , \end{cases} \quad (2.38)$$

ove τ^* è un qualche valore tale che $t(\tau^*) = \tau^* + \varepsilon t_1(\tau^*) + \dots = 1$.

Si assuma anche per il punto τ^* uno sviluppo asintotico: $\tau^* \cong \tau_0^* + \varepsilon \tau_1^* + \dots$. Dalla definizione di τ^* si ottiene

$$\tau_0^* + \varepsilon \tau_1^* + \varepsilon t_1(\tau_0^*) = 1, \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} \tau_0^* = 1 \\ \tau_1^* = -t_1(1) \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \tau^* = 1 - \varepsilon t_1(1) \quad \text{con } t_1(1) \text{ ancora da determinare.}$$

Si sostituisce comunque questa espressione nella seconda delle (2.38), e si ricava

$$2 = X_0(1 - \varepsilon t_1(1)) + \varepsilon X_1(1 - \varepsilon t_1(1)) \sim X_0(1) - \varepsilon(t_1(1)\partial_\tau X_0(1) - X_1(1)) , \quad (2.39)$$

dalla quale si inducono delle possibili condizioni iniziali sulla $X(\tau)$, e cioè:

$$X_0(1) = 2 \quad \text{e} \quad X_1(1) = t_1(1)\partial_\tau X_0(1) .$$

D'altra parte si è visto che il metodo diretto è non singolare all'istante iniziale $t = 1$, e che invece singolarità si manifestano per t piccoli; ciò comporta che *non è necessario* stirare la coordinata t vicino al valore 1 e che quindi *non lede la generalità assumere* $t_1(1) = 0$ e ottenere $\tau^* = 1$. Ciò finalmente assegna le necessarie condizioni iniziali sulle X_0 e X_1 ; esse vengono fornite dalla (2.39) e sono: $X_0(1) = 2$, $X_1(1) = 0$. È opportuno notare a questo punto che, qualora si fosse adoperato il metodo di Lindstedt con $t = (\nu_0 + \varepsilon \nu_1)\tau$ invece della (2.35), questo ragionamento avrebbe portato alla scelta $t_1(1) \equiv \nu_1 = 0$, la quale però avrebbe banalizzato il problema.

A partire dalla (2.38) si calcola il problema all'ordine zero per la $X(\tau)$; esso è

$$\begin{aligned} \tau \partial_\tau X_0 + X_0 &= 1 \\ X_0(1) &= 2 \end{aligned} \quad \text{e dà} \quad X_0(\tau) = \frac{1 + \tau}{\tau} .$$

Ancora dalle (2.38) segue quello all'ordine uno, con $X_1(1) = 0$ come condizioni iniziali,

$$\tau \partial_\tau X_1 + X_1 = -(t_1 + X_0) \partial_\tau X_0 + (1 - X_0)t'_1 = \left(t_1 + 1 + \frac{1}{\tau}\right) \frac{1}{\tau^2} - \frac{t'_1}{\tau} . \quad (2.40)$$

Se fosse $t_1(\tau) \equiv 0$ si avrebbe il Metodo Diretto già visto, che dà una singolarità del terzo ordine. Per evitarlo si può seguire la regola di Lighthill, che qui consiglia di *scegliere* $t_1(\tau)$ in modo da annullare il secondo membro: così la X_1 sarà *singolare quanto la* X_0 *e non di più*.

Annulare il secondo membro significa imporre l'equazione differenziale

$$\frac{1}{\tau^2} \left(t_1 + 1 + \frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{\tau} t'_1 \quad \text{equivalente a} \quad \partial_\tau \left(\frac{1}{\tau} t_1\right) = \frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\tau^3}$$

e quindi

$$\frac{1}{\tau} t_1(\tau) + \text{cost} = \int^\tau \left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}\right) ds \quad \text{da cui} \quad t_1(\tau) = c\tau - 1 - \frac{1}{2\tau} .$$

Per la scelta fatta $t_1(1) = 0$. Ne seguono

$$c = \frac{3}{2} ; \quad t_1(\tau) = \frac{3\tau^2 - 2\tau - 1}{2\tau} ; \quad t = t(\tau) = \tau + \varepsilon \frac{3\tau^2 - 2\tau - 1}{2\tau} . \quad (2.41)$$

A sua volta, avendo annullato il secondo membro della (2.40), per la X_1 si ha

$$\tau \partial_\tau X_1 + X_1 = 0 \quad \text{da cui} \quad X_1(\tau) = \frac{c_1}{\tau} ,$$

e la $X_1(1) = 0$ fa dedurre $c_1 = 0$. Ne risulta infine

$$x^{Lig}(t) = X(t(\tau)) = 1 + \frac{1}{\tau(t)} + O(\varepsilon^2), \quad (2.42)$$

da calcolare, ora, sulla $\tau = \tau(t)$ inversa della $t = t(\tau)$ trovata nella (2.41).

Si risolve quindi la $(2 + 3\varepsilon)\tau^2 - 2(\varepsilon + t)\tau - \varepsilon = 0$ ottenendo

$$\tau(t) = \frac{1}{2 + 3\varepsilon} \left(t + \varepsilon + \sqrt{(t + \varepsilon)^2 + \varepsilon(2 + 3\varepsilon)} \right). \quad (2.43)$$

A partire da questa, sembra corretto proseguire con la stessa logica di approssimazioni asintotiche che si è seguita fin qui, e cioè: (con $\xi := t + \varepsilon$) sostituire nella (2.42) lo sviluppo della (2.43)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} &= \frac{1}{\xi} \left(\frac{2 + 3\varepsilon}{1 + \sqrt{1 + \varepsilon(2 + 3\varepsilon)/\xi^2}} \right) \sim \frac{1}{\xi} \left(\frac{2 + 3\varepsilon}{2 + \varepsilon(2 + 3\varepsilon)/2\xi^2} \right) \\ &\sim \frac{2 + 3\varepsilon}{2\xi} \left(1 - \varepsilon \frac{2 + 3\varepsilon}{4\xi^2} \right) \sim \left(\frac{1}{\xi} + \varepsilon \frac{3}{2\xi} \right) \left(1 - \varepsilon \frac{1}{2\xi^2} \right) \sim \frac{1}{\xi} \left(1 + \varepsilon \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2\xi^2} \right) \right) \end{aligned}$$

e tramite questo ottenere:

$$x(t) \sim 1 + \frac{1}{t + \varepsilon} + \varepsilon \left(\frac{3/2}{t + \varepsilon} - \frac{1}{2(t + \varepsilon)^3} \right). \quad (2.44)$$

In tal modo però si trova una singolarità in $t = -\varepsilon$ (indipendente dalla x), e questa è poco convincente quanto poco lo era quella in zero; quindi, se non si conoscesse la soluzione esatta, tutto il metodo sembrerebbe poco attendibile. È invece stupefacente, in questo esempio, che sostituendo la (2.43) direttamente nella $X(\tau) = 1 + \frac{1}{\tau} + O(\varepsilon^2)$ dà luogo, con un pò di algebra, all'espressione esatta:

$$\tilde{x}(t) = -\frac{t}{\varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^2 + 2\left(\frac{t+1}{\varepsilon}\right) + 4} \equiv x^{Lig}(t; \varepsilon).$$

Il metodo in esame, quando funziona, lo fa bene ma senza preavviso. In generale ciò non accade quando la ε moltiplica la derivata di ordine massimo. (vedi anche: [Wasow]).

N.B. 6.2.7 Uguagliare a zero il secondo membro dell'equazione sulla ampiezza $X_n(\tau)$ non è sempre la cosa migliore; in questo esempio è conveniente, ma non è detto che lo sia in generale. Lo scopo è sempre quello di avere il termine correttivo non più singolare del precedente, e le singolarità spostate possibilmente fuori dell'intervallo in esame. $\diamond$

N.B. 6.2.8 Il fatto che lo sviluppo diretto abbia introdotto una singolarità per $t = 0$ avrebbe potuto suggerire l'uso del metodo di Lindstedt con la particolare scala $\tau = t/\varepsilon$. Il suo uso in questo esempio, tuttavia, fornisce una equazione indipendente dalla ε e sostanzialmente identica alla equazione iniziale. Per cui, seppure in questo caso accade che tale equazione si sappia risolvere, ciò non è certo generale o prevedibile a priori. Infatti anche qui la logica da seguire dovrebbe essere quella descritta per giungere alla (2.44). $\diamond$

Per concludere, e in vista di futuri riferimenti, si osservi che per $\xi = O_s(\varepsilon)$ si ha $\frac{\xi^2}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon} \gg 2 \left(\frac{\xi}{\varepsilon} + 2 \right)$, e quindi, mediante l'approssimazione $\sqrt{a + \delta} \sim \sqrt{a} + \delta/(2\sqrt{a})$ (valida per $a \gg \delta$), si calcola la stima

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^2 + 2\left(\frac{t+1}{\varepsilon}\right) + 4} &= \sqrt{\left(\frac{t^2}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon}\right) + 2\left(\frac{t}{\varepsilon} + 2\right)} \\ &\sim \sqrt{\frac{t^2}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon}} + \left(\frac{t}{\varepsilon} + 2\right) \left(\frac{t^2}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon}\right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{t^2}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon}} + \frac{t + 2\varepsilon}{\sqrt{t^2 + 2\varepsilon}}. \end{aligned}$$

□

I metodi fin qui introdotti sono di natura locale, e quindi talvolta inadatti a trattare casi di rilevante interesse. Verranno ora citati due metodi di calcolo approssimato che si rivolgono a problemi di natura globale (o, almeno, localmente più estesi).

Metodo delle Scale Multiple

L'idea, valida soprattutto se si conosce, o si suppone a priori, quale sia l'andamento qualitativo della soluzione, è quella di introdurre due o più ascisse temporali che operino sulla x indipendentemente le une dalle altre, ciascuna agente su una scala diversa. Per esempio: se ci si aspettano dei comportamenti “a tempi lunghi”, e cioè tempi che siano $O_s(1)$ quando $t \gg 1$, è ragionevole supporre

$$t = t \quad t_1 := \varepsilon t, \quad t_2 := \varepsilon^2 t, \quad \text{etc.}$$

Quando sembri sufficiente, si inizia con due: (t, t_1) . Poi, se non è presente alcuna potenza negativa della ε si assume lo sviluppo

$$x(t; \varepsilon) \sim [X_0(t, t_1) + \varepsilon X_1(t, t_1)]_{t_1 = \varepsilon t} ;$$

altrimenti, se appare una potenza ε^{-1} , risulta più ragionevole tentare con

$$x(t; \varepsilon) \sim [X_0(t, t_1) + \varepsilon X_1(t, t_1) + \varepsilon^2 X_2(t, t_1)]_{t_1 = \varepsilon t}$$

Su queste vanno applicati operatori differenziali quali i seguenti:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \partial_t + \dot{t}_1 \partial_{t_1} + \dot{t}_2 \partial_{t_2} + \dots = \partial_t + \varepsilon \partial_{t_1} + \varepsilon^2 \partial_{t_2} + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} &= (\partial_t + \varepsilon \partial_{t_1} + \varepsilon^2 \partial_{t_2} + \dots)^2 = \partial_{tt}^2 + 2\varepsilon \partial_{tt_1}^2 + \varepsilon^2 (\partial_{t_1 t_1}^2 + 2\partial_{t_1 t_2}^2) + \dots \end{aligned} \quad (2.45)$$

Al primo ordine, si ricavano le seguenti espressioni

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x \sim \partial_t X_0 + \varepsilon (\partial_{t_1} X_0 + \partial_t X_1) \\ \frac{d^2}{dt^2} x \sim \partial_{tt}^2 X_0 + \varepsilon (2\partial_{tt_1}^2 X_0 + \partial_{tt}^2 X_1) \end{cases} \quad (2.46)$$

ed è importante notare che, con questo procedimento,

le “costanti di integrazione” ad ogni passo risultano funzioni degli altri tempi caratteristici;

la logica rimane quella di determinarle seguendo la Regola di Lighthill.

Esempio 6.2.9 (continuazione dell'Esempio 6.2.6)

$$\begin{cases} (t + \varepsilon x) \dot{x} + x = 1 \\ x(1) = 2, \quad t \in [0, 1] . \end{cases}$$

Si adoperi il Metodo delle Scale Multiple sebbene in questo esempio il metodo non si dimostrerà particolarmente efficace; lo sarà invece molto di più in successivi Esempi.

Si considera, oltre a quello iniziale, un solo ulteriore tempo caratteristico: t^* , e data l'analisi qualitativa fatta sopra, sarà opportuno supporre che tale tempo sia un “tempo breve”, ovvero una variabile temporale che sia $O_s(1)$ quando $t \ll 1$. Siano cioè

$$t^* := \frac{1}{\varepsilon} t, \quad \text{e quindi} \quad \frac{d}{dt} = \partial_t + \frac{1}{\varepsilon} \partial_{t^*},$$

da imporre sulla ipotizzata

$$x(t, \varepsilon) = [X_0(t, t^*) + \varepsilon X_1(t, t^*) + \varepsilon^2 X_2(t, t^*)]_{t^* = t/\varepsilon}$$

Come primo tentativo il problema in esame fornisce

$$\left(t + \varepsilon (X_0 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2) \right) \left(\partial_t + \frac{1}{\varepsilon} \partial_{t^*} \right) (X_0 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2) + (X_0 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2) = 1 ,$$

da cui

$$\begin{cases} (t + \varepsilon X_0 + \varepsilon^2 X_1) \left(\frac{1}{\varepsilon} \partial_{t^*} X_0 + \partial_t X_0 + \partial_{t^*} X_1 + \varepsilon \partial_t X_1 + \varepsilon \partial_{t^*} X_2 + \varepsilon^2 \partial_t X_2 \right) + (X_0 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2) = 1 \\ X_0(1, 1/\varepsilon) = 2, \quad X_1(1, 1/\varepsilon) = 0, \quad X_2(1, 1/\varepsilon) = 0 . \end{cases} \quad (2.47)$$

Se ne ricava una successione di problemi ai vari ordini, dei quali il dominante è quello all'ordine $O(1/\varepsilon)$:

$$t \partial_{t^*} X_0 = 0 ;$$

questa equazione dichiara X_0 funzione della sola t . Per determinarla si userà l'equazione all'ordine successivo. Questa diviene

$$t \partial_t X_0 + t \partial_{t^*} X_1 + X_0 = 1 \quad (2.48)$$

mentre quella all'ordine $O(\varepsilon)$ è

$$t \partial_t X_1 + t \partial_{t^*} X_2 + X_0 \partial_t X_0 + X_0 \partial_{t^*} X_1 + X_1 = 0 . \quad (2.49)$$

Si osservi che l'equazione all'ordine $O(\varepsilon^2)$ non si può trovare partendo dalla (2.47); in essa infatti occorrerebbe aggiungere non solo il termine $\varepsilon^3 X_2$ nel primo fattore ma anche l'addendo $\varepsilon^2 \partial_{t^*} X_3$ nel secondo.

La (2.48) implica

$$X_1(t, t^*) = \frac{1}{t} \left(1 - X_0 - t \dot{X}_0 \right) t^* + b(t) ,$$

nella quale la regola di Lighthill consiglia di annullare il coefficiente di t^* , e cioè di ricavare la forma della funzione X_0 richiedendo che sia $X_0 t - t = \text{cost} =: a$. Questa fornisce $X_0 = 1 + a/t$, e la condizione iniziale assegna $a = 1$.

Dalla (2.49) si ha allora

$$t \partial_{t^*} X_2 + t \dot{b} - \frac{1}{t^2} \left(1 + \frac{1}{t} \right) + b = 0$$

sulla quale la regola di Lighthill fornisce $t \dot{b} + b = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^2$ da cui $b = \frac{c}{t} - \frac{1}{2t} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^2 \equiv X_1$, e la condizione iniziale dà $c = 2$.

In sintesi si ottiene di nuovo ed esattamente, quindi nulla di meglio, dello sviluppo perturbativo diretto.

Un'alternativa potrebbe essere quella di ricominciare tutto da capo sostituendo, nell'equazione iniziale, al posto della variabile t la sua corrispondente εt^* . Si ottiene così

$$\begin{aligned} & \left(\varepsilon t^* + \varepsilon X_0 + \varepsilon^2 X_1 + \varepsilon^3 X_2 \right) \left(\frac{1}{\varepsilon} \partial_{t^*} X_0 + \partial_t X_0 + \partial_{t^*} X_1 \right. \\ & \left. + \varepsilon \partial_t X_1 + \varepsilon \partial_{t^*} X_2 + \varepsilon^2 \partial_t X_2 \right) + (X_0 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2) = 1 \end{aligned}$$

che fornisce la successione di problemi, dei quali il primo all'ordine $O(1)$:

$$t^* \partial_{t^*} X_0 + X_0 \partial_{t^*} X_0 + X_0 = 1$$

il secondo all'ordine $O(\varepsilon)$

$$t^* \partial_t X_0 + t^* \partial_{t^*} X_1 + X_0 \partial_t X_0 + X_0 \partial_{t^*} X_1 + X_1 \partial_{t^*} X_0 + X_1 = 0 \quad (2.50)$$

e (qualora servisse) all'ordine $O(\varepsilon^2)$:

$$t^* \partial_t X_1 + t^* \partial_{t^*} X_2 + X_0 \partial_t X_1 + X_0 \partial_{t^*} X_2 + X_1 \partial_t X_0 + X_1 \partial_{t^*} X_1 + X_2 \partial_{t^*} X_0 + X_2 = 0 .$$

La prima equazione potrebbe dare $\partial_{t^*} (X_0 t^* + \frac{1}{2} X_0^2 - t^*) = 0$ da cui $X_0^2 + 2t^* X_0 + c - 2t^* = 0$. Il condizionale qui vuole rimarcare il fatto che in generale tale equazione non si riesce a risolvere esattamente, e che l'eventualità che ciò possa accadere è del tutto casuale e in generale non prevedibile a priori; quindi il metodo sembra comunque da abbandonare. Per il solo scopo di vederne le modalità di svolgimento, tuttavia, si proseguirà qui il calcolo intrapreso. Si calcola facilmente (con c costante rispetto alla t^* e funzione da determinare della t)

$$X_0 = -t^* + \sqrt{t^{*2} + 2t^* - c(t)} ,$$

e la condizione al bordo dà $-\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon} + c(1)} = 2$ e quindi $c(1) = -4 - 2/\varepsilon$. Per trovare la funzione $c = c(t)$ occorre servirsi dell'equazione all'ordine $O(\varepsilon)$: la (2.50) che, date le

$$\partial_t X_0 = \frac{-\dot{c}}{2\sqrt{t^{*2} + 2t^* - c(t)}}, \quad \text{e} \quad \partial_{t^*} X_0 = -1 + \frac{t^* + 1}{\sqrt{t^{*2} + 2t^* - c(t)}},$$

fornisce

$$t^* \partial_{t^*} X_1 + \frac{(t^* + 1)}{\sqrt{t^{*2} + 2t^* - c}} X_1 + \frac{\sqrt{t^{*2} + 2t^* - c}}{2\sqrt{t^{*2} + 2t^* - c}} (-\dot{c}) + X_0 \partial_{t^*} X_1 = 0$$

ovvero

$$2(t^{*2} + 2t^* - c) \partial_{t^*} X_1 + 2(1 + t^*) X_1 - \dot{c} \sqrt{t^{*2} + 2t^* - c} ;$$

ancora la regola di Lighthill suggerisce $\dot{c} = 0$.

Il metodo ha fornito la *soluzione esatta* del problema assegnato, cosa questa fortunata ma prevedibile dato che si era già visto precedentemente che la soluzione esatta di questa equazione si riesce a calcolare e dipende solo dalla variabile riscalata: $t^* = t/\varepsilon$. D'altra parte, come si è rimarcato, l'equazione trovata per la funzione X_0 è altrettanto difficile quanto quella iniziale e coincide con quella che si ottiene applicando ad essa il metodo di Lindstedt; pertanto anche questa seconda applicazione del metodo è da considerarsi fallita. $\square$

Esempio 6.2.10 Problema di Friedrichs semplificato

$$\begin{cases} \varepsilon \ddot{x} + \dot{x} = \kappa \\ x(0) = 0, \quad x(1) = 1. \end{cases} \quad (2.51)$$

Quello in esame è un problema differenziale *con condizioni al contorno e tuttavia con soluzione unica*: verificata per esempio la prima condizione, esiste unico il valore del parametro di integrazione affinché sia vera anche la seconda. Infatti dopo una prima integrazione si ha

$$\frac{d}{dt} (\varepsilon e^{t/\varepsilon} \dot{x}) = \kappa e^{t/\varepsilon} = \varepsilon \frac{d}{dt} (\kappa e^{t/\varepsilon})$$

dalla quale si ricava $\dot{x} = c_1 e^{-t/\varepsilon} + \kappa$. Questa, con la condizione $x(0) = 0$, dà $x(t) = c_2(1 - e^{-t/\varepsilon}) + \kappa t$, ed è possibile verificare anche la seconda condizione se si pone $c_2 = (1 - \kappa)(1 - e^{-1/\varepsilon})^{-1}$. Pertanto la soluzione esatta risulta

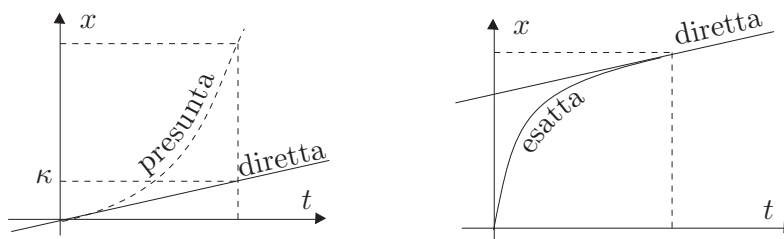
$$\tilde{x}(t; \varepsilon) = \kappa t + \frac{1 - \kappa}{1 - e^{-1/\varepsilon}} (1 - e^{-t/\varepsilon}) \quad (2.52)$$

Come problema perturbativo esso è invece un problema singolare: qualora si proceda ad applicare il Metodo Diretto si trova, all'ordine zero,

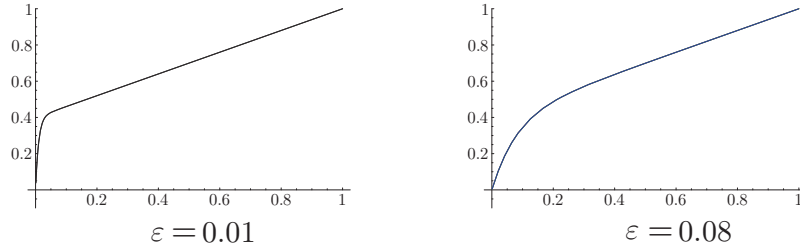
$$\begin{cases} \dot{x}_0 = \kappa \\ x_0(0) = 0, \quad x_0(1) = 1 \end{cases} \quad \text{che dà} \quad \begin{cases} x_0(t) = \kappa t + c_3 \\ x_0(0) = 0, \quad x_0(1) = 1. \end{cases}$$

Contrariamente al problema iniziale che è del secondo ordine quello che si è ottenuto è un problema differenziale del primo ordine, e dunque: *il valore dell'unico parametro di integrazione che rimane libero non potrà in generale soddisfare entrambe le condizioni ausiliarie imposte nel problema assegnato* (dato che esse sono fra loro indipendenti). Se ne dovrà scegliere una sola, in base al suo significato fisico e/o ragionamenti qualitativi.

Sia per esempio $\kappa < 1$. Se si preferisse la $x_0(0) = 0$, e cioè se si accettasse $x_0(t) = \kappa t$, si avrebbe $x_0(1) = \kappa < 1$; quindi vicino a $t = 1$ prima o poi occorrerebbe $\dot{x} > \kappa$ e perciò $\ddot{x} > 0$. Ma l'equazione afferma che $\ddot{x} = (\kappa - \dot{x})/\varepsilon$ e di conseguenza, per $\dot{x} > \kappa$, si ha $\ddot{x} < 0$. È più ragionevole perciò assumere, per la funzione x_0 , la seconda delle condizioni ausiliarie.



La figura mostra la soluzione $\tilde{x}(t; \varepsilon)$ per due valori della ε , con $\kappa = 0.6$, e conferma la discussione appena fatta.



Sia allora $x_0(t) = \kappa t + (1 - \kappa)$; la soluzione è non valida, *perché non nulla*, nell'intorno di $t = 0$, e ciò in modo tanto più significativo quanto più si è vicini allo: *strato limite* (o “boundary layer”): $0 \leq t \ll 1$ nel quale un valore $(1/\varepsilon)$ -grande per la $-\ddot{x}$ permette alla $\dot{x}$ (per quanto grande ne sia il valore in $t = 0$) di raggiungere in breve il valore κ , che è $O_s(1)$.

Riconosciuta la presenza di due strati limitrofi risulta ragionevole ricorrere al metodo delle Scale Multiple. Siano (come nell'Esempio 6.2.9)

$$t^* := \frac{1}{\varepsilon} t \quad \text{e} \quad x(t, \varepsilon) = [X_0(t, t^*) + \varepsilon X_1(t, t^*) + \varepsilon^2 X_2(t, t^*)]_{t^*=t/\varepsilon}.$$

Si hanno:

$$\frac{d}{dt} = \partial_t + \frac{1}{\varepsilon} \partial_{t^*}, \quad \text{e} \quad \frac{d^2}{dt^2} = \partial_{tt}^2 + \frac{2}{\varepsilon} \partial_{tt^*}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_{t^*t^*}^2;$$

e quindi

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x \sim \frac{1}{\varepsilon} \partial_{t^*} X_0 + \partial_t X_0 + \partial_{t^*} X_1 + \varepsilon (\partial_t X_1 + \partial_{t^*} X_2) \\ \frac{d^2}{dt^2} x \sim \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_{t^*t^*}^2 X_0 + \frac{1}{\varepsilon} (2\partial_{tt^*}^2 X_0 + \partial_{t^*t^*}^2 X_1) + (\partial_{tt}^2 X_0 + 2\partial_{tt^*}^2 X_1 + \partial_{t^*t^*}^2 X_2). \end{cases}$$

Con tali posizioni il problema in esame (2.51) fornisce rispettivamente

$$\begin{aligned} O(1/\varepsilon) : & \quad \partial_{t^*t^*}^2 X_0 + \partial_{t^*} X_0 = 0 \\ O(1) : & \quad \partial_{t^*t^*}^2 X_1 + \partial_{t^*} X_1 = \kappa - 2\partial_{tt^*}^2 X_0 - \partial_t X_0 \\ O(\varepsilon) : & \quad \partial_{t^*t^*}^2 X_2 + \partial_{t^*} X_2 = -\partial_{tt}^2 X_0 - 2\partial_{tt^*}^2 X_1 - \partial_t X_1 \end{aligned}$$

con le condizioni ausiliarie

$$\begin{cases} X_0(0, 0) = X_1(0, 0) = X_2(0, 0) = 0, & \text{ed} \\ X_0(1, 1/\varepsilon) = 1, & X_1(1, 1/\varepsilon) = X_2(1, 1/\varepsilon) = 0. \end{cases}$$

Si noti che la prima equazione non rappresenta il problema all'ordine zero ma quello all'ordine massimo $O(1/\varepsilon)$, e come tale vale a tempi brevi, infatti la X_0 si suppone $O_s(1)$ ad ogni tempo, e resta comunque il termine dominante della soluzione. Si ha facilmente $e^{t^*} \partial_{t^*} X_0 =: -a_2(t)$ e quindi

$$X_0(t, t^*) = a_1(t) + a_2(t)e^{-t^*} \quad \text{con} \quad \begin{cases} a_1(0) + a_2(0) = 0 \\ a_1(1) + a_2(1)e^{-1/\varepsilon} = 1 \end{cases}$$

e quindi l'equazione relativa alla X_1 diviene

$$\partial_{t^*t^*}^2 X_1 + \partial_{t^*} X_1 = \kappa + 2\dot{a}_2 e^{-t^*} - \dot{a}_1 - \dot{a}_2 e^{-t^*} = \dot{a}_2 e^{-t^*} + (\kappa - \dot{a}_1).$$

Posto $Y(t, t^*) := \partial_{t^*} X_1(t, t^*)$ si ha $\partial_{t^*}(e^{t^*} Y) = \dot{a}_2 + (\kappa - \dot{a}_1)e^{t^*}$, da cui

$$\partial_{t^*} X_1 =: \dot{a}_2(t)t^* e^{-t^*} + \kappa - \dot{a}_1(t) + \tilde{a}_3(t)e^{-t^*}$$

e quindi

$$X_1(t, t^*) = a_4(t) + a_3(t)e^{-t^*} + (\kappa - \dot{a}_1(t))t^* - \dot{a}_2(t)t^* e^{-t^*}.$$

Affinché per $t = O_s(1)$ fissato, e quindi per $t^* = t/\varepsilon \gg 1$, non possa avvenire che $X_1 \gg O_s(1) \sim X_0$ contrariamente all'assunto sviluppo regolare, è opportuno porre

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = \kappa \\ \dot{a}_2 = 0 \end{cases} \quad \text{e cioè} \quad \begin{cases} a_1(t) = \kappa t + b_1 \\ a_2(t) = b_2; \end{cases}$$

e le condizioni ausiliarie danno $b_2 = -b_1$ e $\kappa + b_1 + b_2 e^{-1/\varepsilon} = 1$ ovvero $b_2 = -(1 - \kappa)(1 - e^{-1/\varepsilon})^{-1}$. Ne segue

$$x^{ScMlt}(t, \varepsilon) \sim \kappa t + \frac{1 - \kappa}{1 - e^{-1/\varepsilon}} (1 - e^{-t/\varepsilon}).$$

Si osservi che questa soluzione addirittura coincide con la soluzione esatta (2.52) che si è trovata all'inizio dell'esempio, ed è quindi valida anche se $t/\varepsilon = O(1)$. $\square$

Esempio 6.2.11 (continuazione dell'Esempio 6.2.3) $\ddot{x} + 2\varepsilon\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

Si suppongano dapprima due soli tempi caratteristici: t e $t_1 := \varepsilon t$. Servendosi delle relazioni (2.45) sugli operatori d/dt e d^2/dt^2 , e quindi delle (2.46), il problema iniziale fornisce (al primo ordine)

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 X_0 + \omega_0^2 X_0 = 0 \\ \partial_{tt}^2 X_1 + \omega_0^2 X_1 = -2 \partial_{tt_1}^2 X_0 - 2 \omega_0 \partial_t X_0 \end{cases}$$

inoltre, siccome $t = 0$ se e solo se $t_1 = 0$, le condizioni ausiliarie $x(0) = 0$ ed $\dot{x}(0) = 1$ forniscono le

$$X_0(0, 0) = 0, \quad X_1(0, 0) = 0, \quad \partial_t X_0(0, 0) = 1, \quad \partial_{t_1} X_0(0, 0) + \partial_t X_1(0, 0) = 0.$$

Nel problema iniziale l'operatore differenziale contiene unicamente tempi $O(1)$ (comunque $t \ll O(1/\varepsilon)$ e dunque $t_1 \ll 1$), ciò conferma che il problema all'ordine zero è in realtà *un problema alle derivate ordinarie*, ed è pertanto accettabile risolverlo mantenendo gli altri tempi caratteristici come parametri, lentamente variabili. Si ricava in tal modo

$$\begin{cases} X_0(t, t_1) = a(t_1) \cos \omega_0 t + b(t_1) \sin \omega_0 t \\ a(0) = 0, \quad b(0) = 1 \end{cases}$$

Le due funzioni a, b assegnano la dipendenza della X_0 dal tempo t_1 , e cioè da tempi con correzioni $O(\varepsilon)$. D'altra parte anche X_1 è $O(\varepsilon)$, e dunque *per poter risolvere il problema all'ordine uno in tutti i suoi aspetti* occorre ora scrivere anche il problema concernente la $X_1(t, t_1)$. Esso è

$$\partial_{tt}^2 X_1 + \omega_0^2 X_1 = 2(a' + \omega_0 a) \sin \omega_0 t - 2(b' + \omega_0 b) \cos \omega_0 t,$$

ed è opportuno scegliere (sempre per evitare risonanze)

$$a'(t_1) + \omega_0 a(t_1) = 0 \quad \text{e} \quad b'(t_1) + \omega_0 b(t_1) = 0,$$

sulle quali i detti dati iniziali: $a(0) = 0$ e $b(0) = 1$ forniscono

$$a(t_1) = 0, \quad b(t_1) = e^{-\omega_0 t_1}, \quad \text{e quindi} \quad X_0(t, t_1) = e^{-\omega_0 t_1} \sin \omega_0 t.$$

Questa espressione è valida finché $t \sim O(1/\varepsilon)$ e contiene termini $O(\varepsilon)$.

Inoltre si vede che la X_1 ha rispetto alla t lo stesso andamento della X_0 e cioè $X_1(t, t_1) = \hat{a}(t_1) \cos \omega_0 t + \hat{b}(t_1) \sin \omega_0 t$, pertanto se si cerca una valutazione all'ordine ε *si deve interrompere il procedimento a questo punto* e senza aggiungere il termine εX_1 (ovvero ponendolo uguale a zero) giacché esso è una correzione della X_0 , sia per i tempi brevi che per i tempi lunghi, di un ordine di grandezza inferiore. In tal modo, all'ordine uno si trova $x(t, \varepsilon) \sim e^{-\varepsilon\omega_0 t} \sin \omega_0 t$ (e lo stesso risultato si troverà con il metodo di media per quanto concerne i tempi lunghi). Entrambi i metodi falliscono sulla correzione alle frequenze [che come si sa dalla soluzione esatta è solo $O(\varepsilon^2)$].

La convenienza nell'usare questo metodo rispetto a quello della media del prossimo paragrafo sta nel fatto che questo delle scale multiple è più facilmente estendibile agli ordini successivi. Si ricordi tuttavia che per ottenere tale incremento nel grado di approssimazione è *necessario ricominciare tutto il procedimento fin dall'inizio*, e permettere così a tutte le correzioni ai vari ordini, e provenienti dalle varie ipotesi sui tempi caratteristici, di raggiungere l'espressione finale. A tale scopo si estendono innanzi tutto le relazioni (2.46) nelle

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x \sim \partial_t X_0 + \varepsilon(\partial_{t_1} X_0 + \partial_t X_1) + \varepsilon^2(\partial_{t_2} X_0 + \partial_{t_1} X_1 + \partial_t X_2) \\ \frac{d^2}{dt^2} x \sim \partial_{tt}^2 X_0 + \varepsilon(2\partial_{tt_1}^2 X_0 + \partial_{tt}^2 X_1) + \varepsilon^2(\partial_{t_1 t_1}^2 X_0 + 2\partial_{tt_2}^2 X_0 + 2\partial_{t_1 t_1}^2 X_1 + \partial_{tt}^2 X_2) \end{cases}$$

mediante le quali il problema di questo esempio fornisce

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 X_0 + \omega_0^2 X_0 = 0 \\ \partial_{tt}^2 X_1 + \omega_0^2 X_1 = -2\partial_{tt_1}^2 X_0 - 2\omega_0 \partial_t X_0 \\ \partial_{tt}^2 X_2 + \omega_0^2 X_2 = -\partial_{t_1 t_1}^2 X_0 - 2\partial_{t_2 t_2}^2 X_0 - 2\partial_{t_1 t_1}^2 X_1 - 2\omega_0 \partial_{t_1} X_0 - 2\omega_0 \partial_t X_1, \end{cases}$$

con le condizioni ausiliarie

$$\begin{cases} X_0(0,0,0) = 0 ; & X_1(0,0,0) = 0 ; & X_2(0,0,0) = 0 ; \\ \partial_t X_0(0,0,0) = 1 ; & \partial_t X_1(0,0,0) = -\partial_{t_1} X_0(0,0,0) ; \\ \partial_{t_2} X_0(0,0,0) + \partial_{t_1} X_1(0,0,0) + \partial_t X_2(0,0,0) = 0 . \end{cases}$$

Se ne ricava successivamente

$$\begin{aligned} X_0(t, t_1, t_2) &= a(t_1, t_2) \cos \omega_0 t + b(t_1, t_2) \sin \omega_0 t \\ a(0, 0) &= 0, \quad b(0, 0) = 1 \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \partial_{tt}^2 X_1 + \omega_0^2 X_1 &= -2\omega_0 (-\partial_{t_1} a(t_1, t_2) \sin \omega_0 t + \partial_{t_1} b(t_1, t_2) \cos \omega_0 t) \\ &\quad - 2\omega_0^2 (-a(t_1, t_2) \sin \omega_0 t + b(t_1, t_2) \cos \omega_0 t) . \end{aligned}$$

Come già all'ordine uno, la regola di Lighthill suggerisce di porre $\partial_{t_1} a + \omega_0 a = 0$ e $\partial_{t_1} b + \omega_0 b = 0$, che si risolvono nelle:

$$\begin{aligned} a(t_1, t_2) &= \hat{a}(t_2) e^{-\omega_0 t_1} \quad \text{con} \quad \hat{a}(0) = 0 , \\ b(t_1, t_2) &= \hat{b}(t_2) e^{-\omega_0 t_1} \quad \text{con} \quad \hat{b}(0) = 1 . \end{aligned}$$

Anche in questo caso la scelta di annullare il secondo membro dell'equazione del problema al primo ordine fa sì che X_0 ed X_1 abbiano lo stesso andamento rispetto alla t , e cioè $\cos(\omega_0 t + \varphi)$ e quindi non lede scegliere $X_1(t, t_1, t_2) = 0$.

Per determinare le funzioni $\hat{a}$ e $\hat{b}$ occorre ora servirsi dell'equazione all'ordine successivo. Con queste posizioni, e con $X_0(t, t_1, t_2) = \hat{a}(t_2) e^{-\omega_0 t_1} \cos \omega_0 t + \hat{b}(t_2) e^{-\omega_0 t_1} \sin \omega_0 t$, all'ordine ε^2 si ottiene

$$\begin{aligned} \partial_{tt}^2 X_2 + \omega_0^2 X_2 &= -\omega_0^2 \hat{a}(t_2) e^{-\omega_0 t_1} \cos \omega_0 t - \omega_0^2 \hat{b}(t_2) e^{-\omega_0 t_1} \sin \omega_0 t \\ &\quad + 2\omega_0 \partial_{t_2} \hat{a}(t_2) e^{-\omega_0 t_1} \sin \omega_0 t - 2\omega_0 \partial_{t_2} \hat{b}(t_2) e^{-\omega_0 t_1} \cos \omega_0 t \\ &\quad + 2\omega_0^2 \hat{a}(t_2) e^{-\omega_0 t_1} \cos \omega_0 t + 2\omega_0^2 \hat{b}(t_2) e^{-\omega_0 t_1} \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

che fornisce $2\partial_{t_2} \hat{a} = -\omega_0 \hat{b}$ insieme con $2\partial_{t_2} \hat{b} = \omega_0 \hat{a}$, da cui $4\partial_{t_2}^2 \hat{b} + \omega_0^2 \hat{b} = 0$. Seguono $\hat{b}(t_2) = \hat{b}_0 \cos(\omega_0 t_2/2 + \varphi_2)$ e $\hat{a}(t_2) = -\hat{b}_0 \sin(\omega_0 t_2/2 + \varphi_2)$, ed i dati iniziali assegnano $\varphi_2 = 0$ e $\hat{b}_0 = \hat{b}(0) = 1$.

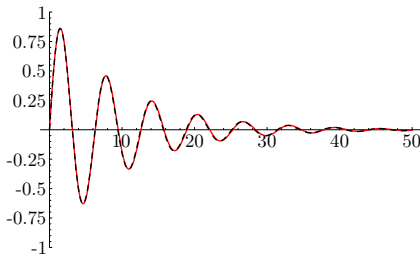
Ne risulta finalmente

$$X_0(t, t_1, t_2) = e^{-\omega_0 t_1} \left(\cos \left(\frac{\omega_0 t_2}{2} \right) \sin \omega_0 t - \sin \left(\frac{\omega_0 t_2}{2} \right) \cos \omega_0 t \right)$$

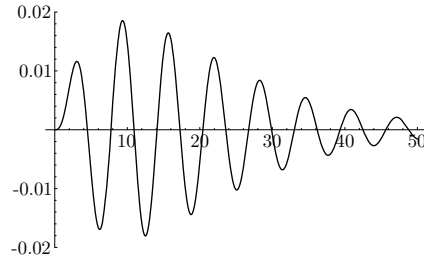
e pertanto

$$x(t, \varepsilon) = e^{-\varepsilon \omega_0 t} \sin \left(\omega_0 t - \frac{\varepsilon^2 \omega_0 t}{2} \right) + o(\varepsilon^2)$$

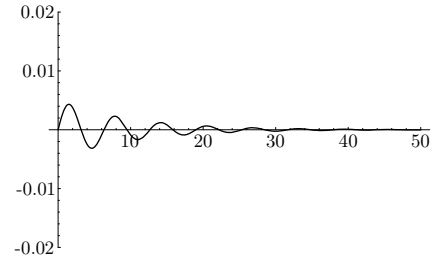
Il primo dei seguenti grafici mostra l'ottimo accordo fra le seguenti soluzioni del problema dell'Esempio 6.2.11 (calcolate per $\varepsilon = 0.1$, e quindi "grande"): la $X_0(t, \varepsilon t)$ approssimata a due tempi e la soluzione esatta $\tilde{x}(t, \varepsilon)$. Nel secondo grafico viene mostrata la differenza $\tilde{x}(t, \varepsilon) - X_0(t, \varepsilon t)$, e nel terzo la differenza $\tilde{x}(t, \varepsilon) - X_0(t, \varepsilon t, \varepsilon^2 t)$



$\tilde{x}(t, \varepsilon)$ ed $X_0(t, \varepsilon t)$



$\tilde{x}(t, \varepsilon) - X_0(t, \varepsilon t)$



$\tilde{x}(t, \varepsilon) - X_0(t, \varepsilon t, \varepsilon^2 t)$

□

Il successivo metodo si presta a trattare problemi singolari, ed in special modo quelli per i quali il metodo perturbativo diretto fallisce in determinate zone della regione di interesse, o anche aventi condizioni al contorno che non possono essere totalmente verificate.

Metodo del Matching Asintotico

Il metodo consiste nel generare soluzioni separatamente valide in zone fra loro limitrofe, e nel farle coesistere, determinando i parametri necessari affinché ciò possa accadere, *paragonandole sulle frontiere (o sulle zone intermedie) dei vari insiemi di regolarità*. Il difficile risiede nel fatto che il problema assegnato è uno solo, e che, se anche si riesce a definire un ragionevole insieme di problemi atti ad individuare tutte le variabili in gioco, non è affatto detto che le loro soluzioni abbiano espansioni nelle zone interessate espresse tramite le semplici $x \sim x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots$ trovate mediante il metodo perturbativo diretto. Al contrario, i vari termini vanno in generale determinati ad ogni passo del procedimento di risoluzione. Inoltre, e per ciascuna delle diverse scale delle variabili indipendenti, occorre in generale introdurre diverse funzioni dipendenti.

In sintesi, il metodo può essere riassunto nei seguenti passi.

- (1) Si individua il Problema Esterno, a partire da quello dato, e si risolve il suo problema all'ordine dominante, determinandone la regione di regolarità.
- (2) Si individua la Zona Interna, o: "Boundary Layer", e cioè quella nella quale tale sviluppo non è uniforme, o in cui qualche dato o condizione non possono essere verificati. Qui e nel seguito si supporrà che essa sia unica, ma questo solo per semplicità di esposizione.
- (3) Si introduce una variabile indipendente "Interna", che possa essere $O_s(1)$ nella zona interna, e si definisce il "Problema Interno", relativo a una qualche (opportuna) funzione di tale variabile.
- (4) Si completa l'identificazione delle variabili (e degli sviluppi asintotici) determinando le corrette funzioni d'ordine con le quali riscalarle i problemi così trovati (e quelli relativi ai successivi ordini) in modo che essi abbiano soluzioni non degeneri nelle rispettive regioni.
- (5) La determinazione delle costanti di integrazione e strutturali va risolta (anche in base ai dati ausiliari) mediante il matching, e cioè paragonando fra loro gli sviluppi delle variabili interna ed esterna, nella zona nella quale esse si sovrappongono. Ciò comporta (almeno) una delle seguenti
 - (5a) Quando esse siano totalmente note, si richiede che il limite interno della soluzione esterna sia uguale al limite esterno della soluzione interna, ovvero che

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \text{int}}} x^{est}(t, \varepsilon) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow \text{est}}} x^{int}(\tau, \varepsilon)$$
 - (5b) Introdotta una variabile intermedia, che sia $O_s(1)$ se valutata fra le due zone, si paragonano gli sviluppi delle due trovate sopra: *la soluzione interna e la soluzione esterna*, entrambi espressi in funzione della (stessa) variabile intermedia, e si richiede che essi abbiano lo stesso limite intermedio quando la variabile intermedia sia mantenuta $O_s(1)$ ed ε tenda a zero.
 - (5c) Si esprimono ciascuna delle: *soluzione interna e soluzione esterna* rispetto alla variabile dell' "altra" soluzione (rispettivamente esterna e interna), poi se ne calcolano gli sviluppi asintotici (rispetto al parametro), infine si paragonano i loro troncamenti, espressi rispetto una stessa variabile.
- (6) Si individua la parte comune delle due soluzioni ricavandola da tale paragone (il: "matching").
- (7) Si scrive la Soluzione Composta, funzione della sola variabile esterna, mediante la:

$$\text{Soluzione Composta} := \text{sol.esterna} + \text{sol.interna} - \text{sol.intermedia} .$$

Il seguente esempio ha carattere introduttivo al metodo, ed è incompleto data la sua semplicità.

Esempio 6.2.12 (continuazione dell'Esempio 6.2.10) Problema di Friedrichs semplificato

$$\begin{cases} \varepsilon \ddot{x} + \dot{x} = \kappa \\ x(0) = 0, \quad x(1) = 1. \end{cases} \quad (2.53)$$

Per risolvere il problema, una volta riconosciuto il fatto che in una zona del dominio lo sviluppo diretto fallisce, (nel caso in esame tale zona è una sola, quella nella quale $t = O_s(\varepsilon)$), occorre scegliere le *variabili interne* adatte a quella zona, *sia dipendenti che indipendenti*. Per quella indipendente, si vedrà che un primo tentativo viene suggerito dal problema esterno all'ordine zero (cfr. il successivo N.B. 6.2.14) che suggerisce di assumere $\tau = t/\varepsilon$; è bene osservare tuttavia che non è affatto detto che essa debba coincidere con quella usata (o che si userebbe) nel metodo delle scale multiple. Per quella dipendente, da intendersi funzione della sola variabile interna, si deve introdurre una variabile $X = X(\tau, \varepsilon)$ che sia $O_s(1)$ quando la variabile interna τ è $O_s(1)$ e che risolva il problema interno senza eccessiva degenerazione. In questo esempio, ancora in base ai N.B. 6.2.13 e 6.2.14, avviene addirittura che la $x^{est}(t(\tau), \varepsilon)$ rimanga $O_s(1)$ anche nella zona interna, e quindi si proverà con $X(\tau, \varepsilon) = x(t(\tau), \varepsilon)$, e cioè a definire il problema interno sostituendo nell'equazione data alla x la X senza ulteriori fattori di scala. Le condizioni ausiliarie da assegnare sulla $X(\tau, \varepsilon)$ sono solo quelle che la riguardano, e cioè quelle imposte sulla x nella regione interna: $\tau = O_s(1)$; analogamente, le condizioni ausiliarie per il problema esterno sono da cercarsi solo nella zona esterna.

Nel dettaglio, sulla funzione $x(t, \varepsilon)$ si definisce innanzi tutto, e per $t = O_s(1)$, il

$$\underline{\text{Problema Esterno}} \quad \begin{cases} \varepsilon \partial_{tt}^2 x + \partial_t x = \kappa \\ x(1, \varepsilon) = 1 \end{cases} \quad (2.54)$$

da risolversi in generale mediante il metodo perturbativo diretto. In effetti, in questo particolare esempio è possibile calcolare fin dall'inizio la soluzione *esatta* di tale problema, infatti si trova

$$\kappa t + (1 - \kappa) + \varepsilon c_1 (e^{-1/\varepsilon} - e^{-t/\varepsilon}) \cong x^{est}(t, \varepsilon) \quad (2.55)$$

che dipende ancora dalla costante c_1 , ed è chiaro che se si fa uso anche dell'altra condizione al contorno, quella in $t = 0$, il valore della costante viene determinato e la funzione (2.55) diviene la soluzione esatta del problema (2.53) già trovata nell'Esempio 6.2.10. Tuttavia quando si usa il metodo del matching tale procedimento non è corretto, giacché comporta imporre sulla variabile esterna una condizione fuori dalla zona esterna, e cioè nella zona di non uniformità $t \ll 1$. Di conseguenza, a questo livello si può solo controllare che il troncamento $\mathfrak{E}_0 x$ della $x \equiv x^{est}$ (valutato nuovamente per $t = O_s(1)$) coincida con la soluzione $x_0(t) = \kappa t + (1 - \kappa)$ del problema esterno allo stesso ordine, cosa che qui avviene indipendentemente dalla c_1 .

Il passo successivo consiste nell'introdurre una variabile indipendente interna che sia $O_s(1)$ nella zona interna e una dipendente da essa che sia anch'essa $O_s(1)$ nella zona interna. Per quanto riguarda la prima, qui si supporrà del tipo $\tau = t/\delta(\varepsilon)$, con $\delta(\varepsilon) \ll 1$; ed esempio $\tau := t/\varepsilon$, da confermare. Per quanto riguarda l'altra, siccome il primo troncamento della variabile esterna $\mathfrak{E}_0 x$ è $O_s(1)$ nella regione interna, si può sperare in una corretta definizione della variabile dipendente interna evitando altri fattori di scala, e limitandosi a provare con la sostituzione $x(t(\tau, \varepsilon), \varepsilon) \equiv X(\tau, \varepsilon)$ nel problema dato. (In generale occorre determinare il fattore di scala in virtù del quale la soluzione X del problema interno (che è per costruzione $O_s(1)$ nella zona interna) possa esprimere una variabile interna x^{int} dello stesso ordine di quella esterna (si veda il prossimo N.B.6.2.13). Infine, delle due condizioni $x(0) = 0$ ed $x(1) = 1$ risulta accettabile (in quanto agente nella zona interna) solo quella conseguenza dalla prima $X(0, \varepsilon) = 0$; l'altra infatti darebbe $X(1/\varepsilon, \varepsilon) = 1$ e cioè una condizione *fuori della regione interna* ($t = 1$ implica $\tau = 1/\varepsilon \gg 1$).

Servendosi della $\partial_\tau = \varepsilon \partial_t$ si conclude che il problema interno è dato, per $\tau = O_s(1)$, da

$$\underline{\text{Problema Interno}} \quad \begin{cases} \partial_\tau^2 X + \partial_\tau X = \varepsilon \kappa \\ X(0, \varepsilon) = 0, \end{cases} \quad (2.56)$$

da risolversi in generale mediante il metodo perturbativo diretto. In questo particolare esempio accade invece che la soluzione esatta anche di questo problema sia esplicitamente calcolabile:

$$X(\tau, \varepsilon) = c_0(1 - e^{-\tau}) + \varepsilon \kappa \tau \sim x^{int}(\tau, \varepsilon),$$

e che il primo troncamento $\mathfrak{J}_0 x$ della x^{int} coincida con la soluzione del problema interno all'ordine zero.

N.B. 6.2.13 Come si è già accennato, nel caso in esame (2.53) la supposta uguaglianza fra la $X(\tau, \varepsilon)$ e la $x(t(\tau), \varepsilon)$ è plausibile perché la soluzione ordine zero trovata sopra, e cioè la $\kappa t + (1 - \kappa)$, calcolata per $t = \varepsilon \tau$ diviene $\kappa \varepsilon \tau + (1 - \kappa)$ che è anch'essa (come la variabile esterna) $O_s(1)$ per $\tau = O_s(1)$. Inoltre il problema che si ottiene per la X è accettabilmente non degenerare. In altri casi invece (si veda l'Esempio 6.2.23 più oltre) può accadere che la soluzione $X_0 = O_s(1)$ del problema interno all'ordine dominante sia solo proporzionale [tramite un coefficiente $\beta_0(\varepsilon)$ non necessariamente $O_s(1)$] al primo troncamento interno $\mathfrak{J}_0 x$ della variabile x , e cioè che sia $\beta_0(\varepsilon)X_0(\tau) = \mathfrak{J}_0(x(\tau, \varepsilon))$, o anche: $\beta_0(\varepsilon)X_0(\tau) + \beta_1(\varepsilon)X_1(\tau) + \dots \cong x^{int}(\tau, \varepsilon)$. $\diamond$

N.B. 6.2.14 La variabile interna va scelta con l'idea di diminuire quanto più possibile la degenerazione del problema interno. Quando la zona interna è nell'origine, cosa che verrà indicata con $t \ll 1$, si può agire come segue. Si pone $\tau := t/\delta(\varepsilon)$ e si cerca la migliore $\delta(\varepsilon) \ll 1$ che verifichi le citate richieste: che il problema interno abbia soluzione X non degenerare ed $O_s(1)$ in tale zona. In questo esempio, e data la fortunata circostanza $X(\tau, \varepsilon) = O_s(x(t, \varepsilon))$, si ottiene:

$$\partial_\tau^2 X + \frac{\delta}{\varepsilon} \partial_\tau X = \kappa \frac{\delta^2}{\varepsilon},$$

e pertanto, delle tre possibilità: $\delta/\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \infty, \text{cost}, 0 \right\}$, si ha che la prima dà $X' = 0$ che è fortemente degenerare; l'ultima fornisce $\partial_\tau^2 X = 0$ ovvero $X = c_1 \tau + c_2$, che diventa grande per $\tau \rightarrow \infty$ oppure è fortemente degenerare, e quindi non paragonabile con il limite interno della x^{est} , che invece è finito. Rimane dunque la sola possibilità $\delta \sim \varepsilon$, che conferma il tentativo fatto. $\diamond$

N.B. 6.2.15 Il caso in esame è anche particolarmente fortunato perché, come si è detto, permette la risoluzione esplicita dei problemi interno ed esterno con $\varepsilon \neq 0$. In generale si dovranno risolvere i loro sviluppi diretti che in questo caso, invece, non sono disponibili: il metodo perturbativo diretto applicato all'equazione $\varepsilon \dot{y} + y = \kappa$ fallisce infatti miseramente, dato che fornisce $x_n(t) = \text{cost} = 0$ per ogni $n > 0$. $\diamond$

Anche il problema interno (2.56) (così come il (2.54)) è un problema *non ben posto*: l'equazione è del secondo ordine e manca una condizione, iniziale o al contorno, che permetta la determinazione della costante c_0 , e cioè anche della sua parte $O_s(1)$.

Metodo del matching operare le scelte dei coefficienti o delle funzioni ancora incognite (qui si determina la costante c_0) in modo da rendere uguali gli andamenti dello sviluppo interno e dello sviluppo esterno quando si effettua tale paragone in quella zona, l'*intermedia*, dove non si ha né $t = O_s(1)$ né $\tau = O_s(1)$, e dove si presume che i due sviluppi debbano coincidere.

A tale scopo si può:

- provare semplicemente a paragonare il limite (in questo esempio) per $t \rightarrow 0$ della soluzione esterna con il limite per $\tau \rightarrow \infty$ della soluzione interna (si veda il Punto 5a più sopra);
- (più correttamente) definire una *variabile intermedia* che sia $O_s(1)$ nella zona intermedia e paragonare gli sviluppi in tale zona (si veda il Punto 5b);
- (ove necessario) valutare i primi termini che si ottengono troncando gli sviluppi (dei primi termini) interno in funzione della variabile esterna ed esterno in funzione della variabile interna, e paragonando fra loro ciò che tali termini forniscono quando valutati nella zona intermedia (si veda il Punto 5c).

Nell'esempio in esame si ha

$$\begin{aligned} x_0 &= \kappa t + (1 - \kappa) && \text{valida in } t = O_s(1), \\ X_0 &= c_0(1 - e^{-\tau}) && \text{valida in } \tau = O_s(1); \end{aligned}$$

la variabile intermedia può essere $\eta := t/\sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon} \tau$; ed infatti essa è $O_s(1)$ nella regione intermedia, (vedi N.B. 6.2.16 più oltre). Fissata tale variabile intermedia, si richiede che sussista un unico

$$\text{Limite intermedio} \quad \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \eta = O_s(1)}} x^{est}(t(\eta, \varepsilon), \varepsilon) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \eta = O_s(1)}} x^{int}(\tau(\eta, \varepsilon), \varepsilon)$$

o, più in generale, che le due funzioni

$$[x^{est}(t, \varepsilon)]_{t=t(\eta)} \quad \text{e} \quad [x^{int}(t, \varepsilon)]_{t=t(\eta)} \quad \text{abbiano un medesimo andamento.}$$

Qui si sono indicate con x^{est} ed x^{int} le espressioni dei due sviluppi asintotici della *medesima* variabile dipendente $x(t, \varepsilon)$ (l'incognita del problema iniziale) validi rispettivamente nelle regioni esterna ed interna; essi quindi sono generalmente le soluzioni perturbative dirette dei problemi esterno ed interno, possibilmente riscaldati dopo il paragone con gli sviluppi che si ottengono a partire dai tentativi: $x^{int}(\tau, \varepsilon) \cong x^{est}(t(\tau, \varepsilon), \varepsilon)$ ed $x^{est}(t, \varepsilon) \cong x^{int}(\tau(t, \varepsilon), \varepsilon)$ (cfr. oltre).

Come già detto nel N.B. 6.2.13, la x^{int} può anche differire dalla $X(\tau(\eta, \varepsilon), \varepsilon)$ per una funzione di scala $\beta_0(\varepsilon)$; tuttavia ciò non accade nell'esempio in esame.

Il calcolo dei due limiti intermedi delle soluzioni interna ed esterna fornisce in questo esempio rispettivamente:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ t/\sqrt{\varepsilon} = O_s(1)}} x^{est}(t/\sqrt{\varepsilon}, \varepsilon) &= \lim_{\sqrt{\varepsilon} \rightarrow 0} \kappa \sqrt{\varepsilon} + (1 - \kappa) = (1 - \kappa), \\ \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \tau\sqrt{\varepsilon} = O_s(1)}} x^{int}(\tau\sqrt{\varepsilon}, \varepsilon) &= \lim_{\sqrt{\varepsilon} \rightarrow 0} c_0(1 - e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}) = c_0; \end{aligned}$$

inoltre, tali valori coincidono rispettivamente con quelli dei limiti $\lim_{t \rightarrow 0} \mathfrak{E}_0 x^{est}$ e $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathfrak{J}_0 x^{int}$. Uguagliandoli fra loro si assegna alla costante c_0 il valore $(1 - \kappa)$.

Si costruiscono in tal modo i due sviluppi

$$\begin{aligned} x^{est}(t, \varepsilon) &= \kappa t + (1 - \kappa) + o(1) && \text{valido in } t = O_s(1) \\ x^{int}(\tau, \varepsilon) &= (1 - \kappa)(1 - e^{-\tau}) + o(1) && \text{valido in } \tau = O_s(1) \end{aligned}$$

mediante i quali si può infine costruire il primo termine di una soluzione unica:

$$\mathcal{C}_{0,0}(t, \varepsilon) \sim x^{est}(t, \varepsilon) + x^{int}(\tau(t), \varepsilon) - x^{com}(\eta(t), \varepsilon).$$

In questa la x^{com} è la parte comune, il cui termine dominante è assegnato dal comune valore dei limiti determinato con il matching; nell'esempio esso è $\mathfrak{J}_0 \mathfrak{E}_0 x = \mathfrak{E}_0 \mathfrak{J}_0 x = (1 - \kappa)$. In definitiva per l'Eq. (2.53) si ha (al primo ordine) la soluzione

$$x^{AMP}(t) \sim \kappa t + (1 - \kappa)(1 - e^{-t/\varepsilon}) \quad \text{uniforme su tutto } [0, 1] \quad (2.57)$$

da paragonare con la soluzione esatta (2.52) trovata precedentemente nell'Esempio 6.2.10.

Qualora si voglia proseguire ed aumentare di ordine, e dato che sono stati trovati i due termini $\mathfrak{E}_0 x$ e $\mathfrak{J}_0 x$, occorre risolvere i problemi sia esterno sia interno relativi all'ordine successivo. Tuttavia, dalla X_0 si ricava $X_0(\tau(t)) = c_0(1 - e^{-t/\varepsilon})$ che *non ammette sviluppo* per $t = O_s(1)$. Occorre quindi limitarsi a supporre che il suo primo troncamento coincida con il termine dominante che si ottiene mantenendo $t = O_s(1)$, e cioè la costante c_0 :

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_0 x &= \kappa t + (1 - \kappa) = \varepsilon \kappa \tau + (1 - \kappa) \\ \mathfrak{J}_0 \mathfrak{E}_0 x &= (1 - \kappa) \\ \mathfrak{J}_0 x &= c_0(1 - e^{-\tau}) = c_0(1 - e^{-t/\varepsilon}) \\ \mathfrak{E}_0 \mathfrak{J}_0 x &= c_0. \end{aligned}$$

In questo esempio, tuttavia, neanche questo è sufficiente a tale prosecuzione e occorre limitarsi allo sviluppo al primo ordine (2.57) giacché, come si è notato, lo sviluppo perturbativo del problema esterno fornisce: $\partial_t x_1 = -\partial_t^2 x_0 = 0$ la cui risposta è banale e non permette ulteriori sviluppi. $\square$

N.B. 6.2.16 Se come variabile intermedia si usa una $\tilde{\eta} := t/\delta(\varepsilon)$, con $\delta(\varepsilon)$ non necessariamente la $\sqrt{\varepsilon}$ ma comunque tale che $O_s(\varepsilon) \ll \delta(\varepsilon) \ll 1$, il risultato deve rimanere lo stesso. È questa una delle richieste fondamentali: che la soluzione intermedia non sia accettabile solo per un particolare specifico andamento della variabile intermedia ma, al contrario, che il suo andamento sia comune alle soluzioni esterna e interna *non per una sola scelta della scala* $\delta(\varepsilon)$, *ma per tutto un insieme di suoi possibili valori* che ne comprenda sia alcuni per i quali la soluzione esterna rimane significativa, sia altri per i quali ciò accade a quella interna. $\diamond$

N.B. 6.2.17 Come già accennato, ci sono altri due limiti che si sarebbero potuti adoperare in alternativa a quelli intermedi. Essi sono: il “limite interno” della soluzione esterna ed il “limite esterno” della soluzione interna, si veda oltre. In questo esempio essi coincidono con i limiti già calcolati, e cioè il $\lim_{t \rightarrow 0} \mathfrak{E}_0 x^{est}$ ed il $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathfrak{J}_0 x^{int}$. Il sussistere dell'uguaglianza fra questi ultimi tuttavia *non garantisce in generale* che i due sviluppi siano entrambi validi quando espressi nella prescelta variabile intermedia e questa è $O_s(1)$, ma certo lo lascia sperare. $\diamond$

N.B. 6.2.18 Il metodo va abbandonato qualora i limiti necessari per il matching non esistano. Il procedimento va interrotto o modificato qualora le funzioni che si determinano non siano sviluppabili. $\diamond$

Glossario

È utile la seguente terminologia, già usata nel precedente esempio.

Variabili esterne: (t, x) := variabili indipendenti o dipendenti (possibilmente adimensionali) basate sulle grandezze originarie.

Regione esterna := la regione in cui le variabili esterne rimangono $O_s(1)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, e che in tal modo è di uniformità per lo Sviluppo esterno.

Problema esterno := il problema assegnato, del quale si cerca soluzione nella Regione esterna.

Sviluppo esterno $x^{est}(t, \varepsilon)$:= lo sviluppo asintotico

$$x^{est}(t, \varepsilon) := \sum_{n=0} \alpha_n(\varepsilon) x_n(t)$$

della funzione delle variabili esterne che è soluzione del Problema esterno nella Regione esterna. Ove possibile, esso viene determinato risolvendo con il metodo perturbativo diretto il Problema esterno.

Limite esterno := il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ e con le variabili esterne che rimangono $O_s(1)$, e quindi con quelle interne che si avviano verso la Regione esterna.

Variabili interne: (τ, X) := variabili indipendenti o dipendenti (possibilmente adimensionali) ottenute riscalandole quelle esterne con opportune funzioni d'ordine della ε in modo tale che esse risultino $O_s(1)$ nella Regione interna.

“Opportune” significa in modo tale da ottenere un Problema interno non degenerare ed uno Sviluppo interno uniforme nella Regione interna.

Regione interna := la regione di non uniformità per lo Sviluppo esterno, e di uniformità per quello interno. In essa le variabili interne rimangono $O_s(1)$.

Problema interno := il problema che si definisce sulle variabili interne, opportunamente riscalate in modo che esso abbia

soluzione $X(\tau, \varepsilon)$ uniforme ed $O_s(1)$ nella Regione interna.

Sviluppo della variabile interna $X(\tau, \varepsilon)$:= lo sviluppo asintotico della soluzione X del problema interno

$$X(\tau, \varepsilon) = X_0(\tau) + \sum_{n=1} \tilde{\beta}_n(\varepsilon) X_n(\tau), \quad X_0(\tau) = O_s(1)$$

Ove possibile esso viene determinato risolvendo con il metodo perturbativo diretto il Problema interno, quest'ultimo inteso come problema nelle variabili interne.

Si noti che per costruzione $\tilde{\beta}_0 = 1$, e quindi, per esprimere la variabile originaria x mediante lo Sviluppo interno, talvolta è necessario riscalare la variabile interna X con un'ulteriore funzione d'ordine $\beta_0(\varepsilon)$ che renda il suo termine dominante consistente con quello della x anche quando viene espresso in funzione delle variabili esterne. Un iniziale tentativo può essere il richiedere che il termine $\beta_0(\varepsilon) X_0(\tau(t), \varepsilon)$ sia bilanciato da $x^{est}(t, \varepsilon)$, e cioè che sia $\beta_0(\varepsilon) X_0(\tau(t), \varepsilon) = O_s(x^{est}(t, \varepsilon))$. Il risultato di tale adattamento di scala è lo Sviluppo interno.

Sviluppo interno $x^{int}(\tau, \varepsilon)$:= lo sviluppo asintotico

$$x^{int}(\tau, \varepsilon) := \sum_{n=0} \beta_n(\varepsilon) X_n(\tau), \quad \beta_0 \text{ non necessariamente } O_s(1)$$

della variabile dipendente x (incognita dell'iniziale problema assegnato) in funzione delle variabili interne, ottenuto mediante la richiesta che il suo ordine di grandezza sia paragonabile a quello della x^{est} .

Limite interno := il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ e con le variabili interne $O_s(1)$, e quindi con quelle esterne che si avviano verso la regione interna.

Affinché il metodo possa funzionare è necessario che il problema interno contenga ogni elemento essenziale scartato dal problema esterno, ed inoltre che esso abbia minima degenerazione.

Sviluppo Composto := un qualunque sviluppo asintotico $\mathcal{C}(t, \varepsilon)$ che si riduca a quello esterno quando le variabili esterne sono $O_s(1)$, e a quello interno quando le variabili interne sono $O_s(1)$; ad esempio si può scegliere:

$$\mathcal{C} := \begin{cases} \text{sviluppo esterno} & \text{quando le variabili esterne} = O_s(1) \\ \text{sviluppo intermedio} & \text{quando le variabili intmd.} = O_s(1) \\ \text{sviluppo interno} & \text{quando le variabili interne} = O_s(1) \end{cases}$$

e quindi costruirlo mediante la:

$$\mathcal{C}(t, \varepsilon) := x^{est}(t, \varepsilon) + x^{int}(\tau(t), \varepsilon) - x^{com}(\eta(t), \epsilon).$$

PRINCIPIO DEL PARAGONE ASINTOTICO, o “Asymptotic Matching Principle” A.M.P. :=

il richiedere che le stime degli andamenti non dipendano dal percorso seguito per effettuare il calcolo e che siano le stesse, *ovviamente quando espresse rispetto alle stesse variabili*.

A tale scopo occorre ulteriormente definire gli

Operatori di troncamento $\mathfrak{E}_p$ e $\mathfrak{I}_q$:= gli operatori che troncano, rispettivamente agli ordini p e q , gli sviluppi esterno x^{est} e interno x^{int} dell'incognita x del problema:

$$\mathfrak{E}_p x(t, \varepsilon) := \sum_{n=0}^p \alpha_n(\varepsilon) x_n(t) \quad \mathfrak{I}_q x(\tau, \varepsilon) := \sum_{n=0}^q \beta_n(\varepsilon) X_n(\tau) .$$

Essi sono gli operatori che, agendo sulla stessa grandezza fisica x , (e quindi non necessariamente sulle espansioni delle soluzioni dei problemi interno ed esterno), ne assegnano l'andamento stimato al prescelto ordine di grandezza.

Il Principio del Paragone Asintotico impone (per esempio)

$$\left[\mathfrak{I}_q \left(\mathfrak{E}_p x(t, \varepsilon) \right)_{t=t(\tau)} \right]_{\tau=\tau(t)} = \mathfrak{E}_p \left(\mathfrak{I}_q x(\tau, \varepsilon) \right)_{\tau=\tau(t)}$$

L'A.M.P. è valido purché gli sviluppi siano tali che $\frac{\alpha_{n+1}(\varepsilon)}{\alpha_n(\varepsilon)}$ e $\frac{\beta_{n+1}(\varepsilon)}{\beta_n(\varepsilon)}$ siano $o(\varepsilon^c)$ con $c \in \mathbb{R}^+$, e cioè per funzioni d'ordine algebriche. Inoltre il procedimento va interrotto o modificato se le funzioni non sono più sviluppabili.

N.B. 6.2.19 Se come Sviluppo Composto si assume in particolare:

$$\mathcal{C}_{p,q} x := \mathfrak{E}_p x + \mathfrak{I}_q x - \mathfrak{I}_q \mathfrak{E}_p x ,$$

l'A.M.P. implica la richiesta

$$\mathfrak{E}_p (\mathcal{C}_{p,q} x) = \mathfrak{E}_p x \quad \text{e} \quad \mathfrak{I}_q (\mathcal{C}_{p,q} x) = \mathfrak{I}_q x .$$

◇

N.B. 6.2.20 Nell'esempio precedente si è richiesta l'uguaglianza $\mathfrak{E}_0 \mathfrak{I}_0 x = \mathfrak{I}_0 \mathfrak{E}_0 x$ che valevano rispettivamente c_0 ed $(1 - \kappa)$. ◇

Esempio 6.2.21 (Problema di Friedrichs)

$$\begin{cases} \varepsilon \ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0 \\ x(0) = 0, \quad x(1) = 1 . \end{cases}$$

Analogamente a quanto si è fatto nell'Esempio 6.2.10, si inizia con il riconoscere che la regione interna è per $t \ll 1$. Infatti, se si impone la condizione $x(0) = 0$ alla soluzione all'ordine zero si ricava $x_0(t) = \alpha e^{-t} = 0$ che non permette alla x alcuna crescita verso il valore 1 a meno che da un certo punto in poi per $t \in [0, 1]$ le tre funzioni $x, \dot{x}, \ddot{x}$ diventino simultaneamente non negative, e ciò contrasta con l'equazione assegnata.

Si scrive quindi il Problema esterno

$$\underline{\text{Problema esterno}} \quad \begin{cases} \varepsilon \ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0 \\ x(1) = 1 , \end{cases}$$

ed il suo problema all'ordine zero

$$PE.0 := \begin{cases} \dot{x} + x = 0 \\ x(1) = 1 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x_0(t) = e^{1-t} \\ \alpha_0(\varepsilon) = 1 . \end{cases}$$

Si nota che la x_0 è $O_s(1)$ anche nella regione interna, e ciò giustifica il tentativo: $X(\tau, \varepsilon) = O_s(x(t(\tau, \varepsilon), \varepsilon))$ e $\tau := t/\delta(\varepsilon)$, mediante le quali il Problema Interno assume la forma

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} \partial_\tau^2 X + \frac{2}{\delta(\varepsilon)} \partial_\tau X + 2X = 0, \quad X(0) = 0 .$$

Per trovare $\delta(\varepsilon)$, delle tre possibilità $\frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon} \begin{cases} 0 & \text{alta degenerazione} \\ 1 & \text{che implica alta degenerazione} \\ \infty & \text{che implica soluzioni ragionevoli} \end{cases}$

si sceglie la terza, per esempio: $\delta(\varepsilon) := \varepsilon$. Ne segue il

$$\text{\textit{Problema interno}} \quad \begin{cases} X'' + 2X' + 2\varepsilon X = 0 \\ X(0) = 0 \end{cases}$$

Il suo problema all'ordine zero è

$$PI.0 \quad := \quad X'' + 2X' = 0, \quad X(0) = 0$$

del quale è soluzione $X_0(\tau) = a(1 - e^{-2\tau})$ con $\tau = t/\varepsilon$.

Per individuare la soluzione composta $\mathcal{C}_{0,0}$ si può sviluppare le due funzioni: la $\mathfrak{E}_0 x \equiv x_0(t)$ e la $\mathfrak{I}_0 x \equiv X_0(\tau)$, ciascuna espressa nella variabile "sbagliata" e cioè:

$$\begin{aligned} \left(\mathfrak{E}_0 x \right)_{t=t(\tau)} &= e^{1-\varepsilon\tau} \sim e(1 - \varepsilon\tau + o(\varepsilon)) \Rightarrow \mathfrak{I}_0 \mathfrak{E}_0 x = e \\ \left(\mathfrak{I}_0 x \right)_{\tau=\tau(t)} &= a(1 - e^{-2t/\varepsilon}) \Rightarrow \mathfrak{E}_0 \mathfrak{I}_0 x = a \end{aligned}$$

e siccome la prima risulta già espressa in funzione della variabile esterna è immediato imporre l'A.M.P. che fornisce $\mathfrak{E}_0 \mathfrak{I}_0 = a = e = \mathfrak{I}_0 \mathfrak{E}_0$. Si calcola infine lo sviluppo composto sommando i tre contributi:

$$\mathcal{C}_{0,0} x = \mathfrak{E}_0 x + \mathfrak{I}_0 x - \mathfrak{E}_0 \mathfrak{I}_0 x = e^{1-t} - e^{1-2t/\varepsilon}.$$

È istruttivo, a questo punto, paragonare il risultato ottenuto non solo con quello esatto:

$$\tilde{x}(t, \varepsilon) = \frac{1}{1 - e^{(1-2/\varepsilon)}} \left(e^{1-t} - e^{1-2t/\varepsilon} \right) \equiv \frac{1}{1 - e^{(1-2/\varepsilon)}} \mathcal{C}_{0,0}$$

ma anche con quello fornito dal metodo delle scale multiple, con la scala $t^* := t/\varepsilon$ e con $\beta_0 = 1$. Questo avrebbe dato la seguente equazione sulle funzioni $X_0 = X_0(t, t^*)$ ed $X_1 = X_1(t, t^*)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(\partial_t^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_{t^*}^2 + \frac{2}{\varepsilon} \partial_{tt^*} \right) (X_0 + \beta_1 X_1) + 2 \left(\partial_t + \frac{1}{\varepsilon} \partial_{t^*} \right) (X_0 + \beta_1 X_1) + 2(X_0 + \beta_1 X_1) &= 0 \\ \text{con} \quad X_0(0, 0) = X_1(0, 0) = 0, \quad X_0(1, 1/\varepsilon) = 1, \quad X_1(1, 1/\varepsilon) = 0 \end{aligned}$$

dalla quale, con $\beta_1 = \varepsilon$, si ricavano le

$$O(1/\varepsilon) : \quad \partial_{t^*}^2 X_0 + 2 \partial_{t^*} X_0 = 0 \quad (2.58)$$

$$O(1) : \quad 2 \partial_{tt^*}^2 X_0 + \partial_{tt^*}^2 X_1 + 2 \partial_t X_0 + 2 \partial_{t^*} X_1 + 2X_0 = 0. \quad (2.59)$$

L'equazione (2.58) fornisce $X_0 = a(t)e^{-2t^*} + b(t)$, sulla quale la condizione $X_0(0, 0) = 0$ assegna $a(0) + b(0) = 0$, e la $X_0(1, 1/\varepsilon) = 1$ dà $a(1)e^{-2/\varepsilon} + b(1) = 1$. L'equazione fornisce allora

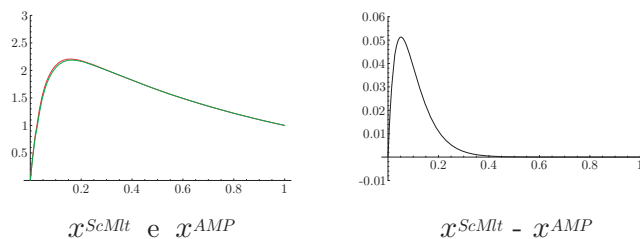
$$-4\dot{a}e^{-2t^*} + 2(\dot{a}e^{-2t^*} + \dot{b}) + 2(ae^{-2t^*} + b) + \partial_{t^*}^2 X_1 + 2 \partial_{t^*} X_1 = 0$$

e la regola di Lighthill assegna $\dot{a} - a = 0$ e $\dot{b} + b = 0$. Ne segue $X_0 = c(e^{t-2t/\varepsilon} - e^{-t})$ e mediante la seconda condizione ausiliaria se ne conclude che

$$x^{ScMlt}(t) = \frac{e^{1-t}}{1 - e^{2(1-1/\varepsilon)}} \left(1 - e^{2t(1-1/\varepsilon)} \right) \sim e^{1-t} - e^{1+t-2t/\varepsilon}.$$

Si osservi che la differenza fra questa e lo sviluppo composto $\mathcal{C}_{0,0} = e^{1-t}(1 - e^{t(1-2/\varepsilon)})$ trovato con l'A.M.P. risulta $(e^t - 1)e^{(1-2t/\varepsilon)} \sim e^{-2t/\varepsilon}$ ed è quindi apprezzabile solo fintanto che $t \sim O(\varepsilon)$.

Il primo dei seguenti grafici mostra le due soluzioni x^{ScMlt} e $x^{AMP} := \mathcal{C}_{0,0}$, il secondo la loro differenza.



Per calcolare l'approssimazione al passo successivo il metodo del Matching prevede di scegliere la corretta funzione d'ordine successiva sviluppando entrambe $\left(\mathfrak{E}_0 x\right)(\tau, \varepsilon)$ e $\left(\mathfrak{J}_0 x\right)(t, \varepsilon)$. In questo esempio, tuttavia, lo sviluppo di $e(1 - e^{-2t/\varepsilon})$ non è possibile, e quindi si procede con il metodo perturbativo diretto *applicato indipendentemente a entrambi i problemi interno ed esterno*, e con l'ipotesi che a ogni passo le funzioni d'ordine α_i e β_i necessarie ai due sviluppi siano le medesime. Assumendo $\alpha_1 = \varepsilon = \beta_1$, i problemi al primo ordine risultano

$$PE.1 := \begin{cases} \dot{x} + x = -\frac{1}{2} \ddot{x}_0 = -\frac{1}{2} e^{1-t} \\ \text{con } x(1) = 0, \end{cases}$$

e

$$PI.1 := \begin{cases} X'' + 2X' = -2X_0 = -2e(1 - e^{-2\tau}), \\ \text{con } X(0) = 0, \end{cases}$$

e questi forniscono rispettivamente

$$x_1(t) = \frac{1-t}{2} e^{1-t} \quad \text{e} \quad X_1(\tau) = -\tau e(1 + e^{-2\tau}) + c(1 - e^{-2\tau})$$

Pertanto i troncamenti $O(\varepsilon)$ rispettivamente di x^{est} e di $x^{int}(t(\tau); \varepsilon) \equiv X(\tau, \varepsilon)$ risultano

$$\begin{aligned} \left(\mathfrak{E}_1 x\right)(t, \varepsilon) &= e^{1-t} + \varepsilon \frac{1-t}{2} e^{1-t} \\ \left(\mathfrak{J}_1 x\right)(\tau, \varepsilon) &= e(1 - e^{-2\tau}) + \varepsilon(-\tau e(1 + e^{-2\tau}) + c(1 - e^{-2\tau})) \end{aligned}$$

Per trovare il valore della costante c si calcolano gli sviluppi

$$\begin{aligned} \left(\mathfrak{E}_1 x\right)(\tau, \varepsilon) &= e^{1-\varepsilon\tau} \left(1 + \varepsilon \frac{1-\varepsilon\tau}{2}\right) \sim e(1 - \varepsilon\tau) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ \left(\mathfrak{J}_1 x\right)(t, \varepsilon) &= e(1 - e^{-2t/\varepsilon}) + \varepsilon \left(-e \frac{t}{\varepsilon} (1 + e^{-2t/\varepsilon}) + c(1 - e^{-2t/\varepsilon})\right) \end{aligned}$$

e siccome $\left(\mathfrak{J}_1 x\right)(t, \varepsilon) = e + \varepsilon(c - et/\varepsilon) + o(\varepsilon)$ sussistono i troncamenti

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_1 \mathfrak{E}_1 x &= e \left(1 + \varepsilon \left(\frac{1}{2} - \tau\right)\right) = e(1 - t) + \varepsilon \frac{e}{2} \\ \mathfrak{E}_1 \mathfrak{J}_1 x &= e + \varepsilon \left(c - \frac{et}{\varepsilon}\right) = e(1 - t) + \varepsilon c. \end{aligned}$$

Questi confermano la scelta $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, e implicano $c = e/2$. Alternativamente si può fare ricorso a una variabile intermedia $\eta := t/\delta(\varepsilon)$ con $\varepsilon \ll \delta(\varepsilon) \ll 1$ e trovare, prima

$$x^{est} \sim e^{1-\delta\eta} + \varepsilon \frac{1-\delta\eta}{2} e^{1-\delta\eta} = e \left((1 - \delta\eta) + \frac{\varepsilon}{2}(1 - 2\delta\eta)\right);$$

poi, sostituendo $\tau = \delta\eta/\varepsilon$ nella $\mathfrak{J}_1 x$, il corrispondente sviluppo esterno: $e(1 - \delta\eta) + \varepsilon c$. Ciò conferma: $c = e/2$.

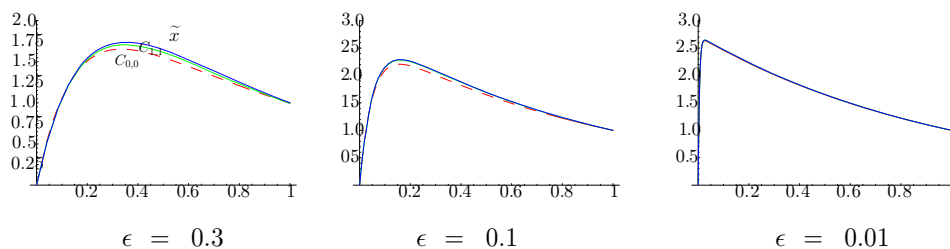
In conclusione lo sviluppo composto al primo ordine è

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{1,1} x &= e^{1-t} \left(1 + \varepsilon \frac{1-t}{2}\right) + e(-e^{-2t/\varepsilon}) - et(+e^{-2t/\varepsilon}) + \varepsilon \frac{e}{2} (-e^{-2t/\varepsilon}) \\ &= e^{1-t} - (1+t)e^{1-2t/\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \left((1-t)e^{1-t} - e^{1-2t/\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Anche in questo particolare esempio il tutto può essere confrontato con la soluzione esatta $\tilde{x}(t, \varepsilon)$ che qui risulta:

$$\tilde{x}(t, \varepsilon) = \frac{\exp -t(1 + \sqrt{1 - 2\varepsilon})/\varepsilon - \exp -t(1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon})/\varepsilon}{\exp -(1 + \sqrt{1 - 2\varepsilon})/\varepsilon - \exp -(1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon})/\varepsilon}$$

I seguenti grafici mostrano le tre funzioni: la soluzione esatta $\tilde{x}(t, \varepsilon)$, la composta all'ordine zero: $C_{0,0}(t, \varepsilon)$ (la linea a tratti), e quella all'ordine uno: $C_{1,1}(t, \varepsilon)$ per i tre valori: $\varepsilon = 0.3$, $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.01$.



□

N.B. 6.2.22 Tipicamente lo studio degli sviluppi viene effettuato nel seguente ordine: $\mathfrak{E}_0 x \rightarrow \mathfrak{I}_0 x \rightarrow \mathfrak{E}_1 x \rightarrow \mathfrak{I}_1 x \rightarrow \mathfrak{E}_2 x \dots$, a meno che si riesca a risolvere prima tutto il problema esterno poi quello interno: la parte delicata del procedimento infatti è decidere quali debbano essere le corrette funzioni d'ordine $\alpha_i(\varepsilon)$ e $\beta_i(\varepsilon)$. $\diamond$

Esempio 6.2.23 (continuazione dell'Esempio 6.2.6)
$$\begin{cases} (t + \varepsilon x)\dot{x} + x = 1 \\ x(1) = 2, \quad t \in [0, 1] \end{cases}$$

$$\underline{\text{Problema Esterno}} \quad \begin{cases} (t + \varepsilon x)\dot{x} + x = 1 & t \in (0, 1] \\ x(1) = 2 \end{cases}$$

con il suo problema all'ordine zero

$$PE.0 := \begin{cases} t\dot{x} + x = 1 \\ x(1) = 2 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_0 x = 1 + \frac{1}{t} \\ \alpha_0(\varepsilon) = 1. \end{cases}$$

Tale soluzione, così come tutto lo sviluppo diretto, non è uniforme per $t \rightarrow 0$. Si sceglie pertanto una variabile interna “breve”, e cioè che sia $O_s(1)$ quando $t = o(1)$; si assumerà della forma $\tau := t/\delta(\varepsilon)$ con $\delta(\varepsilon) = o(1)$. Se ne ricava un tentativo di sviluppo

$$x^{int}(\tau) \sim 1 + \frac{1}{\delta\tau} \sim \frac{1}{\delta\tau} \quad \text{che è } O_s(\delta^{-1}) \text{ per } \tau = O_s(1).$$

Per introdurre una variabile interna X che sia $O_s(1)$ per $\tau = O_s(1)$ si prova allora a porre $\beta_0 := \delta^{-1}$ insieme con

$$X(\tau, \varepsilon) := \delta(\varepsilon)x^{int}(t(\tau, \varepsilon), \varepsilon), \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt}x = \frac{1}{\delta} \partial_\tau \left(\frac{1}{\delta} X \right).$$

Queste, poste nel problema iniziale, danno

$$\left(\delta\tau + \frac{\varepsilon}{\delta} X \right) \frac{1}{\delta^2} \partial_\tau X + \frac{1}{\delta} X = 1, \quad \text{ovvero} \quad \left(\tau + \frac{\varepsilon}{\delta^2} X \right) \partial_\tau X + X = \delta,$$

sulla quale *non si danno condizioni ausiliarie nella regione interna*. Si hanno le tre possibilità:

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} \xrightarrow{\frac{\varepsilon}{0}} \begin{cases} 0 & \text{di nuovo} & \text{l'equazione esterna} \\ \infty & \text{che implica} & \text{alta degenerazione} \\ 1 & \text{che implica} & \text{soluzioni ragionevoli} \end{cases}$$

Ricavati in tal modo $\delta(\varepsilon) := \varepsilon^{1/2}$, $\tau := \varepsilon^{-1/2}t$, e $X := \varepsilon^{1/2}x$, si può finalmente definire il

$$\underline{\text{Problema Interno}}: \quad (\tau + X)\partial_\tau X + X = \varepsilon^{1/2}, \quad \text{senza condizioni ausiliarie.}$$

Il suo problema all'ordine zero è

$$PI.0 \quad := \quad (\tau + X)\partial_\tau X + X = 0$$

del quale è soluzione $\tau X_0 + X_0^2/2 = cost$, ovvero $X_0(\tau, \varepsilon) = -\tau \pm \sqrt{\tau^2 + 2c}$.

Ne risulta una prima approssimazione:

$$\begin{cases} x^{est}(t, \varepsilon) \sim 1 + \frac{1}{t} \\ \alpha_0(\varepsilon) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^{int}(\tau, \varepsilon) \sim \varepsilon^{-1/2} \left(-\tau \pm \sqrt{\tau^2 + 2c} \right) \\ \beta_0(\varepsilon) = \varepsilon^{-1/2} \end{cases}$$

dalla quale seguono

$$\left(\mathfrak{E}_0 x(t, \varepsilon) \right)_{t=t(\tau)} = \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^{1/2}\tau} \right) \quad \text{e quindi} \quad \mathfrak{I}_0 \mathfrak{E}_0 x = \frac{1}{\varepsilon^{1/2}\tau} = \frac{1}{t}$$

insieme con

$$\left(\mathfrak{I}_0 x(\tau, \varepsilon) \right)_{\tau=\tau(t)} = \varepsilon^{-1/2} \left(-\tau(t) \pm \sqrt{\tau^2(t) + 2c} \right) = \frac{t}{\varepsilon} \left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{2c\varepsilon}{t^2}} \right).$$

Sviluppando quest'ultima come funzione esterna, e cioè per $t = O_s(1)$, si ha

$$\mathfrak{I}_0 x \sim \frac{t}{\varepsilon} \left(-1 \pm \left(1 + \frac{c\varepsilon}{t^2} - \frac{c^2\varepsilon^2}{2t^4} + \dots \right) \right) \quad (2.60)$$

che implica $\mathfrak{E}_0 \mathfrak{I}_0 x = ct^{-1}$ se il segno è positivo, oppure $-2t/\varepsilon - c/t$ se il segno è negativo. Affinché l'A.M.P. sia corretto, va scelto il segno positivo, ed il valore $c = 1$.

In definitiva quindi si valuta $X_0 = -\tau + \sqrt{\tau^2 + 2}$.

N.B. 6.2.24 Si noti che se le funzioni α_0 e β_0 sono state scelte correttamente, nell'operare il paragone *si deve* ritrovare $c = cost$. $\diamond$

Si può infine calcolare il primo sviluppo composto:

$$\mathcal{C}_{0,0}x = \mathfrak{E}_0 x + \mathfrak{I}_0 x - \mathfrak{I}_0 \mathfrak{E}_0 x = 1 + \frac{t}{\varepsilon} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon}{t^2}} \right).$$

Se si intende salire di ordine si può ricavare dalla (2.60) il successivo troncamento:

$$\mathfrak{E}_1 \mathfrak{I}_0 x = t^{-1} - \varepsilon t^{-3}/2;$$

questo suggerisce $\alpha_1(\varepsilon) = \varepsilon$ anche se non lo assicura, dato che la α_1 è assegnata dalla $\mathfrak{E}_1 x$. Comunque è lecito il tentativo:

$$x^{est} \sim 1 + \frac{1}{t} + \varepsilon x_1(t)$$

da sostituire nel problema esterno. Ne segue all'ordine ε (come d'altronde si era già visto nell'Esempio 6.1.35)

$$\text{PE.1} := \begin{cases} t\dot{x}_1 + x_1 = -x_0\dot{x}_0 \\ x_1(1) = 0 \end{cases} \quad \text{che dà} \quad tx_1(t) = -\frac{1}{2} \left(\left(1 + \frac{1}{t} \right)^2 - 4 \right)$$

dalla quale si ricava $x_1(t) = -(1-t)(1+3t)/2t^3$. In definitiva si stima

$$x^{est}(t, \varepsilon) \sim 1 + \frac{1}{t} - \frac{\varepsilon}{2t^3} (1-t)(1+3t),$$

e quindi

$$\left(\mathfrak{E}_1 x \right) (t, \varepsilon) = 1 + \frac{1}{t} - \frac{\varepsilon}{2t^3} (1-t)(1+3t).$$

Dato che il troncamento $\mathfrak{E}_1 \mathfrak{I}_0 x$ è già noto, si usa questa espressione per determinare il corrispondente $\mathfrak{I}_0 \mathfrak{E}_1 x$. Si inizi con il calcolare la funzione

$$\left(\mathfrak{E}_1 x(t, \varepsilon) \right)_{t=t(\tau)} \sim 1 + \frac{1}{\varepsilon^{1/2}\tau} - \frac{\varepsilon}{2\varepsilon^{3/2}\tau^3} (1 - \varepsilon^{1/2}\tau)(1 + 3\varepsilon^{1/2}\tau)$$

che va sviluppata in ε come funzione interna, e cioè per $\tau = O_s(1)$. Se ne ricava un possibile sviluppo interno:

$$x^{int} \sim \varepsilon^{-1/2} \left(\varepsilon^{1/2} + \frac{1}{\tau} - \frac{1}{2\tau^3} (1 + 2\varepsilon^{1/2}\tau - 3\varepsilon\tau^2) \right) \sim \varepsilon^{-1/2} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{2\tau^3} \right) + \left(1 - \frac{1}{\tau^2} \right). \quad (2.61)$$

Questo, innanzi tutto permette di valutare

$$\left(\mathfrak{I}_0 \mathfrak{E}_1 x\right)(t, \varepsilon) = \varepsilon^{-1/2} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{2\tau^3} \right) = \frac{1}{t} - \frac{\varepsilon}{2t^3}$$

che, risultando uguale alla $\mathfrak{E}_1 \mathfrak{I}_0 x$, conferma la scelta $\alpha_1(\varepsilon) = \varepsilon$. Poi, per quanto riguarda la scelta della funzione $\beta_1(\varepsilon)$, si osserva che la (2.61) fornisce

$$\mathfrak{I}_1 \mathfrak{E}_1 x = \varepsilon^{-1/2} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{2\tau^3} \right) + \left(1 - \frac{1}{\tau^2} \right) \quad (2.62)$$

ed è quindi ragionevole il tentativo: $\beta_1(\varepsilon) = 1$. Con tale posizione, dalla (2.61) segue

$$X = \varepsilon^{1/2} x^{int} \sim \varepsilon^{1/2} \left[\varepsilon^{-1/2} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{2\tau^3} \right) + \left(1 - \frac{1}{\tau^2} \right) \right]$$

ovvero $X \sim O_s(1) + \varepsilon^{1/2} O_s(1)$ quando $\tau = O_s(1)$.

Si prova pertanto con $X \sim X_0 + \varepsilon^{1/2} X_1$ da sostituire nel problema interno:

$$\left(\tau + (X_0 + \varepsilon^{1/2} X_1) \right) (\partial_\tau X_0 + \varepsilon^{1/2} \partial_\tau X_1) + (X_0 + \varepsilon^{1/2} X_1) = \varepsilon^{1/2}. \quad (2.63)$$

N.B. 6.2.25 Si badi a non confondere fra loro i seguenti termini (e ricordando che $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}$):

- (i) $X_0(\tau) = -\tau + \sqrt{\tau^2 + 2c}$, soluzione del problema interno all'ordine zero;
- (ii) $\left(\mathfrak{I}_0 x\right)(\tau, \varepsilon) = \varepsilon^{-1/2} X_0$, primo troncamento di x^{int} ;
- (iii) $\left(\mathfrak{I}_0 \mathfrak{E}_0 x\right)(\tau, \varepsilon) = \varepsilon^{-1/2} \tau^{-1}$; primo troncamento intermedio;
- (iv) $\left(\mathfrak{I}_0 \mathfrak{E}_1 x\right)(\tau, \varepsilon) = \varepsilon^{-1/2} (\tau^{-1} - 2\tau^{-3})$.

Si osservi anche che $\beta_1(\varepsilon) = 1$ nella $\mathfrak{I}_1 \mathfrak{E}_1 x$ non implica né è implicato che tale sia anche nella $\mathfrak{I}_1 x$ (solo accennata nella (2.61) e da confermare più oltre) né, a maggior ragione, nella $\mathfrak{I}_1 X$; ed infatti il coefficiente della X_1 è risultato $\varepsilon^{1/2}$. $\diamond$

In tal modo, oltre al problema $PI.0$, la (2.63) fornisce anche il problema:

$$PI.1 := (\tau + X_0) \partial_\tau X_1 + X_1 \partial_\tau X_0 + X_1 = 1.$$

Quest'ultimo equivale a $\partial_\tau (\tau X_1 + X_0 X_1 - \tau) = 0$ da cui

$$X_1(\tau) = (\tau + c_1)(\tau + X_0)^{-1} = (\tau + c_1)/\sqrt{\tau^2 + 2}.$$

Per trovare il valore della costante c_1 occorre uguagliare $\mathfrak{I}_1 \mathfrak{E}_1 x$ con $\mathfrak{E}_1 \mathfrak{I}_1 x$. Il primo è espresso nella (2.62) che permette la trasformazione

$$\left(\mathfrak{I}_1 \mathfrak{E}_1 x\right)(t, \varepsilon) = \left[\varepsilon^{-1/2} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{2\tau^3} \right) + \left(1 - \frac{1}{\tau^2} \right) \right]_{\tau=\tau(t)} = \left(1 + \frac{1}{t} \right) - \varepsilon \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{2t^3} \right).$$

Per calcolare $\mathfrak{E}_1 \mathfrak{I}_1 x$ occorre prima troncare la $x^{int} = \varepsilon^{-1/2} X(\tau, \varepsilon)$:

$$\left(\mathfrak{I}_1 x\right)(\tau, \varepsilon) = \mathfrak{I}_1 \left(\varepsilon^{-1/2} (X_0 + \varepsilon^{1/2} X_1) \right) = \varepsilon^{-1/2} \left(-\tau + \sqrt{\tau^2 + 2} \right) + \frac{\tau + c_1}{\sqrt{\tau^2 + 2}}$$

poi trasformare quest'ultima come funzione della variabile esterna t , infine svilupparla come funzione esterna, e cioè con $t = O_s(1)$. Lo sviluppo del primo addendo è stato calcolato nella (2.60); fermandosi al primo ordine esso vale $\left(\frac{1}{t} - \frac{\varepsilon}{2t^3} \right)$. Il secondo addendo fornisce

$$\frac{t + c_1 \varepsilon^{1/2}}{\sqrt{t^2 + 2\varepsilon}} \sim 1 + \frac{c_1}{t} \varepsilon^{1/2} - \frac{1}{2t^2} 2\varepsilon.$$

Di conseguenza

$$\left(\mathfrak{I}_1 x\right)(t, \varepsilon) \sim \left(1 + \frac{1}{t} \right) + \frac{c_1}{t} \varepsilon^{1/2} - \varepsilon \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{2t^3} \right)$$

e quindi l'A.M.P. impone $c_1 = 0$. Ciò conferma la (2.61), e fornisce

$$x^{int}(\tau, \varepsilon) \sim \varepsilon^{-1/2} X(\tau, \varepsilon) \sim \varepsilon^{-1/2} \left(-\tau + \sqrt{\tau^2 + 2} + \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + 2}} \right).$$

Per proseguire ulteriormente, si deve prolungare lo sviluppo di $\mathfrak{I}_1 x$ oltre i termini in $\varepsilon^{1/2}$ ed ε già trovati, e scrivendo $\mathfrak{E}_2 \mathfrak{I}_1 x$ avere un suggerimento su $\alpha_2(\varepsilon)$, coefficiente di $x_2(t)$ da trovarsi mediante il problema esterno; ... etc.

Al passo successivo si ha

$$x^{est}(t, \varepsilon) \sim 1 + \frac{1}{t} - \varepsilon \frac{(1-t)(1+3t)}{2t^3} + \varepsilon^2 \frac{(1-t^2)(1+3t)}{2t^5} + \dots$$

valida per $t = O_s(1)$; insieme con la

$$x^{int}(t, \varepsilon) = \varepsilon^{-1/2} X(\tau(t), \varepsilon) \sim -\frac{t}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{t^2}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon}} + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 2\varepsilon}} + \varepsilon \frac{\frac{3}{2}t^2 + 4\varepsilon}{(t^2 + 2\varepsilon)^{3/2}}$$

valida per $\tau = t/\varepsilon^{1/2} = O_s(1)$. Si ritrova allora

$$C_{0,0}x(t, \varepsilon) = 1 - \frac{t}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{t^2}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon}}$$

valida su tutto $[0, 1]$. Va però osservato che la successiva

$$\begin{aligned} C_{1,1}x(t, \varepsilon) &= \mathfrak{E}_1 x + \mathfrak{I}_1 x - \mathfrak{I}_1 \mathfrak{E}_1 x \\ &= \left(1 + \frac{1}{t} - \varepsilon \frac{(1-t)(1+3t)}{2t^3}\right) + \left(-\frac{t}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{t^2}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon}} + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 2\varepsilon}}\right) \\ &\quad - \left(1 + \frac{1}{t} - \varepsilon \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{2t^3}\right)\right) \\ &= \frac{t}{\sqrt{t^2 + 2\varepsilon}} - \frac{t}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{t^2}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon}} + \frac{3\varepsilon}{2t} \end{aligned}$$

non è valida per $t \ll \varepsilon$ (ovvero $\tau \ll \sqrt{\varepsilon}$) a causa dell'ultimo termine che risulta grande in tale regione, ovviamente contenuta in quella interna. Secondo quanto si è trovato subito dopo il N.B. 6.2.8, per avvicinarsi alla soluzione esatta tale termine dovrebbe valere $2\varepsilon/\sqrt{t^2 + 2\varepsilon}$. $\square$

Esempio 6.2.26 Sia data l'equazione

$$\begin{cases} 4\varepsilon \ddot{x} + 6\sqrt{t}\dot{x} - 3x + 3 = 0 \\ x(0) = 0, \quad x(1) = 3. \end{cases}$$

Il suo Problema (esterno) all'ordine zero è

$$PE.0 \quad := \quad \dot{x} - \frac{1}{2\sqrt{t}} x + \frac{1}{2\sqrt{t}} = 0$$

da cui $e^{-\sqrt{t}}x - e^{-\sqrt{t}} = c_0$ e quindi $x_0(t) = 1 + c_0 e^{\sqrt{t}}$. Ovviamente la regione interna (di singolarità dei coefficienti) è $t = o(1)$, e la condizione nella regione esterna: $x(1) = 3$ fornisce $c_0 = 2e^{-1}$.

Per il problema interno si pongano, con $\delta \ll 1$

$$x(t) = \beta_0(\varepsilon)X(\tau(t)), \quad \text{e} \quad t = \delta(\varepsilon)\tau, \quad \text{e quindi} \quad \frac{d}{dt} = \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Si ottiene il primo tentativo di problema interno

$$\begin{cases} 4 \frac{\varepsilon}{\delta^2} X'' + \frac{6\sqrt{\tau}}{\sqrt{\delta}} X' - 3X + \frac{3}{\beta_0} = 0 \\ X(0) = 0. \end{cases}$$

La scelta $\varepsilon/\delta^2 \sim 1/\sqrt{\delta}$ (ovvero $\delta = \varepsilon^{2/3}$), e la scelta $\beta_0 = 1$, forniscono il definitivo

$$\underline{\text{Problema interno}} \quad \begin{cases} X'' + \frac{3}{2} \sqrt{\tau} X' - \frac{3\varepsilon^{1/3}}{4} (X - 1) = 0 \\ X(0) = 0. \end{cases}$$

Il suo problema all'ordine zero è

$$PI.0 \quad := \quad X'' + \frac{3}{2} \sqrt{\tau} X' = 0 ,$$

con soluzione $X' e^{\tau^{3/2}} = \tilde{c} = \text{cost.}$ Quindi, servendosi della

$$\int_0^\tau e^{-s^{3/2}} ds = \frac{2}{3} \left(\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) - \Gamma\left(\frac{2}{3}, \tau^{3/2}\right) \right) \quad \text{ove}$$

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt , \quad \text{e} \quad \Gamma(z, \zeta) := \int_\zeta^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = \Gamma(z) - \int_0^\zeta t^{z-1} e^{-t} dt$$

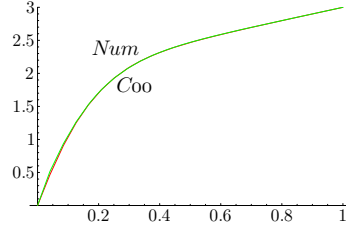
si ricava

$$X_0(\tau) = \tilde{c} \int_0^\tau e^{-s^{3/2}} ds =: \kappa \left(\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) - \Gamma\left(\frac{2}{3}, \tau^{3/2}\right) \right) .$$

Il matching richiede l'uguaglianza tra $X_0(\infty) = \kappa \Gamma(2/3)$ e $x_0(0) = 1 + c_0$; e il fatto che $X(\infty)$ sia finito conforta la scelta $\beta_0 = 1$. Ne seguono $X_0(\tau) = (1 + c_0) - \kappa \Gamma(2/3, \tau^{3/2})$ con $\kappa = (1 + c_0)/\Gamma(2/3)$ e la soluzione composta

$$C_{0,0} = x_0(t) + X_0(\tau(t)) - (1 + c_0) = 1 + c_0 e^{\sqrt{t}} - \kappa \Gamma\left(\frac{2}{3}, \frac{t^{3/2}}{\varepsilon}\right) .$$

La seguente figura mostra le due soluzioni: quella calcolata numericamente e la $C_{0,0}$, valutate per $\varepsilon = 0.1$; per tale valore di ε esse risultano manifestamente simili.



Per la successiva approssimazione si riparta, con $\alpha_1(\varepsilon) = \varepsilon$, dalla

$$\begin{cases} 4\varepsilon(\ddot{x}_0 + \varepsilon\ddot{x}_1) + 6\sqrt{t}(\dot{x}_0 + \varepsilon\dot{x}_1) - 3(x_0 + \varepsilon x_1 - 1) = 0 \\ x_0(1) = 3, \quad x_1(1) = 0 . \end{cases}$$

Mediante la $x_0(t) = 1 + c_0 e^{\sqrt{t}}$, si ottiene il

$$PE.1 \quad := \quad \begin{cases} \dot{x}_1 - \frac{1}{2\sqrt{t}} x_1 = -\frac{2}{3\sqrt{t}} \ddot{x}_0 = -\frac{c_0 e^{\sqrt{t}}}{6\sqrt{t}} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^{3/2}} \right) \\ x_1(1) = 0 \end{cases}$$

da cui $d(e^{-\sqrt{t}} x_1)/dt = -c_0(t^{-3/2} - t^{-2})/6$ e quindi

$$x_1(t) = \frac{c_0}{6} e^{\sqrt{t}} \left(\frac{2}{\sqrt{t}} - \frac{1}{t} - 1 \right) .$$

Su questa non si potrà calcolare il limite interno: $t \rightarrow 0$. Tuttavia è possibile calcolare il troncamento per $\tau = O(1)$ della:

$$(\mathfrak{E}_1 x)(\tau, \varepsilon) = \left(x_0(t) + \varepsilon x_1(t) \right) \Big|_{t=\varepsilon^{2/3}\tau} = \left(1 + c_0 e^{\sqrt{t}} \left(1 + \frac{\varepsilon}{6} \left(\frac{2}{\sqrt{t}} - \frac{1}{t} - 1 \right) \right) \right) \Big|_{t=\varepsilon^{2/3}\tau}$$

si ha infatti

$$\begin{aligned} (\mathfrak{E}_1 x)(\tau, \varepsilon) &= 1 + c_0 \exp(\varepsilon^{1/3} \tau^{1/2}) \left(1 + \frac{1}{6} \left(\varepsilon^{2/3} \frac{2}{\sqrt{\tau}} - \frac{\varepsilon^{1/3}}{\tau} - \varepsilon \right) \right) \\ &\sim 1 + c_0 \left(1 + \varepsilon^{1/3} \tau^{1/2} + \varepsilon^{2/3} \frac{\tau}{2} + \varepsilon \frac{\tau^{3/2}}{6} \right) \left(1 - \frac{\varepsilon^{1/3}}{6\tau} + \frac{\varepsilon^{2/3}}{3\sqrt{\tau}} - \frac{\varepsilon}{6} \right) \\ &\sim 1 + c_0 \left[1 + \varepsilon^{1/3} \left(\tau^{1/2} - \frac{1}{6\tau} \right) + \varepsilon^{2/3} \left(\frac{\tau}{2} + \frac{1}{6\sqrt{\tau}} \right) + \varepsilon \left(\frac{\tau^{3/2}}{6} + \frac{1}{12} \right) \right] \end{aligned}$$

e quindi

$$(\mathfrak{I}_1 \mathfrak{E}_1 x)(t, \varepsilon) = 1 + c_0 \left(1 + \sqrt{t} + \frac{t}{2} + \frac{t^{3/2}}{6} + \frac{\varepsilon}{12} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{t}} - \frac{2}{t} \right) \right) .$$

Per quanto riguarda il problema interno si inizia con

$$\frac{4}{\varepsilon^{1/3}} (X_0'' + \beta_1 X_1'') + \frac{6\sqrt{\tau}}{\varepsilon^{1/3}} (X_0' + \beta_1 X_1') - 3(X_0 + \beta_1 X_1 - 1) = 0 ,$$

dalla quale, se si sceglie $\beta_1 = \varepsilon^{1/3}$ e si usa la

$$X_0(\tau) = 1 + c_0 - \kappa \Gamma\left(2/3, \tau^{3/2}\right) \equiv \frac{1 + c_0}{\int_0^\infty e^{-s^{3/2}} ds} \int_0^\tau e^{-s^{3/2}} d\tau ,$$

segue il

$$PI.1 \quad := \quad \begin{cases} 4X_1'' + 6\sqrt{\tau} X_1' - 3(X_0 - 1) = 0 \\ X_1(0) = 0 \end{cases}$$

Si ha $4d(e^{\tau^{3/2}} X_1')/d\tau = 3e^{\tau^{3/2}} (X_0 - 1)$ che fornisce, con τ_0 un punto della zona interna (per esempio $\tau_0 = 0$),

$$X_1' = e^{-\tau^{3/2}} \left(c_1 + \frac{3}{4} \int_{\tau_0}^\tau e^{s^{3/2}} \left(c_0 - \Gamma(2/3, s^{3/2}) \right) ds \right)$$

da cui segue

$$X_1(\tau) = c_1 \int_0^\tau e^{-s^{3/2}} ds + \frac{3}{4} \int_0^\tau e^{-s^{3/2}} \int_{\tau_0}^s e^{\sigma^{3/2}} (X_0(\sigma) - 1) d\sigma ds .$$

Si nota però che sussistono le relazioni

$$\begin{aligned} \int_0^\tau e^{-s^{3/2}} ds &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!(1+3k/2)} \tau^{1+3k/2} \\ \int_0^s e^{\sigma^{3/2}} d\sigma &= \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!(1+3k/2)} s^{1+3k/2} \\ \int_0^\tau e^{-s^{3/2}} \int_0^s e^{\sigma^{3/2}} d\sigma ds &= \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{2+3n/2} \tau^{2+3n/2} \\ \Gamma(u, z) - \Gamma(u) &= - \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!(u+k)} z^{u+k} \end{aligned}$$

e quindi le

$$\begin{aligned} e^{\sigma^{2/3}} \Gamma(2/3, \sigma^{3/2}) &= \Gamma(2/3) \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \sigma^{3n/2} + \sigma \sum_{m=0}^\infty g_m \sigma^{3m/2} \\ e^{-s^{3/2}} \int_0^s e^{\sigma^{3/2}} \Gamma(2/3, \sigma^{3/2}) d\sigma &= \Gamma(2/3) \sum_{n=0}^\infty \ell_n s^{1+3n/2} + \sum_{m=0}^\infty h_m s^{2+3m/2} \\ \int_0^\tau e^{-s^{3/2}} \int_0^s e^{\sigma^{3/2}} \Gamma(2/3, \sigma^{3/2}) d\sigma ds &= \Gamma(2/3) \sum_{n=0}^\infty \frac{\ell_n}{2+3n/2} \tau^{2+3n/2} + \sum_{n=0}^\infty \frac{h_n}{3+3n/2} \tau^{3+3n/2} \end{aligned}$$

ove

$$\begin{aligned} a_n &:= \sum_{h=0}^n \frac{(-1)^{(n-h)}}{(n-h)!h!(1+3h/2)} ; & \ell_n &:= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k!(1+3k/2)(n-k)!} ; \\ g_m &:= \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{k+1}}{k!(\frac{2}{3}+k)(m-k)!} ; & h_n &:= \sum_{m=0}^n \frac{g_m (-1)^{n-m}}{(n-m)! + 2 + 3m/2} . \end{aligned}$$

Pertanto si riconosce che

$$\begin{aligned} X_1(\tau) &= \frac{2}{3} c_1 \left(\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) - \Gamma\left(\frac{2}{3}, \tau^{3/2}\right) \right) \\ &\quad + \frac{3}{4} \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{c_0 a_n + \Gamma(2/3) \ell_n}{2+3n/2} + \frac{h_n}{3+3n/2} \tau \right) \tau^{2+3n/2} . \end{aligned}$$

Se ne conclude che $(\mathfrak{I}_1 x)(t, \varepsilon) \sim X_0(\tau(t)) + \varepsilon^{1/3} X_1(\tau(t))$ non ha singolarità in $t = 0$, cosa che invece accade alla $x_1(t)$, e che quindi per il primo ordine il metodo del matching non è accettabile. Ciò non produce alcun miglioramento alla $C_{0,0}$.

Sperando di ottenere un risultato migliore si può provare con il Metodo delle scale multiple. Siano $t =: \delta(\varepsilon) t^*$ ed

$$x(t, \varepsilon) = X_0(t, t^*) + \beta_1(\varepsilon) X_1(t, t^*) + \beta_2(\varepsilon) X_2(t, t^*) + \beta_3(\varepsilon) X_3(t, t^*).$$

Si ottiene: $\frac{d}{dt} = \partial_t + \frac{1}{\delta} \partial_{t^*}$, ed $\frac{d^2}{dt^2} = \partial_t^2 + \frac{1}{\delta^2} \partial_{t^*}^2 + \frac{2}{\delta} \partial_{tt^*}$. Ne segue

$$\begin{cases} 4\varepsilon \left(\partial_t^2 + \frac{1}{\delta^2} \partial_{t^*}^2 + \frac{2}{\delta} \partial_{tt^*} \right) (X_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3) + 6\sqrt{t} \left(\partial_t + \frac{1}{\delta} \partial_{t^*} \right) \\ \times (X_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3) - 3(X_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 - 1) = 0 \\ X_0(0, 0) = 0, \quad X_1(0, 0) = 0, \quad X_2(0, 0) = 0, \quad X_3(0, 0) = 0 \\ X_0(1, 1/\delta) = 3, \quad X_1(1, 1/\delta) = 0, \quad X_2(1, 1/\delta) = 0, \quad X_3(1, 1/\delta) = 0. \end{cases}$$

Con $\varepsilon/\delta^2 = 1/\sqrt{\delta}$, ovvero nuovamente con $\delta = \varepsilon^{2/3}$, e con $\beta_1 = \sqrt{\delta}$, $\beta_2 = \delta$, $\beta_3 = \delta^{3/2}$, si hanno le equazioni

$$O(1/\sqrt{\delta}) : \quad \left(4\partial_{t^*}^2 + 6\sqrt{t^*} \partial_{t^*} \right) X_0 = 0$$

$$O(1) : \quad \left(4\partial_{t^*}^2 + 6\sqrt{t^*} \partial_{t^*} \right) X_1 - 3(X_0 - 1) + 6\sqrt{t} \partial_t X_0 = 0$$

$$O(\sqrt{\delta}) : \quad \left(4\partial_{t^*}^2 + 6\sqrt{t^*} \partial_{t^*} \right) X_2 - 3X_1 + 6\sqrt{t} \partial_t X_1 + 8\partial_{tt^*} X_0 = 0$$

$$O(\delta) : \quad \left(4\partial_{t^*}^2 + 6\sqrt{t^*} \partial_{t^*} \right) X_3 - 3X_2 + 6\sqrt{t} \partial_t X_2 + 8\partial_{tt^*} X_1 = 0$$

Dalla prima segue $X_0(t, t^*) = a(t) \Gamma\left(\frac{2}{3}, t^{*3/2}\right) + b(t)$ e quindi la seconda dà

$$\left(4\partial_{t^*}^2 + 6\sqrt{t^*} \partial_{t^*} \right) X_1 + \left(6\sqrt{t} \dot{a} - 3a \right) \Gamma\left(\frac{2}{3}, t^{*3/2}\right) + \left(6\sqrt{t} \dot{b} - 3b + 3 \right) = 0$$

per cui, la regola di Lighthill suggerisce

$$\begin{cases} \dot{a} - \frac{1}{2\sqrt{t}} a = 0 \\ \dot{b} - \frac{1}{2\sqrt{t}} b = -\frac{1}{2\sqrt{t}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(t) = a_* e^{\sqrt{t}} \\ b(t) = 1 + b_* e^{\sqrt{t}} \end{cases}$$

insieme con le condizioni ausiliarie

$$\begin{cases} X_0(0, 0) = a_* \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) + b_* + 1 = 0 \\ X_0(1, 1/\delta) = a_* e \Gamma\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{\varepsilon}\right) + b_* e + 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_* = -1 - a_* \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \\ a_* = \frac{2 + e}{e \left(\Gamma\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{\varepsilon}\right) - \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \right)} \end{cases}$$

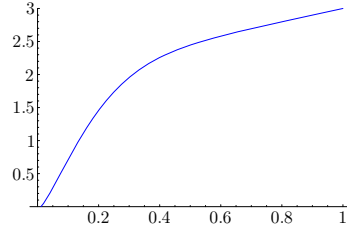
In definitiva, con le ulteriori posizioni $\gamma := \left(1 - \Gamma\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{\varepsilon}\right) / \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \right)^{-1}$ ed $a_* = -\kappa \gamma$, al primo ordine si ricava lo sviluppo

$$X_0(t, t^*) = 1 - e^{\sqrt{t}} + a_* e^{\sqrt{t}} \left[\Gamma\left(\frac{2}{3}, t^{*3/2}\right) - \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \right].$$

e quindi, all'ordine zero si trova

$$x_0^{ScMlt}(t, \varepsilon) = 1 + (c_0 \gamma + (\gamma - 1)) e^{\sqrt{t}} - \kappa \gamma e^{\sqrt{t}} \Gamma\left(2/3, t^{3/2}/\varepsilon\right).$$

La figura mostra la x_0^{ScMlt} valutata per $\varepsilon = 0.1$.



Le scelte fatte forniscono ancora $X_1(t, t^*) = a_1(t)\Gamma\left(\frac{2}{3}, t^{*3/2}\right) + b_1(t)$ e la regola di Lighthill implica $a_1(t) = b_1(t) = 0$.

Pertanto dalla terza equazione, e ricordando che $\partial_z \Gamma(u, z) = -z^{u-1}e^{-z}$, si trova

$$\left(4\partial_{t^*}^2 + 6\sqrt{t^*}\partial_{t^*}\right) X_2 = -8\partial_{tt^*} X_0 = \frac{6a_*}{\sqrt{t}} e^{t^{1/2}-t^{*3/2}}.$$

Segue $e^{t^{*3/2}} \frac{\partial X_2}{\partial t^*} = a_2(t) + t^* \frac{3a_* e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}$ da cui (ricorrendo alle condizioni ausiliarie)

$$\begin{aligned} X_2(t, t^*) = & -\frac{3a_* e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}} \left(\frac{2\sqrt{t^*}}{3} e^{-t^{*3/2}} + \frac{2}{9} \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}, t^{*3/2}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \right] \right) \\ & - \frac{2a_2(t)}{3} \left[\Gamma\left(\frac{2}{3}, t^{*3/2}\right) - \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \right] + b_2(t) \end{aligned}$$

Per il calcolo dei coefficienti a_2, b_2 occorre servirsi della quarta equazione, quella all'ordine δ , sulla quale la regola di Lighthill dà

$$\begin{aligned} 0 = -3X_2 + 6\sqrt{t}\partial_t X_2 = & \left[\Gamma\left(\frac{2}{3}, t^{*3/2}\right) - \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \right] (2a_2 - 4\sqrt{t}\dot{a}_2) \\ & + \left(-3b_2 + 6\sqrt{t}\dot{b}_2 \right) + \frac{3a_* e^{\sqrt{t}}}{t} \left(\sqrt{t^*} e^{-t^{*3/2}} + \frac{1}{3} \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}, t^{*3/2}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \right] \right). \end{aligned}$$

Se ne conclude

$$a_2(t) = a e^{\sqrt{t}}, \quad b_2(t) = b e^{\sqrt{t}}$$

che dà

$$\begin{aligned} X_2(t, t^*) = & -\frac{a_* e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} \left(\sqrt{t^*} e^{-t^{*3/2}} + \frac{1}{3} \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}, t^{*3/2}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \right] \right) \\ & + e^{\sqrt{t}} \left(b - \frac{2}{3} a \left[\Gamma\left(\frac{2}{3}, t^{*3/2}\right) - \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \right] \right) \end{aligned}$$

L'esame degli sviluppi in serie del primo termine mostra che la condizione $X_2(0, 0) = 0$ è da esso verificata; quindi occorre solo che sia $b = 0$. D'altra parte si ha

$$\begin{aligned} X_2(1, 1/\delta) = 0 = & -a_* e \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\delta^{-3/2}} + \frac{1}{3} \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}, \delta^{-3/2}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \right] \right) \\ & - \frac{2}{3} e a \left[\Gamma\left(\frac{2}{3}, \delta^{-3/2}\right) - \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \right] \end{aligned}$$

che d'è

$$a = -3 a_* \varepsilon^{-1/3} c_* \quad \text{con} \quad c_* := \frac{\left(e^{-1/\varepsilon} + \varepsilon^{1/3} \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{\varepsilon}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \right] \right) / 3}{2 \left(\Gamma\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{\varepsilon}\right) - \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \right)}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \varepsilon^{2/3} X_2(t, t^*) = & \varepsilon^{1/3} 2a_* c_* e^{\sqrt{t}} \left[\Gamma\left(\frac{2}{3}, t^{*3/2}\right) - \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \right] \\ & - \varepsilon^{2/3} a_* \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} \left(\sqrt{t^*} e^{-t^{*3/2}} + \frac{1}{3} \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}, t^{*3/2}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \right] \right). \end{aligned}$$

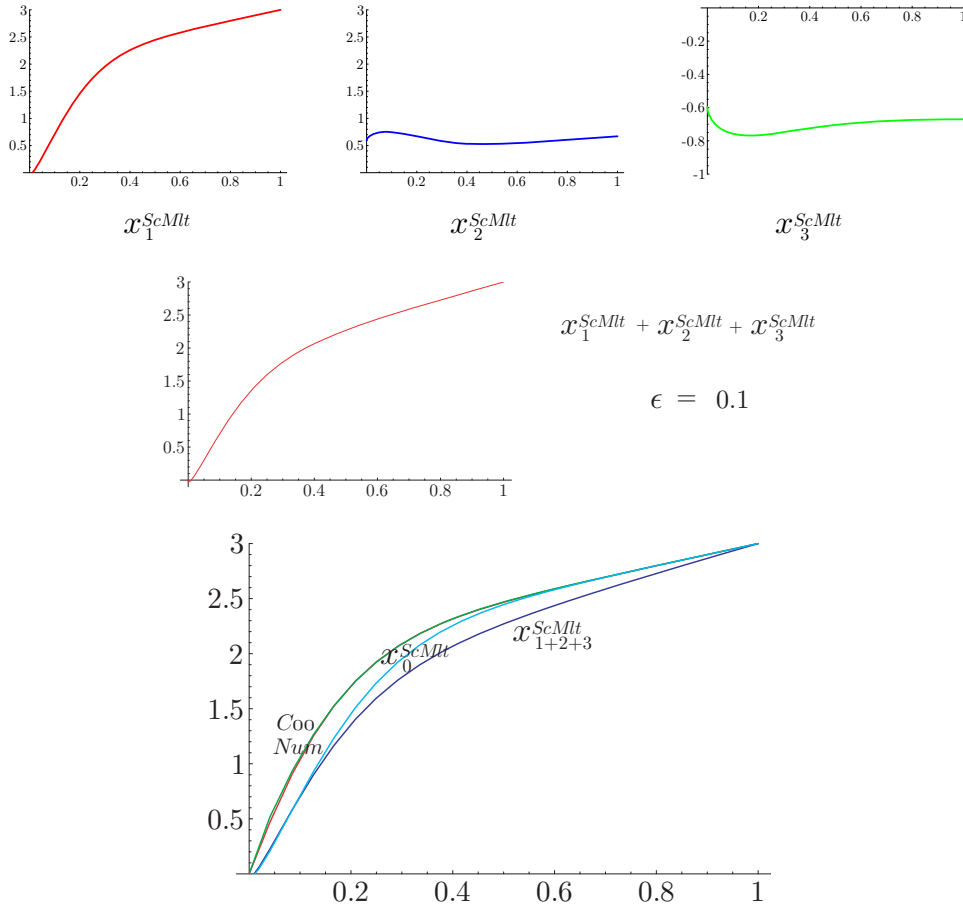
Essendo $t^{*3/2} = t^{3/2}/\varepsilon$ e ricordando che $a_* = -\kappa\gamma$ se ne conclude che

$$\begin{aligned} x^{ScMlt}(t, \varepsilon) \sim & 1 + (c_0\gamma + (\gamma - 1))e^{\sqrt{t}} - \kappa\gamma e^{\sqrt{t}} \Gamma\left(\frac{2}{3}, \frac{t^{3/2}}{\varepsilon}\right) \\ & + 2\varepsilon^{1/3}\kappa\gamma e^{\sqrt{t}} \left[c_* \left(\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) - \Gamma\left(\frac{2}{3}, \frac{t^{3/2}}{\varepsilon}\right) \right) + \frac{e^{-t^{3/2}/\varepsilon}}{2} \right] \\ & - \varepsilon^{2/3}\kappa\gamma \frac{e^{\sqrt{t}}}{3\sqrt{t}} \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{t^{3/2}}{\varepsilon}\right) \right] \end{aligned}$$

Ad esempio, e per $\varepsilon = 0.1$, / si calcolano i particolari valori:

$$\begin{aligned} c_0 &= 2/e \sim 0.73576, & \kappa &= \frac{(1+c_0)}{\Gamma(2/3)} \sim 1.28184, \\ \gamma &= \frac{\Gamma(2/3)}{\left(\Gamma(2/3) - \Gamma(2/3, 1/\varepsilon)\right)} \sim 1.00002, \\ a_* &= -\kappa\gamma \sim -1.28186, & c_* &\sim 0.15303, \end{aligned}$$

che permettono di tracciare i seguenti grafici dei quali il primo gruppo è relativo alle soluzioni mediante le Scale multiple, il secondo mostra un paragone fra la x_0 e la somma $x_1^{ScMlt} + x_2^{ScMlt} + x_3^{ScMlt}$, e il terzo è riepilogativo.



In definitiva si riconosce che anche le Scale Multiple non forniscono alcun miglioramento alla prima soluzione composta $C_{0,0}$ trovata con l'A.M.P. la quale, d'altra parte, si dimostra già accettabilmente corretta. $\square$

6.3 Il pendolo fisico e l'equazione di Duffing

Si voglia discutere l'equazione del pendolo fisico:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0, \quad \theta_0 \in \mathbb{R}, \quad (3.64)$$

con $\omega_0^2 := g/\ell$, e condizioni iniziali opportune affinché sia $\|\theta(t)\|_\infty < \infty$.

Come si è visto nel Cap. III § 4, la funzione $\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \omega_0^2 \cos \theta$ è un integrale primo del moto; se ne deduce che

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = \omega_0^2 \cos \theta + \frac{1}{2} \dot{\theta}_0^2 - \omega_0^2 \cos \theta_0 \quad (3.65)$$

e che se $\mathcal{E}_0 := (1/2\omega_0^2) \dot{\theta}_0^2 - \cos \theta_0$ è maggiore di +1 allora il valore della funzione $\dot{\theta}^2(t)$ rimane strettamente positivo per ogni $t \in \mathbb{R}$, e quindi la $\theta(t)$ cresce indefinitamente. Se invece è $-1 \leq \mathcal{E}_0 < 1$, risulta ben definito ed in $[0, \pi)$ il valore, massimo durante il moto, dell'arco θ

$$\theta_M := \left| \arccos \left(-\frac{1}{2\omega_0^2} \dot{\theta}_0^2 + \cos \theta_0 \right) \right|;$$

e dovendo essere $\dot{\theta}^2 \geq 0$, dalla (3.65) si ricava che $|\theta(t)| < \theta_M$, per ogni t .

Si ponga $\theta(t) =: \alpha x(t)$; per costruzione risulta $x \in [-1, +1]$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, e cioè risulta $x = O_s(1)$. È questa, in generale, la condizione da richiedere alle variabili sulle quali adoperare i vari metodi perturbativi. Tale condizione risulta quindi verificata nella seconda delle eventualità viste, con $\alpha \equiv \theta_M$. Se poi le condizioni iniziali sulla (3.64) sono addirittura tali che $\theta_M \equiv \alpha \ll 1$, allora la (3.64) stessa, sviluppata rispetto al parametro piccolo α (si badi bene, e non rispetto all'incognita soluzione), diviene

$$\alpha \ddot{x} + \omega_0^2 \left(\alpha x - \frac{1}{6} \alpha^3 x^3 + \frac{1}{5!} \alpha^5 x^5 + O(\alpha^7) \right) = 0.$$

Tutto ciò permette, *ma solo dopo aver eseguito la discussione appena fatta ed essersi quindi serviti dell'integrale primo del moto* e di tutte le sue conseguenze circa la limitatezza e gli ordini di grandezza delle soluzioni, di concludere che il sistema definito dalla (3.64) ha soluzioni che risultano descritto convenientemente bene, se localmente ed in forma approssimata, dalla equazione del seguente esempio.

Esempio 6.3.1

$$\text{l'Equazione di Duffing} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon b x^3; \quad \varepsilon, b, \omega_0 \in \mathbb{R}. \quad (3.66)$$

Quando l'equazione (3.66) proviene dalla equazione (3.64), le costanti ε, b, ω_0 sono legate a quelle del pendolo fisico dalle relazioni:

$$\frac{\alpha^2 \omega_0^2}{6} = \varepsilon b \quad \text{con} \quad 0 < \varepsilon \equiv \alpha^2 \equiv \theta_M^2 \ll 1 \quad \text{e} \quad b := \frac{\omega_0^2}{6} := \frac{1}{6} \frac{g}{\ell} \in \mathbb{R}^+. \quad (3.67)$$

I valori numerici che verranno usati per tracciare i grafici più avanti sono:

$$\begin{aligned} \ell &= 1m, & \omega_0^2 &= 10s^{-2}, & b &\sim 1.666s^{-2}, \\ \theta_M &= 5^\circ = 5 \frac{2\pi}{360} \sim 0.087, & & & \text{e quindi} \\ \varepsilon &= \theta_M^2 \sim 0.0076, & \frac{\varepsilon b}{\omega_0^2} &= \frac{\theta_M^2}{6} \sim 0.00127. \end{aligned} \quad (3.68)$$

È la (3.66) l'equazione che si vuole ora studiare; e lo si farà anche per valori negativi di b , data l'importanza che essa autonomamente ricopre in molte altre applicazioni.

Innanzitutto si osserva che sulla (3.66) si può nuovamente usare la metodologia vista nel citato paragrafo § III.4, e cioè la discussione con i Metodi Qualitativi. Infatti anche l'equazione (3.66) ammette l'integrale primo:

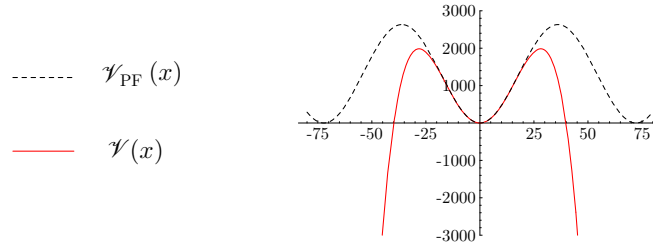
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(x, \dot{x}) := \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \mathcal{V}(x) \quad \text{con} \quad \mathcal{V}(x) := \frac{\omega_0^2}{2} x^2 - \frac{\varepsilon b}{4} x^4 + \tilde{\mathcal{V}}.$$

Per riferimento, si può paragonare quest'ultima equazione con l'equazione del pendolo fisico:

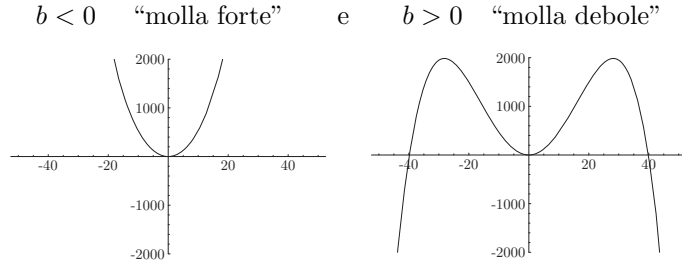
$$\ddot{x} + \omega_0^2 \frac{\sin \theta_M x}{\theta_M} = 0, \quad (3.69)$$

nella quale $\varepsilon = \theta_M^2$ e $6b = \omega_0^2$. L'energia potenziale $\mathcal{V}_{PF}$ della (3.69), con la scelta $\mathcal{V}_{PF}(0) = \mathcal{V}(0) = 0$, risulta

$$\mathcal{V}_{PF}(x) := \frac{\omega_0^2}{\theta_M^2} (1 - \cos(\theta_M x)) \sim \frac{\omega_0^2}{\theta_M^2} \left(\frac{\theta_M^2}{2} x^2 - \frac{\theta_M^4}{24} x^4 \right) + o(\theta_M^4) = \left(\frac{\omega_0^2}{2} x^2 - \frac{\varepsilon b}{4} x^4 \right) + o(\varepsilon^2).$$



A seconda del segno di b possono darsi per la (3.66) i due casi:



Il caso $b > 0$ ammette tre equilibri: $x_s = 0$ ed $x_{\pm}^{ED} = \pm\sqrt{\omega_0^2/\varepsilon b}$, analogo a quello del pendolo per il quale si hanno $x_s = 0$ ed $x_{\pm}^{PF} = \pm\pi/\theta_M$, così disposti (se si assumono le (3.68)):

$$\sqrt{\omega_0^2/\varepsilon b} = \sqrt{6}/\theta_M \sim 28.1 < \pi/\theta_M \sim 36.0,$$

e si noti che entrambi sono $|x_{\pm}| \gg 1$ quest'ultimo essendo, sotto le attuali ipotesi, il massimo valore accettabile per la $|x|$ del pendolo.

In corrispondenza a condizioni iniziali tali che: $x_0 \in (x_-, x_+)$ e con

$$\mathcal{E}_0 := \frac{1}{2} \dot{x}_0^2 + \mathcal{V}(x_0) = \frac{1}{2} \left(\dot{x}_0^2 + \omega_0^2 x_0^2 - \frac{\varepsilon b}{2} x_0^4 \right) \quad \text{tale che} \quad \mathcal{E}_0 \in (0, \mathcal{V}(x_{\pm})) \equiv \left(0, \frac{\omega_0^4}{4\varepsilon b} \right),$$

si hanno traiettorie periodiche che racchiudono l'origine.

È interessante osservare che sussistono le valutazioni

$$\mathcal{V}(|x_{\pm}^{ED}|) = \frac{\omega_0^4}{4\varepsilon b} = \frac{3\omega_0^2}{2\theta_M^2} \sim 1969.7, \quad \mathcal{V}_{PF}(|x_{\pm}^{PF}|) = \frac{2\omega_0^2}{\theta_M^2} \sim 2626.2,$$

e tali valori mostrano che le traiettorie del pendolo rimangono oscillazioni (limitate) anche se la $\mathcal{E}_0$ è (un pò) più grande di quanto necessario per l'analoga richiesta sulla (3.66). Per quest'ultima, tutte le traiettorie sono di questo tipo nel caso $b < 0$, e quindi quest'ultimo verrà inteso come un sottoinsieme dei precedenti.

Si assumano condizioni iniziali tali che $\dot{x}_0 = 0$ e quindi con $0 < r_0 := |x_0|$ che indica l'ampiezza massima dell'oscillazione. Se $b > 0$, o se si discute il pendolo, si assuma anche la condizione di periodicità del moto: $r_0 < |x_{\pm}|$. Il caso particolare del pendolo si riconosce in $r_0 = 1$. Introducendo per brevità la (facile) funzione d'ordine

$$\delta = \delta(\varepsilon) := \varepsilon b / 2\omega_0^2, \quad \text{che nel pendolo fisico vale:} \quad \delta^{PF} = \theta_M^2 / 12 \sim 0.00063,$$

si ottiene

$$\sqrt{2(\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(\xi))} = \omega_0 \sqrt{r_0^2 (1 - \delta r_0^2) - \xi^2 (1 - \delta \xi^2)} = \omega_0 \sqrt{(r_0^2 - \xi^2) (1 - \delta (r_0^2 + \xi^2))}.$$

In tali ipotesi, se nella relazione (valida per $0 < |x| \leq x_0 \equiv r_0$, e per $t_0 = 0$)

$$t = - \int_{r_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{2(\mathcal{E}_0 - \mathcal{V}(\xi))}} = - \frac{1}{\omega_0} \int_{r_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{r_0^2 - \xi^2} \sqrt{1 - \delta (r_0^2 + \xi^2)}}$$

si operano le sostituzioni: $\xi = +r_0 \cos \varphi$, $d\xi = -r_0 \sin \varphi d\varphi$, si ricava (senza fare approssimazioni)

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\omega_0} \int_0^\varphi \frac{r_0 \sin \varphi d\varphi}{\sqrt{r_0^2 (1 - \cos^2 \varphi)} \sqrt{1 - \delta r_0^2 (1 + \cos^2 \varphi)}} \\ &= \frac{1}{\omega_0} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \delta r_0^2 (2 - \sin^2 \varphi)}} = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1 - 2\delta r_0^2}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \delta_\varepsilon r_0^2 \sin^2 \varphi}}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

ove si è chiamata

$$\delta_\varepsilon := \frac{\delta}{1 - 2\delta r_0^2} \sim \delta (1 + 2\delta r_0^2) = \frac{\varepsilon b}{2\omega_0^2} \left(1 + \frac{\varepsilon b}{\omega_0^2} r_0^2\right) \sim \delta \equiv \frac{\varepsilon b}{2\omega_0^2},$$

e si osservi che la δ_ε ha sensibilmente lo stesso valore della δ ; ad esempio nel caso del pendolo fisico esse sono entrambe (all'ordine $O(\varepsilon^2)$) $\delta_\varepsilon \sim \delta = \varepsilon/12 \sim 0.00063$.

Tramite la (3.70) si può calcolare l'espressione esatta del periodo dei moti periodici soluzioni della (3.66), e cioè quelli uscenti da dati iniziali (se $b > 0$) tali che $r_0 < |x_\pm|$ ed $\mathcal{E}_0 = r_0^2 (1 - \delta r_0^2)/2$. Essa è:

$$T = \frac{4}{\omega_0 \sqrt{1 - 2\delta r_0^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \delta_\varepsilon r_0^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (3.71)$$

Qualora invece sia sufficiente solo una stima del periodo, ed inoltre sussista l'ipotesi $\varepsilon b/\omega_0^2 \ll 1$ e quindi $\delta \sim \delta_\varepsilon \ll 1$ come nel caso (3.68), ci si può servire dello sviluppo: $1/\sqrt{1 + \delta_\varepsilon r_0^2 \sin^2 \varphi} \sim 1 - (1/2)\delta_\varepsilon r_0^2 \sin^2 \varphi$ mediante il quale si valuta

$$\begin{aligned} T &\sim \frac{4}{\omega_0 \sqrt{1 - 2\delta r_0^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \delta_\varepsilon r_0^2 + \dots \right) \sim \frac{4}{\omega_0} (1 + \delta r_0^2) \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \delta r_0^2 + \dots \right) \\ &\sim \frac{4\pi}{\omega_0} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8} \delta r_0^2 + \dots \right) \sim \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{3}{8} \frac{\varepsilon b}{\omega_0^2} r_0^2 \right). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Ciò mostra che diversamente dal caso lineare il periodo delle oscillazioni della (3.66), anche se piccole, dipende in modo esplicito dall'ampiezza massima r_0 delle oscillazioni stesse.

Quando la (3.66) proviene dalla (3.69) la definizione di θ_M e la scelta $\dot{x}_0 = 0$ assegnano $r_0 = 1$, e si ritrova il valore (già valutato nel §III.4) $T_{PF} \sim \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{\theta_M^2}{16} \right) \sim 1.9869 \times (1.0 + 0.000476)$.

N.B. 6.3.2 Ovviamente, anche il periodo esatto del pendolo fisico può essere calcolato a partire dal suo integrale primo $\mathcal{E} = \dot{x}^2/2 + \mathcal{V} = \text{cost}$. Per esso si ha $\dot{x}^2 = 2\omega_0^2(\cos \theta_M x - \cos \theta_M)/\theta_M^2$, da cui

$$T_{PF} = \frac{4\theta_M}{\omega_0} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2(\cos \theta_M x - \cos \theta_M)}}.$$

Per esprimerlo più convenientemente si possono usare le seguenti posizioni

$$\begin{aligned} 2(\cos \theta_M x - \cos \theta_M) &= 4 \left(\sin^2 \frac{\theta_M}{2} - \sin^2 \frac{\theta_M x}{2} \right) =: 4 \left(\tilde{\delta}^2 - \sin^2 \frac{\theta_M x}{2} \right) =: 4\tilde{\delta}^2 (1 - \sin^2 \psi), \\ \frac{1}{\tilde{\delta}} \sin \frac{\theta_M x}{2} &=: \sin \psi, \quad \frac{\theta_M}{2\tilde{\delta}} \cos \frac{\theta_M x}{2} dx = \cos \psi d\psi, \quad \frac{\theta_M dx}{2\tilde{\delta}\sqrt{1 - \sin^2 \psi}} = \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \tilde{\delta}^2 \sin^2 \psi}}, \end{aligned}$$

tramite le quali, e servendosi della loro conseguenza

$$\int_0^1 \frac{\theta_M dx}{\sqrt{4(\sin^2 \frac{\theta_M}{2} - \sin^2 \frac{\theta_M x}{2})}} = \int_0^1 \frac{\theta_M dx}{2\tilde{\delta}\sqrt{1 - \sin^2 \psi(x)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \tilde{\delta}^2 \sin^2 \psi}},$$

si ottiene una più conveniente espressione per il valore esatto del periodo del pendolo:

$$T_{PF} = \frac{4\theta_M}{\omega_0} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2(\cos x - \cos \theta_M)}} = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \tilde{\delta}^2 \sin^2 \psi}} \quad (3.73)$$

Nell'ipotesi di piccoli valori per la costante $\theta_M \equiv \sqrt{\varepsilon}$, e quindi per $\tilde{\delta} := |\sin \theta_M/2| \ll 1$, si può ottenere la stima di tale periodo. Infatti, a partire dalle seguenti relazioni, (delle quali la (3.74a) e la (3.74c) sono tanto più vere quanto più $\varepsilon > 0$ è vicino allo zero, e quindi, in questo caso, quanto più è piccola l'ampiezza massima dell'oscillazione):

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon}} \simeq 1 + \varepsilon \left(-\frac{1}{2}(1 - \varepsilon)^{-3/2}(-1) \right) \Big|_{\varepsilon=0} = 1 + \frac{\varepsilon}{2}; \quad (3.74a)$$

$$\int_0^\pi \sin^2 \psi \, d\psi = \frac{\pi}{2}; \quad (3.74b)$$

$$\sin \varepsilon \simeq 0 + \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{6}. \quad (3.74c)$$

si ha, successivamente:

$$\begin{aligned} T_{PF} &\simeq \frac{4}{\omega_0} \int_0^\pi \left(1 + \frac{\tilde{\delta}^2 \sin^2 \psi}{2} \right) d\psi, & (\text{per la (3.74a)}); \\ &= \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{\tilde{\delta}^2}{4} \right), & (\text{per la (3.74b)}); \\ &\simeq \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{\theta_M^2}{16} \right), & (\text{per la (3.74c)}), \end{aligned}$$

ed è quindi evidente che, contrariamente a quanto accade per l'oscillatore armonico lineare, anche nel caso di piccole oscillazioni *il periodo del pendolo fisico dipende dall'ampiezza massima θ_M dell'oscillazione*, e cioè dall'energia iniziale.

Nei passaggi qui sopra sono state usate

Il cosiddetto Integrale ellittico di prima specie che compare nella (3.73), convergente quando $\tilde{\delta} := |\sin \theta_M/2| < 1$, si sarebbe potuto esprimere anche con l'aiuto delle funzioni ipergeometriche, (si veda § I.6):

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \tilde{\delta}^2 \sin^2 \psi}} =: K(\tilde{\delta}) \equiv F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \delta^2\right) := \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)_n (1/2)_n}{n! (1)_n} \tilde{\delta}^{2n}, \quad (3.75)$$

e fornisce *il valore esatto* del periodo del pendolo fisico: $T_{PF} = 4K(\tilde{\delta})/\omega_0$. Il valore che si è stimato qui sopra: $2\pi(1 + \theta_M^2/16)/\omega_0$ ne è una prima approssimazione valida solo nel caso in cui l'ampiezza massima dell'oscillazione: θ_M sia piccola (e ciò accade quando è piccola l'energia $\mathcal{E}_0$). In tal caso $\sin \theta_M/2 \sim \theta_M/2$ e i primi due termini della serie (3.75) sono $\left[1 + (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})\frac{\theta_M^2}{4}\right]$.

Lo stesso procedimento permette di esprimere anche il periodo (3.71) dei moti oscillatori dell'equazione di Duffing in modo alternativo a quanto fatto nella (3.72). Si ha infatti

$$\begin{aligned} T &= \frac{4}{\omega_0 \sqrt{1 - 2\delta r_0^2}} K\left(-\sqrt{\delta_\varepsilon r_0^2}\right) \sim \frac{4}{\omega_0} (1 + \delta r_0^2) \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{4} \delta_\varepsilon r_0^2\right) \\ &\sim \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{3}{4} \delta r_0^2 + \dots\right) \sim \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{3}{8} \frac{\varepsilon b}{\omega_0^2} r_0^2\right). \end{aligned} \quad (3.76)$$

◇

Per poter procedere (in modo non numerico) a una stima anche delle soluzioni della (3.66) si può ricorrere ai metodi perturbativi. Sia, come detto sopra, $\dot{x}(0) = 0$ ed $|x(0)| < |x_\pm|$, e si inizi con il

Metodo Perturbativo Diretto.

Il problema P_0 per la (3.66) è ben noto, e dà soluzioni $2\pi/\omega_0$ -periodiche:

$$x_0(t) = r_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Se si attribuiscono tutte le condizioni iniziali alla $x_0(t, \varepsilon)$, la $r_0 \equiv |x_0(0)|$ coincide con la $r_0 \equiv |x(0)|$, e corrisponde all'ampiezza massima dell'oscillazione (e come tale vale 1) e quindi $\varphi_0 = 0$.

All'ordine uno si ha

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = b r_0^3 \cos^3 \omega_0 t = b r_0^3 \left(\frac{1}{4} \cos 3\omega_0 t + \frac{3}{4} \cos \omega_0 t \right)$$

infatti (con *c.c.* ad intendere il complesso coniugato del termine che lo precede)

$$\cos^3 \psi = \left(\frac{e^{i\psi}}{2} + \frac{e^{-i\psi}}{2} \right)^3 = \left(\frac{e^{3i\psi}}{8} + c.c. + \frac{3e^{i\psi}}{8} + c.c. \right) = \frac{1}{4} \cos 3\psi + \frac{3}{4} \cos \psi.$$

Date le risonanze, si prova con $z_1 e^{3i\omega_0 t} + z_2 t e^{i\omega_0 t}$ (si veda il N.B. 6.1.11 del paragrafo 1), ottenendo

$$0 = \left(-9\omega_0^2 z_1 + \omega_0^2 z_1 - \frac{1}{4} b r_0^3 \right) e^{3i\omega_0 t} + \left(2i\omega_0 z_2 - \frac{3}{4} b r_0^3 \right) e^{i\omega_0 t},$$

da cui: $z_1 = b r_0^3 / (-32\omega_0^2)$, e $z_2 = 3b r_0^3 / (8i\omega_0)$. Di conseguenza, la soluzione completa del problema $P1$ è

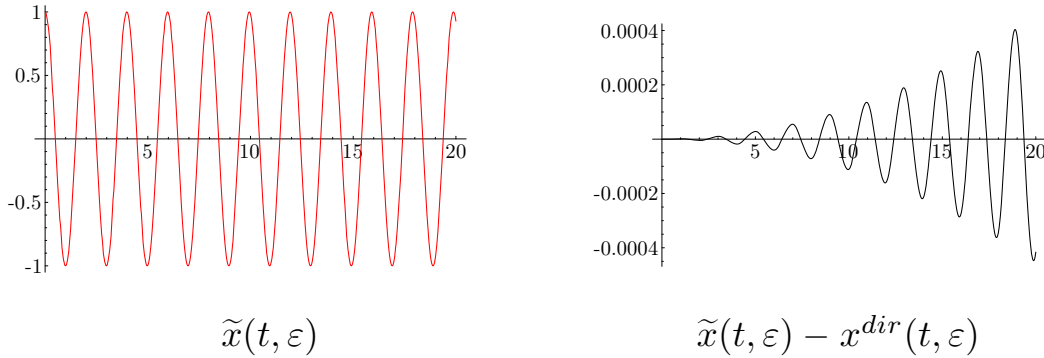
$$x_1(t) = r_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + \frac{3b}{8\omega_0} r_0^3 t \sin \omega_0 t - \frac{b}{32\omega_0^2} r_0^3 \cos 3\omega_0 t$$

nella quale si nota subito una non uniformità dello sviluppo asintotico per tempi grandi. Imponendo le condizioni iniziali $x_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0$ si ottiene $\varphi_1 = 0$ e $r_1 = b r_0^3 / 32\omega_0^2$, da cui infine

$$x^{dir}(t, \varepsilon) = r_0 \cos \omega_0 t + \frac{\varepsilon b}{32\omega_0^2} r_0^3 \left(\cos \omega_0 t - \cos 3\omega_0 t + 12\omega_0 t \sin \omega_0 t \right). \quad (3.77)$$

Nel caso (3.67) si ha $b/32\omega_0^2 = 1/192$ e quindi il coefficiente della x_1 , calcolato per $\varepsilon = \theta_M^2 \sim 0.0076$, vale $\varepsilon/192 = \theta_M^2/192 = 0.00003967$.

La seguente figura mostra il grafico della soluzione $\tilde{x}(t, \varepsilon)$ dell'equazione (3.66) trovata numericamente in corrispondenza ai valori detti sopra, e la differenza fra questa e la x^{dir} .



□

N.B. 6.3.3 Si osservi che il primo addendo dell'espressione trovata è la correzione $O(\varepsilon)$ della soluzione del problema omogeneo la quale, volendo, si può anche scrivere come $x_{om}(t) = r \cos(\omega_0 t + \varphi)$ con

$$r = r_0 + \varepsilon \tilde{r}_1 + \varepsilon^2 \tilde{r}_2 + \dots \quad \text{e} \quad \varphi = \varphi_0 + \varepsilon \tilde{\varphi}_1 + \varepsilon^2 \tilde{\varphi}_2 + \dots$$

Nayfeh ([§4.1]), per esempio, prosegue risolvendo solo i problemi particolari e lascia le costanti in gioco ancora dipendenti dal parametro ε . Si tratta di paragonare

$$\begin{aligned} & r_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \varepsilon r_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + \dots \\ &= (r_0 \cos \varphi_0 + \varepsilon r_1 \cos \varphi_1 + \dots) \cos \omega_0 t \\ &- (r_0 \sin \varphi_0 + \varepsilon r_1 \sin \varphi_1 + \dots) \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} r \cos(\omega_0 t + \varphi) &= (r_0 + \varepsilon \tilde{r}_1 + \dots) \cos(\varphi_0 + \varepsilon \tilde{\varphi}_1 + \dots) \cos \omega_0 t \\ &- (r_0 + \varepsilon \tilde{r}_1 + \dots) \sin(\varphi_0 + \varepsilon \tilde{\varphi}_1 + \dots) \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

Le condizioni ausiliarie sono comunque

$$x(0) = x_0(0), \quad \frac{d}{dt} x(0) = \frac{d}{dt} x_0(0) \quad \text{e} \quad x_1(0) = 0, \quad \frac{d}{dt} x_1(0) = 0$$

e permettono la determinazione delle $(r_0, \tilde{r}_1, \varphi_0, \tilde{\varphi}_1)$ altrettanto bene quanto quella delle $(r_0, r_1, \varphi_0, \varphi_1)$.

Sotto l'aspetto del mantenere il contatto con quanto si sta facendo, il risolvere uno per uno i vari problemi P_n ai vari ordini *ivi comprese le equazioni omogenee e le condizioni ausiliarie*, può essere preferibile. ◇

Come si è osservato, nel correggere una soluzione periodica nelle coordinate $(x, \dot{x})$ il metodo diretto ha generato una soluzione non valida per tempi grandi; in più la correzione risulta poco credibile anche per quanto riguarda la periodicità, che si è persa.

Per tentare di evitare tali inconsistenze occorre usare qualche altro metodo, e l'intrinseca natura periodica dei moti in esame consiglia di iniziare con il:

Metodo della media

Si consideri un “sistema azione-angolo” della forma

$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = -\omega_0 ; \end{cases}$$

e la seguente variazione $O(\varepsilon)$ di tale sistema

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon f^{(1)}(r, \theta, \varepsilon) \\ \dot{\theta} = -\omega_0 + \varepsilon f^{(2)}(r, \theta, \varepsilon) \end{cases} \quad (3.78)$$

con $f^{(1,2)} = O(1)$ e 2π -periodiche nella loro seconda variabile. Per esempio

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon(a + b \cos \theta) \\ \dot{\theta} = -\omega_0 \end{cases} \quad \text{con} \quad r_0, a, b, \omega_0 \in \mathbb{R} . \quad (3.79)$$

Introdotta la nuova variabile $\varphi := -\omega_0 t - \theta$ la seconda delle (3.78) fornisce, per $\varepsilon = 0$, la $\dot{\varphi} = 0$, e quindi il sistema iniziale può anche essere scritto come:

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon \tilde{f}^{(1)}(t; r, \varphi; \varepsilon) \\ \dot{\varphi} = \varepsilon \tilde{f}^{(2)}(t; r, \varphi; \varepsilon) \end{cases} \quad (3.80)$$

per il quale ci si aspetta che le coordinate (r, φ) siano “lentamente variabili”, ed in cui la $(\tilde{f}^{(1)}, \tilde{f}^{(2)})$ rappresenta un campo *quasi periodico rispetto a t* , C^1 rispetto ad $(r, \varphi, \varepsilon)$ e *uniformemente rispetto a t* . L'equazione (3.80) risulta cioè del tipo:

$$\text{Forma } \mathcal{AP} \text{ standard} \quad \begin{cases} \dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon) , \\ f : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times (0, \varepsilon_+] \rightarrow \mathbb{R}^n , \end{cases} \quad (3.81)$$

con

$$\begin{aligned} f(\cdot, x, \varepsilon) &\in \mathcal{AP} \quad \text{ovvero: } f \text{ “quasi-periodica” rispetto a } t \in \mathbb{R}, \\ &\text{uniformemente per } x \in K, \text{ con } K \subset \mathbb{R}^n \text{ compatto,} \\ &\text{ed } f(t, \cdot, \cdot) \in C^1(K \times (0, \varepsilon_+]), \text{ uniformemente per } t \in \mathbb{R}^1. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Si supponga di avere un problema del tipo (3.80) con la f che verifichi le ipotesi (3.82).

Teorema 6.3.1 (si veda: [Hale Cap. V § 3])

Esiste una funzione $u : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times (0, \varepsilon_+]$, $u = u(t, y, \varepsilon)$, continua, quasi periodica rispetto a t , la quale (pur potendo non essere $O(1)$ per $\varepsilon \rightarrow 0$) verifica simultaneamente ed uniformemente rispetto a $t \in \mathbb{R}$ e $y \in K \subset \mathbb{R}^n$ compatto le relazioni

$$\begin{cases} \varepsilon u(t, y, \varepsilon) &= o(1), \\ \varepsilon \partial_y u(t, y, \varepsilon) &= o(1), \\ \partial_t u(t, y, \varepsilon) - f(t, y, 0) + f_0(y) &= o(1), \\ \partial_{ty} u(t, y, \varepsilon) - \partial_y f(t, y, 0) + \partial_y f_0(y) &= o(1), \end{cases} \quad (3.83)$$

ove

$$f_0(y) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y, 0) dt ; \quad (3.84)$$

(e si noti che nella (3.84) la y viene trattata come parametro indipendente, e che non occorre calcolare il limite se la f è periodica di periodo T). La funzione $u(t, y, \varepsilon)$ è tale che la

$$x = h(y) := y + \varepsilon u(t, y, \varepsilon) \quad \text{data da } x \mapsto y \quad h^{-1}(x) = y(t, x, \varepsilon) \quad (3.85)$$

definisce una trasformazione di coordinate su $\mathbb{R} \times K \times (0, \varepsilon_+]$.

Servendosi della trasformazione (3.85), l'equazione (3.80) diviene (rispetto alle nuove variabili) l'equivalente equazione:

$$\begin{aligned} (\mathbb{I} + \varepsilon \partial_y u(t, y, \varepsilon)) \dot{y} &= \varepsilon f_0(y) + \varepsilon \left(f(t, y, 0) - f_0(y) - \partial_t u(t, y, \varepsilon) \right) \\ &\quad + \varepsilon \left(f(t, y + \varepsilon u(t, y, \varepsilon), \varepsilon) - f(t, y, 0) \right). \end{aligned} \quad (3.86)$$

Su quest'ultima si può notare che, in virtù della regolarità della f e delle caratteristiche su elencate per la funzione u , gli ultimi due addendi del secondo membro hanno le stesse proprietà della f ed in più sono $o(\varepsilon)$.

In conclusione: *esiste una trasformazione di coordinate, che per ε piccoli è quasi l'identità, a seguito della quale l'equazione che si ottiene a partire da quella data (3.81) ne è (al primo ordine) la media temporale:*

$$\dot{y} = \varepsilon f_0(y) + \varepsilon f_1(t, y, \varepsilon), \quad (3.87)$$

infatti il termine correttivo $f_1(t, y, \varepsilon)$ che si calcola dalla (3.86) ha le stesse proprietà della f ed è $o(1)$. In più si verifica che la soluzione $x = x(t, \varepsilon)$ della (3.81) e la soluzione $y = y(t, \varepsilon)$ della (3.87) restano, per tempi $O(1/\varepsilon)$, distanti fra loro $O(\varepsilon)$ se tali sono stati i loro dati iniziali.

N.B. 6.3.4 Se la differenza $f(t, x, 0) - f_0(x)$ è un polinomio trigonometrico avente per coefficienti funzioni intere della x , la corretta trasformazione è addirittura indipendente dalla ε ed è data dalla $u(t, x) := \sum_{k=1}^N \frac{1}{i\omega_k} a_k(x) e^{i\omega_k t}$ nella quale i coefficienti sono quelli per i quali $f(t, x, 0) - f_0(x) = \sum_{k=1}^N a_k(x) e^{i\omega_k t}$. $\diamond$

Inoltre, se x_0 è uno zero isolato della determining equation $f_0(x) = 0$, e detta $\mathbf{A}_0$ la matrice $\partial_x f_0|_{x=x_0}$, mediante l'ulteriore posizione $y =: x_0 + z$ si può trasformare il sistema dato nel sistema quasi lineare:

$$\dot{z} = \varepsilon \mathbf{A}_0 z + \varepsilon g(t, z, \varepsilon)$$

(ove $g(t, z, \varepsilon)$ ha le stesse proprietà della f ed è $o(1)$), e sul quale è agevole usare i teoremi di continuità per gli sviluppi perturbativi (vedi: [Hale §IV.4]). Se ne deduce (si osservi che in questo esempio la x rappresenta grandezze lentamente variabili) la

Proposizione 6.3.1 *Se la matrice $\mathbf{A}_0 := \partial_x f_0|_{x=x_0}$ è iperbolica, allora:*

- (i) $x(t, \varepsilon) := x_0 + z(t, \varepsilon) + \varepsilon u(t, x_0 + z, \varepsilon)$ è l'unica soluzione di $\dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon)$ sufficientemente prossima a x_0 che verifichi $x(t, 0) = x_0$ ed abbia le stesse proprietà delle funzioni f e g (e cioè sia continua, o quasi periodica, o periodica, o limitata, a seconda che tali siano f e g);
- (ii) le proprietà di stabilità della $x(t, 0)$ sono determinate dalla segnatura delle parti reali degli autovalori della matrice $\mathbf{A}_0$.

In modo analogo si possono trattare sistemi del tipo

$$\dot{x} = \varepsilon f_b(t, x) + \varepsilon f_\ell(\varepsilon t, x)$$

con f_b, f_ℓ regolari almeno quanto la precedente f , con f_ℓ almeno C^2 rispetto a x , con f_b quasi periodica in t , e con f_ℓ periodica di periodo $T = O(1)$ nella sua prima variabile (il "tempo lento": $t_1 = \varepsilon t$) e, come tale, quasi costante sui tempi $O(1)$. Sotto tali ipotesi si ottiene l'equazione mediata:

$$\dot{x} = \varepsilon \tilde{f}_0(x) + \varepsilon f_\ell(\varepsilon t, x) \quad (3.88)$$

ove $\tilde{f}_0$ è la media di f_b ; e quindi la (3.88) può essere riscritta nella

$$\text{"Guiding equation"} \quad \frac{d}{dt_1} x = \tilde{f}_0(x) + f_\ell(t_1, x) \quad (3.89)$$

che ha campo T -periodico nella variabile t_1 . Se ne ricava la

Proposizione 6.3.2 *Se l'equazione (3.89) ammette una soluzione $\hat{x}_0(t_1) \equiv \hat{x}_0(\varepsilon t)$, che sia (T/ε) -periodica nella variabile t , allora la funzione*

$$x(t, \varepsilon) := \hat{x}_0(\varepsilon t) + z(\varepsilon t, \varepsilon) + \varepsilon u(t, \hat{x}_0(\varepsilon t) + z(\varepsilon t, \varepsilon), \varepsilon)$$

ha le proprietà (i) come enunciate nella Proposizione 6.3.1, e la funzione $z(\varepsilon t, \varepsilon)$ è ora soluzione dell'equazione quasi lineare:

$$\dot{z} = \varepsilon \mathbf{A}(\varepsilon t) z + \varepsilon g(t, \varepsilon t, z, \varepsilon)$$

con $\mathbf{A}(\varepsilon t) := \partial_x(\tilde{f}_0 + f_\ell)|_{x=\hat{x}_0}$ e con $g(t, \varepsilon t, z, \varepsilon)$ quasi periodica nella sua prima variabile, T -periodica nella seconda, ed $o(1)$.

Nell'esempio (3.79) che si sta discutendo si ha $f(t, x, \varepsilon) = a + b \cos \omega_0 t$ e quindi l'equazione mediata per la prima componente è $\dot{y} = \varepsilon a$ dalla quale risulta $x(t, \varepsilon) = x_0 + \varepsilon a t + o(\varepsilon)$.

Questa stessa espressione si sarebbe potuta ottenere anche come applicazione del secondo Corollario qui sopra, e cioè considerando

$$f_b(t, x) = b \cos \omega_0 t \quad \text{ed} \quad f_\ell(t, x) = a .$$

Se ne ricava $\tilde{f}_0 = 0$ ed $\mathbf{A}_0 = 0$, e quindi il problema mediato $\frac{d}{d(\varepsilon t)} x = a$, la cui soluzione è $\hat{x}_0(\varepsilon t) = x_0 + a \varepsilon t$.

Pertanto in entrambi i modi si trova

$$x(t, \varepsilon) = x_0 + \varepsilon a t + o(\varepsilon) .$$

Tale espressione va confrontata con la soluzione esatta del problema (3.79):

$$\tilde{x}(t, \varepsilon) = x_0 + \varepsilon a t + \frac{\varepsilon b}{\omega_0} \sin \omega_0 t .$$

Si noti che la differenza fra le due espressioni è un termine oscillatorio, piccolo per tempi grandi, così come era piccolo, in quanto *rapidamente oscillante*, il termine $\cos \omega_0 t$ rispetto al termine a , che invece è comunque presente anche a tempi lunghi.

Si noti infine che, per la terza delle (3.83), la funzione $u(t, x, \varepsilon)$ è (se non in modo esatto, almeno approssimato) l'integrale rispetto al tempo della parte oscillante del campo, e cioè della differenza $f(t, x, 0) - f_0(x)$; in questo esempio risulta proprio $u(t, x, \varepsilon) = (b/\omega_0) \sin \omega_0 t$. $\square$

N.B. 6.3.5 In effetti è possibile applicare il metodo della media anche ad equazioni, quali ad esempio l'equazione di Duffing (3.66), il cui campo non sia della forma (3.81), purchè per esse *il problema all'ordine zero abbia soluzioni periodiche*. Per far ciò si introduce l'ulteriore trasformazione di coordinate che esprime le coordinate attuali *relative a tale evoluzione* in funzione di quelle dei dati iniziali. *Se anche queste ultime vengono assunte come, debolmente, dipendenti dal tempo*, si può studiare il sistema differenziale che ne regola l'evoluzione sfruttando il fatto che la debole dipendenza dal tempo e le ipotesi sulla soluzione del problema all'ordine zero forniscono un campo $O(\varepsilon)$ e quasi periodico, e quindi adatto all'applicazione del metodo di media.

Per vederlo, si consideri un'equazione del tipo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}, \varepsilon) := \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{g}_2(t, \mathbf{x}, \varepsilon) , \quad \text{con} \quad t \mapsto \mathbf{g}_2(\cdot, \mathbf{x}, \varepsilon) \in \mathcal{P}er(T), \quad (3.90)$$

e per la quale si sospettano soluzioni T -periodiche a meno di coefficienti "lentamente variabili". La (3.90) può essere trasformata mediante il seguente schema generale (salvo il caso in cui siano presenti risonanze) in una equazione sulla quale usare il metodo di media. A tale scopo si indichi con $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ il vettore dei dati iniziali, e con $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(t, \mathbf{q})$, $\mathbf{x}_0 : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, la soluzione generale, T -periodica rispetto alla t , del problema all'ordine zero della $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$. Sussista cioè l'identità

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_0(t, \mathbf{q}) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}_0(t, \mathbf{q}), 0) \quad \text{con} \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n .$$

Si assuma poi che la $\mathbf{q}$ dipenda esplicitamente dal tempo (oltre che dalla ε che però qui va considerata solo come un parametro, e non una variabile), e quindi che la derivata totale d/dt della $\mathbf{x}_0(t, \mathbf{q}(t))$ risulti, invece,

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}_0(t, \mathbf{q}(t)), 0) + \partial_{\mathbf{q}} \mathbf{x}_0(t, \mathbf{q}(t)) \dot{\mathbf{q}}(t) .$$

Quest'ultimo vettore è ciò che si eguaglia a quello assegnato: $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}_0(t, \mathbf{q}(t)), \varepsilon)$.

In tal modo la soluzione del problema (3.90) resta espressa (all'ordine $O(\varepsilon)$) dalla funzione $\mathbf{x}_0(t, \mathbf{q}(t))$, ove

$$\mathbf{x}_0(t, \mathbf{q}) \text{ è la soluzione del problema ridotto: } \frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}, 0) \equiv \mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \text{ con condizioni iniziali } \mathbf{x}(0) = \mathbf{q},$$

e con $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ la funzione che (ancora all'ordine $O(\varepsilon)$) è soluzione dell'equazione

$$\partial_{\mathbf{q}} \mathbf{x}_0(t, \mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon(t, \mathbf{x}_0(t, \mathbf{q}); 0) \equiv \varepsilon \mathbf{g}_2(t, \mathbf{x}_0(t, \mathbf{q}), 0) , \quad (3.91)$$

con condizioni iniziali ricavate dall'equazione originaria (3.90).

L'equazione (3.91) ha la forma corretta per l'uso del metodo di media, che ne permette la risoluzione $O(\varepsilon)$ mediante quella dell'equazione mediata:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\varepsilon}{T} \int_0^T (\partial_{\mathbf{q}} \mathbf{x}_0(t, \mathbf{q}))^{-1} \mathbf{g}_2(t, \mathbf{x}_0(t, \mathbf{q}), 0) dt ,$$

generalmente più semplice della (3.91). Essa fornisce il vettore $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ delle *condizioni iniziali* delle soluzioni del problema (3.90) *lentamente variabili*, giacché mediando le componenti brevi si sono ridotte a delle costanti.

Inoltre, per quanto detto nelle Proposizioni precedenti, i valori $\mathbf{q}_0$ che annullano il campo medio della (3.91) corrispondono a quelle soluzioni $\mathbf{x}(t, \mathbf{q}_0)$ del problema assegnato: (3.90) che hanno per $0 < \varepsilon \ll 1$ le stesse proprietà di periodicità delle $\mathbf{x}_0(t, \mathbf{q}_0)$ del suo problema all'ordine zero, e che hanno caratteristiche di linearizzazione e di stabilità decise dalla matrice di campo della (3.91).

In altre parole, si assume che anche quando $\varepsilon \neq 0$ ed è $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$, sia verificata (all'ordine zero) la

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}_0(t, \mathbf{q}) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}_0(t, \mathbf{q}), 0) = \begin{pmatrix} \omega_0 y_0 \\ -\omega_0 x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_0 r \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ -\omega_0 r \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{pmatrix},$$

ma che questo non comporti, come sarebbe nel caso perturbativo diretto, assegnare alle (r, φ) i loro valori (r_0, φ_0) relativi alle condizioni iniziali all'ordine zero, bensì ne permetta ancora la dipendenza funzionale dal tempo. Pertanto, dall'assegnata equazione:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t, \mathbf{q}) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{q}), \varepsilon) \cong \mathbf{v}(t, \mathbf{x}_0(t, \mathbf{q}), 0) + \varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon(t, \mathbf{x}_0(t, \mathbf{q}), 0) \quad (3.92)$$

si ricava (all'ordine ε) per le coordinate $\mathbf{q}$ l'equazione

$$\partial_{\mathbf{q}} \mathbf{x}_0(t, \mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon(t, \mathbf{x}_0(t, \mathbf{q}), 0).$$

◇

Si consideri ad esempio un'equazione del tipo

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}). \quad (3.93)$$

Si è già ripetutamente notato che il suo problema P_0 ha soluzione, con $y := \dot{x}/\omega_0$:

$$\mathbf{x}_0(t, \mathbf{q}) \equiv \begin{pmatrix} x_0(t; r, \varphi) \\ y_0(t; r, \varphi) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} +r \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ -r \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{pmatrix}. \quad (3.94)$$

Questa viene intesa come una particolare trasformazione (dipendente dal tempo), detta

Trasformazione di Van Der Pol

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(t; r, \varphi) \\ y(t; r, \varphi) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} +r \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ -r \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{pmatrix}, \quad (3.95)$$

ovvero

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = -\omega_0 t - \left(\arcsin(y/r) \cap \arccos(x/r) \right).$$

Essa pertanto è un'usuale trasformazione di coordinate da cartesiane: (x, y) a polari (r, θ) nella quale la variabile angolare θ è data da $\theta = -(\omega_0 t + \varphi)$. Come si è detto, la soluzione (3.94) del problema imperturbato della (3.93) è tale da rendere costanti entrambe le (r, φ) .

Per applicare il metodo ed arrivare alla (3.91) si suppone che anche la soluzione $\mathbf{x}(t, \mathbf{q})$ del problema completo (3.93) abbia la stessa struttura $\mathbf{x}_0(t, \mathbf{q})$ di quella del suo P_0 , e cioè sia data dalla (3.94) nella quale però anche la r e la φ sono dipendenti dal tempo: $\mathbf{x}(t, \mathbf{q}) = \mathbf{x}_0(t, \mathbf{q}(t))$, *in modo debole*. Così la x e la y sono ancora tali da permettere, all'ordine zero, la sostituzione: $\dot{x} = \omega_0 y$ ed $\omega_0 \dot{y} = \ddot{x} = -\omega_0^2 x$; e il bilanciamento dei termini introdotti dalla esplicita dipendenza dal tempo delle (r, φ) quando $\varepsilon \neq 0$ avviene all'ordine $O(\varepsilon)$.

Nel dettaglio, e posto per brevità $-\theta := \omega_0 t + \varphi$, l'equazione (3.92) relativa alla (3.93) si specializza, per mezzo delle (3.95), nella

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} +r\omega_0 \sin \theta \\ -r\omega_0 \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +\cos \theta & +\sin \theta \\ +\sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} x \\ \frac{d}{dt} y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & +\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} +\dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta \\ +\dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0 y \\ -\omega_0 x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon f(x_0, \omega_0 y_0)/\omega_0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Se ne ricava

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & +\sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \omega_0 y \\ -\omega_0 x + \varepsilon f/\omega_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r\omega_0 \sin \theta \\ r\omega_0 \cos \theta \end{pmatrix} \right],$$

e l'assunta forma (3.95) permette di concludere

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\varphi} \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon}{\omega_0} \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t + \varphi) & -\sin(\omega_0 t + \varphi) \\ -\sin(\omega_0 t + \varphi) & -\cos(\omega_0 t + \varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f \mid \begin{smallmatrix} r \cos(\omega_0 t + \varphi), \\ -\omega_0 r \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{smallmatrix} \end{pmatrix},$$

e cioè ottenere la

$$\begin{cases} \dot{r} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0} f \mid \begin{smallmatrix} r \cos(\omega_0 t + \varphi), \\ -\omega_0 r \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{smallmatrix} \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ r\dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0} f \mid \begin{smallmatrix} r \cos(\omega_0 t + \varphi), \\ -\omega_0 r \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{smallmatrix} \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{cases} \quad (3.97)$$

che è un'equazione della forma $\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$ con campo $(2\pi/\omega_0)$ -periodico rispetto alla variabile t .

Ad esempio nel caso dell'oscillatore lineare debolmente smorzato si è visto che è $f(x, \dot{x}) \equiv -2\omega_0 \dot{x}$ e quindi si hanno

$$\begin{cases} \dot{r} = -2\varepsilon \omega_0 r \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \\ r\dot{\varphi} = -2\varepsilon \omega_0 r \sin(\omega_0 t + \varphi) \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{cases} \quad \text{con medie:} \quad \begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon \omega_0 r \\ r\dot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

da cui segue la soluzione $x(t, \varepsilon) \sim e^{-\varepsilon \omega_0 t} \sin \omega_0 t$, già trovata con il metodo delle Scale Multiple nell'Esempio 6.2.11, e che si ridiscuterà nel successivo Esempio 6.3.8.

N.B. 6.3.6 Come si intuisce dalla (3.92), il risultato (3.97) si sarebbe potuto ottenere direttamente servendosi della (3.91) nella quale ancora $\mathbf{q} := (r, \varphi)^T$. Infatti, la (3.91):

$$\dot{\mathbf{q}} = \varepsilon (\partial_{\mathbf{q}} \mathbf{x}_0(t, \mathbf{q}))^{-1} \mathbf{v}_\varepsilon(t, \mathbf{x}_0(t, \mathbf{q}); 0)$$

riferita all'equazione (3.93) fornisce (all'ordine uno) lo stesso risultato trovato sopra:

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t + \varphi) & -r \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ -\sin(\omega_0 t + \varphi) & -r \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ f(r, \varphi)/\omega_0 \end{pmatrix}.$$

Il metodo viene anche chiamato “Metodo delle ampiezze lentamente variabili”, giacché può essere discusso, in modo alternativo, introducendo le

$$\text{Variabili “lente”}: \quad q := r \cos \varphi, \quad p := r \sin \varphi.$$

Con lo stesso procedimento seguito nel N.B. 6.3.5, e sfruttando la forma della soluzione del problema all'ordine zero, si assume anche qui che la soluzione $\mathbf{x}(t)$ abbia la struttura (3.94), qui espressa nel seguente modo:

$$\begin{cases} x = +q \cos \omega_0 t - p \sin \omega_0 t \\ y = -q \sin \omega_0 t - p \cos \omega_0 t \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} q = +x \cos \omega_0 t - y \sin \omega_0 t \\ p = -x \sin \omega_0 t - y \cos \omega_0 t \end{cases}.$$

La derivata di queste ultime dà

$$\begin{cases} \dot{q} = -(\dot{y} + \omega_0 x) \sin \omega_0 t + (\dot{x} - \omega_0 y) \cos \omega_0 t \\ \dot{p} = -(\dot{y} + \omega_0 x) \cos \omega_0 t - (\dot{x} - \omega_0 y) \sin \omega_0 t, \end{cases}$$

dalla quale, in base alle stesse considerazioni fatte nel N.B. 6.3.5, si ricavano le

$$\begin{cases} \dot{q} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0} f(x, \omega_0 y) \sin \omega_0 t \\ \dot{p} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0} f(x, \omega_0 y) \cos \omega_0 t \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} x = r \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ = +q \cos \omega_0 t - p \sin \omega_0 t \\ y = -r \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ = -q \sin \omega_0 t - p \cos \omega_0 t \end{cases}$$

Anche in queste si può riconoscere l'espressione (3.91):

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon}{\omega_0} \begin{pmatrix} \partial_q x & \partial_p x \\ \partial_q y & \partial_p y \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ f(x, \omega_0 y) \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon}{\omega_0} \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t & -\sin \omega_0 t \\ -\sin \omega_0 t & -\cos \omega_0 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(x, \omega_0 y) \end{pmatrix},$$

e ovviamente le coordinate (r, φ) si ricollegano a queste tramite le $\begin{cases} q = r \cos \varphi \\ p = r \sin \varphi \end{cases}$ e quindi

$$\begin{cases} \dot{q} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{p} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{r} = +\dot{q} \cos \varphi + \dot{p} \sin \varphi \\ r\dot{\varphi} = -\dot{q} \sin \varphi + \dot{p} \cos \varphi \end{cases}$$

◇

Esempio 6.3.7 (continuazione dell'Esempio 6.3.1)

Si può finalmente applicare il metodo di media all'equazione di Duffing (3.66):

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon b x^3; \quad \varepsilon, b, \omega_0 \in \mathbb{R}.$$

È chiaro che il suo problema $P0$ ha soluzione data dalla (3.94) e che essa rientra nel tipo di equazione (3.93) con la funzione $f(x, \dot{x})$ specificata da: $f(x, \dot{x}) := b x^3$. Pertanto, direttamente dalla (3.97) si ricava l'equazione:

$$\begin{cases} \dot{r} = -\frac{\varepsilon b}{\omega_0} r_0^3 \cos^3 \varphi \sin \varphi = -\frac{\varepsilon b}{\omega_0} r_0^3 \left(\frac{3}{8} \sin 2\varphi + \frac{1}{8} (-\sin 2\varphi + \sin 4\varphi) \right) \\ \dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon b}{\omega_0} r_0^2 \cos^4 \varphi = -\frac{\varepsilon b}{\omega_0} r_0^2 \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{8} \cos 4\varphi \right); \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \dot{r} = -\frac{\varepsilon b}{\omega_0} f_1(t, r, \varphi) \\ \dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon b}{\omega_0} f_2(t, r, \varphi) \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r^3 \left(\frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{1}{8} \sin 4\varphi \right) \\ r^2 \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{8} \cos 4\varphi \right) \end{pmatrix} \Big|_{\varphi=\omega_0 t + \varphi}$$

e cioè un'equazione della forma $\dot{x} = \varepsilon f(t, x, \varepsilon)$ con campo $(2\pi/\omega_0)$ -periodico rispetto alla variabile t .

Le equazioni risolventi si possono ottenere o direttamente dalla (3.91) con $\mathbf{q} := (r, \varphi)$:

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ r \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon}{\omega_0} \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t + \varphi) & -\sin(\omega_0 t + \varphi) \\ -\sin(\omega_0 t + \varphi) & -\cos(\omega_0 t + \varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b r^3 \cos^3(\omega_0 t + \varphi) \end{pmatrix}.$$

o anche, introdotte le variabili “lente”: $q := r \cos \varphi$ e $p := r \sin \varphi$, dalle loro derivate:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{d}{dt} (r \cos \varphi) = -(\dot{y} + \omega_0 x) \sin \omega_0 t + (\dot{x} - \omega_0 y) \cos \omega_0 t \\ \dot{p} = \frac{d}{dt} (r \sin \varphi) = -(\dot{y} + \omega_0 x) \cos \omega_0 t - (\dot{x} - \omega_0 y) \sin \omega_0 t, \end{cases}$$

che, come nel N.B. 6.3.6, qui forniscono:

$$\dot{q} = -\frac{\varepsilon b}{\omega_0} (r^3 \cos^3(\omega_0 t + \varphi))^3 \sin \omega_0 t \quad \dot{p} = -\frac{\varepsilon b}{\omega_0} (r^3 \cos^3(\omega_0 t + \varphi))^3 \cos \omega_0 t.$$

Anche in queste si può riconoscere l'espressione (3.91), dato che per la (3.93) si ha $f(x, \omega_0 y) = b x^3$:

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_q x_0 & \partial_p x_0 \\ \partial_q y_0 & \partial_p y_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon b x_0^3 / \omega_0 \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon}{\omega_0} \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t & -\sin \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b x_0^3 \end{pmatrix}.$$

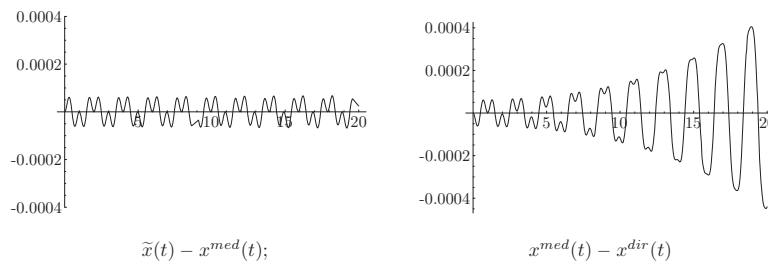
Alternativamente, partendo direttamente dal sistema mediato

$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\varphi} = -\frac{3}{8} \frac{\varepsilon b}{\omega_0} r^2 \end{cases} \quad \text{si trova} \quad \begin{cases} r = r_0 \\ \varphi = -\frac{3}{8} \frac{\varepsilon b}{\omega_0} r_0^2 t + \varphi_0 \end{cases}$$

Comunque, si conclude che correggendo opportunamente la frequenza con termini all'ordine ε si può esprimere la soluzione (uscente da $\dot{x}(0) = 0$, e mediante la $-\theta = \omega_0 t + \varphi$) con la

$$\begin{aligned} x^{med}(t) &= r_0 \cos \theta(t), \quad \text{con} \\ \theta(t) &= -\omega_0 t \left(1 - \frac{3}{8} \frac{\varepsilon b}{\omega_0^2} r_0^2 \right) \sim 3.1623 t \cdot (1 - 0.000476), \end{aligned} \quad (3.98)$$

da paragonare con lo sviluppo diretto x^{dir} trovato precedentemente (si veda la (3.77)). In figura è tracciato il grafico della differenza fra le soluzioni esatta (numerica) e mediata, e della differenza $x^{med}(t) - x^{dir}(t)$, per ε come nella (3.68).



Si osservi che la soluzione (3.98) è del tutto in accordo con i risultati precedenti per quanto riguarda la correzione (all'ordine ε) sul periodo del moto. Non dice molto invece circa la correzione sulle ampiezze, in quanto questa può essere considerata come una correzione a tempi brevi.

Per valutare la correzione sulle ampiezze, si può provare con i Metodi di Stiramento delle Coordinate. Il Metodo di Lindstedt applicato all'equazione (3.66) fornisce all'ordine uno, con ω sviluppato asintoticamente a partire dalla stessa ω_0 della equazione $P0$,

$$(\omega_0^2 + 2\varepsilon\omega_0\omega_1) \left(\partial_\tau^2 X_0 + \varepsilon \partial_\tau^2 X_1 \right) + \omega_0^2 \left(X_0 + \varepsilon X_1 \right) = \varepsilon b \left(X_0 + \varepsilon X_1 \right)^3.$$

Ne seguono il problema all'ordine zero:

$$\partial_\tau^2 X_0 + X_0 = 0 \quad \text{con soluzione} \quad X_0(\tau) = r_0 \cos(\tau + \varphi_0);$$

ed il problema all'ordine uno:

$$\begin{aligned} \partial_\tau^2 X_1 + X_1 &= \frac{b}{\omega_0^2} X_0^3 - 2 \frac{\omega_1}{\omega_0} \partial_\tau^2 X_0 \\ &= \frac{b}{\omega_0^2} r_0^3 \left(\frac{3}{4} \cos(\tau + \varphi_0) + \frac{1}{4} \cos 3(\tau + \varphi_0) \right) + 2 \frac{\omega_1}{\omega_0} r_0 \cos(\tau + \varphi_0). \end{aligned}$$

Per evitare le disuniformità dovute alla risonanza è opportuno imporre

$$\frac{3b}{4\omega_0^2} r_0^3 + 2 \frac{\omega_1}{\omega_0} r_0 = 0.$$

Se ne ricava

$$\omega_0\omega_1 = -\frac{3}{8} b r_0^2 \quad \text{e quindi} \quad \omega \sim \omega_0 \left(1 - \frac{3\varepsilon b}{8\omega_0^2} r_0^2 \right).$$

Ciò comporta che a secondo membro dell'equazione ordine uno rimane il solo termine $(b/4\omega_0^2)r_0^3 \cos 3(\tau + \varphi_0)$, e che quindi una sua soluzione particolare è $X_1^p(\tau) = -(b/32\omega_0^2)r_0^3 \cos 3(\tau + \varphi_0)$. A questa va aggiunta la soluzione dell'equazione omogenea $X_1^{om}(\tau) = r_1 \cos(\tau + \varphi_1)$, e sulla loro somma vanno imposte le condizioni iniziali all'ordine uno:

$$\begin{cases} X_1^{om}(0) + X_1^p(0) = +r_1 \cos \varphi_1 - \frac{b}{32\omega_0^2} r_0^3 \cos 3\varphi_0 = 0 \\ \partial_\tau X_1^{om}(0) + \partial_\tau X_1^p(0) = -r_1 \sin \varphi_1 + \frac{3b}{32\omega_0^2} r_0^3 \sin 3\varphi_0 = 0 \end{cases}$$

In definitiva, la soluzione della (3.66) uscente dalle condizioni $\dot{x}(0) = 0$ ed $x(0) = r_0$ è data, all'ordine ε , da ($\varphi_0 = \varphi_1 = 0$, $r_1 = (b/32\omega_0^2)r_0^3$, e quindi)

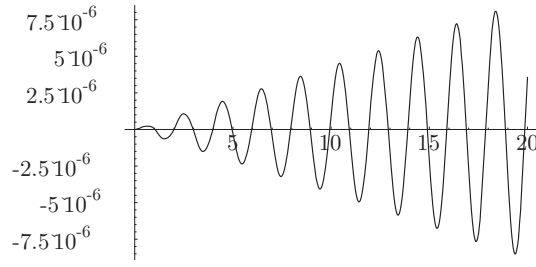
$$\begin{aligned} x^{Lind}(t) &\sim r_0 \cos \omega t + \frac{\varepsilon b}{32\omega_0^2} r_0^3 (\cos \omega t - \cos 3\omega t) \\ \text{con} \quad \omega &\sim \omega_0 \left(1 - \frac{3\varepsilon b}{8\omega_0^2} r_0^2 \right). \end{aligned}$$

Contrariamente alla x^{dir} ottenuta con la (3.77), tale soluzione *non contiene termini secolari*.

Nel caso particolare dell'equazione del pendolo (3.69) si è detto che $r_0 = 1$ e che $\varepsilon b/\omega^2 = \theta_M^2/6 \sim 0.00127$, e quindi che $(3\varepsilon b/8\omega_0^2) = \theta_M^2/16$. Si ritrova che la prima correzione al periodo del pendolo fisico è $T_{PF} \sim \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{\theta_M^2}{16} \right)$ in quanto: $\omega \sim \omega_0(1 - \theta_M^2/16)$. A sua volta, la correzione alle ampiezze del pendolo fisico (non forzato) è $\varepsilon r_1 = \varepsilon b/32\omega_0^2 = \theta_M^2/192 \sim 0.0000394$. In definitiva, e con entrambe le correzioni sulle ampiezze e sulle frequenze valide *anche a tempi brevi*, si è provato che la soluzione dell'equazione del pendolo (3.69) è data (all'ordine $\theta_M^2 \ll 1$) da

$$x^{Lind}(t) = \left(1 + \frac{\theta_M^2}{192} \right) \cos \left[\left(1 - \frac{\theta_M^2}{16} \right) \omega_0 t \right] - \frac{\theta_M^2}{192} \cos \left[3 \left(1 - \frac{\theta_M^2}{16} \right) \omega_0 t \right].$$

In figura è tracciata la differenza tra la soluzione esatta (numerica) e la $x^{Lind}(t)$.



All'equazione (3.66) si può anche applicare il Metodo di Lighthill. Per far ciò, vi si pongano

$$t \sim \tau + \varepsilon t_1(\tau) \quad \text{insieme con} \quad x(t(\tau)) \sim X_0(\tau) + \varepsilon X_1(\tau) + \dots$$

Tramite le relazioni viste sopra fra ∂_t e ∂_τ si ottiene all'ordine uno:

$$X_0'' + \varepsilon (X_1'' - t_1'' X_0' - 2t_1' X_0'') + \omega_0 (X_0 + \varepsilon X_1) = \varepsilon b X_0^3$$

da cui segue $X_0(\tau) = r_0 \cos \omega_0 \tau$ e, all'ordine ε :

$$\partial_\tau^2 X_1 + \omega_0^2 X_1 = t_1'' \partial_\tau X_0 + 2t_1' \partial_\tau^2 X_0 + b X_0^3.$$

La regola di Lighthill suggerisce di cercare le soluzioni di questa equazione imponendo le ulteriori condizioni: $t_1'' = 0$, e $\frac{3}{4} b r_0^3 - 2\omega_0^2 r_0 t_1' = 0$; di queste, la seconda evita le risonanze giacché annulla il coefficiente di $\cos \omega_0 \tau$ a secondo membro, e la prima è richiesta per favorire la minima degenerazione. Si osserva che con tali scelte il risultato in questo caso è identico a quello ottenuto in precedenza.

Si può poi applicare il Metodo di Rinormalizzazione all'equazione (3.66). Si pongono

$$\omega t = \tau \quad \text{con} \quad \omega \sim \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \dots, \quad \text{e quindi} \quad \omega_0 t \sim \tau - \varepsilon \frac{\omega_1}{\omega_0} \tau,$$

direttamente nell'espressione generale non uniforme trovata con il metodo diretto:

$$\begin{aligned} x^{dir}(t) = & r_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \varepsilon \left[r_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \right. \\ & \left. + \frac{3b}{8\omega_0} r_0^3 t \sin(\omega_0 t + \varphi_0) - \frac{b}{32\omega_0^2} r_0^3 \cos 3(\omega_0 t + \varphi_0) \right]. \end{aligned}$$

Mediante la $\cos(\tau - \varepsilon \frac{\omega_1}{\omega_0} \tau) \sim \cos \tau + \frac{\omega_1}{\omega_0} \varepsilon \tau \sin \tau$ si ricava

$$\begin{aligned} x(\tau) \sim & r_0 \cos(\tau + \varphi_0) + \varepsilon \left[r_1 \cos(\tau + \varphi_1) \right. \\ & \left. + \left(r_0 \frac{\omega_1}{\omega_0} + \frac{3b}{8\omega_0^2} r_0^3 \right) \tau \sin(\tau + \varphi_0) - \frac{b}{32\omega_0^2} r_0^3 \cos 3(\tau + \varphi_0) \right]. \end{aligned}$$

Affinché questa espressione non produca termini “secolari”, e cioè termini risonanti o non uniformi, si impone: $\omega_1 = -(3b/8\omega_0) r_0^2$ ritrovando anche in tal caso l'espressione già ottenuta con gli altri metodi.

Infine, all'equazione di Duffing (3.66) si può anche applicare il Metodo delle Scale Multiple. Servendosi della

$$(\partial_{tt}^2 + 2\varepsilon \partial_{tt_1}^2 + \varepsilon^2 (\partial_{t_1 t_1}^2 + 2\partial_{t_2 t_2}^2)) (X_0 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2)$$

con $t_1 := \varepsilon t$ e $t_2 := \varepsilon^2 t$ si ricava la

$$\ddot{x} \sim \partial_{tt}^2 X_0 + \varepsilon (2\partial_{tt_1}^2 X_0 + \partial_{tt}^2 X_1) + \varepsilon^2 (\partial_{t_1 t_1}^2 X_0 + 2\partial_{t_2 t_2}^2 X_0 + 2\partial_{t_1 t_1}^2 X_1 + \partial_{tt}^2 X_2)$$

e quindi la (3.66) fornisce i seguenti problemi

$$\begin{aligned} O(1): & \quad \partial_{tt}^2 X_0 + \omega_0^2 X_0 = 0 \\ O(\varepsilon): & \quad \partial_{tt}^2 X_1 + \omega_0^2 X_1 = b X_0^3 - 2\partial_{t_1 t_1}^2 X_0 \\ O(\varepsilon^2): & \quad \partial_{tt}^2 X_2 + \omega_0^2 X_2 = 3b X_0^3 X_1 - \partial_{t_1 t_1}^2 X_0 - 2\partial_{t_1 t_1}^2 X_1 - \partial_{t_2 t_2}^2 X_0 \end{aligned}$$

con le condizioni iniziali derivate dalle $x(0) = r_0$ ed $\dot{x}(0) = 0$.

Limitandosi al solo tempo ordine uno: t_1 , si ottiene la soluzione dominante:

$$X_0(t, t_1) = r(t_1) \cos(\omega_0 t + \phi(t_1)) \equiv \alpha(t_1) \cos(\omega_0 t) + \beta(t_1) \sin(\omega_0 t)$$

con $\alpha(0) = r_0$ e $\beta(0) = 0$. Per cui il secondo termine del secondo membro dell'equazione $O(\varepsilon)$ diviene

$$-2\partial_{tt_1}^2 X_0 = -2\omega_0(\beta'(t_1) \cos(\omega_0 t) - \alpha'(t_1) \sin(\omega_0 t)) .$$

Per il primo è opportuno (senza esplicitamente indicare la dipendenza di r, ϕ, α, β da t_1) servirsi della

$$\begin{aligned} b X_0^3 &=: b r^3 \cos^3(\omega_0 t + \phi) \equiv \frac{3}{4} b r^3 \cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{1}{4} b r^3 \cos(3\omega_0 t + 3\phi) \\ &= \frac{3}{4} b (\alpha^2 + \beta^2) (\alpha \cos(\omega_0 t) + \beta \sin(\omega_0 t)) + \frac{1}{4} b r^3 \cos(3\omega_0 t + 3\phi_0) \end{aligned}$$

Ne segue che per evitare risonanze è sufficiente che siano verificate le

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} b (\alpha^2 + \beta^2) \alpha - 2\omega_0 \beta' &= 0 \\ \frac{3}{4} b (\alpha^2 + \beta^2) \beta + 2\omega_0 \alpha' &= 0 \end{aligned} \quad \text{da cui} \quad \frac{3b}{8\omega_0} (\alpha^2 + \beta^2) = \frac{\beta'}{\alpha} = -\frac{\alpha'}{\beta} .$$

Se ne deducono le $\alpha^2 + \beta^2 = \text{cost} = r_0^2$, $\beta' = (3br_0^2/8\omega_0)\alpha$, $\beta'' + (3br_0^2/8\omega_0)^2\beta = 0$, ed analoghe per α . Pertanto

$$\beta(t_1) = r_0 \sin((3br_0^2/8\omega_0)t_1 + \psi) \quad \alpha(t_1) = r_0 \cos((3br_0^2/8\omega_0)t_1 + \psi) ,$$

e siccome le condizioni iniziali assegnano $\beta(0) = 0$ si ottengono $\psi = 0$ e $\alpha(t_1) = r_0 \cos((3br_0^2/8\omega_0)t_1)$ per cui anche con questo metodo si ritrova la (3.98). $\square$

Il seguente è un ulteriore esempio di applicazione del metodo di media ad una equazione la cui soluzione all'ordine zero ha proprietà di periodicità.

Esempio 6.3.8 (continuazione dell'Esempio 6.1.32).

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\varepsilon \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1 . \end{cases}$$

Per adoperare il metodo di media su tale equazione, si operano in essa le posizioni

$$\begin{cases} x = +r \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ y = -r \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{cases} \quad \text{che danno} \quad \begin{cases} \dot{x} = +\dot{r} \cos(\omega_0 t + \varphi) - r(\omega_0 + \dot{\varphi}) \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ \dot{y} = -\dot{r} \sin(\omega_0 t + \varphi) - r(\omega_0 + \dot{\varphi}) \cos(\omega_0 t + \varphi) . \end{cases}$$

Analogamente al caso precedente, se ne ricava la matrice

$$\partial_{\mathbf{q}} \mathbf{x}_0(t; r, \varphi) = \begin{pmatrix} +\cos(\omega_0 t + \varphi) & -r \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ -\sin(\omega_0 t + \varphi) & -r \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{pmatrix} .$$

D'altra parte, il vettore $\varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x}_0; 0)$ in questo caso vale $(0, -2\varepsilon \omega_0 \frac{d}{dt} \hat{x}_0)^T$, e quindi si hanno le

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t + \varphi) & -\sin(\omega_0 t + \varphi) \\ -\frac{1}{r} \sin(\omega_0 t + \varphi) & -\frac{1}{r} \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2\varepsilon \omega_0 r \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\varepsilon \omega_0 r \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \\ -\varepsilon \omega_0 \sin 2(\omega_0 t + \varphi) \end{pmatrix}$$

e cioè un campo $\varepsilon f(t, r, \varphi) := \varepsilon \omega_0 \begin{pmatrix} -2r \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \\ -\sin 2(\omega_0 t + \varphi) \end{pmatrix}$ la cui media temporale è

$$\varepsilon f_0(r, \varphi) = \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega_0 t, r, \varphi) dt = \varepsilon \omega_0 \begin{pmatrix} -r \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Risulta:

$$r(t) = r_0 e^{-\varepsilon \omega_0 t}, \quad \varphi(t) = \varphi_0 ,$$

e le condizioni iniziali forniscono

$$x(t) \sim e^{-\varepsilon \omega_0 t} \sin \omega_0 t .$$

Allo stesso modo, nelle coordinate $q = r \cos \varphi$, $p = r \sin \varphi$, si ricava

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t & -\sin \omega_0 t \\ -\sin \omega_0 t & -\cos \omega_0 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2\omega_0 y_0 \end{pmatrix} = 2\varepsilon \omega_0 (q \sin \omega_0 t + p \cos \omega_0 t) \begin{pmatrix} -\sin \omega_0 t \\ -\cos \omega_0 t \end{pmatrix}$$

la cui media è
$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = -\varepsilon \omega_0 \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}.$$

Si è così trovato l'andamento esponenziale valido a tempi lunghi ma, come c'era da aspettarsi, non la correzione dei tempi brevi sulla frequenza. Per avere quest'ultima o si procede con il metodo di media (vedi: [Krylov - Bogoliubov - Metropolski, opp. Nayfeh p.173]), oppure si ricorre ad altri metodi. $\square$

6.4 Ancora sull'equazione di Duffing

Si prenda nuovamente in esame l'equazione di Duffing ma, diversamente da quanto fatto nel §3, la si consideri forzata da una sollecitazione esterna che verrà qui assunta di tipo armonico:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon b x^3 + f \cos \omega t.$$

Di questa si cercano *soluzioni periodiche di periodo $2\pi/\omega$ ed isolate*, in quanto sono queste che ci si aspetta siano le dirette e non transienti conseguenze (regolari) della forzante $f \cos \omega t$.

Il ben noto caso lineare coincide con il problema all'ordine zero: $\varepsilon = 0$. Purché ω sia diversa da ω_0 , la sua soluzione è definita per ogni t e vale

$$\hat{x}_0(t) = a_0 \cos \omega_0 t + b_0 \sin \omega_0 t + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t. \quad (4.99)$$

L'insieme delle funzioni $f : t \mapsto f(t)$ periodiche ed aventi un certo (minimo) periodo T si indicherà con: $\mathcal{P}er(T)$.

Proposizione 6.4.1 *La soluzione (4.99) è isolata ed in $\mathcal{P}er(2\pi/\omega)$ (qualunque siano i valori di ω_0 ed ω) (se e) solo se $\rho_0^2 := a_0^2 + b_0^2 = 0$.*

Dimostrazione Qualora fosse $\omega_0 = n\omega$ con $n = 2, 3, \dots$, la soluzione vale $\rho_0 \cos(n\omega t + \varphi_0) + \frac{f}{n^2 - 1} \cos \omega t$, che è in $\mathcal{P}er(2\pi/\omega)$ ma non isolata: infatti $\rho_0 \neq 0$ costituisce parametro per tutta una *famiglia di soluzioni* in $\mathcal{P}er(2\pi/\omega)$. Se poi $\omega_0/\omega \notin \mathbb{N}$, e $\rho_0 \neq 0$, allora la soluzione è quasi-periodica, oppure è periodica ma non in $\mathcal{P}er(2\pi/\omega)$. Si parla in questo secondo caso di *subarmoniche della forzante*. $\blacksquare$

Si prenderà perciò in esame solo il caso $a_0 = b_0 = 0$. Il problema ordine ε è

$$P1 : \quad \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = br_0^3 \cos^3 \omega t ; \quad \text{con} \quad r_0 := \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} ;$$

di questo si cerca una soluzione particolare della forma $z_1 e^{3i\omega t} + z_2 e^{i\omega t}$. Si trovano

$$z_1 = \frac{br_0^3}{4(\omega_0^2 - 9\omega^2)} \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{3br_0^3}{4(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

e di nuovo la parte relativa alla soluzione armonica dell'omogenea associata viene scartata: $a_1 = b_1 = 0$.

Iterando il procedimento si determinano le "risonanze": $\omega_0/\omega = 3, 5, 7, \dots$ che occorre escludere, l'una dopo l'altra, per poter determinare i vari coefficienti. Il metodo dà risultati attendibili per ω_0/ω lontano dagli interi dispari.

La presenza di un semplice termine di smorzamento del tipo $\eta \dot{x}$ con $\eta = O_s(1)$ è già sufficiente ad evitare l'insorgere di risonanze, o di soluzioni non isolate in $\mathcal{P}er(2\pi/\omega)$. Si ha infatti

$$\ddot{x} + \eta \dot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon b x^3 + f \cos \omega t. \quad (4.100)$$

All'ordine zero, con lo stesso procedimento di sopra, si ha una soluzione (particolare) della forma: $ze^{i\omega t}$ purché

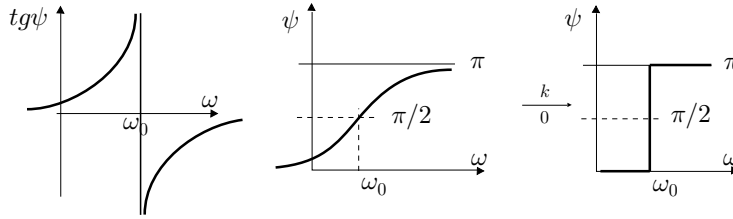
$$z = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\eta\omega} =: \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \eta^2\omega^2}} e^{-i\varphi}$$

A questa parte della soluzione va aggiunta quella relativa all'equazione omogenea associata, che però è comunque un termine non periodico:

$$\begin{cases} ce^{-\eta t/2} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\eta^2}{4}} t + \tilde{\varphi}\right) & \text{se } \eta^2/4 < \omega_0^2, \\ (c_1 + c_2 t) e^{-\eta t/2} & \text{se } \eta^2/4 = \omega_0^2, \\ c_1 e^{-(\frac{\eta}{2} + \Delta)t} + c_2 e^{-(\frac{\eta}{2} - \Delta)t} & \text{se } \eta^2/4 > \omega_0^2, \quad \text{con } \Delta := \sqrt{\frac{\eta^2}{4} - \omega_0^2}. \end{cases}$$

Esiste quindi un'unica soluzione della (4.100) in $\mathcal{P}er(2\pi/\omega)$; essa è data da:

$$\hat{x}_0(t) = r_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{con} \quad \begin{cases} r_0 := \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \eta^2\omega^2}} \\ \tan \varphi := \frac{\eta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{cases}$$



(con tale notazione, la fase è comunque positiva, ed è invece la r_0 a poter assumere valori anche negativi).

Si noti che l'addendo nella soluzione generale relativo all'equazione omogenea associata, se inserito nel secondo membro dell'equazione all'ordine uno:

$$\ddot{x}_1 + \eta\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = bx_0^3;$$

continua a dare un termine forzante non periodico, o periodico non $\mathcal{P}er(2\pi/\omega)$, che può essere considerato un $O(\varepsilon)$ dell'omogenea associata stessa.

Si prosegue pertanto con il problema *particolare* all'ordine uno:

$$\ddot{x}_1 + \eta\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = br_0^3 \left(\frac{3}{4} \cos(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{4} \cos 3(\omega t + \varphi_0) \right).$$

Ancora con una funzione del tipo: $z_1 e^{3i\omega t} + z_2 e^{i\omega t}$ si ricavano

$$\begin{cases} [-9\omega^2 + 3i\eta\omega + \omega_0^2] z_1 = \frac{1}{4} br_0^3 e^{-3i\varphi} \\ [-\omega^2 + i\eta\omega + \omega_0^2] z_2 = \frac{3}{4} br_0^3 e^{-i\varphi} \end{cases}$$

da cui, con $\tan \varphi_1 := 3\eta\omega/(\omega_0^2 - 9\omega^2)$, segue

$$\begin{cases} z_1 = \frac{br_0^3}{4\sqrt{(\omega_0^2 - 9\omega^2)^2 + 9\eta^2\omega^2}} e^{-3i(\varphi + \varphi_1)} \\ z_2 = \frac{3br_0^3}{4\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \eta^2\omega^2}} e^{-i\varphi}. \end{cases}$$

In definitiva il procedimento prosegue purché ω_0/ω sia sufficientemente lontano da un intero dispari, e η sia grande.

Altrimenti lo sviluppo diretto fallisce; le ampiezze possono diventare troppo grandi o, comunque, il risultato non accurato: anche se con f piccole, si hanno più soluzioni in $\mathcal{P}er(2\pi/\omega)$ e non provenienti solo dalla forzante, ma anche dall'equazione omogenea associata.

Con lo smorzamento e la forzante entrambi piccoli:

$$\eta_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon} \eta \quad \text{ed} \quad f_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon} f,$$

si hanno comportamenti interessanti per $\omega^2 \sim \omega_0^2 + \varepsilon\eta$ con $\eta = O_s(1)$. In tali ipotesi l'equazione diviene

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon(-\eta_\varepsilon \dot{x} + bx^3 + f_\varepsilon \cos \omega t); \quad (4.101)$$

e si osservi che, se anche si ponesse $\eta_\varepsilon \neq 0$ in questa equazione, ciò non sarebbe sufficiente a rimuovere le eventuali risonanze.

Appare naturale eseguire una trasformazione di Van Der Pol di frequenza ω :

$$\begin{cases} x = +r \cos(\omega t + \varphi) \\ y = -r\omega \sin(\omega t + \varphi), \end{cases} \quad (4.102)$$

che come si è visto implica

$$\begin{cases} \dot{r} \sim -\left(\frac{1}{\omega} \dot{y} + \omega x\right) \sin(\omega t + \varphi) \\ r\dot{\varphi} \sim -\left(\frac{1}{\omega} \dot{y} + \omega x\right) \cos(\omega t + \varphi), \end{cases}$$

o anche

$$\begin{cases} \dot{q} = -\left(\frac{1}{\omega} \dot{y} + \omega x\right) \sin \omega t \\ \dot{p} = -\left(\frac{1}{\omega} \dot{y} + \omega x\right) \cos \omega t \end{cases} \quad \text{ove} \quad \begin{cases} q := r \cos \varphi \\ p := r \sin \varphi \end{cases} \quad (4.103)$$

Per esempio nelle coordinate (r, φ) , dalla (4.101) e con $\varepsilon\beta := \omega^2 - \omega_0^2$ si ricava

$$\begin{cases} \dot{r} = -\frac{\varepsilon}{\omega} (\beta x - \eta_\varepsilon \dot{x} + bx^3 + f_\varepsilon \cos \omega t) \sin(\omega t + \varphi) \\ r\dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon}{\omega} (\beta x - \eta_\varepsilon \dot{x} + bx^3 + f_\varepsilon \cos \omega t) \cos(\omega t + \varphi). \end{cases}$$

nelle quali resta inteso che $x = +r \cos(\omega t + \varphi)$ ed $\dot{x} = -r\omega \sin(\omega t + \varphi)$.

Considerato poi che $\cos^3 \theta = \frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta$, e ricordate le formule per le medie delle funzioni trigonometriche, la (4.102) implica che la media di quest'ultima equazione risulta:

$$\begin{cases} \dot{r} = -\frac{\varepsilon}{\omega} \left(\frac{1}{2} \eta_\varepsilon \omega r - \frac{1}{2} f_\varepsilon \sin \varphi \right) \\ r\dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon}{\omega} \left(\frac{1}{2} \beta r + \frac{3}{8} br^3 + \frac{1}{2} f_\varepsilon \cos \varphi \right). \end{cases}$$

Alternativamente, l'uso della (4.103) avrebbe fornito

$$\begin{cases} \dot{q} = -\frac{\varepsilon}{2\omega} \left(\beta p + \eta_\varepsilon \omega q + \frac{3}{4} b(q^2 + p^2)p \right) \\ \dot{p} = -\frac{\varepsilon}{2\omega} \left(\beta q + \eta_\varepsilon \omega p + \frac{3}{4} b(q^2 + p^2)q + f_\varepsilon \right). \end{cases} \quad (4.104)$$

Si ha una soluzione periodica quando $\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\varphi} = 0 \end{cases}$ e cioè, nel caso $\eta_\varepsilon = 0$, quando

$$\varphi = 0, \pi \quad \text{ed} \quad \beta r + \frac{3}{4} br^3 \pm f_\varepsilon = 0 \quad (4.105)$$

che vanno intese come condizioni sulla terna φ, r, β .

Nel caso $\eta_\varepsilon \neq 0$, la condizione di periodicità è invece

$$\begin{cases} f_\varepsilon \sin \varphi = \omega r \eta_\varepsilon \\ f_\varepsilon^2 = \omega^2 r^2 \eta_\varepsilon^2 + r^2 \left(\beta + \frac{3}{4} br^2 \right)^2. \end{cases} \quad (4.106)$$

I valori dei parametri φ, r, β che verificano questo sistema individuano le soluzioni della (4.101) in $\mathcal{P}er(2\pi/\omega)$, certamente esistenti se (ma eventualmente non solo se) $\beta \neq 0$. Infatti, per assegnati $\eta_\varepsilon, f_\varepsilon, \beta, b$, quanto detto sul metodo di media comporta che per ogni soluzione isolata (r_0, φ_0) della (4.106) esiste una soluzione $\frac{2\pi}{\omega}$ -periodica della (4.101) per ciascun $\varepsilon \in (0, \varepsilon_+]$; essa inoltre, per $\varepsilon \rightarrow 0$, tende alla soluzione $r_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ del suo problema all'ordine zero purché sia

$$Det \left(\frac{\partial}{\partial(r, \varphi)} \left(\begin{matrix} \omega r \eta_\varepsilon - f_\varepsilon \sin \varphi \\ \beta r + \frac{3}{4} br^3 + f_\varepsilon \cos \varphi \end{matrix} \right) (r_0, \varphi_0) \right) = \begin{vmatrix} \omega \eta_\varepsilon & -f_\varepsilon \cos \varphi_0 \\ \beta + \frac{3}{4} br_0^2 & -f_\varepsilon \sin \varphi_0 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (4.107)$$

Caso $\eta_\varepsilon = 0$

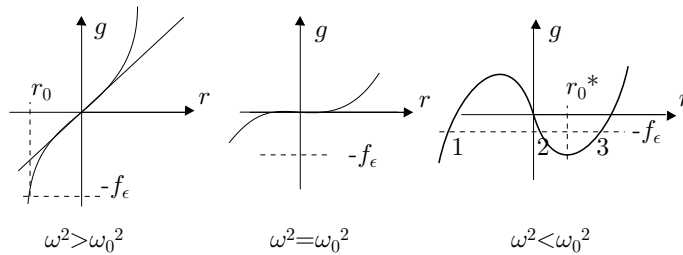
Siano (r_0, φ_0) soluzione (isolata) della (4.105). Si ha $\varphi_0 = 0, \pi$ come nel caso lineare. Si fissi $\varphi = 0$ e si accetti la possibilità di avere sia $r \geq 0$ che $r < 0$. Si ponga inoltre

$$g(r) := r \left(\varepsilon \beta + \frac{3}{4} \varepsilon b r^2 \right) := r \left(\omega^2 - \omega_0^2 + \frac{3}{4} \varepsilon b r^2 \right);$$

per esempio nel caso particolare in cui l'equazione di Duffing proviene da quella del pendolo fisico,

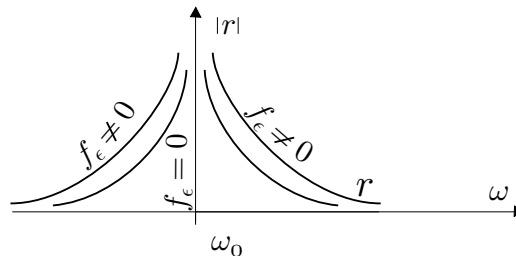
$$g(r) = r \left(\omega^2 - \omega_0^2 + \frac{1}{8} \omega_0^2 \theta_M^2 r^2 \right).$$

I possibili andamenti della funzione $g(r)$ sono mostrati in figura nel caso $\varepsilon b > 0$ (e cioè “molla debole”, così come il pendolo fisico)



per cui, dalla (4.105) segue che

(•) per $\omega^2 > \omega_0^2$ (ed $\varepsilon b > 0$) si ha un solo valore possibile per r_0 e quindi una sola soluzione in $\mathcal{P}er(2\pi/\omega)$, sfasata di π rispetto alla forzante. Il sistema si comporta in modo analogo al caso lineare, salvo la correzione su r_0 dovuta al termine piccolo $\frac{3}{4}\varepsilon b r^2$. È da notare però che per ω che si avvicina a ω_0 l'equazione lineare si comporta in modo totalmente diverso:

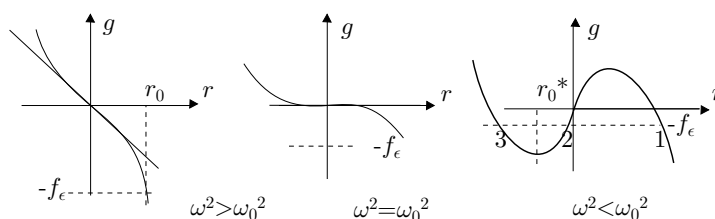


essa infatti prevede r_0 sempre più grandi: $r_0 = f/|\omega_0^2 - \omega^2|$.

(•) per $\omega^2 = \omega_0^2$ (ed $\varepsilon b > 0$) l'equazione (4.101) ammette, con $f_\varepsilon \neq 0$, una soluzione $\frac{2\pi}{\omega}$ -periodica, e questo comportamento è *ben diverso* dal caso lineare.

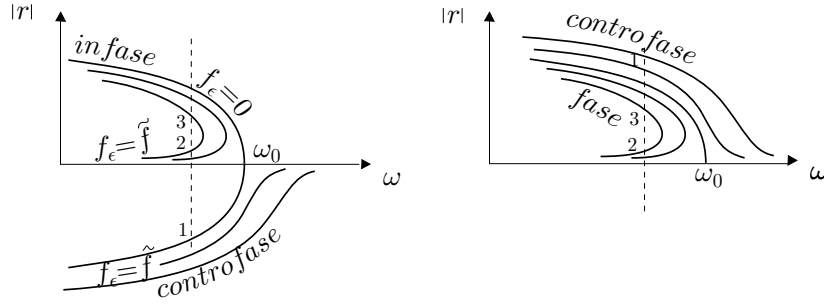
(•) per $\omega^2 < \omega_0^2$ (ed $\varepsilon b > 0$) l'equazione (4.107) individua tre diversi valori per la r_0 , due in fase ed uno in controfase, oppure solo un valore in controfase, a seconda dell'ampiezza della forzante f_ε . Di questi solo il più piccolo in modulo è quello corrispondente alla soluzione lineare, e cioè quello che si trova con lo sviluppo diretto visto prima.

N.B. 6.4.1 Tutti i segni vanno cambiati nel caso in cui $\varepsilon b < 0$ (detto anche “molla forte” in quanto, allontanandosi dall'origine, è più robusta del lineare. $\diamond$

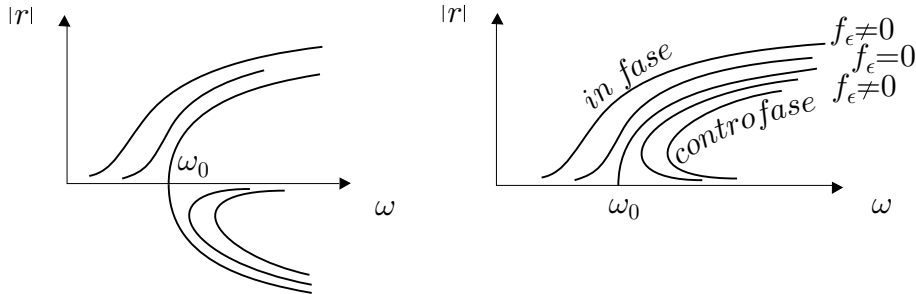


Sul piano $(|r|, \omega)$ questi comportamenti si possono osservare nei diagrammi: *risposta in frequenza* delle soluzioni in $\mathcal{P}er(2\pi/\omega)$. La linea $g(r) = 0$ è evidentemente $\omega^2 - \omega_0^2 + \frac{3}{4}\varepsilon br^2 = 0$ e cioè un ramo di iperbole equilatera; si hanno allora rispettivamente i due casi:

(•) il caso molla debole $\varepsilon b > 0$, (come il pendolo fisico),



(•) il caso molla forte: $\varepsilon b < 0$



I grafici mostrano che, contrariamente al caso lineare, *si possono* trovare soluzioni $\frac{2\pi}{\omega}$ -periodiche e di ampiezze limitate *anche* per ω molto prossimo a ω_0 .

Ve ne saranno anzi più di una per certi opportuni valori di f_ε : “*entrainment*” o “*phase locking*”.

La loro stabilità è decisa dai segni degli autovalori della matrice (4.107).

N.B. 6.4.2 Lo sviluppo diretto, applicato sulla

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon(\beta x - \eta_\varepsilon \dot{x} + bx^3 + f_\varepsilon \cos \omega t)$$

avrebbe dato all'ordine uno:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= \beta x_0 + \omega \eta_\varepsilon r_0 \sin(\omega t + \varphi_0) + br_0^3 \cos^3(\omega t + \varphi_0) + f_\varepsilon \cos \omega t = \\ &= \left(\beta a_0 - \omega \eta_\varepsilon b_0 + \frac{3}{4} br_0^2 a_0 + f_\varepsilon \right) \cos \omega t + \frac{1}{4} br_0^3 \cos 3\varphi_0 \cos 3\omega t \\ &+ \left(\beta b_0 + \omega \eta_\varepsilon a_0 + \frac{3}{4} br_0^2 b_0 \right) \sin \omega t + \frac{1}{4} br_0^3 \sin 3\varphi_0 \sin 3\omega t ; \end{aligned}$$

e da questa, con l'ulteriore richiesta che non vi siano termini secolari, si riottengono le condizioni viste sopra. $\diamond$

Agli stessi risultati si può giungere anche discutendo le (equivalenti) equazioni ottenute nelle variabili definite dalla (4.103). Sul piano di tali variabili q, p , detto piano di Van der Pol, i punti di equilibrio corrispondono alle soluzioni del tipo $r_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ con r_0 e φ_0 costanti. Per quanto visto sopra possono esistere fino a tre tali punti per f_ε sufficientemente piccolo, $\omega^2 < \omega_0^2$, ed $\varepsilon b > 0$; essi inoltre sono sull'asse $p = 0$ dato che $\varphi_0 = 0, \pi$; sarà allora possibile individuarli con le coordinate $(q_i, 0)$ con $i = 1, 2, 3$.

Per studiare le caratteristiche qualitative della dinamica nell'intorno di tali punti, può essere opportuno esaminare il sistema linearizzato di (4.104). Nell'intorno di ciascuno dei punti $(q_i, 0)$, e sempre per $\eta_\varepsilon = 0$, esso risulta

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon(\beta + \frac{3}{4}bq_i^2)/2\omega \\ \varepsilon(\beta + \frac{3}{4}bq_i^2)/2\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} ;$$

chiamando, come sopra, $g(r) := \varepsilon r(\beta + \frac{3}{4}br^2)$ si ha

$$A_i = \frac{1}{2\omega} \begin{pmatrix} 0 & -g(q_i)/q_i \\ \partial_r g(q_i) & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \dots$$

Queste matrici hanno (traccia nulla e) determinante tali che

$$4\omega^2 \text{Det } A_i = \frac{1}{q_i} g(q_i) \partial_r g(q_i) \begin{cases} > 0 & \text{in } i = 1 \implies \text{centro} \\ > 0 & \text{in } i = 2 \implies \text{centro} \\ < 0 & \text{in } i = 3 \implies \text{sella} \end{cases}$$

D'altra parte si può osservare che il campo della (4.104) con $\eta_\varepsilon = 0$ verifica le condizioni necessarie affinché il sistema sia Hamiltoniano, e cioè l'uguaglianza $\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} = -\frac{\partial \dot{p}}{\partial p} =: \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q \partial p}$; per la (4.104), il loro comune valore è dato da $-\frac{\varepsilon}{2\omega} \cdot \frac{3}{2}bpq$ e resta ben definita la funzione Hamiltoniana

$$\mathcal{H}(q, p) = -\frac{\varepsilon}{2\omega} \left(\frac{1}{2} \left(\beta + \frac{3}{4} bq^2 \right) p^2 + \frac{3}{16} bp^4 + f(q) \right)$$

con $f(q) = \frac{1}{2} \beta q^2 + \frac{3}{16} bq^4 + f_\varepsilon q + \text{cost}$ e quindi

$$\mathcal{H}(q, p) = -\frac{\varepsilon}{2\omega} \left(\frac{1}{2} \beta (q^2 + p^2) + \frac{3}{16} b (q^2 + p^2)^2 + f_\varepsilon q \right) + \text{cost}$$

oppure

$$\mathcal{H}(r, \varphi) = -\frac{\varepsilon}{4\omega} r^2 \left(\beta + \frac{3}{8} br^2 \right) - \frac{\varepsilon f_\varepsilon}{2\omega} r \cos \varphi + \text{cost}.$$

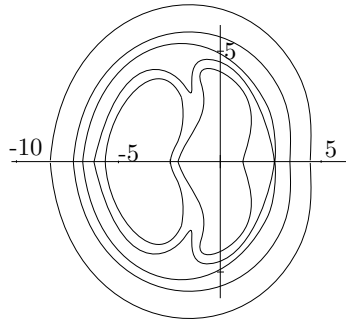
Si noti che la $\mathcal{H}$ è simmetrica nello scambio $q \rightarrow -p$ ovvero $\varphi \rightarrow -\varphi$, e siccome per $r \gg 1$ è

$$\mathcal{H}(r, \varphi) = -\frac{\varepsilon}{4\omega} r^2 \left(\beta + \frac{3}{8} br^2 \right) + O(r),$$

si ha che per r grandi la $\mathcal{H}$ è costante sulle circonferenze di centro l'origine.

L'esistenza stessa della funzione $\mathcal{H}$ implica inoltre che i due primi punti di equilibrio, data la loro stabilità, sono centri non solo del sistema lineare, ma anche del sistema non lineare (4.104) (vedi anche: [Nota 3 §III.5]); nella vicinanza di essi si presenta il fenomeno dei *battimenti* ("slow varying periodic amplitude")

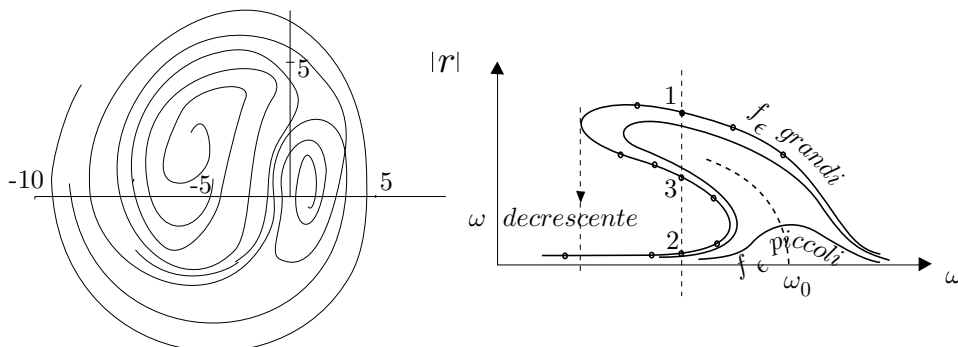
$$\begin{aligned} \gamma &= -1 \\ f_\varepsilon &= -0.5 \\ a_1 &= -3.0 \\ a_2 &= -0.51 \\ a_3 &= 2.53 \\ c_e &= -.6551 \end{aligned}$$



sull'omoclina invece si ha una modulazione di frequenza: la fase cresce da 0 a 2π e modula ω .

Caso $\eta_\varepsilon \neq 0$

Il caso $\eta_\varepsilon \neq 0$, (ovviamente meno semplice) si può intuire dai seguenti diagrammi:



Appendice

Le seguenti Appendici sono intese come un promemoria, NON come parte del testo o del programma. Esse contengono molti (forse troppi) richiami a cose che si dovrebbero conoscere o, almeno, aver vagamente visto per rendersi conto dei passaggi e delle affermazioni fatte nel corso. Solo alcuni degli argomenti qui citati è opportuno siano studiati, se non altro che per risparmiare tempo nell'usarli al momento opportuno, e verranno specificamente indicati a lezione. Gli altri possono servire come manuale di (a volte oscure) definizioni e proprietà. È chiaro che tutte sono presenti nella bibliografia indicata alla fine del testo.

A.1 Richiami di Analisi Funzionale. (I)

Al solo scopo di poter meglio comprendere e apprezzare il contenuto dei teoremi fondamentali, e non certo per svilupparne la teoria peraltro vastissima e di enorme interesse, viene qui fornito *un vago promemoria* di alcune delle definizioni e delle maggiori caratteristiche di quelle strutture, sempre più specializzate, che prendono i nomi di:

Topologia , *Metrica* , *Norma* , *Struttura Euclidea* .

Si vedrà che gli spazi sui quali queste strutture vengono introdotte possono essere intesi ciascuno un caso speciale del precedente, e pertanto le varie proprietà verranno ereditate da sinistra verso destra.

Sia $\mathbb{X}$ un insieme, da considerarsi lo spazio ospite. Si definiscono:

Topologia $\mathcal{T}$:= una famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{X}$, detti Aperti, tale che:

- (i) contiene lo spazio: $\mathbb{X}$ ed il vuoto: $\emptyset$,
- (ii) contiene l'unione qualunque e l'intersezione finita di suoi sottoinsiemi.

Spazio topologico := la coppia $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$.

Esempio 1.1 Topologia banale: $\mathcal{T} := \{\mathbb{X}, \emptyset\}$; $\mathcal{T} := \{\mathbb{X}, \emptyset, A\}$, $\mathcal{T} := \{\mathbb{X}, \emptyset, A, B, A \cap B, A \cup B\}$,
Topologia discreta: $\mathcal{T} := 2^{\mathbb{X}} := \{A \subseteq \mathbb{X}\}$. □

Intorno $N(x)$ di $x \in (\mathbb{X}, \mathcal{T})$:= un insieme contenente (almeno) un elemento della topologia che contenga x .

Base di intorni di x := una famiglia $\mathfrak{B}_x$ di aperti contenenti x e tale che ogni aperto contenente x contenga almeno un elemento $B \in \mathfrak{B}_x$.

Base della topologia $\mathcal{T}$:= una famiglia $\mathfrak{B}$ di aperti tale che ogni elemento di $\mathcal{T}$ sia esprimibile come unione di elementi della base.

Pertanto una famiglia $\mathfrak{B}$ è una base per una topologia $\mathcal{T}$ se e solo se $\mathfrak{B}$ contiene una base di intorni per ogni $x \in \mathbb{X}$.

Un ricoprimento $\mathfrak{B}$ di $\mathbb{X}$ è una base per $\mathcal{T}$ [Royden VIII.2, Kolmogorov § II.5 Teor.2] se e solo se per ogni $x \in B_1 \cap B_2$ esiste $B_3 \in \mathfrak{B}$ tale che $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Subbase della topologia $\mathcal{T}$:= una famiglia $\mathfrak{B}_B$ di aperti tale che la famiglia di intersezioni finite di elementi di $\mathfrak{B}_B$ sia una base $\mathfrak{B}$ per $\mathcal{T}$.

In tal caso $\mathcal{T} := \{O \in 2^{\mathbb{X}} \mid x \in O \Rightarrow \exists B \in \mathfrak{B} \text{ con } x \in B \subset O\}$ è certo chiusa per unioni qualunque ed intersezioni finite ed ha $\mathfrak{B}$ come base (infatti $x \in O_1 \cap O_2 \Rightarrow \exists B_3 : x \in B_3 \subset O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$). Ne segue in particolare che una famiglia $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ non vuota di insiemi può essere una subbase per una topologia sull'insieme $\bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$.

È anche conveniente ricordare [Reed Simon p.96] i seguenti assiomi che possono, o meno, essere richiesti alla topologia dello spazio in esame.

1° assioma di numerabilità := per ogni $x \in \mathbb{X}$ esiste una base $\mathfrak{B}_x$ di intorni di x che sia (non più che) *numerabile*; e cioè per ogni $x \in \mathbb{X}$ esista una successione $\{N_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ di intorni di x tale che per ogni $N(x)$ esista $\bar{n}$ per il quale accade che $N_{\bar{n}}(x) \subset N(x)$.

2° assioma di numerabilità := la topologia $\mathcal{T}$ ammette una base $\mathfrak{B}$ *numerabile*.

Pertanto il secondo assioma implica il primo, ma non gli equivale: la topologia discreta su un insieme non numerabile non verifica il secondo assioma mentre verifica il primo.

Punto x interno ad un sottoinsieme $E \subset \mathbb{X}$:= un punto appartenente ad un intorno che sia interamente contenuto nell'insieme E .

Tutti i punti di un aperto E sono pertanto punti interni ad E .

Punto di aderenza, o di contatto, di $E \subset \mathbb{X}$ $:=$ un punto $x \in \mathbb{X}$, e non necessariamente di E , tale che ogni suo intorno contiene punti di E .

Punto di accumulazione, o cluster, di $E \subset \mathbb{X}$ $:=$ un punto $x \in \mathbb{X}$, e non necessariamente di E , tale che ogni suo intorno contiene punti di E distinti da x stesso.

Punto isolato di E $:=$ un punto di $\mathbb{X}$ che, essendo di aderenza per E , non è di accumulazione per E . Esso pertanto è necessariamente un punto di E .

A volte i punti di accumulazione di E vengono chiamati punti limite per l'insieme E . Più propriamente però si definisce:

Punto limite di una successione $:=$ un punto tale che *ogni* suo intorno contiene *quasi tutti* (cioè tutti a partire da un qualche $\nu \in \mathbb{N}$) i punti della successione; nel caso in cui un tale punto esista, (e lo spazio sia T2, vedi oltre), esso è unico, e la successione si dirà convergente. Una successione può invece ammettere più di un punto di accumulazione, ed in tal caso non è convergente. [si pensi per esempio a $(1, \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1 - \frac{1}{4}, \dots)$ che ammette zero ed uno come punti di accumulazione].

N.B. 1.1.2 Non è detto che il punto limite sia un punto della successione, nè che, appartenendo i punti della successione ad un qualche insieme questi contenga anche il punto limite della successione stessa. Inoltre si veda il prossimo N.B. 1.1.3 $\diamond$

Insiemi chiusi in $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ $:=$ gli insiemi $O^c := \mathbb{X} \setminus O$ con $O \in \mathcal{T}$; e cioè i complementari in $\mathbb{X}$ degli aperti di $\mathbb{X}$.

Chiusura $[E]$, in $\mathbb{X}$, di un sottoinsieme $E \subset \mathbb{X}$ $:=$ l'intersezione di tutti i sottoinsiemi chiusi di $\mathbb{X}$ che contengono E . Essa è quindi il più piccolo di tali insiemi.

È facile convincersi del fatto che i chiusi sono tutti e soli quegli insiemi che coincidono con la loro chiusura. Inoltre entrambi coincidono con la collezione dei loro punti di aderenza. Infatti $[E]^c$ è l'unione di tutti gli aperti che non contengono punti di E e quindi è fatto da punti interni ad E^c . Pertanto un insieme è chiuso in $\mathbb{X}$ se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione che sono in $\mathbb{X}$ (certo contiene tutti i suoi punti isolati); e quindi quando contiene ogni punto di $\mathbb{X}$ che sia limite di una qualche successione di punti dell'insieme. È poi evidente che la chiusura in $\mathbb{X}$ di un insieme è l'unione dell'insieme stesso e dei suoi punti di accumulazione appartenenti ad $\mathbb{X}$ e che non gli appartengono.

Derivato, $der(E)$, di E in $\mathbb{X}$ $:=$ l'insieme di tutti i punti di accumulazione di E in $\mathbb{X}$.

Interno $\overset{\circ}{E}$, in $\mathbb{X}$, di un sottoinsieme $E \subset \mathbb{X}$ $:=$ l'unione di tutti gli aperti di $\mathbb{X}$ contenuti in E .

∂E , in $\mathbb{X}$, di un sottoinsieme $E \subset \mathbb{X}$ $:= [E] \setminus \overset{\circ}{E} \equiv [E] \cap [E^c]$.

La frontiera di un insieme risulta pertanto costituita da soli punti isolati e da punti di accumulazione non interni all'insieme (siano essi appartenenti all'insieme o meno), da quei punti cioè in ogni intorno dei quali si trovano *sia* punti dell'insieme *sia* punti non dell'insieme. Inoltre, in quanto intersezione di chiusi la frontiera di un insieme è chiusa.

È importante notare che i concetti finora introdotti, quali per esempio quelli di punto di accumulazione, di limite, di convergenza etc. *non sono* concetti metrici bensì topologici.

N.B. 1.1.3 Un punto p è di aderenza per un insieme E se esiste una successione di punti di E convergente a p ; ed è di accumulazione quando gli elementi della successione possono essere presi distinti a coppie. Viceversa, affinché nell'affermazione qui sopra valga anche il *solo se*, e cioè affinché l'essere $x \in [E]$ implichi l'esistenza in E di una successione (numerabile) di punti che ammette x come limite, occorre supporre anche che E verifichi il 1° assioma di numerabilità [Kelley cap.II teor.8]. $\diamond$

Tale assioma è automaticamente verificato qualora $\mathcal{T}$ provenga da una:

Metrica d su $\mathbb{X}$ $:=$ una funzione $d(\cdot, \cdot) : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tale che sia:

- (i) Definita positiva: $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- (ii) Simmetrica: $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in \mathbb{X}$;
- (iii) Triangolare: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{X}$.

Spazio metrico $:=$ la coppia $(\mathbb{X}, d)$.

Palla, o sfera, $B_\varepsilon(x)$ di centro x e raggio $\varepsilon > 0$ $:= \{y \in \mathbb{X} \mid d(x, y) < \varepsilon\}$.

Le sfere $B_\varepsilon(x)$ possono essere decretate: “aperti”; con esse lo sono tutti i sottoinsiemi $U \subset \mathbb{X}$ i punti y dei quali sono contenuti in sfere $B_\varepsilon(x)$ contenute in U , e cioè gli insiemi costituiti da unioni di sfere.

Dato che $y \in B_\varepsilon(x) \Leftrightarrow d(x, y) < \varepsilon$ e che sussiste la $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, certo esiste $B_\varepsilon(y) \subset B_\varepsilon(x)$ purché siano $0 < \varepsilon \leq \varepsilon - d(x, y)$. Le sfere possono allora essere usate come base per la detta topologia sullo spazio $(\mathbb{X}, d)$. In tal modo lo spazio metrico assume anche la struttura di spazio topologico. Scegliendo poi $\varepsilon = 1/n$ si riconosce poi che tale spazio topologico verifica il primo assioma di numerabilità (ed anche il secondo se $\mathbb{X}$ è separabile, vedi oltre). Tale topologia prende il nome di Topologia indotta dalla metrica

Esempio 1.4 La topologia discreta, per esempio sull'insieme degli interi $\mathbb{Z}$, può essere costruita mediante la metrica che l'insieme $\mathbb{Z}$ eredita da $(\mathbb{R}; |\cdot|)$. Sono aperte le sfere $B_{1/2}(n)$ e quindi ogni $\{n\}$.

La stessa topologia (non le stesse sfere) può essere ottenuta, su un qualsiasi insieme, mediante la metrica che vale zero se due punti coincidono e vale uno altrimenti. È chiaro che i singleton: $\{x\}$ sono aperti anche in tale metrica, e quindi gli insiemi sono tutti aperti (e chiusi). Con questa metrica $\{x\} = B_1(x) = [B_1(x)] \neq \{y \mid d(x, y) \leq 1\} \equiv \mathbb{X}$ anche se, come per ogni altro spazio metrico, la chiusura di un insieme E è data da $[E] = \{x \mid d(x, E) := \inf_{y \in E} d(x, y) = 0\}$. In questo caso avviene che la chiusura della sfera unitaria non coincide con alcuna immagine inversa secondo $d^{-1}(x, \cdot)$ di alcun insieme chiuso. $\square$

Sia A un sottoinsieme di $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$.

Topologia relativa ad A $:=$ la topologia $\mathcal{T}_A$ definita su A dagli aperti $O_A := \{O \cap A; O \in \mathcal{T}\}$.

N.B. 1.1.5 Si noti che un aperto (chiuso) nella $\mathcal{T}_A$ non è, in generale, aperto (chiuso) anche rispetto alla $\mathcal{T}$. Tuttavia, se A è aperto (chiuso) in $\mathbb{X}$ allora ogni aperto (chiuso) rispetto alla $\mathcal{T}_A$ lo è anche rispetto alla $\mathcal{T}$. $\diamond$

Esempio 1.6 Una retta ed una circonferenza contenute in un piano sono sottoinsiemi chiusi del piano, ed entrambe (sotto)spazi topologici chiusi, rispetto alla topologia ereditata dalle intersezioni con le sfere in $\mathbb{R}^2$, e quindi anche aperti (come spazi topologici). Tuttavia, rispetto a tale topologia, la retta non è compatta, mentre lo è la circonferenza. $\square$

Sia poi $\sim$ una relazione di equivalenza fra gli elementi di $\mathbb{X}$.

Topologia quoziente rispetto alla relazione $\sim$ $:=$ la topologia definita sulla famiglia delle classi di equivalenza: $x^* \in \mathbb{X} \setminus \sim$ dagli aperti $\{U \subset \mathbb{X} \setminus \sim \mid \Pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}$ ove $\Pi : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X} \setminus \sim$ è la proiezione canonica $\Pi(x) = x^* \ni x$.

Esempio 1.7 Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, e sia $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ quando simultaneamente si ha $x^1 - y^1 \in \mathbb{Z}$ ed $x^2 - y^2 \in \mathbb{Z}$. Si chiama *Toro* $\mathbb{T}^2$ l'insieme $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2 \setminus \sim$ dotato della topologia quoziente. Esso eredita anche la struttura di gruppo mediante la $\mathbf{x}^* + \mathbf{y}^* := (\mathbf{x} + \mathbf{y})^*$. $\square$

I seguenti sono possibili assiomi di separazione per uno spazio topologico $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$:

- (T0) Punti $x, y \in \mathbb{X}$ distinti ammettono:
 - o un qualche intorno $N(x)$ tale che $N(x) \not\ni y$, oppure qualche intorno $N(y)$ tale che $N(y) \not\ni x$.
- (T1) Punti $x, y \in \mathbb{X}$ distinti ammettono intorni $N(x), N(y)$ tali che $N(x) \not\ni y$ ed $N(y) \not\ni x$.
- (T2) (Hausdorff) Punti $x, y \in \mathbb{X}$ distinti ammettono intorni disgiunti.
- (T3) In aggiunta al (T2) sia *Regolare*; si abbia cioè che per ogni chiuso $K \subset \mathbb{X}$ ed ogni $x \in \mathbb{X} \setminus K$ esistono due aperti $N(K), N(x)$ che siano disgiunti.
- (T $\frac{3}{2}$) In aggiunta al (T2) sia *Completamente Regolare*; si abbia cioè che per ogni chiuso $K \subset \mathbb{X}$ ed ogni $x \in \mathbb{X} \setminus K$ esiste $f : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$ continua tale che $f(x) = 1$ ed $f(K) = \{0\}$.
- (T4) In aggiunta al (T2) sia *Normale*; si abbia cioè che per ogni coppia di chiusi disgiunti K_1, K_2 esistono due aperti $N(K_1), N(K_2)$ che sono disgiunti.

Uno spazio topologico verifica (T1) se e solo se ogni singleton $\{x\}$ è chiuso. Di conseguenza ogni spazio (T4) è anche uno spazio (T2). . . D'altra parte è chiaro che $(T2) \Rightarrow (T1)$. *Ogni spazio metrico, se considerato topologico con la topologia indotta, verifica l'assioma (T4)*, [Kolmogorov p.96]. Viceversa se uno spazio topologico (T4) è anche a base numerabile allora la sua topologia $\mathcal{T}$ può essere indotta da una metrica.

La famiglia delle possibili topologie su uno spazio $\mathbb{X}$ risulta (parzialmente) ordinabile:

$\mathcal{T}_1$ più debole di $\mathcal{T}_2$ $:=$ quando ogni $O \in \mathcal{T}_1$ appartiene a $\mathcal{T}_2$; cioè quando: $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.

In tal modo le successioni in $\mathbb{X}$ che convergono rispetto a $\mathcal{T}_2$ lo fanno anche rispetto a $\mathcal{T}_1$. Pertanto se la topologia è troppo forte allora “poche” successioni convergono; ad esempio per la discreta convergono solo successioni che da un certo indice in poi assumono e mantengono lo stesso valore. Viceversa, una $\mathcal{T}$ troppo debole ammette “troppe” successioni convergenti. Ad esempio: $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{X}, A\}$, dichiara convergente una *qualunque* successione fatta di punti in A .

Insieme $E \subset (\mathbb{X}, d)$ limitato := esistono $y \in \mathbb{X}$ ed $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tali che $E \subset B_\varepsilon(y)$.

$B \subset A$ è denso in A := quando $A \subset [B]$. Quindi ogni punto di A è di aderenza per B e cioè: scelto comunque $x \in A$, o esso appartiene a B oppure è un punto di accumulazione di punti di B .

$B \subset \mathbb{X}$ è ovunque denso := quando B è denso in $\mathbb{X}$; ovvero: $\mathbb{X} \subset [B]$; o anche: ogni punto dello spazio è di aderenza per B .

$B \subset \mathbb{X}$ è affatto denso := quando la sua chiusura $[B]$ non contiene alcun aperto di $\mathbb{X}$, (i punti di aderenza per B sono non interni) ed in tal caso vicino ad ogni $y \in [B]$ cadono senz'altro punti di $\mathbb{X} \setminus B$.

Esempio 1.8 Come è ben noto, l'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali è ovunque denso nell'insieme dei reali $\mathbb{R}$, mentre in quest'ultimo l'insieme degli interi $\mathbb{Z}$ è affatto denso. $\square$

$(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ separabile := uno spazio topologico che ammette un sottoinsieme non più che numerabile e (ciononostante) ovunque denso. Ad esempio, $\mathbb{Q}$ è un tale insieme in $\mathbb{R}$ con la topologia standard. Con la topologia discreta, invece, $\mathbb{R}$ non è separabile.

Sono certo separabili gli spazi a base numerabile; (e non lo sono, per esempio, quelli che ammettono una infinità più che numerabile di aperti disgiunti).

Uno spazio $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ separabile e metrico è a base numerabile; infatti se $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è ovunque densa certo avviene che $\{B_{1/k}(x_n)\}_{k, n \in \mathbb{N}}$ è una base numerabile per $\mathcal{T}$.

Talvolta accade che lo spazio sia sufficientemente “semplice” da permettere l'introduzione di una struttura lineare:

Spazio vettoriale $\mathbb{V}$:= un gruppo commutativo che sia un $\mathbb{K}$ -modulo rispetto ad un campo $\mathbb{K}$.

Memento 1.1.9

$\square$

- Un gruppo (commutativo) è un insieme sul quale è definita una operazione binaria che sia associativa, (commutativa), con elemento neutro ed inverso;
- Un $\mathbb{K}$ -modulo è un gruppo (commutativo) descritto additivamente: “ $\oplus$ ” e tale che le operazioni del campo $\mathbb{K}$ siano “riconosciute” da quella del gruppo; ciò è per dire che: $a, b \in \mathbb{K}$ ed $x \in \mathbb{V}$ implicano, per esempio, $(a + b)x = ax \oplus bx$, etc.
- Un campo è un anello commutativo senza divisori dello zero e con una unità moltiplicativa;
- Un anello è un gruppo rispetto ad una operazione “ $+$ ” che ammetta anche un'altra operazione binaria “ $\cdot$ ” associativa e distributiva rispetto alla prima, e per la quale l'elemento neutro della prima: lo “zero”, è annullatore totale.

Pertanto uno spazio vettoriale è un gruppo commutativo: $\oplus$ che sia distributivo rispetto alle operazioni “ $+$ ”, “ $\cdot$ ”, e “ $\oplus$ ”, ed accetti l'unità moltiplicativa del campo. Esempi di spazi vettoriali sono lo spazio dei polinomi, lo spazio delle funzioni $C^0([a, b] \rightarrow \mathbb{R})$ (e cioè delle funzioni definite su un intervallo chiuso e limitato e a valori reali), lo spazio delle soluzioni di una equazione lineare. Non sono spazi vettoriali lo spazio delle sestuple di numeri esprimanti le probabilità di uscita (per esempio) delle facce di un dado, oppure lo spazio delle successioni di simboli in un qualche alfabeto, per esempio: $(0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, \dots)$

Nel seguito si indicherà con $\mathbb{V}$ un qualsiasi spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, che in generale è $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Norma su $\mathbb{V}$:= una funzione $\|\cdot\| : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ che sia:

- (i) definita positiva: $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{V}$; ed $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
- (ii) omogenea: $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\forall x \in \mathbb{V}, \alpha \in \mathbb{K}$;
- (iii) subadditiva: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in \mathbb{V}$.

Si osservi che la (iii) implica facilmente la: $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

Spazio normato := la coppia $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$.

Esempio 1.10 Lo spazio delle funzioni $C^0([a, b], \mathbb{R})$ definite su un intervallo chiuso e limitato, a valori reali, ed equipaggiato dalla funzione $\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)| dt$ è uno spazio normato: l'integrale è quello di Riemann. Allo stesso modo è normato lo spazio $(C^0([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ delle funzioni continue da $[a, b]$ in $\mathbb{R}$ equipaggiato della norma $\|f\|_2 := (\int_a^b |f(t)|^2 dt)^{1/2}$ (anche ora l'integrale è quello di Riemann). Si osservi che, per definizione, tali spazi sono limitati alle sole funzioni $C^0([a, b], \mathbb{R})$ per le quali la norma indicata ha valore finito. Questi spazi verranno indicati nel seguito con $C_1^0([a, b], \mathbb{R})$ e rispettivamente $C_2^0([a, b], \mathbb{R})$. Un altro spazio costruito sulle funzioni $C^0([a, b], \mathbb{R})$ e di grande interesse è quello per il quale la funzione norma è la $\|f\|_\infty := \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$. Lo spazio delle funzioni $C^0([a, b], \mathbb{R})$ tali che $\|f\|_\infty < \infty$ verrà indicato con $C_\infty^0([a, b], \mathbb{R})$. $\square$

Non è difficile convincersi del fatto che ogni norma induce una metrica:

$$d(x, y) := \|x - y\| ;$$

e questa risulterà una metrica ben particolare in quanto sarà non solo omogenea: $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|d(x, y)$, ma anche tale che $d(x, y) = d(x+c, y+c) = d(0, x-y)$. Pertanto sarà facile trovare metriche che non sono indotte da alcuna norma. È chiaro allora che proprietà vere su spazi metrici saranno a maggior ragione vere su spazi normati purchè essi vengano equipaggiati con la metrica indotta dalla norma.

Ancora più evoluta è infine la struttura di prodotto interno, detto anche

Prodotto scalare, o Struttura euclidea := una funzione $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}$ che, nel caso reale, sia:

- (i) definita positiva: $\langle x, x \rangle \geq 0$, ed $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$;
- (ii) simmetrica: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{V}$;
- (iii) bilineare: $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$;

mentre nel caso complesso sia:

- (i) definita positiva: $\langle x, x \rangle \geq 0$, ed $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$;
- (ii) Hermitiana-simmetrica: $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, $\forall x, y \in \mathbb{V}$;
- (iii) bilineare: $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \langle x, z \rangle$;

Spazio euclideo := la coppia $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, con $\mathbb{K} \equiv \mathbb{R}$, e $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$.

Spazio unitario := la coppia $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, con $\mathbb{K} \equiv \mathbb{C}$, e $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{C}$.

Ogni spazio euclideo (unitario) può essere considerato uno spazio normato purchè si assuma come norma la funzione $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Infatti, data la

Disuguaglianza di Schwarz := $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$
si ha che:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

N.B. 1.1.11 La disuguaglianza di Schwartz è conseguenza della:

$$\langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle = \lambda^2 \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle \geq 0,$$

e pertanto il suo discriminante $|\langle x, y \rangle|^2 - \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$ sarà senz'altro non positivo. $\diamond$

Il motivo del fare ricorso agli spazi euclidei risiede ovviamente nella potenza delle strutture che sono state definite su essi. Infatti, in virtù dell'essere questi non solo vettoriali normati ma anche metrici e topologici, risultano ben definiti non solo il concetto di combinazione lineare fra vettori, ma anche di distanze tra vettori, limiti, convergenze di successioni, etc., ed *in più* il concetto di angolo tra vettori, e quindi di proiezione ortogonale, di base ortonormale, etc. Si ricordi che

Vettori ortogonali $x \perp y$:= $\langle x, y \rangle = 0$.

Esempio 1.12 Oltre che il noto esempio della geometria classica: $\sum_{i=1}^n x_i y_i$, un altro esempio di prodotto scalare, sullo spazio delle funzioni da $C^0([a, b] \rightarrow \mathbb{R})$ che abbiano $\int_a^b f^2 < \infty$ (si veda l'Esempio 1.10) è quello nel quale la norma è ereditata dalla funzione: $\langle x, y \rangle := \int_a^b x(t)y(t)dt$; l'integrale è quello di Riemann. $\square$

Tuttavia strutture troppo sofisticate hanno ridotta applicabilità: se gli spazi in esame sono troppo complicati per permetterne l'uso, occorre fermarsi, nella gerarchia vista, alle strutture più semplici. Queste ultime d'altra parte, essendo poco potenti, avranno necessità di calcoli laboriosi con risultati meno efficaci. Ad esempio, il concetto di convergenza, già presente negli spazi topologici, può essere in questi poco selettivo se la topologia non è sufficientemente fine. Per renderla tale può convenire, qualora possibile, generarla per mezzo delle sfere, e trovare così che una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente a $x \in \mathbb{X}$ quando $d(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$; è chiaro che in tal caso si parla di convergenza in metrica; a sua volta, quando su spazi "semplici" si vogliano definire delle sfere "semplici", e cioè quando la metrica sia indotta da una norma, si parlerà di convergenza in norma, etc.

Quando è possibile si fa principalmente uso degli spazi metrici in quanto, come si è visto, essi già possiedono notevoli proprietà topologiche (sono (T4) nella topologia indotta dalla metrica) e ciò garantisce l'unicità in metrica del limite delle successioni convergenti; ma, in più, su tali spazi è possibile introdurre il seguente importante criterio (necessario):

Se una successione di punti in uno spazio metrico è convergente (ad un punto dello stesso spazio) essa necessariamente verifica il Criterio di Cauchy; ovvero è una:

Successione di Cauchy := dato comunque $\varepsilon > 0$ esiste $\nu(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$\text{per tutti gli } n, m \geq \nu(\varepsilon) \quad \text{si ha} \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Infatti: se la successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente ad $\bar{x}$ e se $n > \nu(\varepsilon)$ si ha: $d(x_n, \bar{x}) < \varepsilon/2$; ma in tal caso per ogni $m > n$ si ha che $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, \bar{x}) + d(x_n, \bar{x}) < \varepsilon$.

Memento 1.1.13 Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni definite su un sottoinsieme D di uno spazio metrico $(\mathbb{X}, d_1)$ ed a valori in $(\mathbb{Y}, d_2)$. Sussistono le seguenti definizioni. $\square$

Convergenza uniforme di f_n ad f := dato comunque $\varepsilon > 0$ esiste $\nu(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che, comunque si scelga $x \in D$, se $n \geq \nu(\varepsilon)$ si ha $d_2(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Successione di funzioni uniformemente di Cauchy := dato $\varepsilon > 0$ esiste $\nu(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che, comunque si scelga $x \in D$, se $n, m \geq \nu(\varepsilon)$ si ha $d_2(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$.

È essenziale tener presente che la condizione di Cauchy non è sufficiente alla convergenza: vi sono molti esempi di spazi metrici nei quali esistono successioni di punti che verificano il criterio di Cauchy e che ciononostante non ammettono (in quello spazio) alcun punto limite. In generale il motivo per cui ciò avviene è che la metrica risulta troppo poco selettiva per quello spazio, e quindi risultano di Cauchy anche successioni che, per quello spazio, non sono "sufficientemente" convergenti.

Se, come è comodo, si vuole decidere circa la convergenza o meno di una successione (verso un punto che faccia parte dello stesso spazio) solo controllando che essa verifichi il criterio di Cauchy, e cioè con un controllo sulla sola metrica e fra punti "al finito" (e quindi che si conoscono), occorre o restringere quest'ultima ovvero ampliare lo spazio.

Spazio metrico Completo := uno spazio così ampio (rispetto alla metrica fissata) che ammette (un) punto limite per ogni sua successione di Cauchy.

Come si è detto tale punto è unico in metrica.

Esempio 1.14 Lo spazio: $C^0([a, b], \mathbb{R})$ delle $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Si osservi innanzi tutto, come visto nell'Esempio 1.10, che questo spazio può essere equipaggiato da varie e diverse norme; entrambe quelle viste nel detto esempio sono effettivamente delle norme in tale spazio solo perché le funzioni sono continue e l'integrale è quello secondo Riemann, in tal caso infatti $f(t)(t_1 - t_2) = 0$ per ogni $t_1, t_2 \in [a, b]$ e $t_1 \leq t \leq t_2$ implicano che $f(t) = 0 \quad \forall t \in [a, b]$.

Fatto n° 1 Lo spazio detto è completo rispetto alla metrica indotta dalla $\|f\|_\infty := \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$.

Dimostrazione Se $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy rispetto ad essa, allora è anche Cauchy uniforme ed

$$\exists \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N} : n, m > \nu(\varepsilon) \implies |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon \quad \text{per ogni } t \in [a, b],$$

e pertanto la successione è uniformemente convergente.

Di conseguenza, per ciascun t la successione (numerica) $\{f_n(t)\}$ è di Cauchy, e quindi per il postulato di completezza di $\mathbb{R}$ (e cioè in effetti per la definizione stessa di $\mathbb{R}$) esiste il valore $f(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$. Sia $f : t \mapsto f(t)$ la funzione così definita punto per punto; essa è il $\|\cdot\|_\infty$ -limite della successione in quanto, purché m ed n siano abbastanza grandi ed $m > n$ arbitrario, per tutti gli $t \in [a, b]$ si ha che $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon + |f_m(t) - f(t)| < \varepsilon$.

Inoltre essa risulta continua su $[a, b]$, infatti è possibile trovare $\nu(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ e $\delta(\varepsilon) > 0$ (indipendenti l'uno dall'altro) tali che se $n > \nu(\varepsilon)$ ed $h > \delta(\varepsilon)$, allora:

$$|f(t+h) - f(t)| \leq |f(t+h) - f_n(t+h)| + |f_n(t+h) - f_n(t)| + |f_n(t) - f(t)| \leq 3\varepsilon.$$

Ovvero: *Il limite uniforme di funzioni continue è continuo.*

Fatto n° 2 Lo spazio detto *non* è completo rispetto alla metrica indotta da $\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)| dt$.

Dimostrazione Si consideri per esempio la successione:

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & -1 \leq t \leq 0 \\ nt & 0 < t \leq 1/n \\ 1 & 1/n < t \leq 1. \end{cases}$$

Essa converge puntualmente, *non uniformemente*, alla funzione

$$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{data da} \quad f(t) = \begin{cases} 0 & -1 \leq t \leq 0 \\ 1 & 0 < t \leq 1, \end{cases}$$

in quanto $|f(t) - f_n(t)| = |1 - nt|$ per $0 \leq t \leq 1/n$, e quindi, fissato t_0 basta che sia $n(t_0) \geq 1/t_0$ per avere $\forall t$ distanza nulla dal punto limite. Tale funzione, pur essendo il limite nella norma $\|\cdot\|_1$ della $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, *non appartiene allo spazio* $C^0([-1, 1] \rightarrow \mathbb{R})$. Né può esistere in $C^0([-1, 1])$ una funzione $g \neq f$ che sia il limite in norma $\|\cdot\|_1$ della successione detta; infatti dovendo essere $\|f - g\|_1 < \varepsilon$ per ogni ε ne segue $\|f - g\|_1 = 0$, e quindi la f e la g possono differire solo su un insieme di punti che non contiene aperti, e g non può certo essere continua. Nello spazio $C^0([a, b], \mathbb{R})$ risulta $B_\varepsilon^{(\infty)}(f) \subset B_{(b-a)\varepsilon}^{(1)}(f)$ perché $\|f\|_1 \leq (b-a)\|f\|_\infty$, e pertanto $\mathcal{T}_\infty \supset \mathcal{T}_1$ e la $\|\cdot\|_\infty$ -convergenza implica la $\|\cdot\|_1$ -convergenza. In $\mathbb{R}^n$ invece le due condizioni sono l'una conseguenza dell'altra, giacché è $\sum_{i=1}^n |x^i| \leq n \sup_{i \in \{1, \dots, n\}} |x^i| \leq n \sum_{i=1}^n |x^i|$ ovvero $\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq n \|x\|_1$.

Si noti che la successione $f_n(t)$ di questo esempio è di *Cauchy* rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$; infatti $\|f_m - f_n\|_1 = |\frac{1}{2n} - \frac{1}{2m}| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{m, n} 0$. Viceversa *non è di Cauchy* rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$; infatti $\|f_n - f_m\|_\infty = 1 - m/n$ se $n > m$; e allora $\forall \nu \in \mathbb{N}$ ed $m > \nu$ esiste $n > \nu$ tale che $1 - \varepsilon < 1 - m/n$. È invece ancora di *Cauchy* rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare: $\|\cdot\|_2$; infatti gli integrali $\int_0^{1/n} dt$ sia di nt che di $(nt)^2$ tendono a zero al crescere di n , ed analogamente gli $\int_{1/n}^1 dt$ tendono ad uno. Ciò mostra che

Fatto n° 3 Lo spazio $C_2^0([a, b], \mathbb{R})$ così come lo spazio $C_1^0([a, b], \mathbb{R})$ *non* sono completi. $\square$

Come ulteriore esempio si consideri che lo spazio $C^1([a, b], \mathbb{R})$ non è completo rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$. Infatti, per esempio la $x_n(\xi) := \frac{1}{2} - \sqrt{\xi^2 + \frac{1}{n}}$, $\xi \in [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$ è *Cauchy* in norma $\|\cdot\|_\infty$ ma converge verso la funzione $\frac{1}{2} - |\xi|$ che non è derivabile. Esso è invece completo rispetto alla norma $\|x\|^* := \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$, e rispetto ad essa certo la successione $\{x_n(\xi)\}_{n \in \mathbb{N}}$ vista qui sopra non è di *Cauchy*. $\square$

Nel seguito verrà usata la seguente proprietà: *in uno spazio metrico completo ogni famiglia di insiemi chiusi non vuoti $\{C_n\}_{n=1,2,\dots}$ tali che $C_n \supset C_{n+1}$ e $|C_n| \searrow 0$, essendo $|C| := \text{diam } C$, ha uno ed un solo punto di intersezione.* In particolare, [Kolmogorov II 3.2]:

Proposizione 1.1.15 Uno spazio metrico $(\mathbb{X}, d)$ è completo se e solo se ogni successione $\{[B_{\varepsilon_n}(x_n)]\}_{n \in \mathbb{N}}$ di sfere chiuse ed incluse, cioè tali che $[B_{\varepsilon_n}(x_n)] \subset [B_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1})]$, che abbia $\varepsilon_n \rightarrow 0$, ammette (unico) $x \in \mathbb{X}$ tale che $x \in [B_{\varepsilon_n}(x_n)]$ per ogni n . $\square$

Dimostrazione $(\Rightarrow)$

- $d(x_{n+p}, x_n) \leq \varepsilon_n$ e quindi $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è *Cauchy*;
- il suo limite appartiene ad ogni $[B_{\varepsilon_n}(x_n)]$ perchè ciascuna di queste contiene quasi tutta la successione;
- il limite è unico (per assurdo: si usi la disuguaglianza triangolare).

Viceversa ($\Leftarrow$)

- Se una $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è Cauchy esisterà una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $\{B_{2^{-k}}(x_{n_k})\}_{n \in \mathbb{N}}$ ha la richiesta proprietà di inclusione;
- il punto in comune di tale successione di sfere è punto limite per la successione $\{x_{n_k}\}_{n \in \mathbb{N}}$;
- l'essere di Cauchy impone che anche $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ abbia tale x come (unico) limite.

□

Nei casi in cui lo spazio metrico non sia già completo rispetto alla data metrica, e non si voglia cambiare quest'ultima, può convenire *completare* lo spazio metrico $(\mathbb{X}, d)$ “aggiungendovi le successioni di Cauchy”. Con ciò si vuole ricordare il seguente procedimento:

- Si definiscono equivalenti successioni di Cauchy $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{X}$ tali che $d(x_n, y_n) \xrightarrow{n} 0$;
- Si considerano “punti” le classi di equivalenza x^* di successioni di Cauchy; le classi sono costruite mediante la relazione di equivalenza del punto precedente. Si considera poi come nuovo spazio l'insieme di tutti questi punti: $\mathbb{X}^* := \{x^*\}_{\{x_n\} \subset \mathbb{X}}$
- Si definisce su questo spazio la metrica: $d^*(x^*, y^*) := \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$ per due qualunque fissati elementi $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in x^*$ ed $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in y^*$. Si dimostra, [Kolmogorov II.3.4], che lo spazio $(\mathbb{X}^*, d^*)$ così costruito ha, fra le altre, le proprietà:
- Identificando $x \in \mathbb{X}$ con le successioni costanti: $x_n \equiv x \quad \forall n \in \mathbb{N}$, si ha che $\mathbb{X}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{X}^*$;
- la chiusura $[\mathbb{X}]$ di $\mathbb{X}$, considerato come sottoinsieme di $\mathbb{X}^*$, coincide con $\mathbb{X}^*$;
- lo spazio metrico $(\mathbb{X}^*, d^*)$ è completo. Infatti se $\{x_m^*\}_{m \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $(\mathbb{X}^*, d^*)$, scelta una successione $\{x_{n,m}\}_{n \in \mathbb{N}}$ per ciascun x_m^* , si ha che la successione diagonale: $\{x_{1,1}, x_{2,2}, \dots\}$ è di Cauchy in $(\mathbb{X}, d)$ (giacché $d(x_{nn}, x_{mm}) < \varepsilon$), pertanto è in $\mathbb{X}^*$, ed è il d^* -limite della $\{x_m^*\}_{m \in \mathbb{N}}$, (giacché $d(x_{nm}, x_{nn}) < \varepsilon$).

N.B. 1.1.16 Se si fosse seguito un altro procedimento, arrivando ad un altro $\mathbb{X}^{**}$ con le stesse proprietà, i due spazi $\mathbb{X}^*$ ed $\mathbb{X}^{**}$ sarebbero tali da ammettere una corrispondenza $\phi : \mathbb{X}^* \rightarrow \mathbb{X}^{**}$ tale che $\phi(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{X}$, ed inoltre $d^*(x^*, y^*) = d^{**}(\phi(x^*), \phi(y^*))$. ◇

N.B. 1.1.17

Sottoinsiemi di spazi metrici completi hanno, in essi, chiusura completa.

Sottoinsiemi completi di spazi metrici sono chiusi. Pertanto:

sottoinsiemi di spazi metrici completi sono chiusi se e solo se sono completi. ◇

Spazio di Banach := uno spazio *vettoriale, normato, completo*.

Dall'Esempio 1.14 segue che $C_\infty^0([a, b], \mathbb{R})$ è Banach, mentre non lo sono né $C_1^0([a, b], \mathbb{R})$ né $C_2^0([a, b], \mathbb{R})$.

Nota 1.1.18 Per completare quest'ultimo (per esempio) si può seguire il seguente procedimento, e poi invocare il N.B. 1.1.16.

Si introduce una conveniente generalizzazione dell'integrale di Riemann: l'*integrale di Lebesgue*; esso si definisce nel seguente modo sulle funzioni $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ che, se non continue, almeno siano “misurabili”, cioè tali da avere sufficientemente “semplici” le controimmagini degli aperti. Suddivisa in (un numero finito di) intervallini l'immagine della funzione si può assegnare a ciascuna controimmagine di questi la sua grandezza o “misura”, poi moltiplicarla per il valore (massimo, o minimo, sull'intervallino) della funzione, quindi ottenere il valore dell'integrale come limite delle somme di tali prodotti, avendo eseguita la ripartizione dell'immagine in tutti i modi possibili. Va notato che tale integrale non può distinguere fra loro funzioni che siano diverse su insiemi di misura nulla: per esempio funzioni

diverse solo su un'insieme numerabile di punti. Si considera allora lo spazio di tutte le classi di equivalenza di quelle funzioni che hanno $\|f\|_2 := \int |f|^2 < \infty$, intendendo che $f \sim g$ quando $\int |f - g|^2 = 0$. In tal modo la funzione $\|\cdot\|_2$ ha nuovamente tutte le proprietà di una norma, e si indica con $L_2([a, b] \rightarrow \mathbb{R})$ tale spazio normato. In definitiva, i punti di L_2 sono classi di equivalenza di successioni di Cauchy di funzioni a gradini, [Phillips V.4].

Così facendo si ottiene uno spazio completo rispetto alla norma (Teorema di Riesz-Fisher, [Royden vi.3.5]), e nel quale lo spazio $C_2^0([a, b], \mathbb{R})$ è denso. $\triangleright$

Esempio 1.19 Nello spazio delle successioni di numeri dei quali solo un numero finito sono non nulli, si consideri la successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} := \left\{ \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \dots, \frac{1}{2^n}, 0, 0, \dots \right) \right\}$. Se in tale spazio si introduce la norma $\|x\| := \sum_{i=0}^{\infty} |x^i|$ dove x^i è il valore dell'i-mo elemento di x , si ha che la successione detta, pur essendo di Cauchy, non converge ad alcun elemento dello spazio. Pertanto la sfera: $\{x \mid \|x\| \leq 2\}$ è un insieme chiuso ma non completo. Esistono cioè insiemi chiusi tali da ammettere successioni di Cauchy che non convergono, (ovvero tali da ammettere $F_n \supset F_{n+1}$ con $|diam F_n| \searrow 0$ e con intersezione vuota); se però una successione converge (nello spazio) essa lo fa ad un punto dell'insieme. $\square$

Siano ora $(X, d), (X', d')$ spazi metrici. Si ricordino le seguenti definizioni:

Funzione $f: X \rightarrow X'$:= una relazione: $f \subset X \times X'$ tale che

- (i) $x \in X \Rightarrow \exists x' \in X' : (x, x') \in f$;
- (ii) $(x, x') \in f$ ed $(x, x'') \in f$ implicano $x' = x''$;

in generale il punto x' viene indicato con $f(x)$.

Suriettiva := una funzione tale che per ogni $x' \in X'$ esiste almeno un $x \in X$ per il quale $x' = f(x)$, ovvero $f(X) = X'$, ma che non sia necessariamente invertibile.

f ripartisce X in classi di equivalenza: $[y] := \{x \in X \mid f(x) = f(y)\}$; tale *insieme* viene anche indicato con $f^{-1}(x')$ se con x' si è indicato il comune valore $f(x) = f(y), \forall x \in [y]$.

Iniettiva := una funzione tale che $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, e quindi è una funzione che è $1 \longleftrightarrow 1$ fra i suoi valori di definizione e le loro immagini.

Bijettiva o invertibile := Una funzione che sia contemporaneamente suriettiva e iniettiva: una funzione cioè che è $1 \overset{onto}{\longleftrightarrow} 1$.

Una funzione iniettiva è una funzione invertibile sulla sua immagine.

Continua su X := una funzione per la quale le contro-immagini di insiemi aperti sono aperte.

Equivalentemente: quando, dato comunque $x \in X$ ed $N(f(x)) \subset X'$ esiste $N(x) \subset X$ tale che $N(x) \subset f^{-1}(N(f(x)))$.

Equivalentemente: quando le contro-immagini di insiemi chiusi sono chiuse.

Equivalentemente: quando, per ogni $E \subset X$, accade che $f([E]) \supset [f(E)]$.

Equivalentemente: quando, per ogni $B \subset X'$, si ha $f^{-1}(int(B)) \subset int(f^{-1}(B))$.

Ne segue che dato comunque $\bar{x} \in X$ ed un qualunque intorno $N(f(\bar{x}))$ la sua immagine inversa ha $\bar{x}$ nel suo interno, e quindi anche quasi tutti gli x_n qualora essi esistano tali che $x_n \rightarrow \bar{x}$. D'altra parte, dalla $N(\bar{x}) \subset f^{-1}(N(f(\bar{x})))$ segue $f(N(\bar{x})) \subset N(f(\bar{x}))$; pertanto una f continua trasforma successioni convergenti a $\bar{x}$ in successioni convergenti a $f(\bar{x})$.

Viceversa, se ogni successione convergente ad $\bar{x}$ viene trasformata in una successione convergente ad $f(\bar{x})$ la f è continua. Infatti, se non lo fosse, dati comunque $\bar{x} \in X$ ed un intorno $N(f(\bar{x}))$ l'insieme $f^{-1}(N(f(\bar{x})))$ potrebbe non contenere alcun $N(\bar{x})$; ma allora in ogni arbitrario $N(\bar{x})$ si potrebbero trovare degli x tali che $f(x) \notin N(f(\bar{x}))$. Tuttavia, se lo spazio verifica il primo assioma di numerabilità, mediante la successione $\{N_n(\bar{x})\}_{n \in \mathbb{N}}$

della definizione di tale assioma, è possibile scegliere una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di punti $x_n \in N_n(\bar{x})$ convergente ad $\bar{x}$ pur avendo $f(x_n) \notin N(f(\bar{x}))$, e ciò è contrario all'ipotesi.

Le precedenti definizioni e proprietà valgono nei più generali spazi topologici. Quando invece la topologia è indotta da una metrica si possono (ed è anzi conveniente) ricorrere alle seguenti. Una funzione f fra X ed X' metrici è continua in $\bar{x}$ se e solo se:

$$\forall \varepsilon, \exists \delta(\varepsilon, \bar{x}) : B_{\delta(\varepsilon, \bar{x})}(\bar{x}) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(\bar{x}))).$$

Equivalentemente: $x \in B_{\delta(\varepsilon, \bar{x})}(\bar{x}) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(\bar{x}))$; ciò in conseguenza del:

N.B. 1.1.20 Le precedenti considerazioni fanno largo uso delle seguenti relazioni, che sussistono per ogni applicazione $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}'$ che sia una funzione (e cioè verifichi la definizione data sopra). Si ricordi che con il simbolo f^{-1} si intende un'applicazione che non è generalmente una funzione. La prima di esse è

$$ff^{-1}(B) \subseteq B; \quad f^{-1}f(B) \supseteq B. \quad (1.1)$$

Nella (1.1) le inclusioni possono essere strette: per esempio per la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = 0$, si ha che $ff^{-1}[-1, 1] = 0 \subset [-1, 1]$. Analogamente la $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ implica $f^{-1}f[-2, 0] = \mathbb{R} \supset [-2, 0]$.

Per la prima delle (1.1) l'uguale sussiste se $\forall y \in B, \exists x: y = f(x)$, e cioè si ha che

$$B \subset f(\mathbb{X}) \quad \Rightarrow \quad f(f^{-1}(B)) = B.$$

D'altra parte l'inclusione è valida poiché se $\bar{y} \in ff^{-1}(B)$ fosse fuori B dovrebbe esistere $\bar{x}$ in $f^{-1}(B)$ per il quale $f(\bar{x}) = \bar{y}$ malgrado $\bar{y} \notin B$ e questa è una contraddizione.

Per la seconda delle (1.1) l'uguale sussiste se B contiene, per ogni suo x , ogni altro punto x' tale che $f(x) = f(x')$. L'inclusione è valida poiché se $\bar{x} \in B$ fosse fuori $f^{-1}f(B)$, pur esistendo $\bar{y} = f(\bar{x})$, dovrebbe essere $\bar{y} \notin f(B)$ malgrado $\bar{x} \in B$. Ne segue che $f(D) \subset B \Leftrightarrow D \subset f^{-1}(B)$, mentre $D \subset B \Rightarrow f(D) \subset f(B)$.

Ulteriori utili relazioni sono le seguenti. Sia $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una famiglia di insiemi; allora:

$$\begin{aligned} f(\cup_{\alpha \in A} E_\alpha) &= \cup_{\alpha \in A} f(E_\alpha) & f^{-1}(\cup_{\alpha \in A} E_\alpha) &= \cup_{\alpha \in A} f^{-1}(E_\alpha) \\ f(\cap_{\alpha \in A} E_\alpha) &\subset \cap_{\alpha \in A} f(E_\alpha) & f^{-1}(\cap_{\alpha \in A} E_\alpha) &= \cap_{\alpha \in A} f^{-1}(E_\alpha) \\ f^{-1}(\mathbb{Y} \setminus B) &= \mathbb{X} \setminus f^{-1}(B) \end{aligned}$$

(La $f(D \cap B) \subset f(D) \cap f(B)$ è stretta se esistono $x \in D \setminus B$ ed $y \in B \setminus D$ tali che $f(x) = f(y)$).

Per altre utili relazioni si vedano [Royden cap.I.3] e [Kelley cap.IV teor.1] $\diamond$

N.B. 1.1.21 Per parlare di continuità in spazi metrici sono necessarie *due* metriche: l'una nello spazio di partenza l'altra in quello di arrivo, così come sono necessarie due topologie per la semplice continuità in spazi topologici. Ad esempio $\mathcal{T}_1$ è più debole di $\mathcal{T}_2$, e cioè $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, se e solo se la mappa identica da $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_2)$ in $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_1)$ è continua. Sia $C_1 := C((\mathbb{X}, \mathcal{T}_1) \rightarrow (\mathbb{X}', \mathcal{T}'))$ la famiglia delle funzioni $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}'$ continue secondo la topologia $\mathcal{T}_1$ e C_2 quelle continue secondo la $\mathcal{T}_2$. Si ha che $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ se e solo se $C_1 \subset C_2$. In particolare, tutte le funzioni $f \in C_1$ sono continue se $\mathcal{T}_1$ è la topologia discreta; solo le costanti sono continue se $\mathcal{T}_1$ è la topologia banale. (La famiglia delle prime lascia convergenti solo le successioni costanti, quella delle seconde ogni successione). $\diamond$

Divagazione.

Dato $\mathbb{X}$ e definita su esso una famiglia F di funzioni a valori reali $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, o: funzionali su $\mathbb{X}$, è sempre possibile definire una topologia $\mathcal{T}_F$ su $\mathbb{X}$ tale che ogni $f \in F$ sia continua (rispetto a $\mathcal{T}_F$): basta usare come sua base la famiglia $\mathfrak{B}$ delle *intersezioni finite* degli insiemi $B = f^{-1}(O)$, con O aperto in $\mathbb{R}$ ed $f \in F$. Equivalentemente, basta usare come base di intorni di x , detti *Intorni deboli*, la famiglia $\mathfrak{B}_f(x)$ delle intersezioni finite degli insiemi $B_x := f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ e cioè la famiglia degli insiemi $B_x := \{x' \mid |f_i(x') - f_i(x)| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, k\}$, con k qualunque finito ed $\{f_i\}_{i=1, \dots, k} \subset F$.

Si può notare che $(\mathbb{X}, \mathcal{T}_F)$ è Hausdorff se e solo se " F separa i punti di $\mathbb{X}$ " e cioè quando per ogni coppia $x, x' \in \mathbb{X}$, $x \neq x'$, si ha che esiste $f \in F$ tale che $f(x) \neq f(x')$.

La topologia $\mathcal{T}_F$ è detta Topologia debole generata da F in quanto è senz'altro $\mathcal{T}_F \subseteq \mathcal{T}$ se $\mathcal{T}$ è una qualsiasi topologia per la quale le $f \in F$ siano già continue. Le due topologie $\mathcal{T}_F$ e $\mathcal{T}$ potranno coincidere solo quando le funzioni continue sono "abbastanza numerose".

Inoltre è evidente che se $F_1 \subset F_2$ certo risulterà $\mathcal{T}_{F_1}$ non più forte di $\mathcal{T}_{F_2}$.

In base a queste osservazioni, dati uno spazio topologico $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ e, rispettivamente, uno spazio normato $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$, si definiscono:

Topologia debole su $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$:= la topologia $\mathcal{T}_C$ generata dalla famiglia $C(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ dei funzionali continui su $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$.

Topologia debole su $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$:= la topologia $\mathcal{T}_L$ generata dalla famiglia $L(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ dei funzionali lineari continui su $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$.

È chiaro che sia la $\mathcal{T}_C$ che la $\mathcal{T}_L$ sono non più forti della topologia $\mathcal{T}$ o, rispettivamente, di quella indotta dalla norma $\|\cdot\|$, in quanto esse sono le più deboli topologie per le quali le funzioni in C (o in L) siano continue.

Convergenza debole $:=$ la convergenza rispetto alla topologia debole.

Si noti che sia $\mathcal{T}_C$ che $\mathcal{T}_L$ possono non verificare il primo assioma di numerabilità e quindi possono non essere descrivibili con il linguaggio delle successioni. Tuttavia si osserva che:

$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge debolmente ad $\bar{x} \in \mathbb{X}$, e si indica anche con $x_n \xrightarrow{w} \bar{x}$, se e solo se per ogni funzionale continuo $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ si ha che la $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge (in $\mathbb{R}^1$) ad $f(\bar{x})$.

La condizione, certo necessaria in base alla definizione di $\mathcal{T}_C$, se è verificata per una certa successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{X}$ permette di trovare, dato un qualunque intorno debole $N(\bar{x})$ di $\bar{x}$, un conveniente $\nu \in \mathbb{N}$ che renda simultaneamente vere tutte le $|f_i(x_n) - f_i(\bar{x})| < \varepsilon$ per $i = 1, \dots, k < \infty$ ed $n \geq \nu$, mostrando così che $N(\bar{x})$ contiene quasi tutti gli x_n . (Stesse affermazioni si possono fare nel caso vettoriale con l'insieme dei funzionali lineari continui). Tale tipo di convergenza non va confusa né con quella standard in $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ vista all'inizio del paragrafo, né con quella “forte” definita sugli operatori lineari $\{\mathcal{T}_n\}_{n=1,2,\dots}$ su $\mathbb{X}$, per la quale $\mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{T}$ quando per ogni $x \in \mathbb{X}$ si ha che, in norma, $x_n := \mathcal{T}_n x \rightarrow \mathcal{T}x =: \bar{x}$, e che equivale alla convergenza uniforme.

In uno spazio $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ la convergenza debole può essere usata in modo non troppo complicato (Kolmogorov IV § 3.2) in conseguenza del fatto che: se una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge debolmente in $\mathbb{V}$, allora essa è necessariamente limitata in norma, e cioè esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta $\|x_n\| \leq c$. (È questa una conseguenza del fatto (cfr. Teor 4 App.1 parte 2) che risulta limitata la successione numerica $f(x_n)$ che si ottiene per ogni funzionale lineare continuo f su $\mathbb{V}$). Per cui ogni sottoinsieme di $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ che sia debolmente limitato lo è anche fortemente.

Ciò permette di verificare facilmente la convergenza debole di una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{X}$ in uno spazio $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$. Sia $\mathbb{E}^*$ lo spazio dei funzionali lineari continui su $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ e si ricordi (si veda: [Kolmogorov p123]) la definizione di

Involuppo lineare o Linear hull di un sottoinsieme $\mathbb{E}_0^* \subset \mathbb{E}^*$ $:=$ l'intersezione di tutte le varietà lineari contenenti $\mathbb{E}_0^*$.

Esso pertanto è l'insieme (con n arbitrario ma finito)

$$\text{hull}(\mathbb{E}_0^*) := \left\{ v \in \mathbb{E}^* \mid v = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n \text{ per certi } f_i \in \mathbb{E}_0^*, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n < \infty \right\}$$

di tutti i vettori di $\mathbb{E}^*$ che si possono ottenere come combinazioni lineari finite di vettori di $\mathbb{E}_0^*$.

Si dimostra che
una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in uno spazio $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ converge debolmente ad $x \in \mathbb{V}$ se (e, certo, solo se)

- la successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata;
- per qualche $\mathbb{E}_0^* \subset \mathbb{E}^*$ che abbia involuppo lineare $\text{hull}(\mathbb{E}_0^*)$ ovunque denso in $\mathbb{E}^*$ (fortemente), accada che:

$$\text{in } \mathbb{R}, \quad f(x_n) \xrightarrow{n} f(x) \quad \text{per ogni } f \in \mathbb{E}_0^*.$$

Come si è detto, $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}_C$ possono coincidere solo se C contiene “abbastanza” funzioni continue, e quindi $\mathcal{B}$ abbastanza intorni, ed in particolare se per ogni chiuso K ed $x \notin K$ esiste $f \in C$ tale che $f(x) = 1$ ed $f(y) = 0$ se $y \in K$, (in tal modo C separa i punti di $\mathbb{X}$). D'altra parte sussiste il Lemma di Uryshon: Se $\mathbb{X}$ è uno spazio (T4) dati comunque due chiusi disgiunti K_1, K_2 esiste $f: \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$ continua che vale zero su K_1 ed uno su K_2 . Pertanto se $\mathbb{X}$ è (T4) ed F è l'insieme delle funzioni continue su $\mathbb{X}$ (non necessariamente lineari) allora si ha $\mathcal{T} \equiv \mathcal{T}_C$, (Royden p.148). Va osservato però (Royden p.201) che nel caso degli spazi vettoriali normati generalmente la convergenza debole $\mathcal{T}_L$, e cioè quella generata dai funzionali lineari, è più debole della convergenza in norma e coincide, per successioni limitate, con quella puntiforme. Quest'ultima in generale è anche più debole della $\mathcal{T}_L$ dato che la subbase è fatta con delle distribuzioni δ anziché con delle arbitrarie funzioni $f \in \mathbb{V}^*$.

Può essere utile prendere in esame i seguenti esempi.

Esempio 1.22 Gli insiemi $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^1 \in O \text{ aperto in } \mathbb{R}^1; \quad x^2 \in \mathbb{R}^1 \text{ fissato}\}$ possono essere presi come base per una topologia i cui aperti V sono i prodotti $O \times \{x^2\}$. Tuttavia questa non coincide con la topologia su $\mathbb{R}^2$ con metrica euclidea, (quella “usuale”), coincide invece con la topologia generata dalle funzioni coordinate: $\pi^1(x) := x^{(1)}$ ed $\pi^2(x) := x^{(2)}$ e che ha per aperti i prodotti $O_1 \times O_2$.

Più in generale, si chiama

Spazio prodotto $\mathbb{P}$, (o anche S^A) $:=$ uno spazio $\mathbb{P} := \prod_{\alpha} S_{\alpha}$ (con α in un insieme di indici A), avente come elementi gli insiemi $\{x^{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ con $x^{\alpha} \in S_{\alpha}$.

Topologia prodotto $\mathcal{T}_{\Pi}$ $:=$ la topologia debole generata in $\mathbb{P}$ dalla famiglia delle proiezioni $\pi^{\alpha}: x \rightarrow x^{\alpha}$.

Affinché $\mathcal{T}_{\Pi}$ verifichi le proprietà caratteristiche delle topologie e resti tale da rendere continue tutte le proiezioni π^{α} occorre e basta che essa abbia come base le intersezioni finite di insiemi del tipo $(\pi^{\alpha})^{-1}(O_{\alpha})$ con $O_{\alpha} \in \mathcal{T}_{\alpha}$.

Si noti che la topologia prodotto $\mathcal{T}_{\Pi}$ è non più forte di una qualsiasi altra topologia $\mathcal{T}$ già presente su $\mathbb{P}$ se e solo se le funzioni proiezioni risultano già $\mathcal{T}$ -continue, e cioè se gli intorni deboli (cilindrici) $O_1 \times \dots \times O_k$ risultano $\mathcal{T}$ -aperti.

In base a tali considerazioni si ha che una successione $x_n \in \mathbb{P}$ converge debolmente ad $x \in \mathbb{P}$ se e solo se $x_n^{\alpha} \xrightarrow{n} x^{\alpha}$ per ogni α , e che una funzione $f: (\mathbb{Y}, \mathcal{T}) \rightarrow (\prod_{\alpha} S_{\alpha}, \mathcal{T}_{\Pi})$ è continua se e solo se sono continue tutte le $\pi^{\alpha} \circ f: (\mathbb{Y}, \mathcal{T}) \rightarrow (S_{\alpha}, \mathcal{T}_{\alpha})$.

Si può mostrare [Kelley cap.III teor.6 e prob. V] che se l'insieme degli indici A è troppo numeroso $\mathcal{T}_{\Pi}$ può non verificare il 1° assioma di numerabilità ed essere quindi generabile con una metrica. Qualora però gli S_{α} siano metrici con $\text{diam} S_{\alpha} \leq 1$ per ogni α , ed A sia numerabile allora [Kelley cap.IV teor.14] la topologia prodotto coincide con quella delle sfere della “metrica prodotto”: $\tau(x, y) := \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\alpha}} d_{\alpha}(x^{\alpha}, y^{\alpha})$.

Si osservi però che, rispetto a tale metrica, la convergenza forte è in effetti debole, e cioè per coordinate. Essa infatti è certo meno energica di quella dovuta, per esempio, alla metrica $d(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} d(x^n, y^n)$ o, qualora questa possa avere significato, alla metrica euclidea $d(x, y) := (\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - y^n)^2)^{1/2}$ (si pensi alla successione dei versori in ℓ^2). Esse invece coincidono qualora l'insieme degli indici sia finito. $\square$

Esempio 1.23 Se gli $S_\alpha \equiv S$ sono tutti uguali fra loro, lo spazio prodotto $\mathbb{P} := \prod_\alpha S$ è lo spazio che ha come punti le funzioni su A a valori in S ; si pensi per esempio ad $S_\alpha \equiv \mathbb{R}^1$, $A \equiv [a, b] \subset \mathbb{R}^1$ ed allo spazio $\mathbb{P}$ che ha per punti le funzioni $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Su tali spazi la topologia prodotto, detta anche della convergenza puntuale, è la topologia generata dalla famiglia di funzioni $\pi^\xi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$ date da $\pi^\xi(x) := x(\xi)$. Per quanto visto nell'Esempio 1.22, in tale topologia $x_n \rightarrow x$ quando per ogni $\xi \in [a, b]$ si ha che $x_n(\xi) \rightarrow x(\xi)$; (apriori in modo non uniforme rispetto a $\xi \in [a, b]$).

L'esistenza di successioni di funzioni continue che convergono punto per punto a funzioni che non lo sono mostra che la convergenza puntuale è effettivamente più debole di quella uniforme, generata dalla norma $\|\cdot\|_\infty$.

Si consideri inoltre [Reed IV.5] che su uno spazio di Banach a dimensione infinita la topologia debole non può essere generata da una metrica. È questo il principale motivo che porta all'introduzione degli spazi topologici.

A sua volta, $[a, b]$ può essere identificato con il sottoinsieme di $\prod_{x \in C} \mathbb{R}^1$ che si ottiene facendo corrispondere ad ogni $\xi \in [a, b]$ il punto la cui x -ma coordinata è $x(\xi)$ con $x \in C([a, b])$; operando in tal modo si stabilisce su $[a, b]$ una topologia che è la $\mathcal{T}_C$ [Royden p.151]. La funzione $e_x : ([a, b], |\cdot|) \rightarrow (\prod_{x \in C} \mathbb{R}^1, \mathcal{T}_\Pi)$ definita da $e_x(\xi) := x(\xi)$ con $x \in C([a, b])$ è una funzione che è continua perché le x lo sono, che è aperta se C distingue i punti ed i chiusi, che è $1 \xrightarrow{onto} 1$ su $e_x([a, b])$ se e solo se C distingue i punti, [Kelley § IV.2]. $\square$

Esempio 1.24 In uno spazio di Hilbert $(\mathbb{H}, \|\cdot\|)$, (vedi oltre), la topologia debole è quella per la quale sono continue tutte le funzioni (lineari) $x \mapsto e_y(x) := \langle y, x \rangle$ per ogni $y \in \mathbb{H}$ fissato, ed in particolare le funzioni coordinate. Una base di intorno per l'origine è fatta dagli insiemi cilindrici: $\{x \mid |\langle y_i, x \rangle| < \delta_i \in \mathbb{R}_+, \quad i = 1, \dots, n\}$ ove $n \in \mathbb{N}$ ed i vettori $y_1, \dots, y_n$ sono arbitrari. Una successione di punti $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{H}$ converge debolmente quando l'insieme $\{\|x_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ è limitato e convergono tutte le successioni delle coordinate per esempio su una base ortonormale (o “componenti di Fourier”, vedi oltre); inoltre dato che le funzioni coordinate sono una base per le funzioni lineari definite su $\mathbb{H}$, la convergenza per coordinate implica quella debole e la topologia debole coincide con quella prodotto. In tali spazi infine si ha che la convergenza per coordinate è anche sufficiente ad assicurare quella in norma qualora sia unita alla condizione $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$, ben diversa dalla $\|x_n - x\| \rightarrow 0$. $\square$

Fine divagazione

Omeomorfismo := una bijezione che sia continua con inversa continua.

Metriche d_1, d_2 (topologicamente) equivalenti := due metriche definite sullo stesso insieme $\mathbb{X}$ e tali che l'identità sia un omeomorfismo: dette $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ le topologie generate dalle due metriche d_1 e d_2 rispettivamente, per ogni $\varepsilon > 0$ ed $y \in \mathbb{X}$ si abbiano simultaneamente le:

$$\begin{cases} B_\varepsilon^{(2)}(y) := \{x \in \mathbb{X} \mid d_2(x, y) < \varepsilon\} \in \mathcal{T}_1 \\ B_\varepsilon^{(1)}(y) := \{x \in \mathbb{X} \mid d_1(x, y) < \varepsilon\} \in \mathcal{T}_2 \end{cases}$$

e quindi

$$\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1 \quad \text{insieme con} \quad \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$$

e cioè: le topologie generate dalle due metriche coincidono.

Ad esempio $d_2 := d_1/(1 + d_1)$ è topologicamente equivalente alla d_1 e rende $\mathbb{X}$ limitato.

Spazi $(\mathbb{X}, d), (\mathbb{X}', d')$ Omeomorfi o Topologicamente equivalenti := due spazi metrici fra i quali esista (almeno) un omeomorfismo, e quindi una bijezione $h : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}'$ che conserva la struttura topologica nel senso che gli aperti in uno dei due spazi sono in corrispondenza $1 \longleftrightarrow 1$ con gli aperti nell'altro:

$$O_1 \in \mathcal{T}_1 \Rightarrow h(O_1) \in \mathcal{T}_2 \quad \text{e} \quad O_2 \in \mathcal{T}_2 \Rightarrow h^{-1}(O_2) \in \mathcal{T}_1.$$

Le due topologie sono altrettanto “ricche”.

L'esistenza dell'omeo $h : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}'$ fa sì che una qualunque funzione $f : (\mathbb{X}', d') \rightarrow (\mathbb{Y}, \tilde{d})$ risulti continua se e solo se è continua la $f \circ h$, e che una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converga (ad $\bar{x} \in \mathbb{X}$) se e solo se la successione $\{h(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge (ad $h(\bar{x}) \in \mathbb{X}'$).

Esempio 1.25 Sia $\mathbb{X} := (0, 1]$, $d(x, y) := |x - y|$, $\mathbb{X}' := [1, \infty)$, $d' \equiv d$, ed $h(x) := 1/x$. Si noti che tale $h : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}'$ è un omeomorfismo, e quindi certo $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge se e solo se $\{1/x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge; ma per esempio $\{1/n\}_{n=1,2,\dots}$ è Cauchy mentre non lo è la sua h -trasformata: $\{n\}_{n=1,2,\dots}$.

Si noti anche che $\mathbb{X}'$ è chiuso in $\mathbb{R}$ e quindi è uno spazio completo mentre non è completo lo spazio $\mathbb{X}$. $\square$

Metriche d_1, d_2 (uniformemente) equivalenti := due metriche definite sullo stesso insieme $\mathbb{X}$ e tali che l'identità sia un omeo uniformemente continuo:

$$\begin{cases} \forall \varepsilon \exists \delta_1(\varepsilon) : \forall x, y \in \mathbb{X} \quad \text{risulta} \quad d_1(x, y) < \delta_1(\varepsilon) \Rightarrow d_2(x, y) < \varepsilon \\ \forall \varepsilon \exists \delta_2(\varepsilon) : \forall x, y \in \mathbb{X} \quad \text{risulta} \quad d_2(x, y) < \delta_2(\varepsilon) \Rightarrow d_1(x, y) < \varepsilon \end{cases}$$

In particolare la condizione è verificata se esistono $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ tali che per tutti i punti $x, y \in \mathbb{X}$ si abbia $c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y)$. Si noti però che anche la $d_2 := d_1/(1 + d_1)$ è metricamente equivalente alla d_1 e che quindi la limitatezza è una proprietà che non viene conservata neanche dagli omeo uniformi. Si osservi che se le metriche provengono da corrispondenti norme, e se queste sono equivalenti, allora le metriche sono uniformemente equivalenti.

Spazi $(\mathbb{X}, d), (\mathbb{X}', d')$ metricamente equivalenti := due spazi metrici fra i quali esista (almeno) un omeomorfismo uniforme, e cioè una bijezione $h : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}'$ uniformemente bicontinua; come tale essa rende metricamente equivalenti le due metriche $d_1 := d$ e $d_2 := d' \circ h$. In tal caso l'omeomorfismo uniforme h trasforma successioni di Cauchy in successioni di Cauchy, infatti dalla definizione stessa di uniforme continuità segue immediatamente che se $g : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}'$ è uniformemente continua e se $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è Cauchy in $\mathbb{X}$, allora anche $\{g(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ è Cauchy in $\mathbb{X}'$. Pertanto se esiste un omeomorfismo uniforme $h : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}'$ si può asserire che $\mathbb{X}$ è completo se e solo se è completo anche $\mathbb{X}'$. Viceversa, come si è visto nel Esempio 1.25, l'immagine secondo una funzione continua di una successione di Cauchy (che non converga) può non essere di Cauchy, e quindi se la h è solo un omeo, e cioè se l'equivalenza è solo topologica, è possibile stabilire una tale equivalenza fra spazi completi e spazi che non lo sono.

Si consideri ora nuovamente uno spazio (solo) topologico $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$; per introdurre le seguenti nozioni infatti non vi è necessità di ricorrere ad alcuna metrica, malgrado anche in questo caso la presenza di una metrica possa rendere più agevole l'esame di tali proprietà. Si definiscono

Ricoprimento aperto di $\mathbb{X}$:= una famiglia $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di sottoinsiemi aperti $O_\alpha \subset \mathbb{X}$ tali che $\bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha \supset \mathbb{X}$; qui A è un *qualsiasi insieme di indici*.

$\mathbb{X}$ Compatto := uno spazio topologico $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ tale che *ogni* suo ricoprimento aperto: $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ammette un *sottoricoprimento finito*: $O_{\alpha_1} \cup \dots \cup O_{\alpha_\nu} \supset \mathbb{X}$.

$\mathbb{X}$ Compatto numerabile := quando la definizione qui sopra vale solo per degli insiemi A (non più che) *numerabili*.

In uno spazio metrico la compattezza implica che se una proprietà è verificata su ogni $B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{X}$, si può parlare del *più piccolo* ε per il quale essa avviene, ed esso sarà ancora non nullo.

$K \subset \mathbb{X}$ Compatto := quando $(K, \mathcal{T})$ è uno spazio compatto (e cioè se K è compatto nella topologia relativa $\mathcal{T}_K$).

Sistema centrato := una famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{X}$ tale che ogni intersezione *finita* di essi sia non vuota.

Si noti che se $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è un arbitrario ricoprimento aperto di $\mathbb{X}$, allora necessariamente $\bigcap_{\alpha \in A} O_\alpha^c = \emptyset$. Allo stesso modo si nota che un arbitrario sistema di chiusi $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è centrato se e solo se nessuna sottofamiglia $\{K_\alpha^c\}_{\alpha \in B}$, con B sottoinsieme finito di A , è un ricoprimento aperto di $\mathbb{X}$.

Sussistono i seguenti teoremi fondamentali: **Teorema 1.1.26** Uno spazio $\mathbb{X}$ è compatto se e solo se ogni sistema centrato di suoi sottoinsiemi chiusi $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ha intersezione (arbitraria) non vuota.

$\mathbb{X}$ è compatto numerabile se e solo se ogni sistema centrato numerabile di suoi sottoinsiemi chiusi $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ha intersezione (numerabile) non vuota. $\square$

Dimostrazione

($\Leftarrow$) Sia $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un arbitrario ricoprimento aperto di $\mathbb{X}$. Per la prima osservazione fatta qui sopra si ha che la famiglia $\{O_\alpha^c\}_{\alpha \in A}$ ha intersezione vuota, e quindi per ipotesi non può essere centrata; ciò significa che esiste un insieme finito $B \subset A$ tale che $\bigcap_{\alpha \in B} O_\alpha^c = \emptyset$, provando in tal modo la compattezza di $\mathbb{X}$.

($\Rightarrow$) Sia $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un sistema centrato di chiusi. Se $\mathbb{X}$ è compatto, per la seconda delle osservazioni fatte sopra $\{K_\alpha^c\}_{\alpha \in A}$ non può ricoprire $\mathbb{X}$, e quindi $\bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha \neq \emptyset$. $\blacksquare$

È chiaro che se $\mathbb{X}$ è compatto esso è anche compatto numerabile. Il viceversa sussiste purché in aggiunta si richieda che $\mathbb{X}$ sia a base numerabile. In tal caso infatti da ogni ricoprimento aperto si può estrarre un sottoricoprimento fatto con elementi della base, e quindi non più che numerabile.

Teorema 1.1.27 Uno spazio $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ è numerabilmente compatto se e solo se ogni successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ammette almeno un punto di accumulazione e quindi, se $\mathbb{X}$ verifica anche il 1° assioma di numerabilità, se e solo se ogni successione ammette una sottosuccessione convergente. $\square$

Dimostrazione (Royden IX.2.7)

($\Leftarrow$) Sia $\{K_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ un sistema numerabile centrato di chiusi, e per ogni n si scelga $x_n \in \bigcap_{h=1}^n K_h$. L'ipotesi assicura che esiste x in ogni intorno del quale cadono punti di $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e d'altra parte esso non può che appartenere a tutti i K_h giacché $x_n \in K_h$ per ogni $h \leq n$ e gli K_h sono chiusi.

($\Rightarrow$) Data $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{X}$ numerabilmente compatto si considerino gli insiemi $E_n := \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$. La famiglia $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è centrata ed avrebbe intersezione vuota se $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ non avesse punto di accumulazione. $\blacksquare$

Su uno spazio metrico $(\mathbb{X}, d)$ si può introdurre la nozione di ε -rete di $E \subset (\mathbb{X}, d)$:= un sottoinsieme N_ε di $\mathbb{X}$ tale che $\forall x \in E$ esiste $y \in N_\varepsilon$ tale che $d(x, y) < \varepsilon$; e cioè se $\{B_\varepsilon(y)\}_{y \in N_\varepsilon}$ è un ricoprimento aperto di E .

$E \subset (\mathbb{X}, d)$ Totalmente limitato := per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una ε -rete finita.

Esempio 1.28 In uno spazio a dimensione finita: n un insieme è limitato quando è contenuto in un cubo. Ma ogni cubo può essere suddiviso in cubetti di lato ε ed i cui vertici formano una $(\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{n})$ -rete che è finita.

Nello spazio l_2 delle successioni infinite con metrica euclidea finita, che è completo [Naylor 3.13.es.4], la sfera unitaria è limitata ma non è totalmente limitata: gli “estremi dei versori” distano $\sqrt{2}$ e sono infiniti. È chiaro che la loro successione non può avere punti di accumulazione, e che allora la sfera non è compatta, pur se chiusa e limitata.

In tale spazio è invece totalmente limitato (e chiuso) il “cubo di Hilbert” := $\{x \mid |x^{(i)}| \leq 1/2^{i-1}\}_{i=1,2,\dots}$, infatti è totalmente limitato in quanto limitato il suo sottoinsieme $\{x \mid |x^{(i)}| \leq 1/2^{i-1}\}_{i=1,\dots,n}$, e per ciascun punto del primo ve ne è uno nel secondo a distanza $(\sum_{k=n+1}^\infty (x^{(k)})^2)^{1/2} \leq (\sum_{k=n+1}^\infty 1/4^k)^{1/2} < 1/2^{n-1}$. In definitiva in uno spazio di Banach di dimensione infinita una successione limitata può non ammettere sottosuccessioni convergenti. $\square$

Il non essere totalmente limitato corrisponde all'esistenza di infiniti punti distanti più di ε .

Teorema 1.1.29 Uno spazio metrico compatto numerabile è totalmente limitato. $\square$

Dimostrazione (Royden Lemma 9.3.12)

Se esistessero infiniti $x_h \in \mathbb{X}$ tali che $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ per $n \neq m$, dato che in ogni $B_{\varepsilon/3}(x_h)$ ve ne può essere al più uno solo essi formerebbero una successione senza punti di accumulazione. $\blacksquare$

D'altra parte, per uno spazio metrico l'essere totalmente limitato implica che l'unione delle $\frac{1}{n}$ -reti è un insieme numerabile ovunque denso, ed allora lo spazio è separabile. Questo, insieme al fatto che esso è metrico, implica che la sua topologia abbia base numerabile, che a sua volta, come si è detto, è la condizione da aggiungere alla compattezza numerabile per ottenere la compattezza. Pertanto:

Lemma 1.1.30 In uno spazio metrico la compattezza equivale alla compattezza numerabile. $\square$

Si ha invece che la limitatezza totale è in generale più debole della compattezza:

Teorema 1.1.31 Uno spazio metrico $(\mathbb{X}, d)$ è compatto se e solo se è totalmente limitato e completo.

Equivalentemente: ... se e solo se ogni successione ammette una sottosuccessione convergente. $\square$

Dimostrazione

($\Rightarrow$) Certo uno spazio metrico compatto è totalmente limitato. Inoltre, siccome è numerabilmente compatto, ogni successione ammette punto di accumulazione, e quindi se una successione è di Cauchy essa ammette un (unico) punto limite.

($\Leftarrow$) Si vuole usare il Teorema 1.1.27: data una $\{x_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ se ne troverà una sottosuccessione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente. Per l'ipotesi di limitatezza totale si può ricoprire $\mathbb{X}$ con un numero finito di sfere $B_1(y_k)$, $k = 1, \dots, n_1$, delle quali almeno una: S_1 contiene infiniti x_n . Poi si può ricoprire S_1 con un numero finito di sfere $B_{1/2}(z_k)$, $k = 1, \dots, n_2$, delle quali almeno una: S_2 è tale che $S_1 \cap S_2$ contiene infiniti x_n . Procedendo in tal modo si ottiene una successione di infinite sfere $\{S_k\}_{k=1,2,\dots}$ tali che esiste $n_k > n_{k-1}$ ed $x_{n_k} \in S_1 \cap \dots \cap S_k$. Gli $\{x_{n_k}\}_{k=1,2,\dots}$ formano una sottosuccessione che è di Cauchy ed è quindi convergente per ipotesi. ■

Teorema 1.1.32 [Bolzano-Weiestrass]

Se $\mathbb{X}$ di Hausdorff è compatto allora ogni successione in $\mathbb{X}$ ammette una sottosuccessione convergente. □

Teorema 1.1.33 Se uno spazio metrico $\mathbb{X}$ è tale che ogni successione ammette una sottosuccessione convergente allora $\mathbb{X}$ è compatto. □

Teorema 1.1.34 [Heine-Borel]

In $\mathbb{R}^n$ gli insiemi chiusi e limitati sono compatti. □

Sussistono anche i seguenti fatti:

(•) *Sottoinsiemi di spazi metrici compatti sono compatti se e solo se chiusi.*

Essi sono quindi completi. Infatti se $K \subset \mathbb{X}$ è compatto e $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è centrata con $K_\alpha \subset K$ chiusi in K , essendo essi chiusi anche in $\mathbb{X}$ se questo è compatto si ha $\bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha \neq \emptyset$ e la tesi.

(•) *Sottoinsiemi compatti di spazi di Hausdorff sono chiusi.*

Infatti se $x \in [D]$ è possibile trovare $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ che lo ammette come limite, ed in tali spazi i limiti sono unici.

La compattezza di D implica l'esistenza di almeno un punto di accumulazione per la $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, che allora dovrà coincidere con x provando che $D \equiv [D]$.

Insieme precompatto, o relativamente compatto, $:=$ un sottoinsieme E di uno spazio topologico $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ tale che la sua chiusura in $\mathbb{X}$ risulti compatta.

Esempio 1.35 $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ è totalmente limitato ma non completo; è precompatto come sottoinsieme di $\mathbb{R}$, non lo è come sottoinsieme di $\mathbb{Q}$. □

Esempio 1.36 $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty \leq 1)$ è un insieme chiuso, limitato, completo, ma non totalmente limitato [Phillips p.85]. Infatti se ci fosse un ricoprimento finito alla (per esempio) $\frac{1}{4}$ -rete della sfera unitaria, dovrebbero esistere $f_1, f_2, \dots, f_n$ tali che data una qualunque funzione $g \in C$ accada che $\max_{[0,1]} |g(x) - f_i(x)| < \frac{1}{4}$. Basta far "oscillare" la g proprio dove occorre per rendersi conto che ciò non può essere. □

(•) *Sottoinsiemi di spazi metrici completi sono precompatti se e solo se totalmente limitati.* Per cui negli spazi metrici completi gli insiemi compatti sono gli insiemi chiusi e totalmente limitati.

(•) D è un sottoinsieme precompatto di uno spazio metrico completo $(\mathbb{X}, d)$ se e solo se ogni successione di punti di D ammette una sottosuccessione che converge in $\mathbb{X}$ (anche se non necessariamente in D). Se la convergenza è in D allora D è compatto.

(•) *Se f è continua ed E è compatto, allora $f(E)$ è compatto.*

Infatti, dato un ricoprimento aperto $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di $f(E)$ esiste un insieme finito di indici: $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tale che $\bigcup_{k=1}^n f^{-1}(O_{\alpha_k}) \supset E$. La funzione, se reale, "ammette massimo e minimo".

Più in generale, sia $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$ uno spazio topologico; si definisce

$f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ semicontinua superiormente in $D \subset \mathbb{X}$:= una funzione tale che

la famiglia degli insiemi $f^{-1}((-\infty, \alpha))$ è aperta per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Equivalentemente: per ogni $y \in D$ ed $\varepsilon > 0$, esiste $N(y) \in \mathcal{T}$ tale che $x \in N(y)$ implica $f(x) < f(y) + \varepsilon$.

Equivalentemente: per ogni $y \in D$ si ha

$$f(y) \geq \limsup_{x \rightarrow y} f(x) := \inf_{N(y) \in \mathcal{T}} \left\{ \sup_{x \in N(y)} f(x) \right\}.$$

Analoga definizione si dà per la semicontinuità inferiore:

$f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ semicontinua inferiormente in $D \subset \mathbb{X}$:= una funzione tale che

la famiglia degli insiemi $f^{-1}((\alpha, +\infty))$ è aperta per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Equivalentemente: per ogni $y \in D$ ed $\varepsilon > 0$, esiste $N(y) \in \mathcal{T}$ tale che: $x \in N(y)$ implica $f(x) > f(y) - \varepsilon$. O anche: $f(y) \leq \liminf_{x \rightarrow y} f(x)$.

Teorema 1.1.37 Se $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ è semicontinua superiormente ed $\mathbb{X}$ è numerabilmente compatto allora f è superiormente limitata ed ammette massimo. $\square$

Dimostrazione La famiglia $O_n := f^{-1}((-\infty, n))$ è un ricoprimento aperto numerabile di $\mathbb{X}$. Pertanto esiste $\nu < \infty$ tale che $\mathbb{X} \subset O_\nu$, e cioè $f(x) < \nu$ per ogni $x \in \mathbb{X}$. Sia $\beta := \sup_{x \in \mathbb{X}} f(x)$. Gli insiemi $K_n := f^{-1}([\beta - \frac{1}{n}, \infty))$ sono un insieme numerabile centrato di chiusi, per cui esiste $y \in K_n$ per ogni n , e cioè $f(y) = \beta$. $\blacksquare$

Si concluderà il paragrafo accennando ad un importante uso del concetto di precompattezza. A questo scopo si ricordino le seguenti definizioni:

Famiglia uniformemente limitata su $O \subseteq \mathbb{X}$:= una famiglia F di funzionali $f : (\mathbb{X}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ per la quale esiste $c > 0$ tale che $|f(x)| < c$ per ogni $x \in O$ ed $f \in F$.

Famiglia equicontinua su $\mathbb{X}$:= una famiglia F di funzionali $f : (\mathbb{X}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ per la quale comunque si scelga $\bar{x} \in \mathbb{X}$ si ha che: dato ε esiste δ_ε indipendente da $\bar{x}$ e tale che $x \in N_\delta(\bar{x})$ implica $f(x) \in B_\varepsilon(f(\bar{x}))$ per ogni $f \in F$.

In particolare, se $F := \{f_n : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ allora F è equicontinua se $\forall \varepsilon \exists \delta$ indipendente da x, y, f_n e tale che: $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ quando $|x - y| < \delta$ e comunque sia scelto n .

Sia D un sottoinsieme dello spazio $(C([a, b], \mathbb{R}))$. Sussiste l'importante:

Teorema 1.1.38 [Ascoli-Arzelà] (si veda: [Kolmogorov II.7.4])

Un insieme D è precompatto se e solo se D è equicontinuo ed uniformemente limitato su $[a, b]$. $\square$

Ne segue, come si è detto, che considerato D come sottoinsieme di $((C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty))$ si deduce che da ogni successione in D si può estrarre una sottosuccessione uniformemente convergente in $C([a, b], \mathbb{R})$.

Anche direttamente, se D è compatto e se F definita come sopra è equicontinua ed uniformemente limitata su D allora F ammette una sottosuccessione uniformemente convergente su D ad una $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Le spezzate di Eulero sono una tale famiglia in $C^0([t_0, t_0 + a'], \mathbb{R})$.

A.2 Richiami di Analisi Funzionale. (II)

Le seguenti considerazioni hanno lo scopo di estendere agli spazi a dimensione infinita alcune delle note proprietà di quelli a dimensione finita.

Sia $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale su un campo numerico $\mathbb{K}$. Si chiama:

Varietà lineare := un sottoinsieme $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ tale che:

$$x, y \in \mathbb{W} \Rightarrow ax + by \in \mathbb{W}, \quad \text{per ogni } a, b \in \mathbb{K}.$$

N.B. 1.2.1 Non si confonda una Varietà lineare con uno qualsiasi dei piani ad essa paralleli: la varietà contiene lo zero; i piani sono definiti più oltre. $\diamond$

Sia $\mathbb{V}$ anche dotato di metrica; si definisce:

Sottospazio $\mathbb{W}$ di $\mathbb{V}$:= una varietà lineare $\mathbb{W}$ di $\mathbb{V}$ che sia chiusa *come sottoinsieme di $\mathbb{V}$* , cioè tale da contenere quei punti di accumulazione (di successioni di suoi elementi) *che sono anche punti di $\mathbb{V}$* .

Un sottospazio potrà anche non essere completo, e lo sarà se anche $\mathbb{V}$ lo è.

N.B. 1.2.2 L'intero spazio è sempre chiuso, per definizione di topologia, mentre può ben non essere completo; nell'operazione di chiusura di un insieme si aggiungono ad esso tutti i punti che *sono* limiti di successioni di punti dell'insieme *e che stanno in $\mathbb{V}$* , ma non si dice nulla di una *qualunque* successione di Cauchy ovvero di "punti limite" che non appartengano nemmeno a $\mathbb{V}$.

Ciò è per dire che l'operazione di chiusura è fatta tenendo sempre presenti le caratteristiche dello spazio ospite. È per questo che talvolta si parla di "chiusura in $\mathbb{V}$ ". $\diamond$

N.B. 1.2.3 Un sottospazio, così come una varietà lineare, contiene sempre l'origine. $\diamond$

Memento 1.2.4 Siano $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2$ sottospazi di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}$. Si indica con $\mathbb{W}_3 := \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$ lo spazio di quei vettori $x \in \mathbb{V}$ che possono essere rappresentati con $x = x_1 + x_2$, essendo $x_1 \in \mathbb{W}_1$, ed $x_2 \in \mathbb{W}_2$. (Esempio in $\mathbb{R}^3$: due piani, non paralleli). $\square$

Due vettori $x, y \in \mathbb{V}$ si possono definire equivalenti: $x \sim y$ quando la loro differenza $x - y$ appartiene ad un certo sottospazio $\mathbb{W}$; lo spazio delle classi di equivalenza $[x] := \{y \in \mathbb{V} \mid x \sim y\}$ è esso stesso una varietà lineare: $\widetilde{\mathbb{W}} := \{[x] \mid x \in \mathbb{V}\}$; e $\mathbb{W}$ è l'elemento neutro di $\widetilde{\mathbb{W}}$. Se $\mathbb{V}$ è normato anche $\widetilde{\mathbb{W}}$ si può rendere normato mediante la: $\|[x]\| := \inf_{y \in [x]} \|y\|$ e se l'uno è completo risulta completo anche l'altro.

Codimensione di un sottospazio $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$:= la dimensione dello spazio delle classi di equivalenza:

$$\widetilde{\mathbb{W}} := \{[x] \mid x \sim y := (x - y) \in \mathbb{W}\}.$$

Esempio: in $\mathbb{R}^3$ la famiglia di vettori del tipo $x_0 + w$ con w parallelo a un piano assegnato $\mathbb{W}$ è un insieme di dimensione uno; il piano $\mathbb{W}$ ha codimensione uno.

Alternativamente: date due sottovarietà $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2$, la codimensione di $\mathbb{W}_1$ è la minima dimensione che deve avere $\mathbb{W}_2$ affinché sia $\mathbb{V} = \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$.

Se lo spazio $\mathbb{V}$ è a dimensione finita e se $\mathbb{V} = \mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$ si ha che:

$$\dim \mathbb{V} = \dim \mathbb{W}_1 + \dim \mathbb{W}_2 - \dim (\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2);$$

in particolare è

$$\dim \mathbb{V} = \dim \mathbb{W} + \dim \widetilde{\mathbb{W}}.$$

Qualora invece lo spazio ospite $\mathbb{V}$, o più in generale la varietà ospite $\mathbb{M} \supset \mathbb{W}$, abbia dimensione infinita (per esempio quando $\mathbb{M}$ è localmente diffeomorfo ad uno spazio di Banach di dimensione infinita) allora $\mathbb{W}$ ha codimensione ν se ogni $w \in \mathbb{W}$ è contenuto in un qualche aperto di $\mathbb{V}$ (o di $\mathbb{M}$) che è diffeomorfo ad $U \times \mathbb{R}^\nu$, essendo U un aperto di $\mathbb{W}$.

Esempio 2.5 *L'Insieme delle biforcazioni* (ad un parametro vettoriale) di un sistema dinamico è un sistema a codimensione finita, o varietà stratificata, complementare dell'insieme (aperto) dei sistemi strutturalmente stabili, [Wiggins II p.286]. $\square$

Somma diretta di spazi $\mathbb{W}_3 := \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$:= lo spazio di quei vettori $x \in \mathbb{V}$ che possono essere rappresentati *in modo unico* con $x = x_1 + x_2$, essendo $x_1 \in \mathbb{W}_1$, ed $x_2 \in \mathbb{W}_2$. (Esempio in $\mathbb{R}^3$: un piano ed una retta che lo intersechi).

Data una famiglia di vettori $D := \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $x_\alpha \in \mathbb{V}$; si definisce

$\text{span } D$:= il più piccolo sottospazio di $(\mathbb{V}, d)$ contenente l'intera famiglia D .

È quindi la chiusura in $(\mathbb{V}, d)$, e non necessariamente il completamento, dell'insieme delle combinazioni lineari finite fatte con gli elementi x_α della famiglia, ed è quindi la chiusura del *linear hull*(D).

Sia ora dato un (sotto)spazio $\mathbb{W}$ contenuto in, o magari coincidente con $\mathbb{V}$.

Insieme completo per $(\mathbb{W}, d)$:= una qualunque famiglia $\{x_\beta\}_{\beta \in B}$ di vettori $x_\beta \in \mathbb{W}$ tale che:

$$\text{span} \{x_\beta\}_{\beta \in B} = \mathbb{W}.$$

Base $\mathbb{B}$ (di vettori) per $(\mathbb{W}, d)$:= un insieme $\mathbb{B} := \{x_\beta\}_{\beta \in B}$ di vettori che sia completo per $\mathbb{W}$ e “*minimale*”, e cioè tale che:

- (a) l'insieme delle combinazioni lineari finite di suoi elementi è ovunque denso in $\mathbb{W}$;
- (b) ogni suo sottoinsieme finito è un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Ne segue che per ogni punto $x \in \mathbb{W}$ esiste almeno una successione $s_\nu := \sum_{n=1}^\nu b^n x_{\beta_n}$, con $x_{\beta_n} \in \mathbb{B}$, $b^n \in \mathbb{K}$, $n = 1, 2, \dots$, tale che $\|x - s_\nu\| \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$.

Ciò risulta dare significato alla scrittura $x = \sum_{n=0}^\infty b^n x_{\beta_n}$. Si noti nuovamente che qui non si parla di cosa facciano *tutte* le successioni di Cauchy né se convergano fuori $\mathbb{V}$, ma solo dell'esistenza di combinazioni lineari finite di elementi della base e della loro convergenza (in norma) verso punti di $\mathbb{V}$.

Un insieme di vettori linearmente indipendenti è base per il suo span.

Esempio 2.6 (si veda anche il seguente Teorema 1.2.28)

I polinomi sono una base in $C([a, b], \|\cdot\|_\infty)$, in L_2 , ed in $C([a, b], \|\cdot\|_2)$ [Kolmogorov p.407], pur non essendo quest'ultimo uno spazio completo.

Si noti che con una successione di polinomi si approssima una qualsiasi funzione in $C^0([a, b])$, per esempio una funzione con spigoli, e cioè una funzione *non ottenibile* come serie convergente di potenze (che è in C^∞). (Nella successione di polinomi vengono “corretti” anche i coefficienti dei termini aventi potenze basse e non solo aggiunti quelli con potenze alte). $\square$

Lo spazio si dice a dimensione finita quando la cardinalità della base è finita.

Uno spazio $\mathbb{V} = \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$ è somma diretta di suoi sottospazi $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2$ se e solo se l'unione delle basi dei sottospazi è una base per $\mathbb{W}$ stesso.

La presenza di una struttura euclidea definita sullo spazio vettoriale permette di scegliere particolari basi in tali spazi.

Sia $\mathbb{E}$ uno spazio euclideo separabile, (e cioè uno spazio euclideo tale da ammettere un insieme numerabile di vettori ovunque denso); e sia $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un insieme di suoi punti.

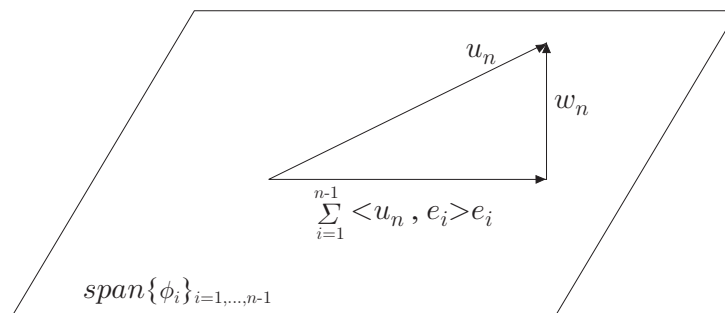
Sistema ortogonale := un insieme $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di vettori $\phi_\alpha \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ tale che:

$$\langle \phi_\alpha, \phi_\beta \rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha, \beta \in A, \quad \alpha \neq \beta.$$

Proposizione 1.2.7 Uno spazio euclideo separabile $\mathbb{E}$ ammette una base numerabile ortonormale. $\square$

Infatti si può estrarre una base numerabile, e poi eseguire il noto procedimento di Gram-Schmidt, che consiste in: dati $u_1, u_2, \dots$ linearmente indipendenti si pongano

$$\begin{cases} w_1 := u_1, & e_1 := \frac{w_1}{\|w_1\|}; \\ w_2 := u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1, & e_2 := \frac{w_2}{\|w_2\|}; \\ \dots & \\ w_n := u_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle u_n, e_i \rangle e_i; & e_n := \frac{w_n}{\|w_n\|}. \end{cases}$$



■

I vettori di un sistema ortogonale sono senz'altro linearmente indipendenti. Infatti si ha che per qualsiasi $n < \infty$

$$\langle \phi_{\alpha_j}, \sum_{i=1}^n c_{\alpha_i} \phi_{\alpha_i} \rangle = c_{\alpha_j} \|\phi_{\alpha_j}\|^2, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

pertanto la somma può essere nulla solo se tutte le componenti sono nulle. È chiaro allora che se un sistema ortogonale è completo esso è una base dello spazio. In tal caso non esiste alcun vettore dello spazio che non sia il limite in norma di un insieme di combinazioni lineari finite di elementi della base.

Esempio 2.8 Nello spazio $(C([a, b]), \|\cdot\|_2)$ l'insieme $\left\{ \sin \frac{n\pi x}{b-a}, \cos \frac{m\pi x}{b-a} \right\}$ è un sistema ortogonale completo, (si vedano il Memento 1.2.25 e il Teorema 1.2.28 più oltre, opp. [Kolmogorov III 4.1]). □

Nota 1.2.9 Quando nel seguito si farà riferimento a dei prodotti integrali, si supporrà sempre che lo spazio Ω di supporto alle funzioni sia un spazio a misura finita (e cioè per il quale si ha: $\|1\| < \infty$) e che l'integrale non “distingua” fra funzioni diverse fra loro su al più una infinità numerabile di punti. In tal modo il prodotto $\langle x, y \rangle := \int_{\Omega} x(\omega)y(\omega)d\omega$ risulta essere un vero prodotto scalare, la funzione $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ risulta avere tutti i requisiti di una norma, e lo spazio $L_2(\Omega)$ può essere pensato come il completamento dello spazio delle funzioni $(C^0(\Omega), \|\cdot\|_2)$ [Kolmogorov pag.370 e segg.]. La convergenza in tale norma è però più debole di quella puntuale, giacché assicura quest'ultima salvo che su insiemi di misura nulla.

Si noti che oltre alla funzione $\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ anche tutte le funzioni $\|f\|_p := (\int |f|^p)^{1/p}$, $p \in \mathbb{R}^+$, possono essere delle oneste norme. Queste ultime però lo sono solo al costo di non distinguere funzioni che siano uguali “quasi ovunque” (e cioè salvo che su insiemi di misura nulla); ed infatti gli spazi sui quali tali funzioni si comportano in modo significativo come norme sono in realtà spazi di classi di equivalenza di funzioni. Inoltre esse non provengono, salvo il caso $p = 2$ nel quale il valore della norma prende il nome di *scarto quadratico medio*, da alcun prodotto scalare. Affinchè ciò si verifichi occorre e basta che $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ [Kolmogorov III.4.8]. ▷

Le seguenti considerazioni hanno speciale interesse soprattutto per gli spazi euclidei a dimensione infinita e misura finita, quali per esempio $(C^0([a, b]), \|\cdot\|_2)$.

Memento 1.2.10 Il limite di una successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni continue $f_n : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è certamente continuo se tale limite è uniforme; (dimostrazione del tipo 3-epsilon). In tal caso il $\lim_{n \rightarrow \infty}$ commuta con il $\lim_{x \rightarrow x_0}$ se $x_0 \in (a, b)$. □

Memento 1.2.11 Il limite degli integrali di una successione di funzioni continue è l'integrale del limite della successione integranda se quest'ultimo limite è uniforme. □

Memento 1.2.12 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(\xi) = g(\xi)$ è definita come il limite puntiforme delle ridotte, per ogni ξ fissato. Se tale limite risulta uniforme la serie si dice essere uniformemente convergente. □

Memento 1.2.13 Weierstrass-m-test, (si veda il § I.6)

se $|f_n(\xi)| \leq a_n$, per ogni $\xi \in [a, b]$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(\xi)$ converge uniformemente. □

Memento 1.2.14 Affinchè il limite di una successione di funzioni derivabili sia derivabile non basta che esso sia uniforme, lo è però senz'altro se anche le singole derivate sono continue e se il loro limite è uniforme, ed allora quest'ultimo è proprio la derivata del limite. □

Esempio 2.15 $n^{-1} \sin(n^2 \xi)$ tende uniformemente a zero ma non esiste il limite delle derivate in zero: $n \cos(n^2 \xi)$; analogamente $|n^{-2} \sin(n \xi)| \leq n^{-2}$ è uniformemente convergente, ma ha derivata in zero $n^{-1} \cos(n \xi)$ che esplode. Si ricordi anche che, se esiste, una derivata non può avere discontinuità di prima specie. □

In definitiva se una successione di funzioni continue ha successione delle somme ridotte uniformemente convergente questa converge ad una somma che è continua, integrabile termine a termine, ed è anche differenziabile termine a termine solo se anche le derivate delle funzioni sommano uniformemente.

Memento 1.2.16 [Kolmogorov VII 2.4]

Come si è accennato, si può dare al concetto di “serie di funzioni” anche un significato diverso da quello della convergenza puntuale. Si consideri uno spazio Ξ di misura finita, sul quale siano definite delle funzioni, per esempio a valori reali $f : \Xi \rightarrow \mathbb{R}$. Una successione di tali funzioni può convergere in molti modi:

$$\begin{aligned}
 (CU) : \quad & \text{conv. uniforme} & := \|f_n - f\|_\infty & := \sup_{\xi \in \Xi} |f_n(\xi) - f(\xi)| \rightarrow 0 \\
 (C2) : \quad & \text{conv. in } L_2 & := \|f_n - f\|_2 & := \sqrt{\int_\Xi |f_n(\xi) - f(\xi)|^2 d\xi} \rightarrow 0 \\
 (C1) : \quad & \text{conv. in } L_1 & := \|f_n - f\|_1 & := \int_\Xi |f_n(\xi) - f(\xi)| d\xi \rightarrow 0 \\
 (QO) : \quad & \text{conv. quasi ovunque} & := \|f_n - f\|_{qo} & := \mu(\{\xi \mid |f_n - f| \not\rightarrow 0\}) = 0 \\
 (CM) : \quad & \text{conv. in misura} & := \|f_n - f\|_\mu & := \mu(\{\xi \mid |f_n - f| > \varepsilon\}) \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

□

N.B. 1.2.17 Se $f_n \xrightarrow{L_p} f$ allora esiste una sottosuccessione $f_{n_i} \xrightarrow{q.o.} f$.

◇

N.B. 1.2.18 Convergenza in misura non implica convergenza quasi ovunque:

per esempio $f_n^{(k)}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{per } \frac{n-1}{k} < \xi \leq \frac{n}{k} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ numerate sequenzialmente secondo l'ordinamento: (1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), ... non convergono in nessun punto, mentre convergono in L_1 ed in misura.

◇

N.B. 1.2.19 Convergenza quasi ovunque non implica convergenza in L_1

per esempio $f_n(\xi) = \begin{cases} n & \text{per } 0 < \xi \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ tende a zero in misura e quasi ovunque, mentre tende ad uno in L_1

◇

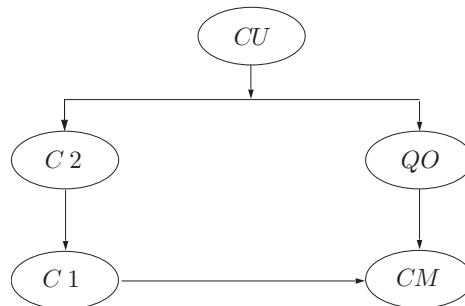
N.B. 1.2.20 Se lo spazio non è a misura finita la convergenza in L_2 non implica quella in L_1 (né quella puntuale, a meno che sussistano teoremi come quelli della convergenza dominata o della convergenza monotona; si pensi anche al precedente Memento 1.2.11)

Ad esempio $f_n(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{per } |\xi| \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ tende a zero in L_2 ma non converge in L_1 .

Ad esempio $f_n(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{per } |\xi| \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{\xi} & \text{altrimenti} \end{cases}$ converge in $L_2([0, \infty))$ ma non puntualmente.

◇

N.B. 1.2.21 Se uno spazio Ξ è a misura finita, e quindi $\|1\|_1 < \infty$, è valido il seguente diagramma:



◇

Ricordando la disuguaglianza di Schwartz: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, e assumendo che il prodotto scalare sia l'usuale prodotto integrale (reale) su un intervallo $I := \Xi$: $\langle f, g \rangle := \int_{\Xi} f(t)g(t)dt$, se ne ricava subito che:

$$\int_I |f(t)|dt \leq \sqrt{|I|} \sqrt{\int_I f^2(t) dt}.$$

Allo stesso modo, se $\|f_n - f\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, $f_n, f \in L^2(I)$, allora anche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, g \rangle = \langle f, g \rangle, \quad \forall g \in L^2(I).$$

Infatti si ha $|\langle f_n, g \rangle - \langle f, g \rangle| = |\langle f_n - f, g \rangle| \leq \|f_n - f\| \|g\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Teorema 1.2.22 [Weierstrass.1]

Ogni funzione $f \in C^0([a, b])$ è limite in norma $\|\cdot\|_{\infty}$ di una successione (uniformemente) convergente di polinomi. $\square$

Corollario 1.2.23 La chiusura in norma $\|\cdot\|_{\infty}$ dell'insieme dei polinomi *come sottoinsieme delle funzioni continue* $C^0([a, b])$ è $C^0([a, b])$ stesso. $\square$

Sia dato uno spazio euclideo $\mathbb{E}$ secondo un qualche prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e si supponga che sia separabile. In $\mathbb{E}$ sia fissato un certo sistema ortogonale $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ che apriori potrà anche non essere una base. Per fissare le idee si pensi ad esempio ad un certo insieme $\{\phi_0, \phi_1, \dots\}$ di funzioni $\phi_i : \xi \mapsto \mathbb{R}$.

Si osservi che se le funzioni $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ sono fra loro ortogonali, e non nulle, allora esse sono anche fra loro linearmente indipendenti. Infatti se fosse $\sum_{i=1}^n c_i f_i = 0$ ne seguirebbe $0 = \sum_{i=1}^n c_i \langle f_i, f_j \rangle = c_i \langle f_j, f_j \rangle$, da cui $c_i = 0$ per ogni $j = 1, \dots, n$.

Si supponga poi che, secondo qualche significato, sia sensata l'operazione di serie verso un certo punto f di $\mathbb{E}$, o funzione "somma" (certo questo è il caso se il numero delle ϕ_i è finito)

$$f(\xi) = c_0 \phi_0(\xi) + c_1 \phi_1(\xi) + \dots + c_n \phi_n(\xi) + \dots,$$

per certi coefficienti $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$; (per esempio la serie può essere convergente alla funzione f o in norma, o punto per punto, o in misura, etc.).

Se si possono calcolare i prodotti $\langle f, \phi_n \rangle$, e se il prodotto $\langle \phi_n, \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n \rangle$ è calcolabile termine a termine allora i coefficienti della serie, sono necessariamente i:

$$\text{Coefficienti di Fourier di } f := c_n := \langle f, \phi_n \rangle / \langle \phi_n, \phi_n \rangle.$$

Esempio 2.24 Se il prodotto scalare è il prodotto integrale visto sopra, se le funzioni f, ϕ_n sono continue su $[a, b]$ e quindi limitate, e se una arbitraria serie $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n \phi_n$ risulta uniformemente convergente alla funzione f , allora i coefficienti sono *necessariamente* i coefficienti di Fourier. Infatti le ipotesi di regolarità assicurano che anche la successione $\phi_j \sum_{n=0}^m \tilde{c}_n \phi_n$ è uniformemente convergente poiché per m grandi si ha $\|f \phi_j - \sum_{n=0}^m \tilde{c}_n \phi_n \phi_j\|_1 < \varepsilon$, pertanto la sua serie è integrabile termine a termine ed ha come integrale: $\tilde{c}_j \langle \phi_j, \phi_j \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_b^a \phi_j \sum_{n=0}^m \tilde{c}_n \phi_n = \int_b^a f \phi_j = \langle f, \phi_j \rangle$. $\square$

Memento 1.2.25 Sussistono, per ciascun $n \in \mathbb{Z}$ ed $m \in \mathbb{Z}$ con $m \neq n$, i seguenti integrali.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos n\xi \, d\xi &= 0; & \int_{-\pi}^{+\pi} \sin n\xi \, d\xi &= 0; \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 n\xi \, d\xi &= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 + \cos 2n\xi}{2} \, d\xi = \pi, & n > 0; \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 n\xi \, d\xi &= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - \cos 2n\xi}{2} \, d\xi = \pi, & n > 0; \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \sin n\xi \sin m\xi \, d\xi &= \int_{-\pi}^{+\pi} \cos n\xi \cos m\xi \, d\xi = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin n\xi \cos m\xi \, d\xi = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\pi} \cos n\xi \, d\xi &= 0 ; & \int_0^{+\pi} \sin n\xi \, d\xi &= \frac{1}{n}[1 - (-1)^n], & n > 0 ; \\
\int_0^{+\pi} \cos^2 n\xi \, d\xi &= \int_0^{+\pi} \sin^2 n\xi \, d\xi = \frac{\pi}{2}, & n > 0; \\
\int_0^{+\pi} \cos n\xi \cos m\xi \, d\xi &= \int_0^{+\pi} \sin n\xi \sin m\xi \, d\xi = \int_0^{+\pi} \sin n\xi \cos m\xi \, d\xi = 0 ; \\
\int_{-\pi}^{+\pi} \cos n\xi \sin n\xi \, d\xi &= \int_0^{+\pi} \cos n\xi \sin n\xi \, d\xi = 0 .
\end{aligned}$$

Se ne inducono analoghe relazioni sostituendo negli argomenti: ξ con $\pi x/L$, e ovunque π con L (si veda anche il N.B.1.2.32). $\square$

Ancora per $n \in \mathbb{Z}$ ed $m \in \mathbb{Z}$ con $m \neq n$ ed $n \neq 0$, sussistono gli integrali

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \cos^2 n\xi \, d\xi &= \frac{\pi}{4} (\pi + \sin(n\pi)) = \int_0^{\pi/2} \sin^2 n\xi \, d\xi = \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{\sin(n\pi)}{n\pi} \right) = \frac{\pi}{4} ; \\
\int_0^{\pi/2} \cos n\xi \cos m\xi \, d\xi &= \frac{m \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) - n \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{m^2 - n^2} \\
&= 0 \quad \text{purché } m, n \text{ entrambi dispari} ; \\
\int_0^{\pi/2} \sin n\xi \sin m\xi \, d\xi &= \frac{n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) - m \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{m^2 - n^2} \\
&= 0 \quad \text{purché } m, n \text{ entrambi dispari} .
\end{aligned}$$

N.B. 1.2.26 Una funzione $f : \xi \mapsto f(\xi)$ si dice pari (in $\xi = 0$) quando esiste $f(-\xi)$ ed è tale che $f(-\xi) = f(\xi)$, e si dice dispari (in $\xi = 0$) quando $f(-\xi) = -f(\xi)$. Somme e prodotti di funzioni pari sono pari; la somma di funzioni dispari è dispari; il prodotto di due funzioni dispari è pari; il prodotto di una funzione pari per una funzione dispari è dispari.

L'integrale su un intervallo simmetrico rispetto allo zero di una funzione dispari è nullo; l'integrale su un intervallo simmetrico rispetto allo zero di una funzione pari può essere nullo o non esserlo; è certamente non nullo se la funzione su di esso non muta segno; infatti sussistono le:

$$\int_{-L}^{+L} f(\xi) \, d\xi = \begin{cases} 2 \int_0^{+L} f(\xi) \, d\xi & \text{se } f(\xi) \text{ pari} \\ 0 & \text{se } f(\xi) \text{ dispari} \end{cases}$$

e se una funzione è periodica di periodo T allora:

$$\int_0^T f(\xi) \, d\xi = \int_a^{a+T} f(\xi) \, d\xi, \quad \forall a \in \mathbb{R};$$

infatti si ha: $\int_0^a = \int_T^{a+T} = \int_T^0 + \int_0^a + \int_a^{a+T}$.

Se una funzione $f(x)$ è differenziabile e periodica allora anche la sua derivata è periodica, mentre il suo integrale $\mathcal{F}(t) := \int_0^t f(\xi) \, d\xi$ è funzione periodica solo se $\mathcal{F}(T) = 0$; inoltre l'integrale $\mathcal{F}$ (così come la derivata di f) è pari se la f è dispari, e dispari se la f è pari.

Una funzione $f_{+p} : \xi \mapsto f_{+p}(\xi)$ definita su un intervallo $(0, 2L)$ si dice il prolungamento pari su $(L, 2L)$ (o l'estensione simmetrica) della funzione $f : \xi \mapsto f(\xi)$ definita sull'intervallo $(0, L)$ quando

$$\begin{aligned}
f_{+p}(\xi) &= f(\xi) \quad \text{per } \xi \in (0, L), \\
f_{+p}(L+x) &= f(L-x) \quad \text{per } x \in (0, L), & \text{e quindi} \\
f_{+p}(\xi) &= f(2L-\xi) \quad \text{per } \xi \in (L, 2L) .
\end{aligned}$$

Una funzione $f_{+d} : \xi \mapsto f_{+d}(\xi)$ definita su un intervallo $(0, 2L)$ si dice il prolungamento dispari su $(L, 2L)$ (o l'estensione anti-simmetrica) della funzione $f : \xi \mapsto f(\xi)$ definita sull'intervallo $(0, L)$ quando

$$\begin{aligned} f_{+d}(\xi) &= f(\xi) \quad \text{per } \xi \in (0, L), \\ f_{+d}(L+x) &= -f(L-x) \quad \text{per } x \in (0, L), \quad \text{e quindi} \\ f_{+d}(\xi) &= -f(2L-\xi) \quad \text{per } \xi \in (L, 2L). \end{aligned}$$

Una funzione $f_{-p} : \xi \mapsto f_{-p}(\xi)$ definita su un intervallo $(-L, L)$ si dice il prolungamento pari su $(-L, 0)$ (o l'estensione simmetrica) della funzione $f : \xi \mapsto f(\xi)$ definita sull'intervallo $(0, L)$ quando

$$f_{-p}(\xi) = f(\xi) \quad \text{per } \xi \in (0, L), \quad f_{-p}(\xi) = f(-\xi) \quad \text{per } \xi \in (-L, 0).$$

Una funzione $f_{-d} : \xi \mapsto f_{-d}(\xi)$ definita su un intervallo $(-L, L)$ si dice il prolungamento dispari su $(-L, 0)$ (o l'estensione anti-simmetrica) della funzione $f : \xi \mapsto f(\xi)$ definita sull'intervallo $(0, L)$ quando

$$f_{-d}(\xi) = f(\xi) \quad \text{per } \xi \in (0, L), \quad f_{-d}(\xi) = -f(-\xi) \quad \text{per } \xi \in (-L, 0).$$

Un'estensione pari su $(L, 2L)$ e poi pari su $(-2L, 0)$ risulta $2L$ -periodica, così come lo è una dispari-dispari; quelle incrociate sono $4L$ periodiche. $\diamond$

Le formule qui sopra mostrano che il sistema trigonometrico

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos m\xi \right\}_{m=1,2,\dots}, \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin n\xi \right\}_{n=1,2,\dots} \right\}$$

è un sistema di funzioni ortonormali su $[-\pi, \pi]$, o su un qualunque intervallo di lunghezza 2π . Allo stesso modo si controlla che il sistema di soli coseni: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos m\xi \right\}_{m=1,2,\dots} \right\}$ è ortonormale su $[0, \pi]$, così come lo è il sistema di soli seni: $\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin m\xi \right\}_{m=1,2,\dots}$ su $[0, \pi]$, oppure, su $[0, \pi/2]$, il sistema: $\left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin(2m-1)\xi \right\}_{m=1,2,\dots}$, e il sistema: $\left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos(2m-1)\xi \right\}_{m=1,2,\dots}$. Queste implicano anche che sono ortonormali su $a \leq x \leq b$ i seguenti sistemi

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{1}{\sqrt{(b-a)}}, \quad \left\{ \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos \frac{2m\pi}{b-a} \left(x - \left(\frac{a+b}{2} \right) \right) \right\}_{m=1,2,\dots}, \right. \\ &\left. \left\{ \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin \frac{2n\pi}{b-a} \left(x - \left(\frac{a+b}{2} \right) \right) \right\}_{n=1,2,\dots} \right\} \end{aligned}$$

e quindi in particolare, se $a = -b$,

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2b}}, \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{b}} \cos \frac{m\pi x}{b} \right\}_{m=1,2,\dots}, \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{b}} \sin \frac{n\pi x}{b} \right\}_{n=1,2,\dots} \right\}$$

inoltre sono ortonormali, e tutti per $x \in [a, b] =: L$, i seguenti

$$\left\{ \sqrt{\frac{1}{L}}, \quad \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{m\pi(x-a)}{L} \right\}_{m=1,2,\dots}$$

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{m\pi(x-a)}{L} \right\}_{m=1,2,\dots}$$

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{(2m-1)\pi(x-a)}{2L} \right\}_{m=1,2,\dots}$$

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{(2m-1)\pi(x-a)}{2L} \right\}_{m=1,2,\dots}$$

I detti sistemi trigonometrici sono anche completi in $L^2(a, b)$, o in $L^2(\mathbb{R})$ se le funzioni si intendono estese per periodicità, ed anzi sussiste il più forte risultato:

Qualora $f(\xi)$ assolutamente integrabile su $[-\pi, \pi]$ e 2π -periodica possa essere espressa come serie trigonometrica convergente ovunque salvo che su un numero finito di punti su $[-\pi, \pi]$, allora la serie è senz'altro quella di Fourier [Birkhoff XI.3].

N.B. 1.2.27 Sempre con il prodotto scalare integrale, per poter sviluppare in funzioni $\{\phi_n\}_{n=1,2,\dots}$ periodiche una $f(\xi)$ definita su un qualsiasi intervallo $(0, L)$ ed ivi continua (o, almeno, liscia a tratti e con derivata liscia a tratti), si potrà prolungare quest'ultima prima sull'intervallo $(-L, 0)$ (eventualmente in modo o pari o dispari), e poi su tutto $\mathbb{R}$ in modo periodico. In tal modo si introdurranno al più una infinità numerabile di discontinuità a salto. Naturalmente, a seconda che l'estensione a partire dall'intervallo base $(0, L)$ sia pari, dispari, o qualsiasi, si otterrà su $\mathbb{R}$ una funzione dello stesso tipo e ciò farà preferire rispettivamente i soli coseni, i soli seni, o entrambi (vedi oltre). $\diamond$

Teorema 1.2.28 [Weierstrass.2]

Ogni funzione $f \in C^0(\mathbb{R}, \|\cdot\|_2)$ periodica, o anche ogni funzione $f \in C^0([a, b], \|\cdot\|_2)$ tale che $f(a) = f(b)$, è limite di una qualche successione uniformemente convergente di polinomi trigonometrici, ovvero di combinazioni lineari finite di $\left\{ \sin \frac{n\pi\xi}{b-a}, \cos \frac{n\pi\xi}{b-a} \right\}_{\substack{n=0,1,2,\dots \\ n=1,2,\dots}}$, (ma non necessariamente quella di Fourier a meno che i polinomi detti siano in particolare tutti monomi). $\square$

Corollario 1.2.29

Se $g \in C^0([a, b])$ ma $g(a) \neq g(b)$ si può pensare ad una successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni $f_n \in C^0([a, b])$, $f_n(a) = f_n(b)$ tale che $\|f_n - g\|_2 \rightarrow 0$. $\square$

Pertanto ogni $g \in C_2([a, b]) := (C^0([a, b]), \|\cdot\|_2)$ può essere approssimata, in norma 2, da una successione trigonometrica, uniformemente convergente solo se $g(a) = g(b)$. Ciò mostra che le funzioni trigonometriche sono un sistema completo in $C_2([a, b])$ pur non essendo questo uno spazio completo.

Memento 1.2.30 Sussiste un risultato più forte di quello appena citato. Esso si riferisce a convergenze puntuali (e non solo in norma). A tale scopo, si premettono le seguenti definizioni. $\square$

Liscia su $[a, b]$:= Una funzione continua che non ha (salti,) spigoli, o irregolarità peggiori; per cui la funzione deve essere almeno $C^1([a, b])$.

Liscia a tratti su $[a, b]$:= una funzione che abbia, lei e la sua derivata, al più un numero finito di discontinuità di prima specie: possono avere salti, spigoli, ma non irregolarità peggiori; la funzione è limitata ed ha derivata, limitata, ovunque salvo che in un numero finito di punti, ed in essi esistono (finite) la derivata destra e sinistra.

Teorema 1.2.31 [Fourier]

La serie trigonometrica di Fourier di una funzione liscia a tratti su un intervallo $[-\pi, \pi]$ ed estesa per periodicità su $\mathbb{R}$ converge puntualmente al valore $\frac{1}{2}[f(x+) - f(x-)]$. Se la funzione è continua la convergenza è uniforme in $(-\pi, \pi)$; se inoltre è $f(-\pi) = f(\pi)$, allora l'uniformità è su tutto $[-\pi, \pi]$. $\square$

Esistono funzioni continue (non lisce) la cui serie di Fourier trigonometrica non è convergente, mentre lo rimane la serie di Fejer: le somme di Cesaro delle somme di Fourier; ed esistono serie di Fourier ovunque convergenti ma non convergenti ad una funzione continua.

Sia $f = f(x)$ una funzione definita su un intervallo base qui di seguito specificato, ed ivi liscia a tratti. Sussistono le formule

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \text{ove}$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx & n \geq 0 \\ b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx & n \geq 1 \end{cases}$$

valida in $(-L, L)$, e per estensioni $2L$ -periodiche su $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}; \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 0; \quad (2.2)$$

valida in $(0, L)$, per estensioni pari su $(-L, 0)$, e $2L$ -periodiche su $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}; \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1; \quad (2.3)$$

valida in $(0, L)$, per estensioni dispari su $(-L, 0)$, e $2L$ -periodiche su $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi x}{2L}; \quad b_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{2L} dx, \quad n \geq 1; \quad (2.4)$$

valida in $(0, L)$, estensioni qualsiasi su $(L, 2L)$,

pari su $(-2L, 0)$, e $4L$ -periodiche su $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{2L}; \quad b_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{2L} dx, \quad n \geq 1; \quad (2.5)$$

valida in $(0, L)$, estensioni qualsiasi su $(L, 2L)$,

dispari su $(-2L, 0)$, e $4L$ -periodiche su $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi x}{2L}; \quad b_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{2L} dx, \quad n \geq 1; \quad (2.6)$$

valida in $(0, L)$, estensioni qualsiasi su $(L, 2L)$,

pari su $(-2L, 0)$, e $4L$ -periodiche su $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L}; \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L} dx, \quad n \geq 1; \quad (2.7)$$

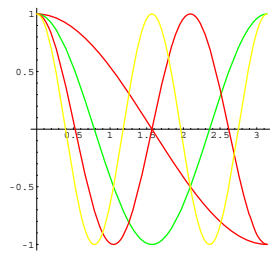
valida in $(0, L)$, estensioni pari su $(L, 2L)$,

dispari su $(-2L, 0)$, e $4L$ -periodiche su $\mathbb{R}$,

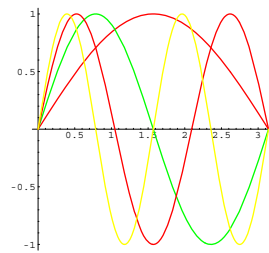
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L}; \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L} dx, \quad n \geq 1; \quad (2.8)$$

valida in $(0, L)$, estensioni dispari su $(L, 2L)$,

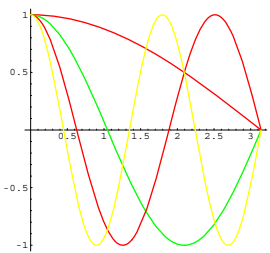
pari su $(-2L, 0)$, e $4L$ -periodiche su $\mathbb{R}$,



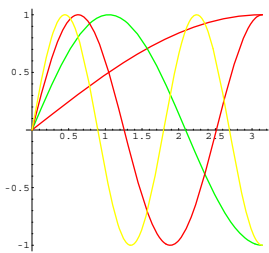
$\text{Cos}[x], \text{Cos}[2x], \text{Cos}[3x], \text{Cos}[4x]$



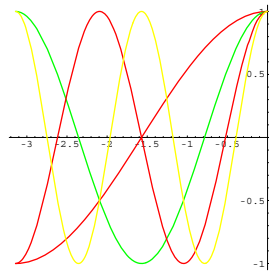
$\text{Sin}[x], \text{Sin}[2x], \text{Sin}[3x], \text{Sin}[4x]$



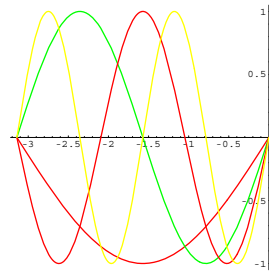
$\text{Cos}[x/2], \text{Cos}[3x/2], \text{Cos}[5x/2], \text{Cos}[7x/2]$



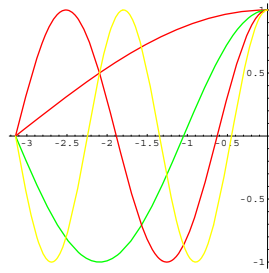
$\text{Sin}[x/2], \text{Sin}[3x/2], \text{Sin}[5x/2], \text{Sin}[7x/2]$



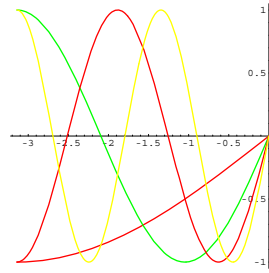
$\text{Cos}[x], \text{Cos}[2x], \text{Cos}[3x], \text{Cos}[4x]$



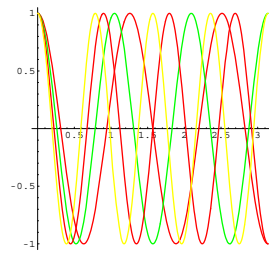
$\text{Sin}[x], \text{Sin}[2x], \text{Sin}[3x], \text{Sin}[4x]$



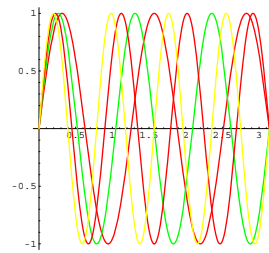
$\text{Cos}[x/2], \text{Cos}[3x/2], \text{Cos}[5x/2], \text{Cos}[7x/2]$



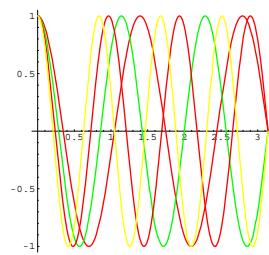
$\text{Sin}[x/2], \text{Sin}[3x/2], \text{Sin}[5x/2], \text{Sin}[7x/2]$



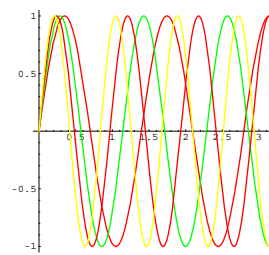
$\text{Cos}[5x], \text{Cos}[6x], \text{Cos}[7x], \text{Cos}[8x]$



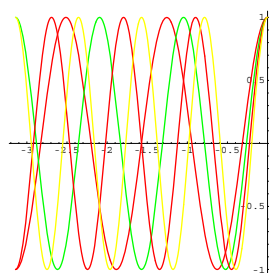
$\text{Sin}[5x], \text{Sin}[6x], \text{Sin}[7x], \text{Sin}[8x]$



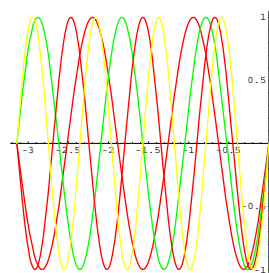
$\text{Cos}[9x/2], \text{Cos}[11x/2], \text{Cos}[13x/2], \text{Cos}[15x/2]$



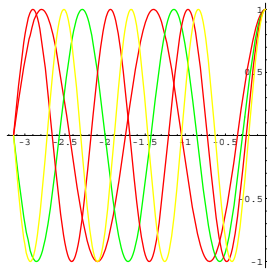
$\text{Sin}[9x/2], \text{Sin}[11x/2], \text{Sin}[13x/2], \text{Sin}[15x/2]$



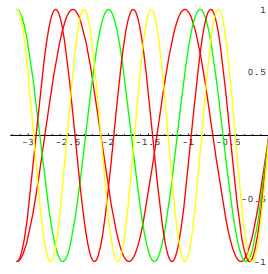
$\text{Cos}[5 \text{ x}], \text{Cos}[6 \text{ x}], \text{Cos}[7 \text{ x}], \text{Cos}[8 \text{ x}]$



$\text{Sin}[5 \text{ x}], \text{Sin}[6 \text{ x}], \text{Sin}[7 \text{ x}], \text{Sin}[8 \text{ x}]$



Cos[9x/2], Cos[11x/2], Cos[13x/2], Cos[15x/2]



Sin[9x/2], Sin[11x/2], Sin[13x/2], Sin[15x/2]

N.B. 1.2.32 Sussistono i seguenti particolari integrali per $n > 0$

$$\begin{aligned}
 \int_0^L \cos \frac{n\pi}{L} \xi \, d\xi &= 0; & \int_0^L \sin \frac{n\pi}{L} \xi \, d\xi &= \frac{L}{\pi} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n} \right); \\
 \int_0^L \cos^2 \frac{n\pi}{L} \xi \, d\xi &= \frac{L}{2}; & \int_0^L \sin^2 \frac{n\pi}{L} \xi \, d\xi &= \frac{L}{2}; \\
 \int_0^L \xi \cos \frac{n\pi}{L} \xi \, d\xi &= \frac{L^2}{\pi^2} \frac{(-1)^n}{n^2} (1 - (-1)^n); \\
 \int_0^L \xi \sin \frac{n\pi}{L} \xi \, d\xi &= \frac{L^2}{\pi^2} \left(-\frac{\pi}{n} (-1)^n \right); \\
 \int_0^L \xi^2 \cos \frac{n\pi}{L} \xi \, d\xi &= \frac{L^3}{\pi^3} \frac{2\pi}{n^2} (-1)^n; \\
 \int_0^L \xi^2 \sin \frac{n\pi}{L} \xi \, d\xi &= \frac{L^3}{\pi^3} \frac{2(-1)^n}{n^3} \left(1 - (-1)^n - \frac{n^2 \pi^2}{2} \right); \\
 \int_0^L \xi^3 \cos \frac{n\pi}{L} \xi \, d\xi &= \frac{L^4}{\pi^4} \frac{6(-1)^n}{n^4} \left(-1 + (-1)^n + \frac{n^2 \pi^2}{2} \right); \\
 \int_0^L \xi^3 \sin \frac{n\pi}{L} \xi \, d\xi &= \frac{L^4}{\pi^4} \frac{(-1)^n \pi}{n^3} (-6 + n^2 \pi^2); \\
 \int_0^L \cos \omega \xi \, d\xi &= \frac{1}{\omega} \sin(L\omega); & \int_0^L \sin \omega \xi \, d\xi &= \frac{1}{\omega} (1 - \cos(L\omega)); \\
 \int_0^L \cos^2 \omega \xi \, d\xi &= \frac{1}{4\omega} (2L\omega + \sin(2L\omega)); & \int_0^L \sin^2 \omega \xi \, d\xi &= \frac{1}{4\omega} (2L\omega - \sin(2L\omega)); \\
 \int_0^L \xi \cos \omega \xi \, d\xi &= \frac{1}{\omega^2} (-1 + \cos(L\omega) + L\omega \sin(L\omega)); \\
 \int_0^L \xi \sin \omega \xi \, d\xi &= \frac{1}{\omega^2} (-L\omega \cos(L\omega) + \sin(L\omega)); \\
 \int_0^L \xi^2 \cos \omega \xi \, d\xi &= \frac{1}{\omega^3} (2L\omega \cos(L\omega) + (-2 + L^2 \omega^2) \sin(L\omega)); \\
 \int_0^L \xi^2 \sin \omega \xi \, d\xi &= \frac{1}{\omega^3} (-2 + (2 - L^2 \omega^2) \cos(L\omega) + 2L\omega \sin(L\omega)); \\
 \int_0^L \xi^3 \cos \omega \xi \, d\xi &= \frac{1}{\omega^4} (6 + 3(-2 + L^2 \omega^2) \cos(L\omega) + L\omega(-6 + L^2 \omega^2) \sin(L\omega)); \\
 \int_0^L \xi^3 \sin \omega \xi \, d\xi &= \frac{1}{\omega^4} (-L\omega(-6 + L^2 \omega^2) \cos(L\omega) + 3(-2 + L^2 \omega^2) \sin(L\omega));
 \end{aligned}$$

◇

Esempio 2.33 $f(\xi) = \xi^2$ su $[-\pi, \pi]$

Si cercano $\pi a_n = \langle f, \cos n\xi \rangle$ e $\pi b_n = \langle f, \sin n\xi \rangle$ per $n \geq 0$ in modo che $f(\xi) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\xi + b_n \sin n\xi$. Si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \xi^2 d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \xi^2 d\xi = 2\pi^2/3.$$

Successivamente:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \xi^2 \cos n\xi d\xi = \frac{2}{n\pi} \left(- \int_0^{\pi} \sin n\xi \cdot 2\xi d\xi \right) \\ &= \frac{4}{n^2\pi} \left[(\pi \cos n\pi) - \int_0^{\pi} \cos n\xi d\xi \right] = (-1)^n \frac{4}{n^2}. \end{aligned}$$

Inoltre $b_n = 0$ dato che ξ^2 è pari e quindi $\xi^2 \sin n\xi$ dispari. Pertanto

$$\xi^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos \xi - \frac{1}{4} \cos 2\xi + \frac{1}{9} \cos 3\xi - \dots \right).$$

□

Esempio 2.34 $f(\xi) = \xi^2$ su $[0, 2\pi]$.

Si hanno i valori $\pi a_0 = \int_0^{2\pi} \xi^2 d\xi = 8\pi^3/3$ e

$$\begin{aligned} \pi a_n &= \int_0^{2\pi} \xi^2 \cos n\xi d\xi = \frac{1}{3n} \left(- \int_0^{2\pi} \sin n\xi \cdot 2\xi d\xi \right) \\ &= \frac{2}{n^2} \left(\left[\xi \cos n\xi \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos n\xi d\xi \right) = \frac{4\pi}{n^2} \\ \pi b_n &= \int_0^{2\pi} \xi^2 \sin n\xi d\xi = -\frac{1}{n} \left[\cos n\xi \xi^2 \right]_0^{2\pi} + \frac{2}{n} \int_0^{2\pi} \cos n\xi \xi d\xi = \frac{-4\pi^2}{n} \end{aligned}$$

e pertanto

$$\begin{aligned} \xi^2 &= \frac{4}{3}\pi^2 + 4 \left(\cos \xi + \frac{1}{2} \cos 2\xi + \frac{1}{9} \cos 3\xi + \dots \right) \\ &\quad - 4\pi \left(\sin \xi + \frac{1}{2} \sin 2\xi + \frac{1}{3} \sin 3\xi + \dots \right). \end{aligned}$$

□

Esempio 2.35 $f(\xi) = \xi$ su $(-l/2, l/2)$ da sviluppare in funzioni seno, e cioè con prolungamento periodico. Si ha $a_n = 0$ e

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l} \int_{-l/2}^{l/2} f(\xi) \sin \frac{2n\pi\xi}{l} d\xi = \frac{4}{l} \int_0^{l/2} \xi \sin \frac{n\pi\xi}{l/2} d\xi \\ &= \frac{4}{l} \frac{(l/2)^2}{\pi^2} \left(-\frac{\pi}{n} (-1)^n \right) = \frac{l}{n\pi} (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

e pertanto

$$f(\xi) = \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \left(\frac{n\pi\xi}{l/2} \right).$$

□

Esempio 2.36 $f(\xi) = \begin{cases} \xi & \text{per } 0 \leq \xi \leq l/2 \\ l - \xi & \text{per } l/2 \leq \xi \leq l \end{cases}$ da sviluppare in funzioni seno, e cioè con prolungamento dispari. Si ha $a_n = 0$ ed

$$\begin{aligned} lb_n &= \int_{-l}^l f(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{l} d\xi = 2 \int_0^l f(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{l} d\xi = \\ &= 2 \int_0^{l/2} \xi \sin \frac{n\pi\xi}{l} d\xi + 2 \int_{l/2}^l (l - \xi) \sin \frac{n\pi\xi}{l} d\xi = \\ &= \frac{2l^2}{\pi^2} \left(-\frac{1}{n} \right) \left(\left[\xi \cos n\xi \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \cos n\xi d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \left[(\pi - \xi) \cos n\xi \right]_{\pi/2}^{\pi} + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos n\xi d\xi \right) = \\ &= \frac{2l^2}{\pi^2} \left(-\frac{1}{n} \right) \left(-\frac{2}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \right), \end{aligned}$$

e pertanto

$$f(\xi) = \frac{4l}{\pi^2} \left(\sin \frac{\pi\xi}{l} - \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi\xi}{l} + \frac{1}{25} \sin \frac{5\pi\xi}{l} - \dots \right).$$

Si noti che la f è pari rispetto a $l/2$: $f(\frac{l}{2} + \xi) = f(\frac{l}{2} - \xi)$; quindi partendo da $\tilde{f}(\xi) = \xi$ su $0 \leq \xi \leq \frac{l}{2}$ e facendone l'estensione pari fino a l e dispari in $[-l, 0]$ si ottiene una funzione pari rispetto a $l/2$ e dispari rispetto allo zero e quindi sviluppabile in $\sin(2n+1)n\pi\xi/l$. Si noti anche che sull'intervallo $(-l/2, l/2)$ questa funzione è identica a quella del precedente esempio, e quindi le due serie convergono, per $-l/2 < \xi < l/2$, agli stessi valori.

□

Esempio 2.37 $f(\xi) = 1$ per $0 < \xi < \pi$ da sviluppare in funzioni seno. La funzione si assume dispari per definizione. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} b_n &= \int_0^{\pi} \sin n\xi d\xi = -\frac{1}{n} \left[\cos n\xi \right]_0^{\pi} = \frac{1}{n} (1 - (-1)^n) \quad \text{e quindi} \\ 1 &= \frac{4}{\pi} \left(\sin \xi + \frac{1}{3} \sin 3\xi + \frac{1}{5} \sin 5\xi + \frac{1}{7} \sin 7\xi + \dots \right). \end{aligned}$$

□

Se si riprende in considerazione l'aspetto globale (in norma) dello spazio in esame ci si rende conto che i coefficienti di Fourier sono comunque i "migliori" coefficienti affinché la combinazione lineare $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i$ esprima in qualche senso una certa "somma" x anche quando l'integrabilità termine a termine non sia verificata. Per mostrarlo si prenderà in considerazione, qui di seguito, un generico spazio euclideo $\mathbb{E}$ che per semplicità verrà supposto (separabile e) reale; ed in esso si fisserà un sistema di vettori $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{E}$ che sia ortonormale ma non necessariamente completo. Inoltre, come sopra, per ogni punto $x \in \mathbb{E}$ si indicheranno con $\{c_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i corrispondenti coefficienti di Fourier: $c_i := \langle x, \phi_i \rangle$, e con il simbolo $\|\cdot\|$ si indicherà la norma euclidea $\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Proposizione 1.2.38 Siano $\{\tilde{c}_1, c_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ assegnati arbitrariamente e sia $\tilde{s}_\nu := \sum_{i=1}^{\nu} \tilde{c}_i \phi_i$ con $\nu \in \mathbb{N}$. Fissato comunque $x \in \mathbb{E}$ di tutte le possibili $\tilde{s}_\nu$ quella che ha minima distanza da x , (ovvero minimo scarto quadratico medio) è proprio la somma di Fourier: $s_\nu := \sum_{i=1}^{\nu} c_i \phi_i$. □

Si noti che questa affermazione nulla ha a che fare con la completezza dello spazio $\mathbb{E}$ nè del sistema delle $\{\phi_n\}_{n=1,2,\dots}$.

Dimostrazione

$$\|x - \tilde{s}_\nu\|^2 = \langle x - \tilde{s}_\nu, x - \tilde{s}_\nu \rangle = \|x\|^2 + \|\tilde{s}_\nu\|^2 - 2\langle x, \tilde{s}_\nu \rangle.$$

Ma si ha $\langle x, \tilde{s}_\nu \rangle = \sum_{i=1}^{\nu} \tilde{c}_i \langle x, \phi_i \rangle = \sum_{i=1}^{\nu} \tilde{c}_i c_i$, ed è $\|\tilde{s}_\nu\|^2 = \sum_{i=1}^{\nu} \tilde{c}_i^2$, quindi sommando e sottraendo la quantità $\sum_{i=1}^{\nu} c_i^2 = \|s_\nu\|^2$ si ha

$$\|x - \tilde{s}_\nu\|^2 = \|x\|^2 - \|s_\nu\|^2 + \sum_{i=1}^{\nu} (\tilde{c}_i - c_i)^2. \quad (2.9)$$

■

Inoltre l'essere la norma non negativa implica che $\|x\|^2 \geq \|s_\nu\|^2$ per ogni $\nu \in \mathbb{N}$ e quindi:

Proposizione 1.2.39 Sotto le stesse ipotesi della Proposizione 1.2.38 sussiste la seguente Disuguaglianza. $\square$

$$\text{Disuguaglianza di Bessel} \quad := \quad \|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2, \quad \forall x \in \mathbb{E}.$$

Corollario 1.2.40 Se $\|x\| < \infty$ si ha che $c_i \xrightarrow{i} 0$. $\square$

Proposizione 1.2.41 Qualunque sia $\nu \in \mathbb{N}$, il vettore $x - \sum_{i=1}^{\nu} c_i \phi_i$ è ortogonale allo $\text{span} \{\phi_i\}_{i=1, \dots, \nu}$. $\square$

(L'affermazione non sarebbe vera qualora le componenti fossero le $\tilde{c}_i$).

Proposizione 1.2.42

Il sistema ortonormale $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ è una base per $(\mathbb{E}, \|\cdot\|)$, se e solo se per ogni $x \in \mathbb{E}$ vale la

$$\text{Uguaglianza di Parseval} \quad := \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2. \quad \square$$

Ovvero: il sistema ortonormale $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ è completo per $(\mathbb{E}, \|\cdot\|)$ (non necessariamente lo spazio $\mathbb{E}$) se e solo se per ogni $x \in \mathbb{E}$ la serie dei quadrati dei coefficienti di Fourier $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$ è convergente ed uguaglia il quadrato della norma (purché questa sia indotta dal prodotto scalare) del vettore x usato per calcolare tali coefficienti.

Dimostrazione In virtù della (2.9) con $\tilde{c}_i \equiv c_i$ per ogni $i = 1, 2, \dots$, l'uguaglianza vale se e solo se $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|x - s_\nu\| = 0$, pertanto la sufficienza è immediata, mentre la necessità si ottiene notando che per ogni $\tilde{s}_\nu \neq s_\nu$ si ha $\|x - \tilde{s}_\nu\| \geq \|x - s_\nu\|$. $\blacksquare$

D'altra parte sussiste al seguente.

Proposizione 1.2.43 Se lo spazio $\mathbb{E}$ oltre che essere separabile è anche completo, dato un sistema ortonormale (non necessariamente completo) ed una qualunque serie convergente $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < \infty$, esiste $x \in \mathbb{E}$ tale che

$$\langle x, \phi_i \rangle = c_i \quad \text{ed} \quad x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i$$

nel senso che $s_\nu := \sum_{i=1}^{\nu} c_i \phi_i$ è tale che $\|x - s_\nu\| \xrightarrow{\nu} 0$, (e la $\{s_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ è Cauchy). $\square$

In tali ipotesi, cioè, lo $\text{span} \{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ è un sottospazio *proprio* di $\mathbb{E}$ fatto con le combinazioni lineari a coefficienti tali che $\sum_{i=0}^{\infty} c_i^2 < \infty$

Dimostrazione $\|s_{\nu+p} - s_\nu\|^2 = \sum_{i=\nu}^{\nu+p} c_i^2$ implica che $\{s_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ è Cauchy quando $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$ è convergente.

La completezza di $\mathbb{E}$ assicura che esiste $x \in \mathbb{E}$ tale che $\|x - s_\nu\| \xrightarrow{\nu} 0$; inoltre per ogni k si ha $\langle x, \phi_k \rangle = \langle s_\nu, \phi_k \rangle + \langle x - s_\nu, \phi_k \rangle$ che, per la disuguaglianza di Schwartz, tende a c_k per $\nu \rightarrow \infty$. $\blacksquare$

Spazio di Hilbert $:=$ uno spazio *euclideo, separabile, completo*.

Talvolta si aggiunge a queste la richiesta che lo spazio sia ad un numero infinito di dimensioni, riservando il nome di spazi euclidei a quelli a dimensione finita, (i quali, vedi Nota 1.2.68 più oltre, sono certo completi). Altre volte invece non si richiede apriori la separabilità come caratteristica fondamentale, e vengono chiamati Hilbert spazi euclidei completi ad infinite dimensioni.

Proposizione 1.2.44 In uno spazio di Hilbert $\mathbb{H}$, un sistema ortonormale è una base se e solo se l'unico vettore che ha tutte le componenti nulle è il vettore nullo.

Equivalentemente:

per ogni $x, y \in \mathbb{H}$, $x \neq y \iff \langle x, \phi_i \rangle \neq \langle y, \phi_i \rangle$ per qualche i .

Equivalentemente:

per ogni $x, y \in \mathbb{H}$ (reale) si ha che $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \phi_k \rangle \langle y, \phi_k \rangle$. $\square$

Dimostrazione

($\Rightarrow$) Parseval implica $\|x\| = 0$, e quindi $x = 0$ per la definizione di norma.

($\Leftarrow$) Se non fosse una base, esisterebbe qualche $\hat{x}$ tale che $\|\hat{x}\| > \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$ ove, al solito, $c_i := \langle \hat{x}, \phi_i \rangle$. Ma la completezza di $\mathbb{H}$ implica che esiste $x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i$ ed è quindi $(\hat{x} - x)$ ortogonale a tutti gli elementi della base. Per ipotesi allora deve essere $\hat{x} = x$, e l'assunto dà una contraddizione.

D'altra parte: $4\langle x, y \rangle = \langle x + y, x + y \rangle - \langle x - y, x - y \rangle$, e Parseval implica

$$4\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x + y, \phi_k \rangle^2 - \langle x - y, \phi_k \rangle^2.$$

■

Esempio 2.45 La famiglia $\left\{ \sin \frac{n\pi\xi}{L}, \cos \frac{m\pi\xi}{L} \right\}_{\substack{m=0,1,2,\dots \\ n=1,2,\dots}}$ è completa in $C_2([0, L])$ che non è completo; è

completa in $L_2([0, L])$ che è completo, ed anche in $L_1([0, L])$ [Powell-Shah p.130]. Ciò sfrutta il fatto che $|\sin \xi| \leq 1$ permette di definire i coefficienti di Fourier anche in L_1 benchè questi non sia euclideo.

Malgrado non sia detto che $x \in L_1 \cap L_2$ abbia lo stesso sviluppo nei due spazi, se $x, y \in C_2([a, b]) \subset L_2([a, b])$ è senz'altro $x \neq y \iff \langle x, \phi_i \rangle \neq \langle y, \phi_i \rangle$ per qualche i . In ogni caso la somma $f(x)$ di una serie di Fourier trigonometrica verifica: $(1/L) \int_{-L}^L f^2(x) dx = (a_0/2) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$.

□

Si ricordi ora che, per la Proposizione 1.2.7, uno spazio di Hilbert ammette (almeno) una base (ortonormale) numerabile.

Corollario 1.2.46 Ogni $x \in \mathbb{H}$ è univocamente determinato dai (suoi) coefficienti di Fourier:

$$z \in \mathbb{H} \iff \left\{ c_i \right\}_{i \in \mathbb{N}} \in (l_2, \|\cdot\| < \infty).$$

□

Ciò permette di dimostrare la seguente Proposizione 1.2.48.

Spazi euclidei isomorfi: $\mathbb{E}, \mathbb{E}'$:= spazi euclidei per i quali esiste una corrispondenza biunivoca $\iota : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{E}$ si ha

$$\iota(x + y) = \iota(x) + \iota(y), \quad \iota(\lambda x) = \lambda \iota(x), \quad \langle x, y \rangle = \langle \iota(x), \iota(y) \rangle;$$

e cioè esiste un operatore lineare ι che conserva la struttura euclidea.

Proposizione 1.2.47 Spazi euclidei a dimensione finita sono isomorfi se e solo se aventi la stessa dimensione. □

Proposizione 1.2.48 Spazi di Hilbert a dimensione infinita (e separabili) sono isomorfi. □

Dimostrazione Per ogni $x \in \mathbb{H}$ e data una base ortonormale $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ si definisca la funzione $\iota : \mathbb{H} \rightarrow l_2$ mediante la $\iota(x) := \{c_0, c_1, \dots\}$ con $c_i := \langle x, e_i \rangle$. Dato che $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < \infty$ si ha che la definizione è ben posta: $\iota(x) \in (l_2, \|\cdot\|_2 < \infty)$.

Viceversa, le Proposizioni 1.2.43 e 1.2.44 implicano l'inclusione inversa, e cioè che per ogni $\{c_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in (l_2, \|\cdot\|_2)$ con $\|\cdot\|_2 < \infty$, esiste unico $x \in \mathbb{H}$ tale che $\iota(x) := \{c_0, c_1, \dots\}$. Infine l'uguaglianza di Parseval assicura che $\sum_{i=1}^{\infty} (c_i + d_i)^2 = \langle x + y, x + y \rangle$ da cui sviluppando i prodotti segue che $\langle x, y \rangle = \langle \iota(x), \iota(y) \rangle$. ■

Sono poi di interesse le seguenti considerazioni di natura generale.

Proposizione 1.2.49 In ogni sottospazio (che è chiuso) di uno spazio di Hilbert $\mathbb{H}$ è contenuto (almeno) un sistema ortonormale il cui *span* coincide con il sottospazio; ovvero: ogni sottospazio contiene una sottobase. □

Insiemi ortogonali $\mathbb{E}_{1,2} \subseteq \mathbb{E} \quad := \quad$ per ogni $x \in \mathbb{E}_1, \quad y \in \mathbb{E}_2$ si ha $x \perp y$.

Se due insiemi ortogonali $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$ sono sottospazi di $\mathbb{E}$, dette $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2$ due basi in ciascuno di essi, si definiscono
Sottospazi ortogonali $\quad := \quad$ per ogni $x \in \mathbb{B}_1, \quad y \in \mathbb{B}_2$ si ha $x \perp y$.

Complemento ortogonale di un insieme $D \subseteq \mathbb{E} \quad := \quad$ l'insieme $D^\perp$ tale che

$$\left\{ x \mid y \in D \Rightarrow x \perp y \right\}.$$

Proposizione 1.2.50 La funzione $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \quad$ è una funzione continua. $\square$

Dimostrazione

$$|\langle x, y \rangle - \langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle| \leq |\langle x - \tilde{x}, y \rangle| + |\langle \tilde{x}, y - \tilde{y} \rangle| \leq \|x - \tilde{x}\| \|y\| + \|\tilde{x}\| \|y - \tilde{y}\|.$$

■

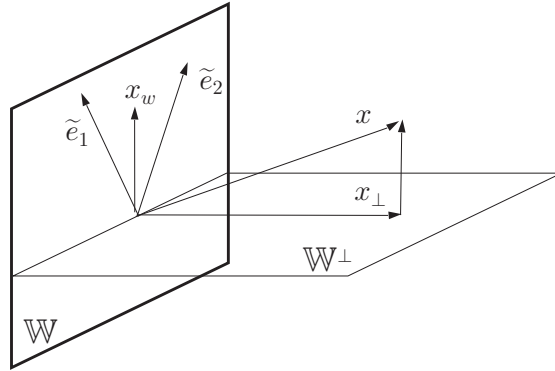
Inoltre, la completezza di $\mathbb{H}$ implica che $\lim x_n$ esiste se $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è Cauchy. In definitiva, sussiste in tal caso la $\langle \lim x_n, y \rangle = \lim \langle x_n, y \rangle$.

Corollario 1.2.51 Il complemento ortogonale di un sottoinsieme di uno spazio di Hilbert $\mathbb{H}$ è un sottospazio di $\mathbb{H}$. $\square$

Proposizione 1.2.52 Uno spazio di Hilbert è la somma diretta di un qualsiasi suo sottospazio $\mathbb{W}$ e del suo complemento ortogonale $\mathbb{W}^\perp$. $\square$

Dimostrazione Sia $\{\tilde{e}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una base ortonormale in $\mathbb{W}$ e sia $x_w := \sum_{i=1}^{\infty} c_i \tilde{e}_i$, con $c_i := \langle x, \tilde{e}_i \rangle$. È chiaro che $x_\perp := x - x_w$ è ortogonale a tutti i versori $\tilde{e}_i$ e quindi ad ogni $\tilde{x} \in \mathbb{W}$. Il Corollario 1.2.46 implica che tale x_w , e quindi anche $x_\perp$, sono unici. $\blacksquare$

Se il numero degli $\tilde{e}_i$ è finito esso coincide con la Codimensione di $\mathbb{W}^\perp$ che, si ricorderà, è la dimensione dello spazio delle classi di equivalenza: $\left\{ [x_w] \mid x \sim x_w := (x - x_w) = x_\perp \in \mathbb{W}^\perp \right\}$.



Si supponga ora che su uno spazio vettoriale $\mathbb{V}$, per semplicità reale, sia assegnato un funzionale lineare continuo $g : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$, o forma lineare, cioè una mappa lineare omogenea definita su $\mathbb{V}$ ed a valori in $\mathbb{R}$.

Operatore lineare limitato $\quad := \quad$ Una trasformazione lineare (o operatore) $\mathcal{T} : (\mathbb{V}, \|\cdot\|_{\mathbb{V}}) \rightarrow (\mathbb{W}, \|\cdot\|_{\mathbb{W}})$, definita su tutto $\mathbb{V}$ e tale che esiste $c \geq 0$ per il quale $\|\mathcal{T}x\|_{\mathbb{W}} \leq c \|x\|_{\mathbb{V}}$ per ogni $x \in \mathbb{V}$.

Equivalentemente: Un operatore $\mathcal{T} : (\mathbb{V}, \|\cdot\|_{\mathbb{V}}) \rightarrow (\mathbb{W}, \|\cdot\|_{\mathbb{W}})$, definito su tutto $\mathbb{V}$ e tale da trasformare ogni insieme limitato di $\mathbb{V}$ in un insieme limitato di $\mathbb{W}$.

Operatore lineare continuo $\quad := \quad$ Un operatore $\mathcal{T} : (\mathbb{V}, \|\cdot\|_{\mathbb{V}}) \rightarrow (\mathbb{W}, \|\cdot\|_{\mathbb{W}})$, definito su tutto $\mathbb{V}$ e tale per ogni $\bar{x} \in \mathbb{V}$ si abbia che: dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta(\varepsilon, \bar{x})$ per il quale $x \in B_{\delta(\varepsilon, \bar{x})}$ implica $\mathcal{T}x \in B_{\varepsilon}(\mathcal{T}\bar{x})$.

Equivalentemente: Un operatore $\mathcal{T} : (\mathbb{V}, \|\cdot\|_{\mathbb{V}}) \rightarrow (\mathbb{W}, \|\cdot\|_{\mathbb{W}})$, definito su tutto $\mathbb{V}$ e tale da trasformare ogni insieme compatto di $\mathbb{V}$ in un insieme compatto di $\mathbb{W}$.

Equivalentemente: Un operatore $\mathcal{T} : (\mathbb{V}, \|\cdot\|_{\mathbb{V}}) \rightarrow (\mathbb{W}, \|\cdot\|_{\mathbb{W}})$, definito su tutto $\mathbb{V}$ e tale da trasformare successioni convergenti in successioni convergenti.

È immediato vedere che se $\mathcal{T}$ è continuo in un punto x_0 allora è continuo su tutto $\mathbb{V}$; infatti se $\mathcal{T}$ è continuo in x_0 , dati $x, x' \in \mathbb{V}$ si ha che

$$|\mathcal{T}x - \mathcal{T}x'| = |\mathcal{T}(x - x' + x_0) - \mathcal{T}x_0| < \varepsilon \quad \text{purché} \quad |x - x'| < \delta(\varepsilon, x_0) \equiv \delta(\varepsilon).$$

Nota 1.2.53 Se gli spazi $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ sono a dimensione infinita, l'essere o meno limitato è proprietà che dipende non solo dall'operatore ma anche dalle norme scelte nei due spazi. Siano per esempio $\mathbb{V} = C^1([0, \pi])$ e $\mathbb{W} = C^0([0, \pi])$ con $\mathcal{T} := \frac{d}{dx}$. Se $\|\cdot\|_{\mathbb{V}} = \|\cdot\|_{\infty} = \|\cdot\|_{\mathbb{W}}$ allora l'operatore $\mathcal{T}$ è non limitato: infatti le funzioni $x_n(\xi) := \sin n\xi$ hanno $\|x_n\|_{\mathbb{V}} = 1$ e sono in $\mathbb{V}$ per ogni n ; risulta però $\|\mathcal{T}x_n\|_{\mathbb{W}} = n$ e quindi $\mathbb{V}$ certo contiene punti per i quali non esiste $c \geq 0$ che verifichi la $\|\mathcal{T}x\|_{\mathbb{W}} \leq c\|x\|_{\mathbb{V}}$. Se però $\|\cdot\|_{\mathbb{W}} = \|\cdot\|_{\infty}$ e si sceglie $\|x\|_{\mathbb{V}} := \max\{\|x\|_{\infty}, \|\mathcal{T}x\|_{\infty}\}$ allora risulta $\|\mathcal{T}x\|_{\mathbb{W}} \leq \|x\|_{\mathbb{V}}$; e siccome ad esempio la funzione e^{ξ} è tale da avere $\|\mathcal{T}x\|_{\mathbb{W}} = \|x\|_{\mathbb{V}}$, se ne conclude che $\|\mathcal{T}\| = 1$. $\triangleright$

Si noti anche che la condizione di limitatezza dei trasformati di insiemi limitati può essere richiesta anche per operatori *non lineari* $F : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}'$. Si potrà definire

Operatore limitato $\mathcal{F} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}'$:= un operatore per il quale esiste finito su una sfera $[B_r(x_0)]$ il numero

$$m(x_0, r) := \sup_{\substack{x, y \in B_r(x_0) \\ x \neq y}} \frac{d'(\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y))}{d(x, y)}.$$

Tale numero è detto anche $\|\mathcal{F}\|$ se la definizione è data su spazi normati, ed è chiaro che se $m < \infty$ certo $\mathcal{F}$ è continuo su $B_r(x_0)$. Sono limitati, per esempio, gli operatori che verificano la condizione di Lipschitz (si veda § I.3) che dà l'uniforme continuità. Se poi l'operatore è lineare sussiste la più forte **Proposizione 1.2.54**

$\mathcal{T} : (\mathbb{V}, \|\cdot\|_{\mathbb{V}}) \rightarrow (\mathbb{W}, \|\cdot\|_{\mathbb{W}})$ è continuo se e solo se è limitato. $\square$

Dimostrazione [Kolmogorov IV.5.2]

(Lasciando cedere i suffissi delle norme) Se $\mathcal{T}$ è continuo in zero, $\|x\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|\mathcal{T}x\| < \varepsilon$. Da questa segue $\|\xi\| \leq 1 \Rightarrow \|\mathcal{T}\xi\| \leq c$ che a sua volta implica $\|\mathcal{T}x\| = \|x\| \left\| \mathcal{T} \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq c\|x\|$. Il viceversa è immediato e, come si è detto, vale anche per operatori non lineari. $\blacksquare$

Lo spazio $\mathbb{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ degli operatori lineari continui da $(\mathbb{V}, \|\cdot\|_{\mathbb{V}})$ in $(\mathbb{W}, \|\cdot\|_{\mathbb{W}})$ può essere reso normato mediante la $\|\mathcal{T}\| := \sup_{x \in \mathbb{V} \setminus \{0\}} \frac{\|\mathcal{T}x\|_{\mathbb{W}}}{\|x\|_{\mathbb{V}}}$ e sussiste la

Proposizione 1.2.55 Se $\mathbb{W}$ è completo, $(\mathbb{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W}), \|\cdot\|)$ è Banach. $\square$

Dimostrazione

La dimostrazione di questa affermazione è analoga a quella che verrà data nell'appendice A.8 di queste note per il caso $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ spazi reali a dimensione finita e norma euclidea. A grandi linee, essa consiste nel seguente ragionamento [Rall p.39 opp. Reed p.70]: se $\{\mathcal{T}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy, qualunque sia $x \in \mathbb{V}$ si ha $\|\mathcal{T}_n x - \mathcal{T}_m x\|_{\mathbb{W}} \leq \|\mathcal{T}_n - \mathcal{T}_m\| \|x\|_{\mathbb{V}} < \varepsilon$ per n, m sufficientemente grandi, e quindi esiste unico il $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}_n x = y =: \mathcal{T}x$. Poi si controlla che tale $\mathcal{T}$ sia (a) lineare; (b) limitato; (c) coincida con $\mathcal{T} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}_n$, nel senso che se $n > \nu_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$ allora accade che $\|\mathcal{T} - \mathcal{T}_n\| < \varepsilon$. $\blacksquare$

Nel caso in cui lo spazio di arrivo $(\mathbb{W}, \|\cdot\|_{\mathbb{W}})$ sia in particolare $(\mathbb{R}^1, |\cdot|)$ lo spazio $\mathbb{V}^* := \mathbb{L}(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ si chiama *Spazio duale di $\mathbb{V}$* , ed i suoi punti $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ si chiamano *funzionali* (lineari, limitati).

Si definisce cioè:

Spazio duale di $\mathbb{V}$:= lo spazio (vettoriale)

$$\mathbb{V}^* := \left\{ f \left| \begin{array}{l} (f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x) \\ (a f)(x) := a f(x) \end{array} \right. \right\}$$

dei funzionali lineari continui su $\mathbb{V}$, e dotato della norma (si veda § A.7)

$$\|f\| := \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|.$$

Kernel del funzionale g := l'insieme $Ker\ g := \{x \in \mathbb{V} \mid g(x) = 0\}$;
 esso è una Varietà lineare in $\mathbb{V}$, perchè $g(x) = g(y) = 0 \Rightarrow g(ax + by) = 0$.

Proposizione 1.2.56 Mediante un funzionale g è possibile generare una varietà lineare (di dimensione uno in quanto $g(x) \in \mathbb{R}^1$) fatta dalle classi:

$$[x] := \{y \in \mathbb{V} \mid x \sim y\}, \quad \text{ove} \quad x \sim y \iff (x - y) \in Ker\ g;$$

$$\text{o anche:} \quad x \sim y \iff g(x) = g(y),$$

$$\text{o anche:} \quad [x] \neq [y] \iff g(x) \neq g(y).$$

□

Dimostrazione Sia x_0 tale che $g(x_0) = 1$. Se g è non banale è sempre possibile individuare un tale x_0 . Per ogni $x \in \mathbb{V}$ sia $z := x - g(x)x_0$. Si ha $g(z) = 0$, ed è unica ad x_0 fissato la rappresentazione

$$x = \alpha x_0 + z = g(x)x_0 + z \quad \text{con} \quad g(z) = 0.$$

[infatti se fosse anche $x = \alpha'x_0 + z'$ si avrebbe un assurdo: $(\alpha - \alpha')x_0 = z' - z$ che dà, per $\alpha \neq \alpha'$, $g(\frac{z' - z}{\alpha - \alpha'}) = 1 = \frac{1}{\alpha - \alpha'}(0 - 0)$]. ■

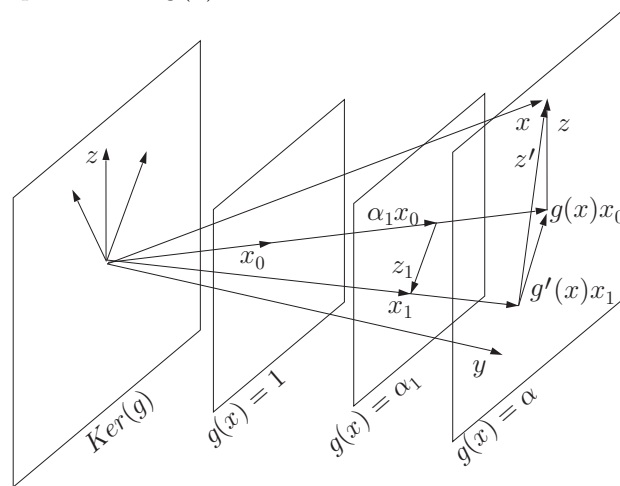
Ne segue che, fissato un x_1 tale che $g(x_1) = \alpha_1 \neq 0$, è anche possibile esprimere (ed univocamente) $x_1 = g(x_1)x_0 + z_1$ con $g(z_1) = 0$. Se ne ricava $x_0 = (x_1 - z_1)/g(x_1)$, ed in tal modo il generico $x \in \mathbb{V}$ resta anche espresso da

$$x = g(x)x_0 + z = \frac{g(x)}{g(x_1)}x_1 + \left(z - \frac{g(x)}{g(x_1)}z_1\right) =: g'(x)x_1 + z' \quad \text{con} \quad g(z') = 0.$$

A sua volta, la $g'(\cdot) := g(\cdot)/g(x_1)$ mostra che è anche $g'(z') = 0$, ed anzi che è $Ker\ g = Ker\ g'$.

D'altra parte, se g, g'' sono tali che $Ker\ g = Ker\ g''$ allora esiste $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $g(x) = \kappa g''(x)$, per ogni $x \in \mathbb{V}$. Infatti: sia $g(x_0) = 1$; per ogni $x \notin Ker\ g''$, si può scrivere $x = g(x)x_0 + z$, ma allora $g''(x) \neq 0$ implica che $g''(x) = g(x)g''(x_0)$ con $g''(x_0) =: \kappa \neq 0$. In particolare si ha ancora $x = \frac{g''(x)}{g''(x_0)}x_0 + z$.

Viceversa: per ogni sottospazio $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ di codimensione uno esiste (almeno) un funzionale g che lo ammette come Kernel: basta scegliere x_0 fuori da $\mathbb{W}$; per ogni $x \in \mathbb{V}$ scrivere $x = \alpha x_0 + z$ con z nel sottospazio (e cioè cercare $\alpha : (x - \alpha x_0) \in \mathbb{W}$; riconoscere che tale α è unico in quanto la condizione $codim = 1$ implica l'unicità di α tale che $[x] = \alpha[x_0]$); e porre infine $g(x) := \alpha$. In tal modo risulta $\mathbb{W} \equiv Ker\ g$.



Piano $H \subset \mathbb{V}$:= l'insieme dei vettori di $\mathbb{V}$ dati da $x = \alpha x_0 + z$ con αx_0 fissato e z arbitrariamente scelto in un qualche sottospazio $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ (detto spazio delle direzioni). Si noti che se $\alpha x_0 \neq 0$ il piano H non è una varietà lineare.

Si vedrà che se lo spazio è euclideo non lede scegliere $x_0 \in \mathbb{W}^\perp$, ed allora la rappresentazione dei vettori del piano H è unica.

Nel caso generale, ogni classe di equivalenza, o piano, è individuata dall'unico numero $\alpha \equiv g(x)$, lo spazio delle direzioni essendo $Ker\ g$.

Esempio 2.57 In uno spazio euclideo $\langle u_0, x \rangle = cost$ è un piano, così come lo è $g(x) = cost$.

□

Piani paralleli := piani che hanno lo stesso spazio delle direzioni. In tal caso o coincidono o non hanno alcun punto in comune.

Esempio 2.58 La classe $[x] = \alpha[x_0]$ è un piano parallelo al sottospazio $\mathbb{W} \equiv \text{Ker } g$, se g è definito come detto sopra. $\square$

Un piano è una varietà lineare, ed anzi un sottospazio, solo quando contiene l'origine; esso comunque è dotato di dimensione nel senso che condivide quella del suo spazio delle direzioni.

In definitiva c'è una corrispondenza biunivoca fra funzionali lineari non banali e piani non contenenti l'origine. Ciascun piano $\mathbb{W}$ contenente l'origine è il Ker di tutti i funzionali della famiglia (ad un parametro) dei funzionali lineari che individuano i piani paralleli a $\mathbb{W}$.

Proposizione 1.2.59 Lo spazio $\mathbb{V}^*$, duale di $\mathbb{V}$, è uno spazio vettoriale della stessa dimensione di $\mathbb{V}$. $\square$

Infatti data una base $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{V}$, per $i = 1, \dots, n \leq \infty$ un qualsiasi f è completamente individuato dalle

Componenti covarianti di f : $f_i := f(e_i)$.

Inoltre, sia $\mathbb{V}_{(i)} := \text{span}\{e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n\}$ e si definisca f^{*i} tale che $\text{Ker } f^{*i} \equiv \{x \mid f^{*i}(x) = 0\} = \mathbb{V}_{(i)}$. L'insieme $\{f^{*i}\}_{i=1, \dots, n}$ è una possibile base in $\mathbb{V}^*$. Infatti: gli f^{*i} sono linearmente indipendenti, perché

$$\sum c_i f^{*i}(e_j) \neq 0 \text{ solo se } i = j \text{ in quanto, per costruzione, è sempre possibile assumere } f^{*i} \begin{cases} = 0 & \text{se } i \neq j \\ \neq 0 & \text{se } i = j \end{cases}.$$

D'altra parte, un qualsiasi $\tilde{f} \in \mathbb{V}^*$ è tale che

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x^i e_i) = x^i \tilde{f}(e_i) = x^i \tilde{f}_j f^{*j}(e_i) = \tilde{f}_j f^{*j}(x)$$

e ciò mostra che esistono, univocamente, le componenti covarianti $\tilde{f}_j$ per ciascun $\tilde{f}$.

Base duale := l'insieme delle n funzioni $\{f^{*1}, \dots, f^{*n}\}$ tali che

$$\text{Ker } f^{*i} \equiv \{x \mid f^{*i}(x) = 0\} = \mathbb{V}_{(i)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\text{ovvero tali che } f^{*i}(e_j) = \delta_j^i \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Si osservi che in tali definizioni non è stato necessario introdurre alcun prodotto interno nello spazio $\mathbb{V}$. Tuttavia, l'introduzione di tale struttura permetta di determinare con semplicità, e per ogni vettore $x \in \mathbb{V}$, i numeri $x_i := \langle x, e_i \rangle \equiv \kappa_{ji} x^j$, come si vedrà più oltre in virtù del teorema di rappresentazione di Riesz.

Proposizione 1.2.60 $(\mathbb{V}^*, \|\cdot\|)$ è completo. $\square$

E ciò anche se $\mathbb{V}$ fosse non completo: infatti è $\mathbb{R}$ ad esserlo.

Si ricordino le seguenti forme di convergenza in spazi di Banach. (si veda anche § A.1 Divagazione)

$$x_n \xrightarrow{w} x \quad \text{quando} \quad |f(x_n) - f(x)| \longrightarrow 0 \quad \forall f \in \mathbb{V}^*$$

$$f_n \xrightarrow{w} f \quad \text{quando} \quad |\xi(f_n) - \xi(f)| \longrightarrow 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{V}^{**}$$

$$f_n \xrightarrow{*w} f \quad \text{quando} \quad |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0 \quad \forall x \in \mathbb{V}$$

di queste, la seconda implica la terza e questa implica la seconda se lo spazio è riflessivo. Inoltre la prima equivale alla convergenza in norma: $\|x_n - v\| \longrightarrow 0$ qualora $\mathbb{V}$ sia (completo ed) a dimensione finita.

Sono istruttivi, oltre che utili, i seguenti due teoremi [Kolmogorov IV 3.2].

Teorema 1.2.61 Se $x_n \xrightarrow{w} x$ in $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\|x_n\| \leq c$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Dimostrazione In $\mathbb{L}(\mathbb{V}, \mathbb{R})$ si considerino gli insiemi $A_\kappa^{(n)} := \{f \mid f(x_n) \leq \kappa\}$. Tali insiemi sono chiusi in quanto $N(0) \subset \mathbb{V}^*$ è limitato. Anche $A_\kappa := \bigcap_{n=1}^\infty A_\kappa^{(n)}$ è chiuso, e siccome ogni $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge sarà certo limitata; pertanto $\mathbb{L}(\mathbb{V}, \mathbb{R}) \subset \bigcup_{\kappa=1}^\infty A_\kappa$. Ma sussiste un teorema (Baire) che esclude, in tal caso, che tutti gli A_κ possano essere affatto densi. Pertanto esisterà κ_0 tale che $A_{\kappa_0} \supset B_\varepsilon(f_0)$ per un certo f_0 , per cui la successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata sulla sfera $B_\varepsilon(f_0)$ e quindi è limitata (su tutto $\mathbb{V}^*$) come successione di punti in $\mathbb{V}^{**}$. Ciò implica che sia limitata in $\mathbb{V}$. $\blacksquare$

Teorema 1.2.62 Condizione sufficiente (oltre che necessaria) affinché $x_n \xrightarrow{w} x$ in $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ è che:

- (a) $\left\{\|x_n\|\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ sia limitata, e cioè $\sup_n \|x_n\| < \infty$;
- (b) $\phi_\alpha(x_n) \rightarrow \phi_\alpha(x)$ per ogni $\phi_\alpha \in \mathbb{B}$, ove $\mathbb{B} \subset \mathbb{V}^*$ è una base per $(\mathbb{V}^*, \|\cdot\|)$ (o, più in generale, se $\mathbb{B}$ è un qualsiasi sottoinsieme denso di $\mathbb{V}^*$ e quindi tale che $\text{span } \mathbb{B} = \mathbb{V}^*$).

□

Dimostrazione Se $f = s_\nu := \sum_{h=1}^\nu c_h \phi_{\alpha_h}$ è una combinazione lineare finita di elementi di $\mathbb{B}$ si verifica subito che $f(x_n) \rightarrow f(x)$. Se invece f è un qualsiasi punto di $\mathbb{V}^*$, e siccome $\exists \{s_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ tale che $s_\nu \rightarrow f$ (in norma $\|\cdot\|_{\mathbb{V}^*}$), se $\|x_n\| \leq c$ per $n = 1, 2, \dots$ si ha la valutazione:

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(x)| &\leq |f(x_n) - s_\nu(x_n)| + |s_\nu(x_n) - s_\nu(x)| + |s_\nu(x) - f(x)| \\ &\leq \|f - s_\nu\| \|x_n\| + |s_\nu(x_n) - s_\nu(x)| + \|f - s_\nu\| \|x\| \end{aligned}$$

che dimostra la tesi. ■

Esempio 2.63 [Kolmogorov p.193]

In l_2 la convergenza debole coincide con quella per coordinate a patto che la successione sia limitata. □

Esempio 2.64 [Kolmogorov p.125 e p.175]

La $\delta_{t_0}(x) := x(t_0)$ con $x \in C^0([a, b])$ è un funzionale lineare continuo su C avente valore non superiore a $|x|$; e siccome l'uguaglianza sussiste per $x = \cos t$, si ha $|\delta| = 1$. Per tali funzionali si ha:

$$\delta_{t_0}(x_n) \rightarrow \delta_{t_0}(x) \quad \text{quando} \quad x_n(t_0) \rightarrow x(t_0).$$

Per cui

- (i) se $x_n \rightarrow x$ in $C([a, b])$ allora $\sup_n |x_n(t)| \leq C$ uniformemente su $[a, b]$ e $x_n(t) \rightarrow x(t)$ per ogni t ;
- (ii) se $x_n(t) \rightarrow x(t)$ per ogni t ed è uniformemente limitata, allora il teorema della convergenza dominata ed il teorema di rappresentazione di Riesz implicano che $x_n \rightarrow x$ in $C([a, b])$.

□

Sugli spazi $\mathbb{V}$ e $\mathbb{V}^{**}$ può sussistere la (isometrica) inclusione $\mathbb{V}^{**} \supset \mathbb{V}$, possibilmente anche stretta.

Si consideri la $\iota : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}^{**}$ data da $\iota(x) = x^{**}$ ove $x^{**}(f) := f(x)$ per ogni $f \in \mathbb{V}^*$. Se la ι è suriettiva allora $\mathbb{V}$ è detto riflessivo e ι è un isomorfismo. Ciò accade se $\dim \mathbb{V} < \infty$, o negli spazi L_p con $1 < p < \infty$.

Nel caso particolare degli spazi di Hilbert, sussiste il preclaro:

Teorema 1.2.65 [di rappresentazione di Riesz] (si veda: [Kolmogorov IV.2.3])

Se $\mathbb{V} \equiv \mathbb{H}$ è uno spazio di Hilbert (reale), ad ogni $g \in \mathbb{H}^*$ corrisponde un vettore $u_g \in \mathbb{H}$ tale che per ogni $x \in \mathbb{H}$ si ha $g(x) = \langle u_g, x \rangle$. Questo u_g è unico, è tale che $\|g\| = \|u_g\|$, ed $(ag_1 + bg_2)(x) = a \langle u_{g_1}, x \rangle + b \langle u_{g_2}, x \rangle$. □

Corollario 1.2.66 $\mathbb{H}, \mathbb{H}^*$ sono resi isomorfi dalla $\iota : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}^*$ definita da

$$\iota(u_g) := g = \langle u_g, \cdot \rangle; \quad u_g := \iota^{-1}(g).$$

□

Dimostrazione $\text{Ker } g$ è un sottospazio di $\mathbb{H}$ di codimensione uno, e quindi $(\text{Ker } g)^\perp$ ha dimensione uno. Pertanto esiste $x_1 \in (\text{Ker } g)^\perp$ con $\|x_1\| = 1$ e tale che per ogni $x \in \mathbb{H}$ si ha

$$x = g(x)x_1/g(x_1) + z' =: g'(x)x_1 + z', \quad \text{con } z' \in \text{Ker } g,$$

Sia $u_g := g(x_1)x_1$. Si ha

$$\langle u_g, x \rangle = g'(x) \langle u_g, x_1 \rangle = g'(x)g(x_1) = g(x),$$

infatti è $\langle u_g, z' \rangle = 0$ poiché $x_1 \perp z'$.

D'altra parte se un altro $\tilde{u} \neq u_g$ fosse $g(x) = \langle \tilde{u}, x \rangle$ per ogni $x \in \mathbb{H}$, si avrebbe $\langle u_g - \tilde{u}, x \rangle = 0 \quad \forall x$, e questo dà l'unicità. ■

Se $\mathbb{B}$ è una base in $\mathbb{H}$ si definisce:

Base duale $\mathbb{B}^*$ in $\mathbb{H}$:= una base di $\mathbb{H}$ stesso tale che $\langle e^{*i}, e_j \rangle = \delta_j^i$.

Altrimenti, come si è visto, si definisce in generale:

Base duale $\mathbb{B}^*$ in $\mathbb{V}^*$:= la base formata da quei punti e^{*i} di $\mathbb{V}^*$ tali che $e^{*i}(e_j) = \delta_j^i$.

N.B. 1.2.67 Come già osservato, un qualunque $g \in \mathbb{V}^*$ è univocamente determinato dai numeri g_i tali che $g_i := g(e_i) = g_h e^{*h}(e_i) = g_h \delta_i^h$.

Se lo spazio è euclideo, il teorema di Riesz permette di identificare i versori $e^{*j}(\cdot)$ con i versori e^{*j} tali che $\langle e^{*j}, e_i \rangle = \delta_i^j$ e quindi, più in generale, quei vettori tali che $\bar{x}^i = \langle e^{*i}, x \rangle$ per ogni $x \in \mathbb{V}$. Tali vettori restano espressi mediante i versori e_i dalla condizione $\delta_h^i = (e^{*i})^j \langle e_j, e_h \rangle$. Per cui,

$$\text{con } \boldsymbol{\kappa}_{jh} := \langle e_j, e_h \rangle \quad \text{e con } \boldsymbol{\kappa}^{hi} \boldsymbol{\kappa}_{ik} = \delta_k^h,$$

si ha

$$\boldsymbol{\kappa}^{ik} = (e^{*i})^j \delta_j^k = (e^{*i})^k \quad \text{e quindi} \quad e^{*i} = \boldsymbol{\kappa}^{ik} e_k \quad \text{ed} \quad v_i \boldsymbol{\kappa}^{ik} = v^k.$$

I numeri

$$g_i := g(e_i) = \langle u_g, e_i \rangle =: u_g|_h \langle e^{*h}, e_i \rangle$$

prendono il nome di componenti covarianti del vettore u_g , e l'identificazione consiste nel porre $e_i = \langle e_i, e_j \rangle e^{*j}$.

Una base è duale di se stessa se e solo se è ortonormale. ◇

Nota 1.2.68 Si vede subito tramite la disuguaglianza di Bessel che la convergenza per coordinate in $\mathbb{H}$ (o, equivalentemente, in l_2 , si veda Proposizione 1.2.48), è conseguenza di quella in norma. D'altra parte se $g \in \mathbb{V}^*$ si ha che $|g(x)| \leq \|g\| \|x\|$ e ciò fa vedere che la topologia $\mathcal{T}_\mathbb{L}$ è non più forte di quella indotta dalla norma. Inoltre se lo spazio vettoriale (anche non euclideo) è a dimensione finita, l'equivalenza fra le norme (si veda § A.1) garantisce la convergenza per coordinate a partire dalla convergenza in *una qualsiasi* norma (oppure: [Voyevodin Lemma 53.1]).

Viceversa, se uno spazio vettoriale normato è *finito dimensionale*, in virtù della disuguaglianza triangolare e della linearità della norma la convergenza per coordinate è a sua volta *sufficiente* ad assicurare quella in (una qualsiasi) norma; *ciò però non è vero in uno spazio a dimensione infinita*, si pensi alla successione dei versori di base: $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Con un calcolo analogo a quello fatto nella dimostrazione della Proposizione 1.2.38 si può però mostrare che in uno spazio di Hilbert la convergenza per coordinate, *se unita alla condizione*: $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ è sufficiente ad assicurare la convergenza in norma: $\|x_n - x\| \rightarrow 0$. Ne segue in particolare che uno spazio euclideo finito dimensionale è completo.

D'altra parte, siccome lo span delle combinazioni lineari finite degli elementi della base coincide con $\mathbb{H}$ che, si è visto, è isomorfo ad $\mathbb{H}^*$, dal Teorema 1.2.62 segue che la convergenza per coordinate equivale alla convergenza debole su $\mathbb{H}$. Alternativamente si può usare il teorema dell'isomorfismo e riconoscere che la topologia debole su $\mathbb{H}$ coincide con la topologia prodotto su l_2 . ▷

Siano ora $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ due spazi vettoriali e ancora, per semplicità, reali.

Siano $\mathcal{T}: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{V}$ un operatore lineare, $g: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ un funzionale lineare limitato, e $\xi \in \mathbb{W}$. Si ha che $\mathcal{T}\xi =: x$ appartiene a $\mathbb{V}$, e che $g(x) = g(\mathcal{T}\xi) =: \gamma(\xi)$ è esso stesso un funzionale lineare continuo definito su $\mathbb{W}$; e cioè $\gamma \in \mathbb{W}^*$.

In tal modo ad ogni $g \in \mathbb{V}^*$ resta associato uno ed un solo $\gamma \in \mathbb{W}^*$, ed è quindi definita la mappa:

Operatore aggiunto di $\mathcal{T} : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{V}$:= l'operatore $\hat{\mathcal{T}}^* : \mathbb{V}^* \rightarrow \mathbb{W}^*$ dato da

$$\hat{\mathcal{T}}^* g := \gamma, \quad \text{ovvero dalla} \quad (\hat{\mathcal{T}}^* g)(\xi) := g(\mathcal{T}\xi) \quad \text{per ogni} \quad \xi \in \mathbb{W}.$$

Nel caso particolare in cui $\mathbb{V} \equiv \mathbb{H}$ e $\mathbb{W} \equiv \mathbb{K}$ siano spazi di Hilbert, o comunque euclidei, dalla proposizione vista sopra segue che per ogni $g \in \mathbb{H}^*$ esiste $u_g = \iota^{-1}(g) \in \mathbb{H}$ tale che

$$\langle u_g, \mathcal{T}\xi \rangle = g(\mathcal{T}\xi) = (\hat{\mathcal{T}}^* g)(\xi) = \langle \iota^{-1} \hat{\mathcal{T}}^* \iota(u_g), \xi \rangle =: \langle \mathcal{T}^* u_g, \xi \rangle,$$

e cioè si può porre

$$g(\mathcal{T}\xi) =: \gamma(\xi) =: \langle w_\gamma, \xi \rangle =: \langle \mathcal{T}^* u_g, \xi \rangle.$$

Operatore aggiunto di $\mathcal{T}$ sullo spazio $\mathbb{H}$:= l'operatore $\mathcal{T}^* : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{K}$ tale che $\iota^{-1}(\gamma) = w_\gamma =: \mathcal{T}^* u_g$; esso è caratterizzato dalla relazione:

$$\langle \mathcal{T}x, y \rangle =: \langle x, \mathcal{T}^* y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{H}$$

In coordinate si ha:

$$(\mathcal{T}x)_k \bar{y}^k =: x_i \bar{\mathcal{T}}^{*i}_k \bar{y}^k;$$

ed essendo

$$(\mathcal{T}x)_k = (\mathcal{T}x)^h g_{hk} = \mathcal{T}^h_j x^j g_{hk} = g^{ij} \mathcal{T}^h_j g_{hk} x_i$$

se ne ricava

$$(\bar{\mathcal{T}}^*)^i_k = g^{ij} \mathcal{T}^h_j g_{hk}.$$

$\mathcal{T}$ autoaggiunto := quando accade che $\mathbb{V} = \mathbb{W} = \mathbb{H} = \mathbb{K}$ e che $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$, e cioè quando $\langle x, \mathcal{T}y \rangle = \langle \mathcal{T}x, y \rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{H}$, che si suppone coincida con il comune insieme di definizione di $\mathcal{T}$ e di $\mathcal{T}^*$.

Operatore Definito Positivo := un operatore autoaggiunto e tale che

$$\langle x, \mathcal{T}x \rangle \geq m \|x\|^2 \quad \text{per un qualche} \quad m > 0 \quad \text{ed ogni} \quad x \in \mathbb{H}.$$

Queste ultime definizioni verranno commentate nel caso particolare degli spazi euclidei a dimensione finita.

Sulla equazione aggiunta

Sia dato un operatore lineare $\tilde{\mathcal{L}}(x)$, per esempio $\tilde{\mathcal{L}}(x) := a_0(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x$ sullo spazio $(C^r, \|\cdot\|_2)$ delle funzioni $x = x(t)$. Qui di seguito, per soli motivi storici, si indicherà con x' la derivata $\dot{x}$, e con ∂_t l'operatore $\frac{d}{dt}$. Si chiama “equazione aggiunta” dell’equazione

$$\tilde{\mathcal{L}}(x) := a_0(t)x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0 \quad (2.10)$$

l’equazione $\tilde{\mathcal{M}}(y) = 0$ cui deve soddisfare una funzione $y : (C^r, \|\cdot\|_2) \rightarrow \mathbb{R}$ affinché l’equazione $\bar{y}(t)\tilde{\mathcal{L}}(x) = 0$ sia “esatta”, e cioè assuma la forma

$$\left[\mu x' + \nu x \right]' := \frac{d}{dt} \left[\mu(t) \frac{d}{dt} x + \nu(t)x \right] = 0.$$

Moltiplicando per $\bar{y}$ la (2.10) e uguagliandola a $(\mu x' + \nu x)' = 0$ si riconosce che queste si equivalgono purché si abbiano: $\{\mu = \bar{y}a_0, \quad \mu' + \nu = \bar{y}a_1, \quad \nu' = \bar{y}a_2\}$. Sostituite la prima e l'ultima di queste nella seconda si ricava l'equazione cercata

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{M}}(y) &:= (\bar{a}_0 y)'' - (\bar{a}_1 y)' + \bar{a}_2 y \\ &\equiv (-1)^2 (\bar{a}_0 y)'' + (-1) (\bar{a}_1 y)' + (-1)^0 \bar{a}_2 y = 0;\end{aligned}$$

che è allora l'equazione aggiunta. Cosa ha a che fare con l'operatore aggiunto?

Sussiste, in generale, l'identità di Lagrange

$$\bar{y} \tilde{\mathcal{L}}(x) - x \overline{\widetilde{\mathcal{M}}(y)} = \partial_t \left(\sum_{h=1}^n \sum_{j+k=h-1} \partial_t^j(x) (-1)^k \partial_t^k(a_{n-h}\bar{y}) \right) \quad (2.11)$$

per esempio, nel caso $n = 2$ l'argomento a secondo membro si specializza in:

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^2 \sum_{j+k=h-1} x^{[j]} (-1)^k (a_{n-h}\bar{y})^{[k]} &= x^{[0]} (a_1\bar{y})^{[0]} + x^{[1]} (a_0\bar{y})^{[0]} - x^{[0]} (a_0\bar{y})^{[1]} \\ &= \mu x' + \nu x.\end{aligned}$$

La stessa forma della (2.11) implica che l'equazione $\widetilde{\mathcal{M}}(y) = 0$, aggiunta di $\tilde{\mathcal{L}}(x) = 0$, è anche l'equazione tale che $x \widetilde{\mathcal{M}}(y) = 0$ risulta esatta quando sia $\tilde{\mathcal{L}}(x) = 0$ (la x e la y sono "fattori integranti" l'una per l'altra).

Sono immediate, poi, le seguenti integrazioni per parti rispetto alla t :

$$\left\{ \begin{aligned} \langle y, a \partial_t x \rangle &:= \int_a^b y \overline{a \partial_t x} = \int_a^b \bar{a} y \partial_t \bar{x} = - \int_a^b \partial_t(\bar{a} y) \bar{x} + [\bar{a} y \bar{x}]_a^b \\ &= - \langle \partial_t(\bar{a} y), x \rangle + [\bar{a} y \bar{x}]_a^b \\ \langle y, a \partial_t^2 x \rangle &:= \int_a^b \bar{a} y \partial_t^2 \bar{x} = - \int_a^b \partial_t(\bar{a} y) \partial_t \bar{x} + [\bar{a} y \partial_t \bar{x}]_a^b \\ &= (-1)^2 \langle \partial_t^2(\bar{a} y), x \rangle + [\bar{a} y \partial_t \bar{x}]_a^b - [\partial_t(\bar{a} y) \bar{x}]_a^b \end{aligned} \right.$$

dalle quali si vede che l'operatore aggiunto di $a \partial_t$ è $-\partial_t(\bar{a} \cdot)$, e quello di $a \partial_t^2$ è $\partial_t^2(\bar{a} \cdot)$, entrambi *purché sulle funzioni che annullano le condizioni al bordo*.

L'integrale della (2.11) tra estremi a e b mostra che l'operatore $\widetilde{\mathcal{M}}$ è l'aggiunto di $\tilde{\mathcal{L}} := a_0(t) \partial_{tt}^2 + a_1(t) \partial_t + a_2(t)$ nello spazio di quelle funzioni che annullano ai bordi il termine finito del secondo membro.

N.B. 1.2.69 Si consideri, in uno spazio n -dimensionale, il sistema

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x}. \quad (2.12)$$

Esso è equivalente all'equazione

$$\tilde{\mathcal{L}}(x) = 0 = x^{[n]} + a_1 x^{[n-1]} + \dots + a_{n-1} x^{[1]} + a_n x^{[0]}$$

quando si pongano $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ con $x \equiv x^{[0]} =: x_1, \dots, \partial_t^k x \equiv x^{[k]} =: x_{k+1}, \dots, \partial_t^{n-1} x \equiv x^{[n-1]} =: x_n$; e, (rinominando i coefficienti $a_i/a_0 \rightarrow a_i$),

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & \dots & -a_1 \end{pmatrix}$$

D'altra parte detto $r := \sum_{i=1}^n \bar{y}_i x^i = \bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{x}$, risulta $r' = (\bar{\mathbf{y}}^T)' \mathbf{x} + \bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{x}'$, e pertanto: fra quelle funzioni che annullano r' ci sono le soluzioni di $\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x}$ se e solo se ci sono anche quelle del sistema

$$(\bar{\mathbf{y}}^T)' + \bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{A} = 0 \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{y}' + \mathbf{A}^* \mathbf{y} = 0 \quad \text{con} \quad \mathbf{A}^* = \bar{\mathbf{A}}^T.$$

La forma esplicita di tale sistema è

$$\begin{cases} y_1' = \bar{a}_n y_n \\ y_k' = -y_{k-1} + \bar{a}_{(n-k+1)} y_n, & k = 2, \dots, n \end{cases}$$

e quindi $\partial_t^{k-1}(\bar{a}_{n-k+1}y_n) = y_k^{[k]} + y_{k-1}^{[k-1]}$, $k = 2, \dots, n$; da queste si ottiene

$$\sum_{k=2}^n (-1)^k \partial_t^{k-1}(\bar{a}_{n-k+1}y_n) = (-1)^n \partial_t^n y_n + \bar{a}_n y_n$$

e quindi l'equazione aggiunta $\mathbf{y}' + A^* \mathbf{y} = 0$ risulta esplicitamente:

$$\widetilde{\mathcal{M}}(y) := \sum_{k=0}^n (-1)^k \partial_t^k (\bar{a}_{n-k} y) = 0, \quad y := y_n.$$

◇

N.B. 1.2.70 L'operatore aggiunto di $\tilde{\mathcal{L}} := a_0(t)\partial_{tt}^2 + a_1(t)\partial_t + a_2(t)$ assume una forma speciale se si cambia $\tilde{\mathcal{L}}(x)$ nel seguente modo. Sia $t_0 \in [a, b]$, siano

$$p(t) := \exp \int_{t_0}^t \frac{a_1(t)}{a_0(t)} \quad \text{ed} \quad r(t) := \frac{p(t)}{a_0(t)} \quad (\text{entrambi non nulli})$$

e si moltiplichino $\tilde{\mathcal{L}}(x)$ per $-r(t)$. Si ottiene l'operatore

$$\mathcal{L}(x) := -r(t)\tilde{\mathcal{L}}(x) := -p(t)x'' - \frac{a_1(t)}{a_0(t)}p(t)x' - \frac{a_2(t)}{a_0(t)}p(t)x.$$

Ulteriormente ponendo: $q(t) := -a_2(t)p(t)/a_0(t)$ l'operatore $\mathcal{L}$ si riscrive più semplicemente nel

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{d}{dt} \left(p(t) \frac{d}{dt} x \right) + q(t)x.$$

L'equazione aggiunta di $\mathcal{L}(x) = -px'' - p'x' + qx = 0$ è

$$\mathcal{M}(y) = (-\bar{p}y)'' - (-\bar{p}'y)' + \bar{q}y = -\bar{p}y'' - \bar{p}'y' + \bar{q}y = 0.$$

Si osservi che se $\mathcal{L}$ ha coefficienti reali essa risulta *la stessa equazione della* $\mathcal{L}(y) = 0$. Tuttavia si badi bene che ciò non assicura che l'operatore $\mathcal{L}$ sia autoaggiunto: va infatti specificato prima lo spazio sul quale questo potrebbe accadere. ◇

N.B. 1.2.71

Mediante l'identità di Lagrange, oppure con un semplice calcolo diretto, si ha

$$\bar{y} \mathcal{L}(x) - x \overline{\mathcal{M}(\bar{y})} = \frac{d}{dt} (p(t) \mathcal{W}(x, \bar{y})) = \frac{d}{dt} \left(p(t) \begin{vmatrix} x & \bar{y} \\ x' & \bar{y}' \end{vmatrix} \right).$$

In questa, x e y non sono necessariamente nel $\text{Ker}(\mathcal{L})$; qualora ciò fosse si avrebbe necessariamente $p\mathcal{W} = \mathcal{W}_0$. Si scelga ora, per esempio, il sottospazio di $L_2([a, b])$ formato dalle funzioni che verificano condizioni al bordo omogenee e separate del tipo

$$\begin{cases} \alpha x(a) + \beta x'(a) = 0 \\ \gamma x(b) + \delta x'(b) = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

In tale spazio, e con il prodotto scalare standard:

$$\langle x, y \rangle := \int_a^b x(t)\bar{y}(t) dt$$

l'operatore $\mathcal{L}$ supposto a coefficienti reali risulta autoaggiunto. Infatti si ha

$$\langle \mathcal{L}(x), y \rangle - \langle x, \mathcal{L}(y) \rangle = \left[p \begin{vmatrix} x & \bar{y} \\ x' & \bar{y}' \end{vmatrix} \right]_a^b = 0$$

visto che

$$\begin{cases} \alpha x(a) + \beta x'(a) = 0 \\ \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \quad \text{implica} \quad \mathcal{W}(x, \bar{y}) \Big|_{t=a} = 0,$$

ed analoga per il punto $t = b$. D'altra parte, si può anche controllare direttamente che

$$\begin{aligned}\langle x, \mathcal{L}(y) \rangle &= \langle x, -\partial_t(p\partial_t y) \rangle + \langle qx, y \rangle \\ &= \langle p\partial_t x, \partial_t y \rangle + \langle qx, y \rangle - [xp\partial_t \bar{y}]_{\text{bordo}} \\ &= \langle -\partial_t(p\partial_t x), y \rangle + \langle qx, y \rangle - [p(x\partial_t y - y\partial_t x)]_{\text{bordo}} \\ &= \langle \mathcal{L}(x), y \rangle - \left[\begin{vmatrix} x & \bar{y} \\ x' & \bar{y}' \end{vmatrix} \right]_{\text{bordo}}.\end{aligned}$$

Allo stesso modo si può confermare che l'operatore $-i d/dt$ è autoaggiunto nello spazio $L_2(-\infty, +\infty)$ dato che in tal caso senz'altro si ha $|x| \xrightarrow[\infty]{|t|} 0$. $\diamond$

N.B. 1.2.72 Si discuterà qui il caso di un problema del secondo ordine, e si useranno le lettere maiuscole per indicare le funzioni della variabile scalare (qui indicata con ξ) dato che questa stessa viene spesso indicata in letteratura con la lettera x minuscola.

Problema di Sturm-Liouville := il seguente problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}(X) = \lambda r(\xi) X \\ \text{condizioni al bordo} \end{cases} \quad \text{con} \quad \mathcal{L}(X) := -\frac{d}{d\xi} \left(p(\xi) \frac{d}{d\xi} X \right) + q(\xi) X \quad (2.13)$$

Esso si dirà “regolare” qualora $\begin{cases} p, q, r \in C^0([a, b], \mathbb{R}) \\ p \in C^1([a, b]), \quad p, r > 0 \text{ su } [a, b] \\ \text{condizioni al bordo omogenee e separate} \end{cases}$

Per gli operatori S.L. regolari sussistono le seguenti basilari proprietà.

Siano X_λ e X_μ tali che: $\mathcal{L}(X_\lambda) = \lambda r X_\lambda$, $\mathcal{L}(X_\mu) = \mu r X_\mu$, con $\lambda, \mu \neq 0$.

- Per qualsiasi $c \in \mathbb{C}$, la funzione $c X_\lambda$ è soluzione se tale è X_λ .
- Dato che $\mathcal{L}$ è lineare e ha coefficienti reali, se ci fossero autovalori complessi si avrebbe che $X_{\bar{\lambda}}$ è combinazione lineare (a coefficienti complessi) delle complesse coniugate delle soluzioni X_λ , infatti $\mathcal{L}(\bar{X}_\lambda) = \overline{\mathcal{L}(X_\lambda)} = \overline{\lambda r X_\lambda} = \bar{\lambda} r \bar{X}_\lambda$, quindi anche $\bar{X}_\lambda$ è autovettore di $\bar{\lambda}$.
- Per un problema S.L. regolare (del secondo ordine) gli autovalori sono semplici:

se X_λ ed $\tilde{X}_\lambda$ verificano (2.13) esiste $c \in \mathbb{C}$: $\tilde{X}_\lambda = c X_\lambda$, e quindi $\tilde{X}_\lambda = X_\lambda$.

Infatti il loro wronskiano o è identicamente nullo o identicamente diverso da zero. Ma questa seconda possibilità è impedita dalla condizione al bordo (si veda il N.B. 1.2.71).

Pertanto, siccome $\bar{X}_\lambda$ ed X_λ sono autovettori di $\bar{\lambda}$ ne segue che $\bar{X}_\lambda = X_\lambda$.

- Dato che r è reale positivo su $[a, b]$, sussiste la relazione, (ove $\langle u, v \rangle := \int_a^b u(\xi) v(\xi) d\xi$)

$$\langle X_\lambda, \mathcal{L}(X_\mu) \rangle - \langle \mathcal{L}(X_\lambda), X_\mu \rangle = (\bar{\mu} - \lambda) \langle X_\lambda, r X_\mu \rangle =: (\bar{\mu} - \lambda) \langle X_\lambda, X_\mu \rangle_r.$$

Ne segue che: gli autovalori λ di un problema S.L. regolare sono tutti reali (basta assumere $\lambda = \mu$ ed usare il fatto che il primo membro è nullo mentre $\langle X_\lambda, X_\lambda \rangle_r = \int_a^b r X_\lambda \bar{X}_\lambda d\xi > 0$). In definitiva si ha che $\langle \cdot, \cdot \rangle_r$ è un corretto prodotto scalare.

- Gli autovettori di un problema S.L. regolare sono tali che

$$\langle X_\lambda, X_\mu \rangle_r = 0 \quad \text{se e solo se} \quad \lambda \neq \mu$$

Con la scelta $r = 1$ si trovano anche per questi prodotti le affermazioni: “un operatore autoaggiunto ha autovalori reali ed autovettori ortogonali”.

- L'insieme $\{\lambda_i\}_{i=1,2,\dots}$ degli autovalori del problema (2.13) è numerabile, ed essi sono tali che

$$\text{esiste } \lambda_0 \text{ tale che } \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots \quad \text{e} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = \infty.$$

- Gli autovalori ed i corrispondenti autovettori sono messi in relazione dalla formula di Rayleigh:

$$\lambda = \left(- \left[p X X' \right]_a^b + \int_a^b (p X'^2 + q X^2) d\xi \right) / \langle X, X \rangle_r$$

In breve: un problema S.L. regolare ammette una successione crescente non limitata numerabile di autovalori reali semplici ed in loro corrispondenza una successione di autosoluzioni (reali) r -ortogonali.

Per le autofunzioni dei problemi di Sturm-Liouville regolari sussiste un teorema simile al teorema di Fourier [Tolstov p.257 opp. Courant-Hilbert 1.V.14]. Ricordando la definizione già vista sopra (Memento 1.2.30) di:

Funzione liscia a tratti := Una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata su $[a, b]$ e ivi continua a meno di un numero finito di discontinuità di prima specie e inoltre tale da ammettere (finita) la derivata destra e sinistra in ogni punto sussistono i seguenti due fondamentali teoremi.

Teorema 1.2.73 Il sistema $\{X_i\}_{i=1,2,\dots}$ delle autosoluzioni corrispondenti agli autovalori $\{\lambda_i\}_{i=1,2,\dots}$ è un insieme ortogonale e completo in $(L_2([a, b]), \langle \cdot, \cdot \rangle_r)$ $\square$

Teorema 1.2.74 Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione liscia a tratti. La sua serie di Fourier $\sum_{i=1}^{\infty} c_i X_{\lambda_i}$, con $c_i := \langle f, X_{\lambda_i} \rangle_r / \langle X_{\lambda_i}, X_{\lambda_i} \rangle_r$ converge puntualmente per $\xi \in (a, b)$ al valore $(f(\xi^+) + f(\xi^-))/2$. Se f è continua su $[a, b]$, f' è liscia a tratti, ed f verifica le condizioni ai bordi accennate nella (2.13), allora la convergenza è assoluta e uniforme. $\square$

$\diamond$

N.B. 1.2.75 Per dimostrare alcune delle affermazioni fatte qui sopra sulle proprietà dei sistemi S.L. regolari si possono considerare i seguenti fatti. Si consideri inizialmente un fissato valore di $\lambda \in \mathbb{C}$.

Fatto n° 1 È opportuno dilatare l'asse delle ξ mediante la funzione

$$\tau(\xi) := \int_a^\xi \frac{d\eta}{p(\eta)} \quad \text{e quindi} \quad \frac{d}{d\xi} = \frac{1}{p(\xi)} \frac{d}{d\tau}$$

che trasformano la $\mathcal{L}(X)$ nella $\hat{\mathcal{L}}(X) = \left[\left(-\frac{1}{p(\xi)} \frac{d^2}{d\tau^2} + q(\xi) \right) X \right]_{\xi=\tau^{-1}(\tau)}$

In tal modo si trasforma l'iniziale problema S.L. regolare nel seguente

$$\begin{cases} \frac{d^2}{d\tau^2} X + g(\tau, \lambda) X = 0 \\ \text{condizioni al bordo} \end{cases}$$

con

$$\begin{cases} g(\tau, \lambda) := \lambda p(\xi(\tau)) r(\tau) - p(\xi(\tau)) q(\xi(\tau)) \\ g \in C^0([\tau(a), \tau(b)] \times \mathbb{R}) \\ g \text{ monotona crescente rispetto a } \lambda \end{cases}$$

e siccome p e q sono positive su $[a, b]$ prima o poi in λ la funzione g dovrà diventare positiva.

Fatto n° 2 Si vuole discutere il comportamento qualitativo dell'equazione:

$$X'' + g(\xi, \lambda) X = 0 \quad \text{con} \quad g \in C^0([a, b] \times \mathbb{R}), \quad g(\xi, \cdot) \text{ crescente} \quad (2.14)$$

nel caso di condizioni al bordo che coinvolgano separatamente la X e la X' . Data la loro omogenità, ciò permette di scegliere la funzione incognita X in modo che risulti $X'(a) = 1$ (per il caso generale si veda: [Ince]).

Fatto n° 3 Nella famiglia delle soluzioni (una per ogni valore di λ) del problema

$$X'' + g(\xi, \lambda) X = 0 \quad \text{con} \quad X(a) = 0, \quad X'(a) = 1, \quad (2.15)$$

si cercheranno poi quelle che verificano anche la seconda condizione al bordo. Nel caso semplificato in esame deve essere: $X(b) = 0$. (In generale si osserva che fra due consecutivi valori per i quali si ha $X = 0$ se ne trova uno e uno solo nel quale $\gamma X + \delta X' = 0$).

Per quanto riguarda ciascuna singola equazione (2.14), e cioè supponendo λ fissato, sussistono i seguenti importanti teoremi.

Teorema 1.2.76 [di separazione di Sturm]

Due qualsiasi soluzioni distinte X e Y dell'equazione (2.14) (con λ fissato) che abbiano $\mathcal{W}(X, Y) \neq 0$ hanno zeri distinti ed alternati. $\square$

Infatti, l'essere $\mathscr{W} \neq 0$ ed il doverlo rimanere implica che tali zeri non possano coincidere o essere non isolati (per continuità). Inoltre, se ξ_1, ξ_2 sono due zeri successivi di Y , si ha (per esempio) $\mathscr{W}(\xi_1) = X(\xi_1)Y'(\xi_1) > 0$, e quindi $\mathscr{W}(\xi_2) = X(\xi_2)Y'(\xi_2) > 0$. Ad esempio con $Y'(\xi_1) > 0$ si ha che, affinché Y possa annullarsi in ξ_2 ma non prima, deve essere $Y'(\xi_2) < 0$. Ne segue $X(\xi_1)X(\xi_2) < 0$ e quindi per continuità la X dovrà essersi annullata almeno una volta in $[\xi_1, \xi_2]$. Ma non può averlo fatto più di una volta sola, perché altrimenti si potrebbe ripetere il ragionamento cambiando X con Y .

Fatto n° 4 Se $g(\xi, \lambda) < 0$ per ogni $\xi \in [\tau_1, \tau_2]$ (λ è fissato), una qualsiasi soluzione di (2.14) si annulla *al più una volta* in $[\tau_1, \tau_2]$ (o è identicamente nulla).

Infatti, se $X(\xi_0) = 0$, per ipotesi è $X'(\xi_0) \neq 0$ (sia positivo), e quindi sarà $X(\xi) > 0$ a destra di ξ_0 . La condizione su g implica X' crescente in un intorno destro di ξ_0 , che quindi deve contenere $(\xi_0, \tau_2]$.

Fatto n° 5 Se $g(\xi, \lambda)$ è continua e positiva per ogni $\xi \in [\hat{\tau}, +\infty)$ (λ è fissato), e se sussiste la condizione (sufficiente): $\int_{\tau}^{\infty} g(\xi, \lambda) d\xi = +\infty$ per un qualche $\tau > \hat{\tau}$, allora una qualsiasi soluzione di (2.14) che non sia banale *non può avere un numero finito di zeri* in $[\hat{\tau}, +\infty)$.

Infatti non può esistere $\xi_0 \geq \tau$ tale che (ad esempio) $X(\xi) > 0$ per ogni $\xi > \xi_0$ perché $X'' < 0$ a destra di ξ_0 darebbe X' strettamente decrescente a destra di ξ_0 , e la condizione su $\int g$ implica l'esistenza di $\xi' > \xi_0$ nel quale $X'(\xi') < 0$ giacché:

$$\frac{d}{d\xi} \left(-\frac{X'}{X} \right) = -\frac{X''X + X'^2}{X^2} = g + \left(\frac{X'}{X} \right)^2 \quad \text{implica} \quad \left[-\frac{X'}{X} \right]_{\xi_0}^{\xi} \geq \int_{\xi_0}^{\xi} g;$$

per cui, avendo derivata strettamente negativa, prima o poi dopo ξ_0 dovrà annullarsi anche la X .

Fatto n° 6 Se $g(\xi, \lambda)$ è continua e positiva per ogni $\xi \in [\hat{\tau}, +\infty)$ (λ è fissato), una qualsiasi soluzione di (2.14) *non può avere un numero infinito di zeri* in $[\tau_1, \tau_2]$, ove $\tau_1 > \hat{\tau}$.

Infatti in tal caso esisterebbe un punto di accumulazione $\xi_0 \in [\tau_1, \tau_2]$ di zeri della X e cioè si avrebbe $X(\xi_0 + h) = X(\xi_0) + X'(\xi_0 + \theta h)h$ con h piccolo a piacere e con $X(\xi_0) = X(\xi_0 + h) = 0$ ciò che, per continuità, implica $X' = 0$.

Si faccia ora variare il parametro λ , e ne siano λ_1 e λ_2 due valori per i quali $g(\xi, \lambda_1) < g(\xi, \lambda_2)$ per ogni $\xi \in [\tau_1, \tau_2]$. Sia poi X una soluzione (non banale) di $X'' + g(\xi, \lambda_2)X = 0$, e Y una soluzione (non banale) di $Y'' + g(\xi, \lambda_1)Y = 0$

Teorema 1.2.77 [del paragone di Sturm]

La X oscilla più rapidamente della Y . Ovvero: X si annulla almeno una volta nell'intervallo aperto (ξ_1, ξ_2) ove ξ_1, ξ_2 sono due zeri successivi della Y (in $[\tau_1, \tau_2]$). $\square$

Infatti: siano ξ' e ξ'' due zeri successivi della Y , e sia ad esempio $Y > 0$ in (ξ', ξ'') . Sia, per assurdo, anche $X > 0$ (ad esempio). Dalle due equazioni segue $XY'' - YX'' \equiv \frac{d}{d\xi} \mathscr{W}(X, Y) = (g(\xi, \lambda_2) - g(\xi, \lambda_1))XY$. Pertanto: $\mathscr{W}(\xi'') - \mathscr{W}(\xi') > 0$ strettamente; ma con le dette ipotesi è: $\mathscr{W}(\xi') = X(\xi')Y'(\xi') \geq 0$, e $Y'(\xi'') < 0$ implica $\mathscr{W}(\xi'') \leq 0$. Ne segue che se Y ha una successione di zeri: $\{\tau_1 \leq \xi_1 < \xi_2 < \dots\}$ allora la X ha almeno una successione di zeri: $\{\hat{\xi}_1 < \xi_1; \hat{\xi}_1 < \xi_2; \dots\}$.

Fatto n° 7 Dalla continuità di $g(\cdot, \lambda)$ su $[\tau_1, \tau_2]$ si ha che $g(\cdot, \lambda) \in [g_{\min}(\lambda), g_{\max}(\lambda)]$; ed essendo $g(\xi, \cdot)$ monotona crescente si può dedurre che:

(7.1) finché λ è tale che $g_{\max}(\lambda) \leq 0$, ammesso che sia $X(a) = 0$ non può essere $X(b) = 0$ (per il Fatto n.4);

(7.2) al crescere di λ si ottiene $g_{\max}(\lambda) > 0$. Si paragona con $Y(\xi) =$

$\sin \sqrt{g_{\max}(\lambda)} \xi$. Se ne conclude che se $\sqrt{g_{\max}(\lambda)}(b-a) > \pi$ e se $X(a) = 0$ anche ora non può essere $X(b) = 0$;

(7.3) qualora λ sia tanto grande che $g_{\min}(\lambda) > 0$, e se $\sqrt{g_{\min}(\lambda)}(b-a) > n\pi$, allora la X ha almeno n zeri in (a, b) .

In definitiva, variando λ in modo continuo, gli zeri di X “si muovono” verso il punto a , che per le condizioni al bordo è assunto essere il primo zero, provenendo dal semiasse $(a, +\infty)$. Quando uno zero “transita” per il punto b esso è evidentemente un autovalore. Si giunge così al

Teorema 1.2.78 [di oscillazione di Sturm]

Un problema di Sturm-Liouville regolare ammette una successione numerabile di autovalori reali semplici: $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$. Le corrispondenti autosoluzioni $\{X_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ hanno esattamente n zeri in (a, b) e sono uniche (a meno di una costante moltiplicativa). $\square$

Disquisizione sui segni.

Il segno di a_0 dà il verso delle ξ ; invece p è per definizione essenzialmente positivo. Il fattore r ha lo stesso segno di a_0 , si suppongano positivi. Il fattore q allora ha il segno opposto a quello di a_2 . Con tali segni solo un numero finito di autovalori λ_i può essere negativo. Infatti affinché vi siano zeri in $[a, b]$ per il Punto (7.2) deve essere $\lambda > (q + (\pi/(\tau(b) - \tau(a)))^2/p)/r$, quindi siccome g_{min} cresce con λ anche se q fosse tanto negativo da permettere alcuni autovalori λ negativi ciò non può continuare ad essere per sempre.

Il caso in cui tutte le λ sono positive è fisicamente significativo: ad esempio è quello della corda vibrante, per la quale si ha

$$\left[-p X X'\right]_0^L + \int_0^L p X'^2 + \int_0^L q X^2 = \lambda \int_0^L r X^2$$

che, con le condizioni $X(0) = X(L) = 0$ dà $\lambda \geq 0$, con $\lambda = 0$ se e solo se $q \equiv 0$, e $X' \equiv 0$, ed è quindi da scartare come autovalore.

Nel caso in cui il problema di Sturm-Liouville fosse singolare, ad esempio se $b \rightarrow \infty$ oppure $p(\xi) = 0$ per qualche $\xi \in [a, b]$, etc., alcuni di questi ragionamenti cadrebbero in difetto e potrebbero verificarsi casi di “spettri continui”, cioè interi intervalli di autovalori. $\diamond$

A.3 Richiami di Analisi Funzionale. (III)

Memento 1.3.1 Si è già introdotto (Esempio 1.23) il funzionale lineare:

$$\pi_0 : C^1 \rightarrow \mathbb{R}^1 \quad \text{definito da} \quad \pi_0 y = y(0) ;$$

mediante π_0 il sistema

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) & t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

risulta equivalente alla equazione in $C^1 \times \mathbb{R}$ data da

$$\mathcal{P}(y, y_0) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} y - f(t, y) \\ \pi_0 y - y_0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \dot{y} - f(t, y) \\ y(0) - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\square$

Memento 1.3.2 Due operatori lineari $\mathcal{L}_i x = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_i(s, t) x(t) dt$ $i = 1, 2$ hanno prodotto

$$\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2 x = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_1(s, u) \mathcal{K}_2(u, t) x(t) du dt$$

che ha kernel

$$\mathcal{K}(s, t) := \int_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_1(s, u) \mathcal{K}_2(u, t) du$$

Sussiste inoltre la formula

$$\underbrace{\int_0^t dt \int_0^t dt \cdots \int_0^t f(t) dt}_{n \text{ volte}} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s) ds$$

$\square$

Memento 1.3.3 Un operatore di proiezione $\Pi : \mathbb{X} \rightarrow \Pi(\mathbb{X}) \subseteq \mathbb{X}$ è un operatore tale che $\Pi \circ \Pi = \Pi$, e quindi $\|\Pi\| \geq 1$; in particolare, su uno spazio Euclideo $\mathbb{E}$ si ha $\Pi x \perp (y - \Pi y) \quad \forall x, y \in \mathbb{E}$ e Π è (autoaggiunto) positivo.

Se $\Pi(\mathbb{X})$ ha dimensione finita, si chiama
proiezione della equazione $\mathcal{F}(x) = x$ la n -pla di equazioni

$$y = \Pi \mathcal{F}(y) \quad \text{con} \quad y \in \Pi(\mathbb{X}) .$$

Ad esempio, una proiezione $\Pi(\mathcal{C}([a, b])) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ la si può ottenere mediante una discretizzazione (o “finite difference”) di $[a, b]$ nei punti $s_h := h/n$ con $h = 0, 1, \dots$ e quindi

$$\Pi(x(s)) = y = \begin{pmatrix} x(s_0) \\ x(s_1) \\ \dots \\ x(s_n) \end{pmatrix}$$

□

Memento 1.3.4 [1° teorema fondamentale dell’analisi]

Sia $y : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ Riemann-integrabile su $[a, s]$ per ogni $s \in [a, b]$. Posto $Y(s) := \int_c^s y(t)dt$ con $c \in [a, b]$ si ha che:

$$\frac{d}{ds} Y = y(s) \quad \text{per ogni } s \text{ su cui } y \text{ è continua}$$

□

Corollario 1.3.5 Se $y \in \mathcal{C}^0([a, b])$ la funzione

$$\begin{cases} x(s) := x(a) + \int_a^s y(t)dt & \text{appartiene a } \mathcal{C}^1([a, b]) \\ \frac{d}{ds} x(s) = y(s) & \text{su } [a, b] \end{cases}$$

□

Memento 1.3.6 [2° teorema fondamentale dell’analisi]

Sia $x \in \mathcal{C}^1((a, b))$ tale che

$$\frac{d}{ds} x(s) = y(s) \quad \text{su } (a, b), \quad \text{con } y \in \mathcal{C}^0((a, b))$$

allora

$$x(s) = x(c) + \int_c^s y(t)dt \quad \text{per ogni } c \in (a, b).$$

□

Memento 1.3.7 Un operatore $\mathcal{F} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ (entrambi spazi di Banach) si dice
derivabile in $x \in \mathbb{X}$ se esiste $\mathcal{L} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ lineare limitato tale che

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{F}(x+h) - \mathcal{F}(x) - \mathcal{L}(x)h\|}{\|h\|} = 0 .$$

Tale $\mathcal{L}$ si può anche indicare con $\mathcal{F}'$ e verifica le usuali regole di derivazione delle funzioni, quale per esempio
 la: $(\mathcal{P} \circ \mathcal{S})'(x) = \mathcal{P}'(\mathcal{S}(x)) \circ \mathcal{S}'(x)$.

□

Il metodo operativo per calcolare le derivate di un operatore consiste nello scrivere esplicitamente la differenza $\mathcal{F}(x+h) - \mathcal{F}(x)$ come un operatore su h e di questo estrarre la parte lineare su h .

Ad esempio la $\mathcal{P}(y, y_0)$ del Memento 1.2.10 ha derivata

$$\mathcal{P}'(y, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{d}{ds} - f_y(s, y(s))\mathbb{I} & 0 \\ \pi_0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Viceversa, detto $|P| := \max_i(\lambda_{i+1} - \lambda_i)$ il passo di una partizione $P := \{\lambda_0 = 0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n = 1\}$ dell'intervallo $[0, 1]$, si definisce

Riemann integrabile da x ad y un operatore $\mathcal{F}$ per il quale esiste il

$$\int_x^y \mathcal{F}(\xi) d\xi := \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_i \mathcal{F}(x + \lambda_i(y-x)) \cdot (\lambda_{i+1} - \lambda_i)(y-x)$$

e si noti che tale integrazione è definita solo sul segmento che unisce x con y .

Anche questa operazione verifica le usuali regole dell'integrazione di funzioni reali e, per esempio, è valida la

$$\|\mathcal{F}(x + \lambda(y-x))\| \leq p(\lambda) \quad \Rightarrow \quad \left\| \int_x^y \mathcal{F}(\xi) d\xi \right\| \leq \int_0^1 p(\lambda) d\lambda$$

Sussiste infine la importante **Proposizione 1.3.8** Se $\mathcal{F}$ è derivabile in ogni punto del segmento che unisce x con y ed $\mathcal{F}'$ è integrabile da x ad y allora

$$\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x) = \int_x^y \mathcal{F}'(\xi) d\xi$$

□

Dimostrazione Si pongano $x_i := x + \lambda_i(y-x)$, $i = 0, \dots, n$, e si consideri l'espressione “telescopica” :

$$\mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{F}'(x_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{F}(x_{i+1}) - \mathcal{F}(x_i) - \mathcal{F}'(x_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Sfruttando l'ipotesi di derivabilità che, per n grande e $\lambda_{i+1} - \lambda_i = 1/n$, assicura la stima

$$\|\mathcal{F}(x_{i+1}) - \mathcal{F}(x_i) - \mathcal{F}'(x_i)(x_{i+1} - x_i)\| < \frac{\varepsilon}{2n}$$

si ricava che il primo membro ha norma minore di $\varepsilon/2$; basta poi riconoscere che, per l'integrabilità di $\mathcal{F}'$, anche $\left\| \int_x^y \mathcal{F}'(\xi) d\xi - \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{F}'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \right\|$ resta limitata da $\varepsilon/2$. ■

Allo stesso modo se ne prova l'importante **Corollario 1.3.9** [Teorema di media generalizzato]

$$\|\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(a)\| \leq \sup_{\lambda \in [0,1]} \|\mathcal{F}'(a + \lambda(x-a))\| \|x - a\|$$

□

Operatore lineare invertibile (lineare) limitato tale che := un operatore $\mathcal{L} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ lineare limitato per il quale esiste $\mathcal{L}^{-1} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{L}^{-1} = \mathbb{I} \quad \text{su } \mathbb{Y} \quad \text{e simultaneamente} \quad \mathcal{L}^{-1} \circ \mathcal{L} = \mathbb{I} \quad \text{su } \mathbb{X}$$

Si noti che se gli spazi sono a dimensioni finite n, m l'operatore $\mathcal{L}$ è limitato (e ciò in conseguenza del fatto che gli corrisponde una matrice $n \times m$); ed anzi, per la limitatezza di $\mathcal{L}$ basta che $\mathbb{X}$ sia a dimensione finita (in quanto si può valutare l'allungamento dei soli versori di base).

Più in generale si ricordino le seguenti definizioni e proprietà:

Operatore invertibile := un operatore $\mathcal{F} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ per il quale esiste un qualche operatore $\tilde{\mathcal{F}} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ tale che

$$\mathcal{F} \circ \tilde{\mathcal{F}} = \mathbb{I} \quad \text{su } \mathbb{Y} \quad \text{e simultaneamente} \quad \tilde{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = \mathbb{I} \quad \text{su } \mathbb{X}.$$

Talvolta può essere necessario richiedere, in aggiunta, che l'operatore $\tilde{\mathcal{F}}$ sia limitato.

Operatore non singolare, o $1 \longleftrightarrow 1$:= un operatore $\mathcal{F} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ tale che :

$$\text{per ogni } y \in \mathcal{F}(\mathbb{X}) \quad \text{esiste unico } x \in \mathbb{X} \quad \text{tale che } \mathcal{F}(x) = y ;$$

equivalentemente:

$$\mathcal{F}(x_1) = \mathcal{F}(x_2) \quad (\text{se e solo se} \quad x_1 = x_2 ;$$

equivalentemente:

$$\text{esiste un qualche } \mathcal{S} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X} \quad \text{tale che} \quad \mathcal{S}\mathcal{F} = \mathbb{I} \text{ su } \mathbb{X}.$$

Operatore suriettivo, o “onto” := un operatore $\mathcal{F} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ tale che :

$$\text{per ogni } y \in \mathbb{Y} \quad \text{esiste (almeno) un } x \in \mathbb{X} \quad \text{tale che } \mathcal{F}(x) = y ;$$

equivalentemente:

$$\text{esiste un qualche } \mathcal{D} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X} \quad \text{tale che} \quad \mathcal{F}\mathcal{D} = \mathbb{I} \text{ su } \mathbb{Y}.$$

Nulla è detto in questi due casi sulla unicità e limitatezza degli operatori $\mathcal{S}$ e $\mathcal{D}$.

Esempio 3.10 Sia $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = l_2$ e $\Lambda : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ definito da $y_k = \lambda_k x_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ con $|\lambda_k| \leq m < \infty$. In tal caso si ha, per ogni $\nu \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{\nu} |y_k|^2 \leq m^2 \sum_{k=1}^{\nu} |x_k|^2 \leq m^2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$, e quindi $y = \Lambda x$ è in $\mathbb{Y}$.

L'operatore Λ è $1 \longleftrightarrow 1$ se e solo se $\lambda_k \neq 0 \quad \forall k = 0, 1, \dots$ in quanto deve accadere $\lambda_k \Delta x_k \neq 0$ per anche un solo $\Delta x_k \neq 0$; inoltre $\Lambda(\mathbb{X}) = \mathbb{Y}$ se e solo se $|\lambda_k| > m > 0 \quad \forall k$. Infatti:

$$(\Leftarrow) \text{ per } y \in l_2 \text{ si ha che } x = \{\frac{1}{\lambda_k} y_k\}_{k=0,1,\dots} \text{ è in } l_2 \text{ in quanto } \sum_{k=1}^{\nu} |x_k|^2 \leq \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^{\nu} |y_k|^2 \text{ per ogni } \nu;$$

$$(\Rightarrow) \text{ il punto } y = \{y_k := \frac{1}{\lambda_k}\}_{k=0,1,\dots} \text{ è in } l_2 \text{ ma non in } \Lambda(\mathbb{X}) \text{ se } |\lambda_k| \leq \frac{1}{k}, \text{ perché se lo fosse si avrebbe } x_k = \frac{1}{\lambda_k} y_k \geq 1 \text{ e quindi } x \notin l_2.$$

□

Si noti che

-) se $\mathcal{F}$ è un operatore invertibile, $\tilde{\mathcal{F}}$ è unico
(infatti $\mathcal{F}^*(y) = \mathcal{F}^*(\mathcal{F} \circ \tilde{\mathcal{F}}(y)) = \mathcal{F}^*(\mathcal{F}(\tilde{\mathcal{F}}(y))) = \tilde{\mathcal{F}}(y)$) pertanto:
-) se un operatore è invertibile il suo inverso $\mathcal{F}^{-1}$ è unico.
-) se un operatore è invertibile esso è non singolare (infatti se esistessero x_1, x_2 tali che $\mathcal{F}(x_1) = \mathcal{F}(x_2) = y$ si avrebbe $x_1 = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(x_1)) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(x_2)) = x_2$)
-) se un operatore è invertibile si ha $\mathcal{F}(\mathbb{X}) = \mathbb{Y}$
(infatti per ogni $y \in \mathbb{Y}$ si ha $y = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(y)) = \mathcal{F}(x)$)
-) se un operatore è $1 \xrightarrow{\text{onto}} 1$ su $\mathbb{Y}$ e cioè se esso è non singolare con $\mathcal{F}(\mathbb{X}) = \mathbb{Y}$, allora esso è invertibile
(infatti esistendo per ogni $y \in \mathbb{Y}$ un unico $x \in \mathbb{X}$ tale che $\mathcal{F}(x) = y$, basta definire $\mathcal{F}^{-1}(y) := x$; esso sarà $1 \xrightarrow{\text{onto}} 1$ su $\mathbb{X}$ se, come si è implicitamente assunto, $\mathcal{F}$ è definito per ogni $x \in \mathbb{X}$ e ad esso associa un unico $y \in \mathbb{Y}$; si tratterà all'occorrenza di determinare se l'operatore così ottenuto è o meno limitato).

Il metodo accennato mostra anche che un operatore $\mathcal{F} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ non singolare è invertibile su $\mathcal{F}(\mathbb{X})$.

In definitiva si è riconosciuto che una definizione alternativa è la:

Operatore invertibile := un operatore $\mathcal{F} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ tale che

$$\text{ad ogni } x \in \mathbb{X} \text{ associa un unico } \mathcal{F}(x) \in \mathbb{Y}, \quad \text{e che sia } 1 \xrightarrow{\text{onto}} 1 \text{ su } \mathbb{Y}.$$

-) un operatore lineare $\mathcal{L} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ è non singolare se e solo se

$$\mathcal{L}x = 0 \iff x = 0,$$

e ciò basta affinché l'operatore conservi l'indipendenza lineare dei vettori. Quando $\mathcal{L}$ è non singolare, dato comunque $y \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ la soluzione unica: x dell'equazione $\mathcal{L}x = y$ definisce un operatore $\tilde{\mathcal{L}} : y \mapsto x(y)$ che è lineare (e non singolare); (ciò implica che una combinazione lineare di soluzioni di una equazione lineare è soluzione della stessa equazione solo se questa è omogenea).

-) se un operatore lineare limitato $\mathcal{L} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ ammette univoco l'operatore $\mathcal{S}$ (o l'operatore $\mathcal{D}$) come sopra allora esiste univoco anche l'operatore $\mathcal{D}$ (o l'operatore $\mathcal{S}$) ed essi sono tali che: $\mathcal{S} = \mathcal{D} =: \tilde{\mathcal{L}}$, e se questo è limitato coincide con l'operatore $\mathcal{L}^{-1}$;
-) (teorema di Banach): se un operatore lineare limitato $\mathcal{L} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ entrambi spazi di Banach è $1 \overset{onto}{\longleftrightarrow} 1$ allora $\mathcal{L}^{-1}$ (esiste, è lineare, ed) è limitato.

Grafico di un operatore $\mathcal{T}$:= l'insieme $G(\mathcal{T}) := \{(x, \mathcal{T}x) \mid x \in Dom \mathcal{T}\}$

Operatore chiuso := un operatore $\mathcal{T} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ per il quale

$$G(\mathcal{T}) \text{ è chiuso in } \mathbb{X} \times \mathbb{Y}.$$

-) un operatore è chiuso se e solo se, quando $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Dom \mathcal{T}$ è tale che $x_n \xrightarrow[n]{n} x$ ed $\mathcal{T}x_n \xrightarrow[n]{n} y$ allora si ha che $x \in Dom \mathcal{T}$ ed è $\mathcal{T}x = y$.
-) se $Dom \mathcal{T}$ è chiuso e $\mathcal{T}$ è continuo allora $\mathcal{T}$ è chiuso.

Proposizione 1.3.11 Sia $\mathbb{X}$ completo e $\mathcal{T} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ lineare chiuso. Se per qualche r si ha

$$\{y \in \mathbb{Y} \mid \|y\| < r\} \subset [\mathcal{T} \{x \in \mathbb{X} \mid \|x\| \leq 1\}]$$

allora è anche

$$\{y \in \mathbb{Y} \mid \|y\| < r\} \subset \mathcal{T} \{x \in \mathbb{X} \mid \|x\| \leq 1\}.$$

□

Teorema 1.3.12 [del grafo chiuso] (si veda: [Robertson])

Ogni operatore lineare chiuso $\mathcal{T} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$, entrambi spazi di Banach, è continuo.

□

Siano $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ normati.

Operatore strettamente singolare $\mathcal{L} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$:= un operatore lineare limitato che non ha inverso limitato su alcun sottospazio infinito dimensionale in $Dom \mathcal{L}$.

Operatore precompatto $\mathcal{L} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$:= un operatore lineare limitato tale che $\mathcal{L}B_1(0) \subset \mathbb{W}$ è totalmente limitato.

Operatore compatto $\mathcal{L} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$:= un operatore lineare limitato tale che $[\mathcal{L}B_1(0)] \subset \mathbb{W}$ è compatta (in $\mathbb{W}$).

-) ogni operatore precompatto è strettamente singolare.

-) $\mathcal{L}$ è $\begin{cases} \text{precompatto} \\ \text{compatto} \\ \text{debolmente compatto} \end{cases}$ qualora per ogni $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ limitata la $\{\mathcal{L}x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione $\begin{cases} \text{di Cauchy} \\ \text{convergente} \\ \text{debolmente convergente} \end{cases}$

-) $\mathcal{L} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ lineare limitato è compatto se e solo se $\mathcal{L}$ è precompatto ed $\mathbb{W}$ completo.

λ è detto regolare se $(\lambda \mathbb{I} - \mathcal{L})$ è invertibile con inverso limitato e definito su un insieme (almeno) denso nello spazio $\mathbb{Y}$; l'insieme dei valori regolari è detto *insieme risolvente di $\mathcal{L}$* ; il suo complementare è detto *lo spettro di $\mathcal{L}$* , che allora certo contiene gli autovalori di $\mathcal{L}$ ma può darsi non solo loro, infatti, pur essendo non singolare, $(\lambda \mathbb{I} - \mathcal{L})$ può non avere immagine densa in $\mathbb{Y}$ oppure l'inverso detto può non essere limitato; a seconda delle tre possibilità dette lo spettro si suddivide nella sua parte puntuale, residua, continua. Si ha invece che lo spettro coincide con l'insieme dei suoi autovalori, e cioè con la sua parte puntuale, qualora l'operatore sia autoaggiunto in uno spazio di Hilbert e completamente continuo, (e cioè trasformi insiemi limitati in insiemi precompatti).

Esempio 3.13 Siano $\mathbb{V} = C([a, b])$ e $\mathbb{W} = C^1([a, b])$ con $w(a) = 0$,

Si consideri $\mathcal{L} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ dato da $\mathcal{L} := \int_a^t v(\tau) d\tau$. Si ha $\mathcal{L}(\mathbb{V}) = \mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ e per ogni $w \in \mathbb{W}$ la soluzione di $\int_a^t v(\tau) d\tau = w(t)$ esiste data da $v(t) = \frac{d}{dt} w(t)$; ma l'operatore $\mathcal{T} := \frac{d}{dt}$ non è limitato su $\mathbb{W}$ (rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$ su entrambi gli spazi).

Si noti d'altra parte che l'operatore $\mathcal{T}$ è (definito sul sottoinsieme $\mathbb{W}$ denso in $\mathbb{V}$ ed) è chiuso rispetto alla norma uniforme: si veda il Memento 1.2.14. □

Proposizione 1.3.14 Un operatore lineare (non necessariamente limitato) $\mathcal{L} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ è invertibile su $\mathcal{L}(\mathbb{V})$ e cioè esiste $\mathcal{L}^{-1} : \mathcal{L}(\mathbb{V}) \rightarrow \mathbb{V}$ (lineare) limitato se e solo se esiste $m > 0$ tale che

$$\|\mathcal{L}x\| \geq m \|x\| \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{V}$$

□

Dimostrazione Dalla $\|\mathcal{L}x\| \geq m \|x\|$ segue che se $x \neq 0$ allora $\mathcal{L}x \neq 0$, e quindi $\mathcal{L}$ è $1 \longleftrightarrow 1$. Inoltre $\mathcal{L}^{-1}$ è limitato, infatti è $\|\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}x\| = \|x\| \leq m^{-1} \|\mathcal{L}x\|$. Viceversa, se $\mathcal{L}^{-1}$ è continuo si ha $\|x\| = \|\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}x\| \leq \|\mathcal{L}^{-1}\| \|\mathcal{L}x\|$ e ciò definisce $m^{-1} = \|\mathcal{L}^{-1}\|$ (vedi oltre, e [Naylor teor.7.6.4]). ■

$(\mathbb{W}, \|\cdot\|_{\mathbb{W}})$ compatto in $(\mathbb{V}, \|\cdot\|_{\mathbb{V}})$ Banach := un sottospazio $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ tale che la sfera $\{y \in \mathbb{W} \mid \|y\|_{\mathbb{W}} \leq 1\}$ sia contenuta in un insieme compatto di $\mathbb{V}$

Equivalentemente: quando ogni sottoinsieme di $\mathbb{W}$ che sia $\|\cdot\|_{\mathbb{W}}$ -limitato è compatto (oppure: totalmente limitato) rispetto alla $\|\cdot\|_{\mathbb{V}}$.

Equivalentemente: quando ogni successione $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $\{\|y_n\|_{\mathbb{W}} \leq b < \infty\}$ ammette una sottosuccessione convergente in $(\mathbb{V}, \|\cdot\|_{\mathbb{V}})$.

Teorema 1.3.15 (si veda: [Naylor 7.6.4])

Sia $(\mathbb{W}, \|\cdot\|_{\mathbb{W}})$ compatto in $(\mathbb{V}, \|\cdot\|_{\mathbb{V}})$ Banach, e $\mathcal{T} : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{V}$ lineare tale che esiste $m : \|\mathcal{T}y\|_{\mathbb{V}} \geq m \|y\|_{\mathbb{W}}$. Allora $\mathcal{T}^{-1}$ esiste ed è compatto.

Inoltre esistono $a, b > 0$ tali che

$$\begin{cases} \|\mathcal{T}^{-1}\|_{\mathbb{W}} \leq a \|x\|_{\mathbb{V}} \\ \|\mathcal{T}^{-1}\|_{\mathbb{V}} \leq a \|x\|_{\mathbb{V}} \end{cases} \quad \text{per ogni } x \in \text{Im } \mathcal{T}.$$

In particolare se $\text{Im } \mathcal{T}$ è denso in $\mathbb{V}$ esiste un'unica estensione continua di $\mathcal{T}^{-1}$ a tutto $\mathbb{V}$. □

Dimostrazione Per la precedente proposizione, esiste limitato l'operatore $\mathcal{T}^{-1}$ tale che $(\text{Im } \mathcal{T}, \|\cdot\|_{\mathbb{V}}) \rightarrow (Dom \mathcal{T}, \|\cdot\|_{\mathbb{W}})$ con $\|\mathcal{T}^{-1}x\|_{\mathbb{W}} \leq m^{-1} \|x\|_{\mathbb{V}}$; pertanto $\mathcal{T}^{-1}$ mappa la sfera $\{x \in \mathbb{V} \cap \text{Im } \mathcal{T} \mid \|x\|_{\mathbb{V}} \leq 1\}$ in un sottoinsieme di $\mathbb{W}$ che è $\|\cdot\|_{\mathbb{V}}$ -limitato e come tale anche $\|\cdot\|_{\mathbb{W}}$ -compatto in $\mathbb{V}$ dato che $\mathbb{W}$ è compatto in $\mathbb{V}$. Quindi, come operatore sullo spazio $(Dom \mathcal{T}, \|\cdot\|_{\mathbb{V}})$, $\mathcal{T}^{-1}$ è compatto. ■

L'importanza del riconoscere la compattezza di un operatore definito su uno spazio di Hilbert si manifesta nel seguente

Teorema 1.3.16 [spettrale]

Sia $\mathcal{L} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ un operatore normale compatto (definito su un sottoinsieme denso) in uno spazio di Hilbert $\mathbb{H}$. Esistono una successione di operatori di proiezione: $\{\Pi_n\}_{n=0,1,\dots}$ ed una di numeri complessi $\{\lambda_n\}_{n=0,1,\dots}$ tali che, (con convergenza in norma uniforme):

$$\mathcal{L} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \Pi_n.$$

Le proiezioni $\Pi_n : \mathbb{H} \rightarrow Ker(\lambda_n \mathbb{I} - \mathcal{L})$ sono continue, ortogonali, onto e tali che

$$\begin{cases} \Pi_i \Pi_j = 0 & \text{se } i \neq j \\ x = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_n x & \forall x \in \mathbb{H} \end{cases}$$

con convergenza per coordinate e, in generale, non uniforme. □

Sia $(\mathbb{X}, d)$ uno spazio metrico *completo*.

Un operatore $\mathcal{F} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ è una contrazione se esiste $\theta \in (0, 1)$ tale che

$$d(\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)) \leq \theta \cdot d(x, y)$$

ed è pertanto un particolare operatore limitato e quindi continuo. In tal caso (si veda: § I.3) la successione

$$x_{n+1} := \mathcal{F}(x_n)$$

con x_0 arbitrario è di Cauchy e quindi converge al (unico) :

$$\text{Punto unito} \quad \bar{x} : \quad \bar{x} = \mathcal{F}(\bar{x})$$

con errore *lineare*:

$$d(x_m, \bar{x}) \leq \frac{\theta^m}{1 - \theta} d(x_0, x_1) =: \theta^m \cdot r_0 .$$

Risulta infatti, con $m < n$,

$$d(x_n, x_m) \leq \theta^m \frac{1 - \theta^{n-m}}{1 - \theta} d(x_0, x_1) .$$

Nota 1.3.17 In base alla considerazione che un sottoinsieme chiuso connesso di uno spazio di Banach è esso stesso uno spazio di Banach, se un operatore risulta contrattivo solo su una sfera $[B_r(x_0)]$ dello spazio $\mathbb{X}$ il risultato enunciato *sussiste ugualmente pur di limitarsi a tale sfera, e di controllare che essa sia un insieme $\mathcal{F}$ -invariante*; dovrà cioè accadere che $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset [B_r(x_0)]$ ovvero che $d(x_m, x_0) \leq r$ per ogni m . Siccome secondo la stima fatta risulta $d(x_n, x_0) \leq \frac{1}{1-\theta} d(x_1, x_0)$, si conclude che le affermazioni su esposte (e cioè la tesi del teorema delle contrazioni) sussistono limitatamente alla sfera $[B_r(x_0)]$ *purché risulti*

$$r \geq \frac{1}{1 - \theta} d(x_1, x_0) =: r_0 .$$

Si può anzi notare che una contrazione mappa la sfera $[B_r(x_0)]$ in $[B_{\theta r}(\mathcal{F}(x_0))]$ in quanto $d(\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(x_0)) \leq \theta d(x, x_0)$ e quindi, in particolare, che mappa la sfera $[B_{r_0}(x_0)]$ in $[B_{\theta r_0}(\mathcal{F}(x_0))] \subset [B_{r_0}(x_0)]$ infatti se $d(y, x_1) < \theta r_0$ allora risulta $d(y, x_0) \leq d(y, x_1) + d(x_1, x_0) \leq \theta r_0 + (1 - \theta)r_0 \leq r_0$.

Regione di accessibilità del punto $\bar{x}$ fisso per $\mathcal{F}$:= l'insieme :

$$\left\{ x_0 \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}^n x_0 = \bar{x} \right\} .$$

Sotto le ipotesi del teorema delle contrazioni si ha che la regione di accessibilità del punto fisso *contiene tutta la sfera* $[B_{r_0}(x_0)]$; ed il punto fisso, unico nella sfera di contrazione $[B_r(x_0)]$, si trova senz'altro nella $[B_{r_0}(x_0)]$. È chiaro inoltre, in base alla definizione, che $\mathcal{F}$ è continua *in ogni punto di* $[B_r(x_0)]$.

Si noti infine che se un operatore contrattivo $\mathcal{L}$ è anche lineare, il suo punto unito non può che essere l'origine, infatti essa è certo soluzione dell'equazione $\mathcal{L}x = x$ data la linearità di $\mathcal{L}$, ed una tale soluzione non può che essere l'origine dato che $\|x\| = \|\mathcal{L}x\| \leq \|\mathcal{L}\| \|x\| < \|x\|$; e cioè: per un operatore lineare $\mathcal{L}x = x \Rightarrow \|\mathcal{L}\| \geq 1$ a meno che sia $x = 0$ ▷

Qualora $\mathcal{F}$ sia derivabile, per controllare se $\mathcal{F}$ è una contrazione su $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ è conveniente usare il Teorema di media generalizzato, e valutare se la norma $\|\mathcal{F}'\|$ resta limitata dal valore uno.

Un'importante applicazione del teorema delle contrazioni è quella della determinazione degli inversi degli operatori o, equivalentemente, della soluzione in spazi completi di equazioni del tipo $\mathcal{P}(x) = y$.

(In effetti, per parlare dell'operatore inverso se ne deve studiare l'insieme di definizione e le proprietà di limitatezza, deve cioè essere uno studio "in grande"; il teorema delle contrazioni vale invece in forma *locale*: dire che $\mathcal{P}(x) = 0 \iff x = \bar{x}$ può definire $\bar{x} =: \mathcal{P}^{-1}(0)$ ma non dice quanto valga $\mathcal{P}^{-1}(y)$ se $y \neq 0$)

Si considerino per esempio i seguenti operatori $\mathcal{F} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ Banach.

Siano $\mathcal{L} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ lineare e $\mathcal{K} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ lineare invertibile; si ha

$$\mathcal{L}x = y \iff (\mathbf{1} - \mathcal{K}\mathcal{L})x + \mathcal{K}y =: \mathcal{F}(x) = x$$

e si noti che tale $\mathcal{F}(\cdot) := (\mathbf{1} - \mathcal{K}\mathcal{L})(\cdot) + \mathcal{K}y$ è *non lineare* se $y \neq 0$. Sia $\mathcal{P} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ non lineare; si ha

$$\mathcal{P}(x) = y \iff x + \mathcal{P}(x) - y =: \mathcal{F}(x) = x$$

ed ovviamente anche questo $\mathcal{F}(\cdot) := (\cdot) + \mathcal{P}(\cdot) - y$ è *non lineare*.

Più in generale, se dato $\mathcal{P} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ non lineare si riesce a trovare $\mathcal{S} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ anch'esso non lineare e tale che $\mathcal{S}(y) = 0 \iff y = 0$ allora si ha

$$\mathcal{P}(x) = y \iff x + \mathcal{S}(\mathcal{P}(x) - y) =: \mathcal{F}(x) = x$$

Se un tale operatore $\mathcal{F}$ è contrattivo in una sfera $[B_r(x_0)]$ dello spazio $\mathbb{X}$ supposto di Banach il suo punto unito è in $[B_{r_0}(x_0)]$ e risolve univocamente, in $[B_r(x_0)]$, l'equazione $\mathcal{P}(x) = y$ (o rispettivamente, nel caso lineare, l'equazione $\mathcal{L}x = y$).

Nel caso particolare di derivabilità, $\mathcal{F}$ sarà contrattivo se $\|\mathbb{I} + \mathcal{P}'\| < 1$ (o, rispettivamente, se $\|\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L}\| < 1$)

Ad ogni $y \in \mathbb{Y}$ per il quale l'operatore $\mathcal{F}$ risulta contrattivo resta in tal modo associato il (solo) punto $x := \mathcal{P}^{-1}(y) \cap B_r(x_0)$ (ove con $\mathcal{P}^{-1}(y)$ si è qui indicato l'insieme $\{x \in \mathbb{X} \mid \mathcal{P}(x) = y\}$). Ciò definisce un operatore $\mathcal{P}^{-1} : \mathcal{P}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{X}$ con immagine nella detta sfera, (o nella loro unione)

Dal teorema delle contrazioni, *nel caso di linearità* segue che il punto unito di $\mathcal{F}$ è il limite della successione

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \mathcal{F}(x_n) = (\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L})x_n + \mathcal{K}y = \\ &= \sum_{j=0}^n (\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L})^j \mathcal{K}y + (\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L})^{n+1} x_0 \end{aligned}$$

cioè $\bar{x}$ definisce la:

$$\text{Serie di Neumann} \quad \bar{x} =: \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L})^j \mathcal{K}y$$

e si noti che la stessa relazione $(\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L})x_m = x_{m+1} - \mathcal{K}y$ implica che

$$(\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L}) \sum_{j=0}^{m-1} (\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L})^j \mathcal{K} = (\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L})^m \mathcal{K} + \sum_{j=0}^{m-1} (\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L})^j \mathcal{K} - \mathcal{K}$$

e quindi per la $\|\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L}\| < 1$ si conclude che

$$\mathcal{K}\mathcal{L} \sum_{j=0}^{m-1} (\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L})^j \mathcal{K} = (\mathbb{I} - (\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L})^m) \mathcal{K} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} \mathcal{K}.$$

Analogo risultato si ottiene, sempre nel caso lineare, mediante il seguente

Teorema 1.3.18 Sia $\mathcal{L} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ lineare limitato su $\mathbb{X}$ Banach.

Sia $\mathcal{K} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ lineare limitato e $1 \xrightarrow{qnto} 1$, ma non necessariamente invertibile.

Se $\|\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L}\| < 1$ allora: $\mathcal{L} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ è invertibile. □

Dimostrazione Si osservi innanzi tutto che $\mathcal{L}$ è certamente invertibile. Si ha infatti:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}x\| &\geq \|\mathcal{K}\|^{-1} \|\mathcal{K}\mathcal{L}x\| \geq \|\mathcal{K}\|^{-1} \|(\mathbb{I} - (\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L}))x\| \\ &\geq \|\mathcal{K}\|^{-1} (\|x\| - \|\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L}\| \|x\|) \geq m \|x\| \end{aligned}$$

con $m := \|\mathcal{K}\|^{-1} (1 - \|\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L}\|)$ e l'ipotesi $\|\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L}\| =: \theta < 1$ implica che sia $m > 0$.

In secondo luogo si osservi che, dato comunque $y \in \mathbb{Y}$ si ha che $\mathcal{K}y \in \mathbb{X}$; ed in particolare $(\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L}) : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$. Ne segue che la successione definita sopra, per esempio con $x_0 := \mathcal{K}y$

$$x_m := \sum_{j=0}^m (\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L})^j \mathcal{K}y$$

è una successione di Cauchy in $\mathbb{X}$, infatti

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &= \left\| \sum_{j=m+1}^n (\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L})^j \mathcal{K}y \right\| \leq \\ &\leq \sum_{j=m+1}^n \|(\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L})^j\| \|\mathcal{K}\| \|y\| \leq \\ &\leq \sum_{j=m+1}^{\infty} \theta^j \|\mathcal{K}\| \|y\| = \\ &= \frac{\theta^{m+1}}{1 - \theta} \|\mathcal{K}\| \|y\| \leq \varepsilon \|y\| \end{aligned}$$

Resta quindi definito *per ogni* $y \in \mathbb{Y}$ un (unico) punto $\bar{x} \in \mathbb{X}$ dato da

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n =: \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L})^j \mathcal{K}y$$

ed esso è tale che

$$(\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L})\bar{x} = \sum_{j=1}^{\infty} (\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L})^j \mathcal{K}y = \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L})^j \mathcal{K}y - \mathcal{K}y = \bar{x} - \mathcal{K}y.$$

L'ipotesi che $\mathcal{K} : \mathbb{Y} \xrightarrow{\text{onto}} \mathbb{X}$ sia non singolare assicura che $\bar{x}$ risolve la $\mathcal{L}x = y$, e ciò mostra che $\mathcal{L}(\mathbb{X}) = \mathbb{Y}$.

D'altra parte tale equazione non può che avere $\bar{x}$ come soluzione: se esistesse x^* tale che $\mathcal{L}x^* = y$ sarebbe $\mathcal{L}(\bar{x} - x^*) = 0$ e quindi

$$(\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L})(\bar{x} - x^*) = (\bar{x} - x^*) \quad \text{che implica} \quad \|\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L}\| \geq 1.$$

Pertanto $\mathcal{L} : \mathbb{X} \xrightarrow{\text{onto}} \mathbb{Y}$ è non singolare.

La disuguaglianza $\|\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L}\| < 1$ implica anche che l'operatore (lineare) $\mathcal{D} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ dato da $\sum_{j=0}^{\infty} (\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L})^j \mathcal{K}$ sia definito su tutto $\mathbb{Y}$ ed abbia norma $\|\mathcal{D}\| \leq \frac{\|\mathcal{K}\|}{1 - \|\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L}\|} < \infty$; in definitiva risulta $\mathcal{D} \equiv \mathcal{L}^{-1}$ e

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{-1} := \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L})^j \mathcal{K} & \text{con} \\ \|\mathcal{L}^{-1}\| \leq \frac{\|\mathcal{K}\|}{1 - \|\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L}\|} \end{cases}$$

se fosse *onto* esso potrebbe rappresentare l'inverso di $\mathcal{L}$. In caso contrario si ha che $\mathcal{D}\mathcal{L} = \mathbb{I}$ su $\mathbb{X}$ mentre non è detto che $\mathcal{L}\mathcal{D} = \mathbb{I}$ su $\mathbb{Y}$ (stante il fatto che sia $\mathcal{D}$ che $\mathcal{L}$ sono non singolari). ■

Corollario 1.3.19 Sia $\mathcal{L} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ lineare limitato fra $\mathbb{X}$ ed $\mathbb{Y}$ entrambi spazi di Banach; $\mathcal{L}$ è invertibile **se e solo se** esiste $\mathcal{K} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ lineare limitato invertibile e tale che

$$\|\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L}\| < 1.$$

□

Allo stesso modo si dimostrano le seguenti

Proposizione 1.3.20 $\mathcal{L} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ lineare limitato su $\mathbb{X}$ Banach è invertibile **se e solo se** esiste $\mathcal{M} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ lineare limitato invertibile e tale che

$$\|\mathcal{M} - \mathcal{L}\| < 1 / \|\mathcal{M}^{-1}\| \quad \text{a sua volta certo} \quad \leq \|\mathcal{M}\|$$

In tal caso risulta definito su $\mathbb{Y}$ l'operatore (lineare)

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{-1} := \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbb{I} - \mathcal{M}^{-1}\mathcal{L})^j \mathcal{M}^{-1} & \text{con} \\ \|\mathcal{L}^{-1}\| \leq \frac{\|\mathcal{M}^{-1}\|}{1 - \|\mathbb{I} - \mathcal{M}^{-1}\mathcal{L}\|} \leq \frac{\|\mathcal{M}^{-1}\|}{1 - \|\mathcal{M}^{-1}\| \|\mathcal{M} - \mathcal{L}\|} \end{cases}$$

□

Corollario 1.3.21 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \lambda\mathcal{L}_1$ è invertibile se lo è $\mathcal{L}_0$ e se

$$|\lambda| \leq (\|\mathcal{L}_0^{-1}\| \|\mathcal{L}_1\|)^{-1}$$

□

Proposizione 1.3.22 $\mathcal{L} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ lineare limitato su $\mathbb{X}$ Banach è invertibile **se e solo se** esiste $\mathcal{K} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ lineare limitato $1 \xrightarrow{onto} 1$ per il quale risulti

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|(\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L})^j \mathcal{K}\| < \infty$$

nel qual caso è convergente la serie degli operatori (serie di Neumann) e si ha:

$$\mathcal{L}^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L})^j \mathcal{K}$$

□

Corollario 1.3.23 $\mathcal{L} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ lineare limitato su $\mathbb{X}$ Banach è invertibile **se e solo se** esiste $\mathcal{K} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ lineare limitato $1 \xrightarrow{onto} 1$ per il quale l'operatore $(\mathbb{I} - \mathcal{K}\mathcal{L})$ risulti nilpotente. □

Corollario 1.3.24 $\mathcal{L} = (\mathbb{I} - \mathcal{N})$ con $\mathcal{N}$ nilpotente risulta certo invertibile. □

Esempio 3.25 Fredholm di seconda specie su $\mathbb{X} := \mathcal{C}^0([0, 1], \|\cdot\|_{\infty})$:

$$y(s) = x(s) - \lambda \int_0^1 g(s, t)x(t)dt =: (\mathbb{I} - \lambda\mathcal{G})x =: \mathcal{L}x \quad s \in [0, 1]; \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

si pensi, per esempio, a $\lambda = 1$, e $\begin{cases} g(s, t) = s(1-t) & \text{per } 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ g(s, t) = t(1-s) & \text{per } 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$

Per la Proposizione 1.3.20, o direttamente per il Teorema spettrale con $\mathcal{K} = \mathbb{I}$, ed essendo

$$\|\mathcal{G}\|_{\infty} \leq \max_{s \in [0, 1]} \int_0^1 |g(s, t)|dt = \max_{s \in [0, 1]} \{(1-s)s^2/2 + s[t - t^2/2]_s^1\} = 1/8$$

si conclude che $\mathcal{L} = \mathbb{I} - \lambda\mathcal{G}$ è invertibile, che risulta $\mathcal{L}^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \mathcal{G}^j$ e che quindi la soluzione dell'equazione

$$x(s) = y(s) + \lambda \int_0^1 g(s, t)x(t)dt$$

è ottenibile come limite della successione $x_n := \sum_{j=0}^n \lambda^j \mathcal{G}^j y$, ove il nucleo dell'operatore $\mathcal{G}^j$ è dato da $g_{j+1}(s, t) = \int_0^1 g(s, u)g_j(u, t)du$.

In effetti l'equazione è del tipo $(\mathbb{I} - \lambda\mathcal{G})x = y$ con $\|\mathcal{G}x_1 - \mathcal{G}x_2\| \leq m\|x_1 - x_2\|$ e quindi $\mathcal{A}x := \lambda\mathcal{G}x + y$ è contrattivo purché $\lambda\|\mathcal{G}\| \leq \lambda m < 1$.

In questo particolare esempio, mediante la posizione

$$x(s) = y(s) + \lambda \int_0^1 g(s, t)x(t)dt =: \mathcal{A}x$$

si ricava che $\mathcal{A} : C^0([0, 1]) \rightarrow C^0([0, 1])$ e che $\|\mathcal{A}\| = 1/8$ per cui il principio delle contrazioni dà direttamente

$$x_{n+1}(s) = y(s) + \int_0^1 g(s, t)x_n(t)dt = \sum_{j=0}^{n+1} \int_0^1 g_j(s, t)y(t)dt.$$

Chiamato $\gamma(s, t; \lambda) := \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j g_{j+1}(s, t)$ il *risolvente della equazione*, si ha che γ esiste purché λ verifichi la condizione $|\lambda| < 1/\max_{[0, 1]} |g(s, t)|$; la soluzione cercata è allora esprimibile mediante l'espressione

$$x(s) = y(s) + \lambda \int_0^1 \gamma(s, t; \lambda)y(t)dt.$$

Il significato di questo specifico operatore $\mathcal{G}$ lo si può riconoscere dalle seguenti considerazioni. Siano $\mathbb{X} := \mathcal{C}^0([0, 1])$ ed $\mathbb{Y} := \mathcal{C}^2([0, 1])$ con $y(0) = y(1) = 0$. L'operatore $\mathcal{T} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ dato da $\mathcal{T}y = -\frac{d^2}{ds^2}y$ verifica le

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\mathcal{G}x &= \lambda x & \forall x \in \mathbb{X} \\ \mathcal{G}\mathcal{T}y &= \lambda y & \forall y \in \mathbb{Y}\end{aligned}$$

per cui si ha l'equivalenza dei due problemi

$$\ddot{y} = -f(t, y) \quad y(0) = y(1) = 0 \quad \text{con} \quad y(s) = \int_0^1 g(s, t)f(t, y(t))dt$$

Infatti risulta (con $\lambda = 1$)

$$\begin{aligned}-\frac{d}{ds}\mathcal{G}x &= -\frac{d}{ds}\left(\int_0^s t(1-s)x(t)dt - \int_1^s s(1-t)x(t)dt\right) = \\ &= -s(1-s)x(s) + \int_0^s tx(t)dt + s(1-s)x(s) + \int_1^s (1-t)x(t)dt\end{aligned}$$

e quindi segue $\mathcal{T}\mathcal{G}x = -\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{G}x = sx(s) + (1-s)x(s) = x(s)$.

Viceversa:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}\mathcal{T}x &= -\int_0^1 g(s, t)\ddot{x}(t)dt = \\ &= -\int_0^s t(1-s)d(\dot{x}) + \int_1^s s(1-t)d(\dot{x}) = \\ &= -s(1-s)\dot{x}(s) + \int_0^s \dot{x}(t)(1-s)dt + s(1-s)\dot{x}(s) + \int_1^s \dot{x}s dt = \\ &= (1-s)x(s) + sx(s) = x(s)\end{aligned}$$

□

Esempio 3.26 Volterra di seconda specie su $\mathbb{X} := \mathcal{C}^0([0, \tau], \|\cdot\|_\infty)$:

$$y(s) = x(s) - \lambda \int_0^s h(s, t)x(t)dt =: (\mathbb{I} - \lambda\mathcal{H})x =: \mathcal{L}x \quad \text{con } s, t \in [0, \tau]; \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

e con $h \in C^0([0, \tau] \times [0, \tau])$ tale che $|h(s, t)| < m < \infty$. Si noti che questa equazione è un caso particolare di quelle del tipo precedente: basta porre $g(s, t) := \begin{cases} h(s, t) & \text{per } t \leq s \\ 0 & \text{per } t > s \end{cases}$

Risulta $\|\mathcal{H}\| \leq m\tau$ e quindi si può usare il teorema per $\lambda\tau < 1/m$. Altrimenti si può notare che $\|\mathcal{H}^2\| \leq \max_{[0, \tau]} \int_0^s \int_0^t h(s, u)h(u, t)du dt \leq m^2\tau^2/2$, e, in generale, che $\|\mathcal{H}^n\| \leq m^n\tau^n/n!$, pertanto $\sum_{n=0}^\infty \lambda^n \|\mathcal{H}^n\| \leq e^{\lambda m\tau}$.

Se ne conclude la convergenza di $\sum_{j=0}^\infty (\mathbb{I} - \mathcal{L})^j$ e di conseguenza l'esistenza ed unicità per ogni λ del punto $x = \mathcal{L}^{-1}y$ raggiunto dalla successione $x_{n+1} = y + \lambda\mathcal{H}x_n$, e quindi per esempio dalla $x_m = \sum_{j=0}^m \lambda^j \mathcal{H}^j y$, con errore $\|x_n - x\| \leq \left(e^{\lambda m\tau} - \sum_{j=0}^n \lambda^j m^j \tau^j / j!\right) \|y\|$. Tale x è soluzione dell'equazione

$$x(s) = y(s) + \lambda \int_0^s h(s, t)x(t)dt$$

□

Anche in questo caso si sarebbe potuto scrivere questa equazione nella forma $x = \mathcal{A}x := y + \lambda\mathcal{H}x$ ed applicare direttamente il teorema delle contrazioni su $\mathcal{A}$, o all'occorrenza su $\mathcal{A}^n$. Si riconosce infatti che è

$$\|\mathcal{A}^n x_1 - \mathcal{A}^n x_2\| = |\lambda|^n \left\| \int_0^s h_n(s, t)(x_1(t) - x_2(t))dt \right\|$$

con $h_n(s, t) = \int_t^s h(s, u)h_{n-1}(u, t)du$; e quest'ultima per $|h(s, t)| < m$ fornisce la stima $|h_n(s, t)| \leq \frac{1}{(n-1)!}(s-t)^{n-1}m^n$, per cui si ottiene

$$\|\mathcal{A}^n x_1 - \mathcal{A}^n x_2\| \leq \frac{|\lambda|^n \tau^n m^n}{n!} \|x_1 - x_2\|,$$

e tale espressione è senz'altro minore di 1 per n sufficientemente grande. L'essere $\mathcal{A}^n$ contrattivo implica che il suo punto unito sia unico; ma allora $\mathcal{A}^n x = x \Rightarrow \mathcal{A}^n(\mathcal{A}x) = \mathcal{A}x \Rightarrow x = \mathcal{A}x$ e cioè x è anche punto unito per $\mathcal{A}$.

Nel caso in cui l'operatore $\mathcal{F} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ (entrambi di Banach) sia non lineare come estensione del Teorema delle contrazioni si può considerare il seguente teorema (analogo alla Proposizione 1.2.41) nel quale si indicherà con $\|\mathcal{F}\|$ il numero

$$\|\mathcal{F}\| := m(r, x_0) := \sup_{x \neq y \in [B_r(x_0)]} \frac{\|\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(y)\|}{\|x - y\|}$$

Teorema 1.3.27 (si veda: [Rall p.70–72])

Se la serie $\sum_{j=0}^{\infty} \|\mathcal{F}^j\|$ è convergente, con somma R e con $r \geq R \|\mathcal{F}(x_0) - x_0\| =: r_0$, allora: $\mathcal{F}$ ammette in $[B_{r_0}(x_0)]$ un punto unito $\bar{x}$ che è unico in $[B_r(x_0)]$ ed è raggiunto dalla successione

$$x_n := \mathcal{F}^n(x_0)$$

con errore

$$\|x_n - \bar{x}\| \leq \left(R - \sum_{j=0}^{n-1} \|\mathcal{F}^j\| \right) \|x_1 - x_0\|$$

□

Dimostrazione

Sempre in virtù della disuguaglianza triangolare, si valutano le distanze

$$\|x_n - x_0\| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \|x_{j+1} - x_j\| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \|\mathcal{F}^j\| \|\mathcal{F}(x_0) - x_0\|$$

e l'analoga

$$\|x_m - x_n\| \leq \sum_{j=n}^{m-1} \|\mathcal{F}^j\| \|\mathcal{F}(x_0) - x_0\|.$$

La convergenza (assoluta) della serie telescopica, la cui somma ridotta è $x_n - x_0$, mostra che $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \bar{x}$ uniformemente in $B_r(x_0)$.

Esempio 3.28 Si consideri l'operatore

$$\mathcal{F}_0(x) = x(0) + \int_0^s f(t, x(t)) dt$$

L'equazione non lineare di Volterra (caso particolare delle equazioni di Uryson: $x(s) = \int_0^T f(s, t, x(t)) dt$) data da

$$\mathcal{F}_0(x) = x$$

è equivalente al problema alle condizioni iniziali

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t)) & t \in [0, T] \\ x(0) & \text{assegnato} \end{cases}$$

La soluzione della equazione, punto unito di $\mathcal{F}_0$, resta individuato dalla

$$x_{n+1} = \mathcal{F}_0(x_n) = x(0) + \int_0^s f(t, x_n(t)) dt$$

sempre che $\mathcal{F}(x_n)$ sia definito per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che $\sum_{j=0}^{\infty} \|\mathcal{F}_0^j\|$ sia convergente. Ciò accade se f è definita ovunque in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e se s è in $[0, T]$ ed f ha costante di Lipschitz m , in tal caso infatti è $\|\mathcal{F}^n\| < \frac{1}{n!} m^n T^n$.

Nel caso lineare $f(t, x(t)) = x(t)$ l'equazione si riscrive nella

$$x(0) = x(s) - \int_0^s x(t) dt =: (\mathbb{I} - \mathcal{H})x$$

sulla quale si può usare la Proposizione 1.2.41 dell'inversione, dato che $\|\mathcal{H}\| \leq \frac{1}{n!} T^n$ e trovare che $x(s) = (\mathbb{I} - \mathcal{H})^{-1} x(0) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{H}^j x(0)$ verifica la $x(s) = x(0) + \mathcal{H}x$. □

Newton-Kantorovich

Un ulteriore modo per risolvere l'equazione $\mathcal{P}(x) = 0$, nel caso in cui $\mathcal{P}$ sia derivabile, passa attraverso il procedimento della linearizzazione:

$$\mathcal{P}(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \mathcal{P}'^{-1} \circ \mathcal{P}(x_n)$$

e quindi si tratta di risolvere i due problemi:

- (a) risolvere l'equazione *lineare*

$$\mathcal{P}'(x_m)u_m = -\mathcal{P}(x_m)$$

- (b) definire

$$x_{m+1} := x_m + u_m$$

A.4 Richiami di Geometria Differenziale

Nel presente paragrafo non occorrerà mantenere una notazione speciale per i morfismi, che verranno semplicemente indicati con la notazione usuale riservata alle funzioni.

Innanzitutto è opportuno precisare la nozione di Varietà differenziabile.

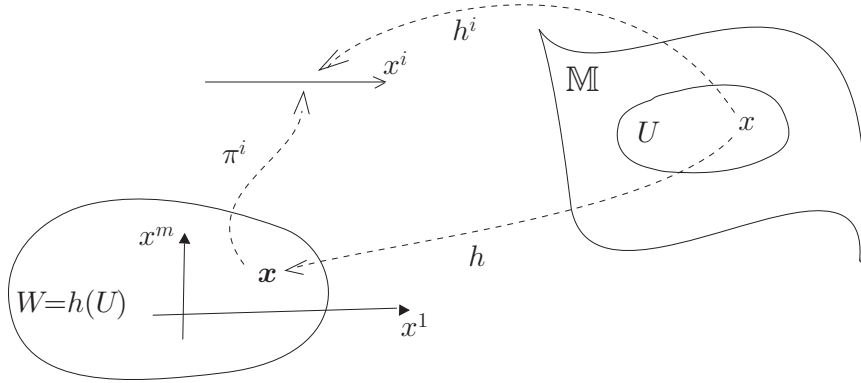
Varietà topologica $\mathbb{M}$:= uno spazio topologico di Hausdorff (:= uno spazio “ T_2 ”, ovvero nel quale punti distinti o ammettono intorni disgiunti oppure appartengono ad un medesimo intorno) che verifica il *secondo assioma di numerabilità* (:= la cui topologia ammetta una base non più che numerabile) e tale che *ogni punto ammetta un intorno $U \subset \mathbb{M}$ topologicamente equivalente* (:= esista almeno un omeomorfismo, e cioè una mappa biunivoca e bicontinua) *ad un aperto W di uno spazio di Banach (o di $\mathbb{R}^m$ e a dimensione finita).*

Carta, o Sistema locale di coordinate := una coppia (U, h) ove U è un aperto di $\mathbb{M}$, ed $h : U \rightarrow W$ un omeomorfismo tra U e un aperto W dello spazio di Banach (o di $\mathbb{R}^m$).

La mappa h stabilisce cioè una corrispondenza (almeno) biunivoca e bicontinua fra i punti x di U e le m -ple ordinate di numeri reali $h(x) =: \mathbf{x} \equiv (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m$ con $m \leq \infty$.

Si indichi con $\pi^i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ la i -ma proiezione da $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}$. Sia cioè $\pi^i(\mathbf{x}) \equiv \pi^i(x^1, \dots, x^m) = x^i$. Si definisce

i -ma Coordinata := la funzione $h^i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $h^i := \pi^i \circ h$ che associa ad ogni punto in U il valore numerico della i -ma coordinata *in quella carta*. Si ha in tal modo $x^i = \pi^i(\mathbf{x}) = \pi^i \circ h(x) = h^i(x)$.



Sia A un insieme di indici, ed $\mathbb{A} := \{(U_{(\alpha)}, h_{(\alpha)})\}_{\alpha \in A}$ un insieme di carte.

Carte C^k -compatibili := due carte $(U_{(\alpha)}, h_{(\alpha)}), (U_{(\beta)}, h_{(\beta)})$ tali che, qualora sia $U_{(\alpha)} \cap U_{(\beta)} \neq \emptyset$, si abbia che i due aperti $W_{(\alpha)} := h_{(\alpha)}(U_{(\alpha)} \cap U_{(\beta)})$ e $W_{(\beta)} := h_{(\beta)}(U_{(\alpha)} \cap U_{(\beta)})$ sono C^k -diffeomorfi.

Ciò significa, dette x le coordinate su $h_{(\alpha)}(U_{(\alpha)})$ e ξ quelle su $h_{(\beta)}(U_{(\beta)})$, che la funzione $h_{(\beta)} \circ (h_{(\alpha)})^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, definita su $W_{(\alpha)}$ mediante m funzioni reali di m variabili reali $\{\xi^1 = \xi^1(x^1, \dots, x^m), \dots, \xi^m = \xi^m(x^1, \dots, x^m)\}$, e certamente esistente per costruzione, appartenga, lei e la sua inversa, alla classe C^k .

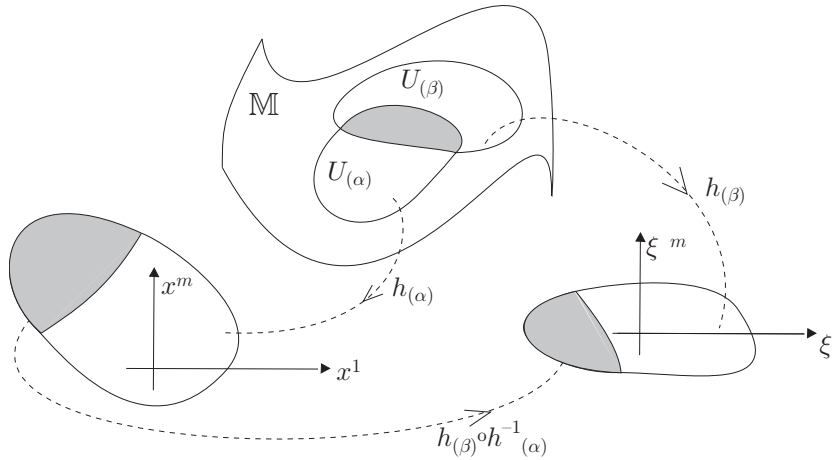
Nel seguito, per brevità, il sistema di coordinate

$$h_{(\alpha)} : x \in U_{(\alpha)} \subset \mathbb{M} \mapsto \mathbf{x} \equiv (x^1, \dots, x^m) \in W_{(\alpha)} := h_{(\alpha)}(U_{(\alpha)}) \subset \mathbb{R}^m$$

verrà indicato con $h_{(x)}$. Inoltre il cambio di coordinate $x \rightarrow \xi$, e cioè la funzione $\xi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ individuata dalla m -pla di funzioni $\{\xi^i = \xi^i(\mathbf{x})\}_{i=1, \dots, m}$, e tale che $h_{(\xi)} = \xi \circ h_{(x)}$, o anche $\xi = h_{(\xi)} \circ (h_{(x)})^{-1} = \xi(\mathbf{x})$,

verrà brevemente indicata con $\xi = \xi(x)$. Con tale notazione si vuole riassumere la m -pla di funzioni reali di transizione fra i due sistemi di coordinate dal valore $x \in \mathbb{R}^m$ al valore $\xi \in \mathbb{R}^m$.

N.B. 1.4.1 Al segno dello Jacobiano della trasformazione $\xi = \xi(x)$, se lo stesso su tutta $\mathbb{M}$, viene dato il nome di *orientamento della varietà*. $\diamond$



Atlante su $\mathbb{M}$:= una famiglia di carte $\mathbb{A} := \{(U_{(\alpha)}, h_{(\alpha)})\}_{\alpha \in A}$ tale che

- (i) l'unione $\bigcup_{\alpha \in A} U_{(\alpha)}$ ricopre $\mathbb{M}$;
- (ii) $(U_{(\alpha)}, h_{(\alpha)}), (U_{(\beta)}, h_{(\beta)})$ sono C^k -compatibili per qualsiasi $\alpha, \beta \in A$.

Struttura differenziabile $[\mathbb{A}]$:= una classe di equivalenza di atlanti, ove si definiscono equivalenti due atlanti quando la loro unione è anch'essa un atlante, e cioè le carte dell'uno sono compatibili con quelle dell'altro.

Atlante massimale su $\mathbb{M}$:= l'unione di tutti i possibili atlanti su $\mathbb{M}$, cioè un atlante tale che valga anche la:

- (iii) ogni altra carta C^k -compatibile con una di quelle dell'atlante appartiene essa stessa all'atlante.

Varietà differenziabile := una varietà topologica dotata di atlante massimale.

N.B. 1.4.2 Se non viene specificato il valore di k si intende generalmente $k = \infty$. $\diamond$

N.B. 1.4.3 Una varietà $\mathbb{M}$ è detta connessa quando per ogni coppia di punti $x, y \in \mathbb{M}$ esiste una catena *finita* di carte $\{(U_i, h_i)\}_{i=1, \dots, m}$ tali che: i) gli aperti U_i , per ciascun $i = 1, \dots, m$, sono connessi; ii) $x \in U_1$ ed $y \in U_m$; iii) $U_{i-1} \cap U_i \neq \emptyset$, per $i = 2, \dots, m$.

Se $\mathbb{M}$ è una varietà connessa tutti gli insiemi $W_{(\alpha)} := h_{(\alpha)}(U_{(\alpha)})$, $\alpha \in A$, hanno la stessa dimensione $m = \dim(\mathbb{M})$, che prende il nome di dimensione della varietà.

Sottovarietà di $\mathbb{M}$ è un sottoinsieme $\mathbb{M}_- \subset \mathbb{M}$ tale che per ciascun $x \in \mathbb{M}_-$ esiste una carta $(U_{(\alpha)} \subset \mathbb{M}, h_{(\alpha)})$ tale che $h_{(\alpha)}(U_{(\alpha)} \cap \mathbb{M}_-) = h_{(\alpha)}(U_{(\alpha)}) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}^{m-k})$ per qualche intero $k = 1, 2, \dots, m-1$. Se connessa, m è la dimensione di $\mathbb{M}$ e k quella di $\mathbb{M}_-$.

Le ipotesi fatte sulla numerabilità delle varietà fa sì che ogni $\mathbb{M}$ sia una sottovarietà di qualche $\mathbb{R}^\nu$ per $\nu \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande. Tuttavia è chiaro che i suoi aperti sono tali nella topologia relativa e non quella di $\mathbb{R}^\nu$.

Ogni varietà connessa unidimensionale è topologicamente equivalente o ad una retta $\mathbb{R}^1$ se non compatta, o ad un toro $\mathbb{T}^1$ (e cioè ad una circonferenza) se compatta.

Nel seguito, salvo esplicito avviso, si intenderanno sempre varietà connesse. $\diamond$

Esempio 4.4 Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^{r \geq 0}(I)$ con $I \subset \mathbb{R}$ aperto connesso.

L'insieme $\text{graph } f := \{(x, y) \mid y = f(x), x \in I\}$ è una varietà 1-dimensionale di classe C^r . Per essa è sufficiente una sola carta: infatti l'aperto U può essere scelto come $U := \mathbb{R}^2 \cap \text{graph } f \equiv \text{graph } f$, e l'omeo $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ può essere scelto come $h(x, f(x)) := x$ con inversa $h^{-1}(x) := (x, f(x))$. Si ha che $h, h^{-1} \in C^r$ perché $f \in C^r$. (La topologia con la quale si dota $\text{graph } f$ è quella indotta dal fatto che esso è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$). $\square$

Esempio 4.5 $\mathbb{M} = \{ (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1 \}$.

La varietà è 2-dimensionale. Infatti si possono per esempio scegliere i sei aperti $U_{(i)}^\pm := \{ (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid x^i \leq 0, \quad i = 1, 2, 3 \} \cap \mathbb{M}$, e su questi (estendendo l'esempio precedente) definire altrettante $h_{(i)}$ del tipo

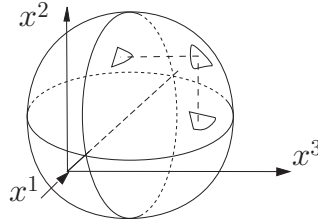
$$h_{(i+2)} : U_{(i+2)}^\pm \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_{(i+2)} \left(x^i, x^{i+1}, \pm \sqrt{1 - (x^i)^2 - (x^{i+1})^2} \right) =: (x^i, x^{i+1}).$$

Si può controllare che sulle intersezioni si ha:

$$(x^i, x^{i+1}) \xrightarrow{h_{(i+2)}^{-1}} \left(x^i, x^{i+1}, \sqrt{1 - (x^i)^2 - (x^{i+1})^2} \right) \xrightarrow{h_{(i)}} (x^{i+1}, x^{i+2})$$

e quindi il cambio di coordinate è dato dalle

$$x^{i+1} = x^{i+1}, \quad x^{i+2} = \sqrt{1 - (x^i)^2 - (x^{i+1})^2}.$$



□

Un altro possibile sistema di coordinate è quello dato dalle coppie (φ, θ) in (per esempio) $(0, 2\pi) \times (0, \pi)$ ed in $(\pi, 3\pi) \times (\pi/2, 3\pi/2)$ mediante le equazioni parametriche

$$x_1 = R \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = R \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = R \cos \theta.$$

Esempio 4.6 $\mathbb{M} = \{ (x^0, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid (x^0)^2 + (x^1)^2 + \dots + (x^m)^2 = 1 \}$.

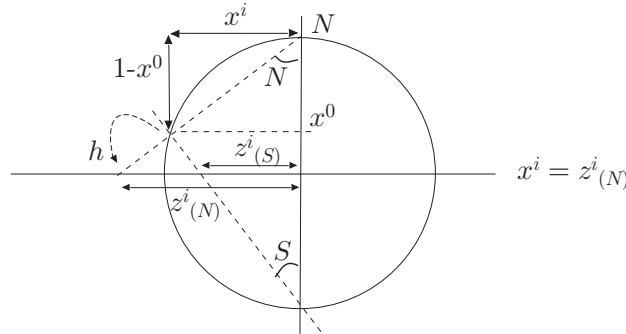
La varietà è m -dimensionale. Per essa si possono scegliere (al minimo) due carte n -dimensionali: $h_{(N)}$ ed $h_{(S)}$ dette *Proiezioni stereografiche* nel seguente modo. Chiamati N, S i poli Nord e Sud, cioè i due punti $(\pm 1, 0, 0, \dots, 0)$ si pongono: $h_{(N)} : \mathbb{M} \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ed $h_{(S)} : \mathbb{M} \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ date da

$$h_{(N)}^i(x) := z_{(N)}^i := \frac{x^i}{1 - x^0}, \quad h_{(S)}^i(x) := z_{(S)}^i := \frac{x^i}{1 + x^0}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Tali funzioni $h_{(N)}$ ed $h_{(S)}$ sono bigettive; infatti se si pone $(\zeta_{(\alpha)})^2 = \sum_{i=1}^m (z_{(\alpha)}^i)^2$, con $\alpha = N$ ed $\alpha = S$ rispettivamente per ciascuno dei due casi N ed S , e con $\sigma = +1$ nel caso N , e $\sigma = -1$ nel caso S , si ricava

$$h_{(\alpha)}^{-1} : (z_{(\alpha)}^1, \dots, z_{(\alpha)}^m) \mapsto \frac{1}{1 + (\zeta_{(\alpha)})^2} \left(\sigma((\zeta_{(\alpha)})^2 - 1), 2z_{(\alpha)}^1, \dots, 2z_{(\alpha)}^m \right)$$

e, naturalmente, risulta $(1 + (\zeta_{(\alpha)})^2)^{-2} (((\zeta_{(\alpha)})^4 + 1 - 2(\zeta_{(\alpha)})^2) + 4(\zeta_{(\alpha)})^2) = 1$. La funzione di transizione $h_{(S)} \circ h_{(N)}^{-1} : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ è data da $z_{(S)}^i = z_{(N)}^i / (\zeta_{(N)})^2$.



□

Esempio 4.7 Un toro $\mathbb{T}^2$ è individuato dalla equazione (vettoriale) parametrica

$$\vec{OP} = r_1 (\cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2) + r_2 (\cos \theta \cos \varphi \vec{e}_1 + \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_2 + \sin \theta \vec{e}_3).$$

□

Esempio 4.8 L'insieme $SO(3)$ delle matrici ortogonali 3×3 con $\det = 1$ è definito dalle equazioni: $\kappa_{ij} Q_h^i Q_k^j = \kappa_{hk}$ delle quali solo 6 sono indipendenti; esso consiste quindi in una sottovarietà 3-dimensionale di $\mathbb{R}^9$.

□

Esempio 4.9 La superficie di un cono non è una varietà differenziabile perché il vertice non ha alcun intorno che sia omeomorfo ad un solo aperto di $\mathbb{R}^2$. Lo è invece la superficie di un semicono, ma solo C^0 in quanto *graph* di una funzione che non è derivabile nel vertice.

□

Sia $J := (-\tau, \tau) \subset \mathbb{R}$ un intervallo, (U, h) un sistema di coordinate su $\mathbb{M}$, e $\phi : J \rightarrow U \subset \mathbb{M}$ una funzione $C^1(J)$ (e cioè tale che $h \circ \phi : J \rightarrow \mathbb{R}^m$ sia differenziabile), con $\phi(0) = x \in \mathbb{M}$.

La funzione $\phi : J \rightarrow \phi(J)$ è detta Curva basata in x e contenuta in $\mathbb{M}$. Qui per curva si intende una curva parametrizzata, per esempio un moto, e va distinta dalla sua immagine $\phi := \{\phi(t)\}_{t \in J}$ in $\mathbb{M}$. Essa pertanto, anche se la funzione ϕ è regolare, a differenza di una varietà regolare unidimensionale può avere cuspidi, punti doppi, etc.

Vettore velocità in x := il vettore v che, nell'assegnato sistema di coordinate: (U, h) , è definito dalla m -pla di numeri:

$$v := (v^1, \dots, v^m), \quad v^i := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (h^i \circ \phi) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\pi^i \circ h \circ \phi).$$

Allo spazio vettoriale che si ottiene quando, fissato il punto x , si definisce l'operazione di combinazione lineare (per componenti) sui vettori velocità in x si potrebbe dare, tentativamente, il nome di Spazio tangente la varietà $\mathbb{M}$ nel punto x . Tuttavia è preferibile riservare tal nome per qualcosa di non legato al particolare sistema di coordinate prescelto (vedi oltre).

N.B. 1.4.10 Quando non ci siano pericoli di confusione si indicano con la stessa lettera i valori $x^i = h^i(x)$ delle coordinate e le funzioni stesse h^i ; ciò porta alla notazione $v^i = \dot{x}^i(0)$. Ad esempio, per le coordinate polari nel piano è: $(v^1, v^2) \equiv (v^\rho, v^\theta) \equiv (\dot{\rho}(0), \dot{\theta}(0))$ così come, per quelle cartesiane, si ha $(v^1, v^2) \equiv (v^x, v^y) \equiv (\dot{x}(0), \dot{y}(0))$.

◇

N.B. 1.4.11 Due curve ϕ, ψ basate in $x = \phi(0) = \psi(0)$ si dicono tangenti fra loro nel punto x quando lo sono le loro immagini su una qualche carta $|h \circ \phi - h \circ \psi|(t) = o(\Delta t)$. In tal caso, mediante uno sviluppo di Taylor, si riconosce che i due vettori velocità sono gli stessi, e viceversa.

Non è detto, tuttavia, che siano tangenti fra loro le immagini ϕ, ψ delle curve stesse, per esempio quando la v si annulla (si veda il successivo N.B. 1.4.12), o nel caso di punti angolosi.

Si osservi infine che lo sviluppo di Taylor si definisce a partire da una carta (come per la derivazione) e che quindi dipende da essa.

◇

Detti $h_{(x)}$ ed $h_{(\xi)}$ due sistemi di coordinate C^∞ -diffeomorfi, e detta $\xi = \xi(x)$ la funzione di transizione dalle x alle ξ , quindi con Jacobiano $\det(\partial \xi) \neq 0$, nel cambio di sistema di coordinate a curve tangenti corrispondono curve tangenti, giacché:

$$\begin{aligned} (\xi \circ h_{(x)} \circ \phi - \xi \circ h_{(x)} \circ \psi)(t) &= (\xi \circ h_{(x)} \circ \phi - \xi \circ h_{(x)} \circ \psi)(0) + \\ &+ \partial \xi(x) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (h_{(x)} \circ \phi - h_{(x)} \circ \psi) \Delta t + o(\Delta t) = o(\Delta t). \end{aligned}$$

Pertanto la proprietà di essere tangenti, per due curve, non dipende dalla carta h che si è adoperata per verificarla. Dunque è possibile, oltre che opportuno, prescindere dal sistema di coordinate e definire direttamente sulla varietà $\mathbb{M}$ il:

Vettore tangente $[\phi]_x$:= una classe di equivalenza di tutte le curve, o moti, che sono basati nel punto x ed in esso sono tangenti fra loro (:= hanno la stessa velocità, e quindi differenze $\sim o(\Delta t)$).

Spazio $T_x\mathbb{M}$ tangente la varietà $\mathbb{M}$ nel punto x := lo spazio vettoriale che si ottiene, *fissato il punto x* , quando sui vettori tangenti si definisce l'operazione di combinazione lineare.

Ogni sistema di coordinate $h_{(x)}$ associa in modo naturale a ciascuna classe “vettore tangente” $[\phi]_x$ una ed una sola m -pla $\mathbf{v}$ di numeri $v^i = \dot{x}^i(0)$, ove è $\mathbf{x}(t) := h_{(x)} \circ \phi$, e dove ϕ è un qualunque rappresentante della classe. Ogni sistema di coordinate, cioè, induce una mappa $X : T_x\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^m$ che ad ogni vettore $[\phi]_x$ dello spazio $T_x\mathbb{M}$ associa la corrispondente m -pla

$$\mathbf{v} := (v^1, \dots, v^m) = X[\phi]_x := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (h_{(x)} \circ \phi) = \dot{\mathbf{x}}(0) \in \mathbb{R}^m.$$

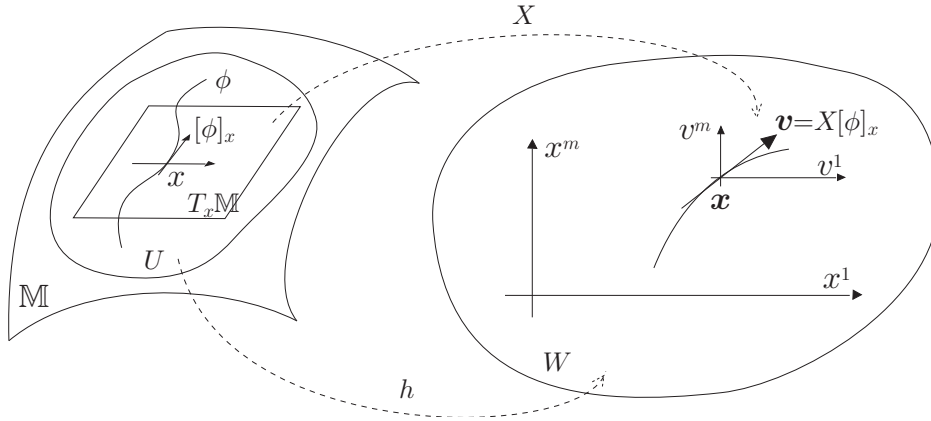
In tal modo sullo spazio $T_x\mathbb{M}$ si sceglie come base la *base naturale*, ovvero quella formata dalla m -pla di vettori $\{e_j := [\phi]_{x,j}\}_{j=1,\dots,m}$ ciascuno contenente la corrispondente *curva coordinata*:

$$\phi_j \in e_j; \quad \phi_j : t \mapsto \phi_j(t) := \begin{cases} \phi_j^i(t) = x_0^i, & \text{per } i \neq j; \\ \phi_j^j(t) = t \end{cases}.$$

Lo spazio $T_x\mathbb{M}$ può essere dotato della struttura di spazio lineare in quanto è lineare l'operatore di derivazione d/dt . In effetti la combinazione lineare di due vettori $[\phi_1]_x$ e $[\phi_2]_x$ entrambi in $T_x\mathbb{M}$ è essa stessa un vettore di $T_x\mathbb{M}$ giacché *qualunque sia il sistema di coordinate prescelto* si ha che

$$X(a[\phi_1]_x + b[\phi_2]_x) := a \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (h \circ \phi_1) + b \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (h \circ \phi_2) =: a X[\phi_1]_x + b X[\phi_2]_x,$$

nel senso che è sempre possibile definire su $\mathbb{M}$ un moto basato in x e che abbia come tangente la combinazione lineare $a[\phi_1]_x + b[\phi_2]_x$.



N.B. 1.4.12 Lo spazio tangente $T_x\mathbb{M}$ è definito dall'insieme di tutti i moti ϕ per x mediante la separazione in classi: $\phi_1 \sim \phi_2$ quando $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (h \circ \phi_1 - h \circ \phi_2) = 0$. Ciò fa ricorso ad una specifica parametrizzazione e prescinde dallo spazio $\mathbb{X} \equiv \mathbb{R}^n$ nel quale la varietà è, o può essere all'occorrenza, immersa e (localmente) rappresentata mediante una superficie individuata in un certo sistema di coordinate da un'espressione del tipo $\Sigma(x) = 0$.

Si osservi quindi che lo spazio tangente $T_x\mathbb{M}$, o spazio delle *velocità virtuali*, è logicamente distinto dal *piano* tangente la Σ in x , che è il sottospazio $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{X}$ dei punti $\mathbf{p}'$ di $\mathbb{R}^n$ tali che $\overrightarrow{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \perp \nabla \Sigma$.

Qualora in una tale immersione la corrispondenza fra $t \in J$ ed i punti dell'immagine $\phi := \{h_{(x)} \circ \phi(t)\}_{t \in J} \subset \mathbb{R}^n$ di un certo moto ϕ sia biunivoca e tale che $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (h \circ \phi) \neq 0$ per ogni $t \in J$, allora l'immagine ϕ risulta essere una sottovarietà unidimensionale regolare con retta tangente in $\mathbf{x}$ (fissato come base per ϕ , ma per il resto qualsiasi in ϕ) parallela al vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ le cui componenti, in quel sistema di coordinate, sono date da $X[\phi]_x := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} h \circ \phi$.

In tal caso, il piano tangente la Σ in $\mathbf{x}$ è l'insieme di tutte quelle direzioni che (qualunque siano le coordinate h su $\mathbb{R}^m$) sono proporzionali alle velocità $\mathbf{v}$ rappresentanti dei vettori $[\phi]_x$ dello spazio $T_x\mathbb{M}$. In particolare, la retta tangente in $\mathbf{x}$ a (una delle curve) γ rappresenta lo spazio tangente $T_x\gamma$ e contiene i vettori velocità di tutti i moti equivalenti a quello la cui immagine è γ .

Infine, se $\mathbb{M} \equiv \mathbb{R}^m$ (o anche solo localmente) è possibile identificare $\mathbb{M}$ (localmente) e $T_x\mathbb{M}$ con $\mathbb{R}^m$ stesso. Infatti ogni punto $\mathbf{x}$ in $\mathbb{R}^m$ può essere inteso come un vettore tangente a qualche curva ϕ tale che sia, per esempio, $(h \circ \phi)(t) = (\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}t)$, e d'altra parte ogni vettore $[\phi]_x \in T_x\mathbb{R}^m$ è individuato mediante una m -pla $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ (tramite l'assegnato sistema di coordinate). Per quanto appena detto tale identificazione dipende però dalla scelta delle basi rispettivamente nei due spazi. $\diamond$

In un nuovo sistema di coordinate $h_{(\xi)}$, e dette $\xi = \xi(x)$ le funzioni di transizione, le nuove componenti $\nu = \Xi X^{-1}v$ del medesimo vettore $[\phi]_x$ saranno date da

$$\nu^i = \dot{\xi}^i(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\pi^i \circ h_{(\xi)} \circ \phi) = \partial \xi^i(x) \dot{x}(0) = \sum_j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} v^j \quad (4.16)$$

essendo certamente non nullo il determinante Jacobiano $\det(\partial \xi) \equiv \left\| \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right\|$ della funzione $\xi = \xi(x)$. (Ovviamente la $\xi = \xi(x)$ non deve dipendere dal parametro t).

In effetti quello delle funzioni coordinate può essere considerato come un caso particolare. Si esamini ora il caso generale.

Siano $\mathbb{M}, \mathbb{G}$ due varietà differenziabili ed $U \subset \mathbb{M}$, $V \subset \mathbb{G}$ due aperti sui quali siano fissate delle coordinate $h_{(x)} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $h_{(y)} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ rispettivamente.

Funzione $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{G}$, C^k -differenziabile := una funzione $f : U \rightarrow V$ che ammette rappresentazione locale $h_{(y)} \circ f \circ (h_{(x)})^{-1} : h_{(x)}(U) \rightarrow h_{(y)}(V)$ espressa da n funzioni $y^j = f^j(x^1, \dots, x^m)$, $j = 1, \dots, n$, C^k -differenziabili rispetto alle m coordinate $x^1, \dots, x^m$.

Si noti che *possono avvenire* tutte e tre le eventualità: $\mathbb{M} \subset \mathbb{G}$, $\mathbb{M} \supset \mathbb{G}$, $\mathbb{M} = \mathbb{G}$, così come può comunque essere $\dim \mathbb{M} \leq \dim \mathbb{G}$. In particolare si chiama

Diffeomorfismo := una funzione $f : \mathbb{M} \xrightarrow{\text{onto}} \mathbb{G}$ differenziabile, invertibile, e con inversa differenziabile. In tal caso è necessario che $\dim \mathbb{M} = \dim \mathbb{G}$.

Nel caso particolare di una trasformazione di coordinate su $\mathbb{M}$, ovvero $h_{(\xi)} \circ (h_{(x)})^{-1} =: \xi$, $\xi = \xi(x)$, la funzione $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ che essa rappresenta è la funzione identità che manda $U \cap V$ in sé.

N.B. 1.4.13 La C^k -differenziabilità di f in una carta implica la sua differenziabilità in ogni altra che sia $C^{r \geq k}$ -compatibile con quella data; si nota infatti che è $f \circ (h_{(\xi)})^{-1} = (f \circ (h_{(x)})^{-1}) \circ (h_{(x)} \circ (h_{(\xi)})^{-1})$. $\diamond$

Data una funzione differenziabile $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{G}$ si chiama:

Derivata, o applicazione tangente di f in x := l'applicazione lineare $f_*|_x : T_x \mathbb{M} \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{G}$, indotta da f , che al vettore $[\phi]_x = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi$ dello spazio tangente $T_x \mathbb{M}$ fa corrispondere, nello spazio tangente $T_{f(x)} \mathbb{G}$, il vettore uscente da $f(x)$

$$f_*[\phi]_x := [f \circ \phi]_{f(x)} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \phi. \quad (4.17)$$

Si noti che tale definizione *non dipende dal sistema di coordinate* in quanto essa è data direttamente mediante i vettori $[\phi]_x$, e $[f \circ \phi]_{f(x)}$.

Se un vettore $[\phi]_x$ è assegnato, tramite certe coordinate su $T_x \mathbb{M}$, dalla $v = \mathcal{X}[\phi]_x$, e se esso viene trasformato dalla f_* nel vettore $[f \circ \phi]_{f(x)}$ del quale si cercano le coordinate $w = \mathcal{Y}[f \circ \phi]_{f(x)}$ allora, dato che

$$\mathcal{Y}[f \circ \phi]_{f(x)} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (h_{(y)} \circ f \circ \phi) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (h_{(y)} \circ f \circ (h_{(x)})^{-1} \circ h_{(x)} \circ \phi),$$

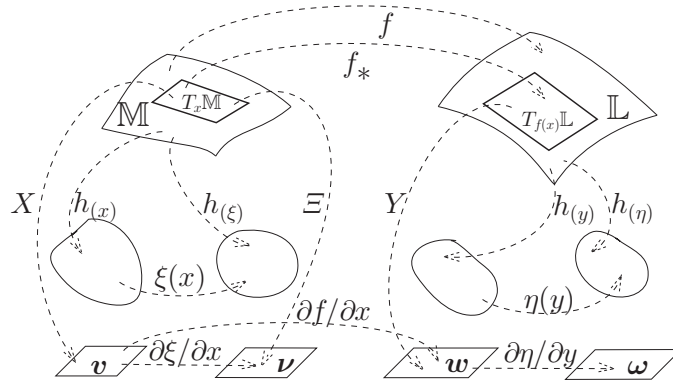
si ha

$$w^j = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f^j}{\partial x^i} v^i \quad \text{ovvero} \quad \dot{\mathbf{y}} = \partial \mathbf{f} \dot{\mathbf{x}},$$

dove la $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, e cioè la n -pla di funzioni $y^j = f^j(x^1, \dots, x^m)$, esprime la f in coordinate: $h_{(y)} \circ f \circ (h_{(x)})^{-1}$.

Ne segue che, nelle coordinate scelte, l'applicazione f_* è (unica ed) espressa (con abuso di notazione) dalla matrice Jacobiana:

$$\partial \mathbf{f} \equiv \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} ((h_{(y)} \circ f \circ (h_{(x)})^{-1}) = \mathcal{Y} f_* \mathcal{X}^{-1}.$$



Nel caso particolare delle funzioni coordinate $h(x) : U \subset \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^m$ si può identificare $\mathcal{X}$ con $(h(x))_*$ purché, come sopra, sullo spazio tangente $T_x \mathbb{M}$ si scelga la base naturale.

Allo stesso modo, nel caso di una Trasformazione di coordinate $\xi = h(\xi) \circ (h(x))^{-1}$, la scelta della base naturale in entrambi gli spazi tangenti a quelli dei valori di $h(x)$ ed $h(\xi)$ attribuisce la matrice jacobiana $\partial \xi \equiv \frac{\partial \xi}{\partial x}$ all'operatore $\Xi \mathcal{X}^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, che rappresenta su $T_x \mathbb{M}$ la mappa tangente all'identità su $U \cap V$ e che, siccome l'identità è certo lineare, coincide (vedi oltre) con la mappa identità sullo spazio tangente.

Esempio 4.14 I due versori in $T_x \mathbb{M}$ della base naturale delle coordinate polari sul piano, espressi in coordinate cartesiane, sono:

$$\begin{aligned} \rho &= \begin{pmatrix} \rho^x \\ \rho^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\rho & x_\theta \\ y_\rho & y_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\rho x \\ \partial_\rho y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \\ \tau &= \begin{pmatrix} \theta^x \\ \theta^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\rho & x_\theta \\ y_\rho & y_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\theta x \\ \partial_\theta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho \sin \theta \\ +\rho \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Essi infatti sono rispettivamente tangenti alle curve coordinate

$$\rho(\rho, \theta) = \rho, \quad \theta(\rho, \theta) = \text{cost.}, \quad \text{ed} \quad \rho(\rho, \theta) = \text{cost.}, \quad \theta(\rho, \theta) = \theta.$$

Si noti che, in tal senso, pur essendo anch'esso tangente alle $\rho = \text{cost.}$ in quanto avente componenti $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in coordinate polari, il vettore $\begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$ non è un versore di tale base. $\square$

Nel seguito, potrà accadere di usare la “notazione per coordinate”, per esempio $w = \partial f v$ invece della (4.17) anche quando il sistema in esame è definito intrinsecamente su una varietà.

N.B. 1.4.15 La mappa f_* è comunque un'applicazione *lineare* fra gli spazi tangenti $T_x \mathbb{M}$, $T_{f(x)} \mathbb{G}$ che sono lineari. In altre parole la funzione f determina (ed univocamente) un *operatore lineare* f_* che connette i due spazi vettoriali $T_x \mathbb{M}$ e $T_{f(x)} \mathbb{G}$. Come si è notato, gli spazi tangenti sono intrinseci, pertanto tale operatore non dipende dal sistema di coordinate.

Mutano invece, al cambio di coordinate, le matrici che lo rappresentano: siano

$$h(\xi) \circ (h(x))^{-1} : x \mapsto \xi = \xi(x) \quad \text{ed} \quad h(\eta) \circ (h(y))^{-1} : y \mapsto \eta = \eta(y) \quad (4.18)$$

due trasformazioni di coordinate rispettivamente sulle varietà $\mathbb{M}$ ed $\mathbb{G}$, e siano

$$x = \phi(t) \quad \text{e} \quad y = \psi(t)$$

le rappresentazioni in coordinate di due curve, ϕ e ψ basate in x ed y rispettivamente. Siano

$$\begin{aligned} v &= \mathcal{X}[\phi]_x = \dot{x}(0) & w &= \mathcal{Y}[\psi]_y = \dot{y}(0) \\ \nu &= \Xi[\phi]_x = \dot{\xi}(0) & \omega &= J[\psi]_y = \dot{\eta}(0) \end{aligned} \quad \text{e}$$

le corrispondenti componenti dei due rispettivi vettori tangenti. Da quanto visto sopra seguono senz'altro le relazioni

$$\dot{\xi}(0) = \Xi \mathcal{X}^{-1} \dot{x}(0) = \partial \xi \dot{x}(0) \quad \text{e} \quad \dot{\eta}(0) = J \mathcal{Y}^{-1} \dot{y}(0) = \partial \eta \dot{y}(0) \quad (4.19)$$

che rappresentano il cambio di coordinate sui rispettivi spazi tangenti $T_x \mathbb{M}$ e $T_y \mathbb{G}$.

Se il punto $y \in \mathbb{G}$ è ottenuto come f -immagine del punto $x \in \mathbb{M}$, e cioè se $y = f(x)$, e se si sceglie $\psi = f \circ \phi$, allora, così come nelle vecchie coordinate, (indicando con l'apice la $\frac{d}{dt} \big|_{t=0}$)

la mappa $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{G}$ è espressa dalla $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = h_{(y)} \circ f \circ (h_{(x)})^{-1}(\mathbf{x})$
 il vettore $f_*[\phi]_x = [f \circ \phi]_{f(x)}$ è espresso da $\dot{\mathbf{y}}(0) = (h_{(y)} \circ f \circ \phi)' = \partial \mathbf{f} \dot{\mathbf{x}}(0)$
 e quindi la $f_* : T_x \mathbb{M} \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{G}$ è espressa dalla $\partial \mathbf{f} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right) = \mathcal{Y} f_* \mathcal{X}^{-1}$,

allora, trasformando le coordinate sulle varietà con le (4.18) e da queste inducendo le corrispondenti trasformazioni lineari (4.19) sugli spazi tangenti, nelle nuove coordinate si ha che

la mappa $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{G}$ è espressa dalla $\boldsymbol{\eta} = \varrho(\boldsymbol{\xi}) = h_{(\eta)} \circ f \circ (h_{(\xi)})^{-1}(\boldsymbol{\xi})$
 il vettore $f_*[\phi]_x = [f \circ \phi]_{f(x)}$ è espresso da $\dot{\boldsymbol{\eta}}(0) = (h_{(\eta)} \circ f \circ \phi)' = \partial \varrho \dot{\boldsymbol{\xi}}(0)$
 e quindi la $f_* : T_x \mathbb{M} \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{G}$ è espressa dalla $\partial \varrho = \left(\frac{\partial \varrho}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right) = J f_* \Xi^{-1}$,

e si ha

$$\varrho(\boldsymbol{\xi}) := \boldsymbol{\eta}(\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}^{-1}(\boldsymbol{\xi}))) \quad \text{e} \quad \partial \varrho = \partial \boldsymbol{\eta} \partial \mathbf{f} \partial \boldsymbol{\xi}^{-1} := \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}$$

in quanto, come si vede facilmente,

$$(h_{(\eta)} \circ f \circ \phi)' = \partial \boldsymbol{\eta} (h_{(y)} \circ f \circ \phi)' = \partial \boldsymbol{\eta} \partial \mathbf{f} (h_{(x)} \circ \phi)' = \partial \boldsymbol{\eta} \partial \mathbf{f} \partial \boldsymbol{\xi}^{-1} (h_{(\xi)} \circ \phi)'.$$

Qualora in particolare $\mathbb{M}$ ed $\mathbb{G}$ siano spazi vettoriali (a dimensione finita), e quindi isomorfi ad $\mathbb{R}^m$ ed $\mathbb{R}^n$, e ad essi vengano identificati i loro tangenti in qualsiasi punto $T_x \mathbb{M} \equiv \mathbb{R}^m$ e $T_{f(x)} \mathbb{G} \equiv \mathbb{R}^n$, (si veda: [Arnold § 13.2] ed il N.B. 1.4.12 più sopra), allora le (4.19), (1.4.15) mostrano che, in generale, tali identificazioni tra $\mathbb{R}^m$ e $T_x \mathbb{R}^m$ non sono invarianti né per diffeomorfismi né per trasformazioni di coordinate. Tuttavia, nel caso in cui sia la trasformazione di coordinate che il morfismo siano lineari, allora cambiare le coordinate su $\mathbb{M}$ e poi agire con il morfismo è equivalente a ciò che si ottiene agendo prima con il morfismo e poi trasformando le coordinate sul tangente.

Sia per esempio $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) := \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}$, con $\mathbf{P} \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^m)$, una trasformazione lineare di coordinate. La

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_0) + \partial \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}_0 + \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

mostra che $\partial \boldsymbol{\xi} \equiv \mathbf{P}^{-1}$, e cioè che la $\partial \boldsymbol{\xi}$ agisce sui vettori tangenti allo stesso modo in cui la $\boldsymbol{\xi}$ agisce, fissata l'origine, sui punti della varietà. In questo caso, e solo in questo, i punti di $\mathbb{M}$ si trasformano come quelli di $T_x \mathbb{M}$. Si esamini infatti il caso in cui $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ sia un diffeomorfismo ma non necessariamente l'identità. Neppure la linearità della $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}$ basta a far coincidere l'espressione $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{P}^{-1} \partial \mathbf{f} \mathbf{P} \boldsymbol{\nu}$ con la

$$\boldsymbol{\eta} = \varrho(\boldsymbol{\xi}) := \boldsymbol{\eta}(\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}^{-1}(\boldsymbol{\xi}))) = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{P} \boldsymbol{\xi}).$$

Le due espressioni coincidono quando non solo la trasformazione di coordinate $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$ ma anche il morfismo $\mathbf{f} \equiv \ell \in \mathbb{L}(\mathbb{M})$ sono lineari. In questo caso, come visto sopra,

$$\begin{aligned} \text{l'operatore lineare } \ell : x \mapsto y = \ell(x) &=: \mathcal{T}x \in \mathbb{M} \\ \text{ha immagine } y = \mathcal{T}x \text{ individuata dalla } m\text{-pla } \mathbf{y} = \ell(\mathbf{x}) = \mathbf{T}\mathbf{x} \\ \text{ed ha tangente } \ell_* \Big|_x &\equiv \ell_* \equiv \mathcal{T} \in \mathbb{L}(T_x \mathbb{M}) \\ \text{individuata dalla matrice } \partial \ell &= \frac{\partial \ell}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{T}. \end{aligned}$$

Ciò è per dire che se vengono localmente identificate fra loro le rappresentazioni di $\mathbb{M}$ e dei vari spazi $T_x \mathbb{M}$ al variare di $x \in \mathbb{M}$, i due operatori ℓ ed ℓ_* risultano avere uguali rappresentazioni in coordinate, e risulta determinata una stessa matrice $\mathbf{T}$ reale $n \times m$ tale che

$$\text{per la } \ell \text{ si ha: } \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x}, \quad \text{così come per la } \ell_* \text{ si ha: } \mathbf{v} \mapsto \mathbf{w} = \mathbf{T}\mathbf{v}.$$

Allo stesso modo, siano $h_{(x)}$ ed $h_{(y)}$ due sistemi di coordinate che fanno corrispondere un aperto U di $\mathbb{M}$ ad un aperto contenente l'origine di $\mathbb{R}^m$ e, rispettivamente, un aperto $\ell(U)$ di $\mathbb{G}$ ad un aperto contenente l'origine di $\mathbb{R}^n$; e si scelgano in $\mathbb{R}^m$ ed $\mathbb{R}^n$, rispettivamente, due basi $\{e_i\}_{i=1,\dots,m}$ ed $\{e'_j\}_{j=1,\dots,n}$.

Cambiare le basi rispettivamente in $\mathbb{R}^m$ ed $\mathbb{R}^n$ equivale a definire due trasformazioni lineari di coordinate, in quanto si individuano: una matrice $\mathbf{P}$ reale invertibile $m \times m$, ed una matrice $\mathbf{Q}$ reale invertibile $n \times n$ tali che

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} &= \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}, & \text{e quindi} & \quad \partial \boldsymbol{\xi} = \mathbf{P}^{-1}, \\ \boldsymbol{\eta} &= \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{y}, & \text{e quindi} & \quad \partial \boldsymbol{\eta} = \mathbf{Q}^{-1}. \end{aligned}$$

In tal modo, dalla $\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ si ricava la $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{P}\boldsymbol{\xi} \equiv \mathbf{N}\boldsymbol{\xi}$ (per le varietà), formalmente identica alla $\boldsymbol{\omega} = \partial\boldsymbol{\eta}\partial\ell\partial\xi^{-1}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{P}\boldsymbol{\nu}$ (per i tangenti).

In definitiva, la matrice

$$\partial\ell = (h_{(y)} \circ \ell \circ (h_{(x)})^{-1})' = \mathcal{Y}\ell_*\mathcal{X}^{-1} \equiv \mathbf{T}$$

ha come (η, ξ) -trasformata la

$$\partial\tilde{\ell} = (h_{(\eta)} \circ \ell \circ (h_{(\xi)})^{-1})' = J\ell_*\Xi^{-1} = \mathbf{N}$$

ed è

$$\mathbf{N} = (J\mathcal{Y}^{-1})(\mathcal{Y}\ell_*\mathcal{X}^{-1})(\mathcal{X}\Xi^{-1}) = \partial\boldsymbol{\eta}\partial\ell\partial\xi^{-1} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{P}.$$

Le matrici $\mathbf{T}$ ed $\mathbf{N}$ sono le rappresentazioni in coordinate dell'operatore $\ell_* = \mathcal{T}$ che agisce su $\mathcal{T}_x\mathbb{M}$; ed, allo stesso modo, $h_{(x)} \circ \ell \circ (h_{(x)})^{-1} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ ed $h_{(\xi)} \circ \ell \circ (h_{(\xi)})^{-1} = \mathbf{N}\boldsymbol{\xi}$ sono le rappresentazioni in coordinate della funzione lineare $\mathcal{T}x$ su $\mathbb{M}$.

Sia ancora $\ell : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ una funzione lineare del tipo $\ell : x \mapsto y = \mathcal{T}x$.

Essa dà luogo ad un campo lineare $v(x) =: \mathcal{T}x \in T_x\mathbb{M}$ rappresentato nelle coordinate $h_{(x)}$, o meglio nelle $\mathcal{X}$, da $v(\mathbf{x}) = \mathcal{X}[x + \mathcal{T}x]_x = \mathbf{T}\mathbf{x}$.

Se si cambiano le coordinate sulla varietà con una trasformazione lineare $\xi^i = \xi^i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n (\mathbf{P}^{-1})_j^i x^j$, su ciascuno degli spazi $T_x\mathbb{M}$, rappresentati da un unico $\mathbb{R}^n$, ne consegue un corrispondente cambiamento dovuto all'operatore (lineare) $\mathbf{P}^{-1} \equiv \Xi\mathcal{X}^{-1}$ derivata dell'identità, rappresentato dalla matrice $\frac{\partial\xi}{\partial x} \equiv \mathbf{P}^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, che trasforma la base $\{e_j\}_{j=1,\dots,n}$ tale che $(e_j)^i = \delta_j^i$ nella $\{\epsilon_j\}_{j=1,\dots,n}$ tale che $(\epsilon_j)^i = \mathbf{P}_j^i$, e quindi tale che

$$\epsilon_j = \mathbf{P}_j^i e_i \quad \text{o, in coordinate,} \quad \epsilon_j = \mathbf{P} e_j = \sum_{h=1}^n \mathbf{P}_h^{(\cdot)} (e_j)^h = \sum_{h=1}^n \mathbf{P}_h^{(\cdot)} \delta_j^h = \mathbf{P}_j^{(\cdot)}.$$

In questo caso la (famiglia) di relazioni (1.4.15): $\boldsymbol{\omega} = \partial\xi\partial\ell\partial\xi^{-1}\boldsymbol{\nu}$ è equivalente alla $\mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}) = \partial\xi \mathbf{v}|_{\xi^{-1}(\boldsymbol{\xi})} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{P}\boldsymbol{\xi}$, e coincide con essa quando $\boldsymbol{\nu}$ è identificato con $\boldsymbol{\xi}$, ovvero quando il rappresentante $\mathbb{R}^n$ degli spazi tangenti $T_x\mathbb{M}$ è identificato con il rappresentante $\mathbb{R}^n$ della carta $(U_{(\xi)}, h_{(\xi)})$ a origine fissata.

Si osservi infine che se la trasformazione di coordinate non fosse lineare, il trasformato di un campo lineare potrebbe non essere lineare. $\diamond$

N.B. 1.4.16 Quando le coordinate siano fissate, la $f_*|_x$ viene spesso indicata solo con la notazione in coordinate: $\partial\mathbf{f}(\mathbf{x})$ o, addirittura, con $\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}$. Inoltre, essendo $\mathbb{M}$ ed $\mathbb{G}$ localmente piatte è anche lecita la notazione $\frac{d}{dt}|_{t=0} (f \circ \phi) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(x + vt) = f_*|_x v$, o anche $f(x + vt) = f(x) + f_*|_x vt + o(t)$, corrispondente alla $\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{v}t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \partial\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{v}t + o(t)$, nel senso che, all'occorrenza, si induce sulla varietà ciò che resta definito a partire da una sua rappresentazione in coordinate ed usando l'osservazione che un vettore $[\phi]_x$ di x -componenti $\mathbf{v}$ senz'altro contiene la curva ϕ tale che $h_{(x)} \circ \phi = \mathbf{x} + \mathbf{v}t$. (Si veda anche l'inizio del § III.1) $\diamond$

N.B. 1.4.17 La definizione di tangenza fra curve può essere anche data come segue: ϕ_1, ϕ_2 tali che $\phi_1(0) = \phi_2(0) = x$ sono tangenti in x se per ogni funzione reale differenziabile $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ accade che $f \circ \phi_1$ ed $f \circ \phi_2$ hanno la stessa derivata in zero. $\diamond$

Si indichi con $T\mathbb{M}$ l'insieme $\mathbb{M} \times \left\{ T_x\mathbb{M} \right\}_{x \in \mathbb{M}}$. Esso viene dotato della struttura differenziabile dell'*Atlante naturale*, e prende il nome di Fibrato tangente.

N.B. 1.4.18 Sia $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale n -dimensionale, $U \subset \mathbb{M}$ un aperto, e ϕ una curva basata in $x \in U$. Esiste un unico $v \in \mathbb{V}$ tale che la curva $x + vt$ sia tangente a ϕ in x . Basta a tale scopo che sia $v = [\phi]_x$.

È possibile allora stabilire una corrispondenza biunivoca $\iota : U \times \mathbb{V} \rightarrow T\mathbb{M}$ tale che $\iota(x, v) = (x, [x + vt]_x)$.

Sia $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{G} = f(\mathbb{M})$ di classe C^1 , e sia $\mathcal{T}f : T\mathbb{M} \rightarrow T\mathbb{G}$ la mappa definita dalla $\mathcal{T}f(x, [\phi]_x) := (f(x), [f \circ \phi]_{f(x)})$. Il punto precedente permette di scrivere tale mappa come $\mathcal{T}f(x, v) = (f(x), f_*(x)v)$.

Se f è un diffeomorfismo, allora $\mathcal{T}f$ è un isomorfismo. In particolare, se $(U_{(\alpha)}, h_{(\alpha)})$ è una carta ad $x \in \mathbb{M}$, allora $\mathcal{T}h_{(\alpha)} \equiv (h_{(\alpha)}, \mathcal{X}_{(\alpha)}) : T\mathbb{M}|_U \rightarrow h_{(\alpha)}(U) \times \mathbb{V}$ è una carta naturale su $T\mathbb{M}$. In tal modo, se $\left\{ (U_{(\alpha)}, h_{(\alpha)}) \right\}_{\alpha \in A}$ è un atlante per $\mathbb{M}$, allora $\left\{ (TU_{(\alpha)}, (h_{(\alpha)}, \mathcal{X}_{(\alpha)})) \right\}_{\alpha \in A}$ è l'Atlante naturale per $T\mathbb{M}$, di dimensione $2m$.

In ogni caso, spazi tangenti in punti diversi non si intersecano: da qui il nome di fibrato. $\diamond$

Campo vettoriale differenziabile := una sezione, differenziabile, del fibrato tangente:

$$v : \mathbb{M} \rightarrow T\mathbb{M} \quad \text{definita da} \quad v : x \mapsto (x, v(x)), \quad \text{con} \quad v(x) \in T_x\mathbb{M}.$$

Su $\mathbb{M}$ siano assegnati un'applicazione differenziabile $f : U \subset \mathbb{M} \rightarrow V \subset \mathbb{G}$ ed un campo vettoriale differenziabile $v(x)$. Per ciascun $x \in \mathbb{M}$, si consideri una qualche curva $\phi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}$ il cui tangente in x sia $[\phi]_x \equiv v(x)$. Detta $f \circ \phi$ la sua f -trasformata, il vettore tangente in $f(x)$ alla $f \circ \phi$ è dato, per quei fissati x e ϕ , da $f_*[\phi]_x = [f \circ \phi]_{f(x)} \in T_{f(x)}\mathbb{G}$. In altre parole, esso è un particolare vettore individuato, punto per punto e (quindi) curva per curva, dalla

$$\begin{aligned} \tilde{w}(x) &:= \left. \frac{d}{dt} \right|_{\phi(0)=v(x)} (f \circ \phi) = f_*[\phi]_x = f_*v(x) && \text{con componenti} \\ \tilde{w}^j(\mathbf{x}) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{\phi(0)=v(\mathbf{x})} (\pi^j \circ h_{(y)} \circ f \circ \phi) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(\mathbf{x}) v^i(\mathbf{x}), \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

o anche

$$\tilde{w}(\mathbf{x}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{\phi(0)=v(\mathbf{x})} (f \circ \phi) = \partial f(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}). \quad (4.20)$$

D'altra parte, per la scelta della famiglia di curve ϕ ci si può servire del caso assai particolare nel quale per ciascun punto x si assume come curva $t \mapsto \phi(t)$ la soluzione dell'equazione generata dal campo: $\dot{x} = v(x)$, e che è basata istante per istante nel corrispondente punto x . In tal caso le derivate qui sopra vanno intese per ciascun t come: $\left. \frac{d}{dt} \right|_{\phi(t)=v(x)}$

Nota 1.4.19 $[f \circ \phi]_{f(x)}$ risulta il valore in $y := f(x)$ di un campo vettoriale w definito nel fibrato tangente $T\mathbb{G}$ ed altrettanto regolare quanto v se e solo se f è un diffeomorfismo (almeno C^{r+1} se $v \in C^r$), ed in particolare quindi se $\mathbb{G} \equiv \mathbb{M}$ ed f è una trasformazione di coordinate rappresentata da $\boldsymbol{\xi} \equiv \mathbf{y} := \mathbf{f}(\mathbf{x})$. In tal caso infatti, e solo in tal caso, è certamente possibile ricavare $x = f^{-1}(y)$ ed esprimere il vettore $[f \circ \phi]_{f(x)}$ come funzione della y (per il tramite della x):

$$w(y) := \tilde{w}(f^{-1}(y)) = [f_*v(x)]_{x=f^{-1}(y)} \quad (4.21)$$

con componenti

$$w^j(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i} v^i \right) (\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})) \quad \text{o anche} \quad w(\mathbf{y}) = \partial \mathbf{f} v(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})).$$

▷

A.5 Richiami di Algebra Lineare. (I)

Sia $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita n su un campo numerico $\mathbb{K}$ (qui di seguito ci si riferirà in particolare alle due possibilità $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) e sia $\mathbb{E}$ lo spazio euclideo che si ottiene introducendo su $\mathbb{V}$ un prodotto scalare: $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Si pensi per esempio allo spazio $\mathbb{P}^n([a, b])$ dei polinomi di grado minore di n definiti su un intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$:

$$\mathbb{E} := \left(\left\{ \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k, \mid t \in [a, b], \quad a_k \in \mathbb{R} \right\}, \quad \langle x, y \rangle := \int_a^b x(t) \bar{y}(t) dt \right).$$

Sia $\mathcal{T} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ un operatore lineare su $\mathbb{V}$, e cioè una mappa di $\mathbb{V}$ in sé tale che per qualsiasi $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $x, y \in \mathbb{V}$ si abbia

$$\mathcal{T}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{T}(x) + \beta \mathcal{T}(y).$$

Nell'esempio detto un tale operatore potrebbe essere $\mathcal{T} := \frac{d}{dt}$.

Si indichi infine con $\mathbb{B} := \{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ una base di vettori in $\mathbb{V}$, e cioè una n -pla di vettori linearmente indipendenti tali che $\text{span } \mathbb{B} = \mathbb{V}$. Nell'esempio detto, una possibile base è quella dei monomi $\{e_k\}_{k=1, \dots, n} = \{t^k\}_{k=0, \dots, n-1}$.

Nel seguito, salvo contrario avviso, si assumerà che:

- La base $\mathbb{B}$ non sia necessariamente ortonormale;
- Lo spazio $\mathbb{V}$ sia vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

Tuttavia sarà talvolta necessario ricorrere ai (più generali) risultati validi sugli spazi vettoriali complessi e unitari:

Spazio unitario $\mathbb{E}$:= uno spazio vettoriale sul campo dei complessi sul quale, come prodotto scalare, sia definita una forma Hermitiana simmetrica definita positiva, e cioè una funzione $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{E}$, e per ogni $\alpha \in \mathbb{K}$ si abbia:

$$\langle x, x \rangle > 0 \iff x \neq 0, \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \quad \langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle.$$

Ogni spazio $\mathbb{V}$ reale, reso euclideo da un prodotto scalare reale, può essere considerato come restrizione sui reali di uno spazio unitario, ed eredita di questo le proprietà che sussistono in tale restrizione.

Coordinate $h^i : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ di $x \in \mathbb{V}$ relative alla base $\mathbb{B}$:= le n funzioni lineari i cui valori calcolati nel punto x sono i coefficienti della combinazione lineare: $x^i e_i := \sum_{i=1}^n h^i(x) e_i = x$.

Nell'esempio dello spazio $\mathbb{P}^n([a, b])$, le componenti del polinomio: $p(t) := \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k$ rispetto alla comoda base $\tilde{\mathbb{B}} := \{\tilde{e}_k\}_{k=1, \dots, n} := \{t^k\}_{k=0, \dots, n-1}$ sono, ovviamente, date da $x^{k+1} = a_k$, $k = 0, \dots, n-1$. Invece, rispetto alla base $\mathbb{B} := \{e_k\}_{k=1, \dots, n} := \{t^k/k!\}_{k=0, \dots, n-1}$ esse risultano: $x^{k+1} = k! a_k$.

Giacché i versori della base sono sempre fra loro linearmente indipendenti, le coordinate naturali sono in ogni caso tali che $h^i(e_j) = \delta_j^i$ e possono, fra l'altro, stabilire un isomorfismo fra $\mathbb{V}$ ed $\mathbb{R}^n$. Quando non serva ricordare la particolare base scelta, ciò permette di indicare ciascun vettore $x \in \mathbb{V}$ semplicemente con la n -pla $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ che tale base gli assegna, anziché con la sua rappresentazione cartesiana:

$$x = \sum_{i=1}^n x^i e_i := \sum_{i=1}^n h^i(x) e_i,$$

e all'occorrenza la si considererà una matrice a n righe e una colonna, riservando alla notazione x^T la matrice ad una riga ed n colonne formata anch'essa dalle componenti controvarianti di x . La notazione per sole componenti risulterà comoda quando si eseguiranno composizioni di operazioni lineari sui vettori mediante la convenzione dei prodotti righe per colonne.

N.B. 1.5.1 In tal senso, e dato il fatto che $e_j = \delta_j^i e_i$ e cioè che $(e_j)^i = \delta_j^i$, la $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$ si può anche (ma poco espressivamente) interpretare come una relazione fra componenti

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x^i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n x^i (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T = \sum_{i=1}^n (0, \dots, 0, x^i, 0, \dots, 0)^T.$$

◇

Si ricordi che i numeri $x^i := h^i(x)$ (componenti controvarianti) coincidono con i numeri $x_i := \langle x, e_i \rangle$ (componenti covarianti) se e solo se la base $\mathbb{B} := \{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ è ortonormale. Nel caso generale si ha $x_h = x^j \langle e_j, e_h \rangle =: x^j \boldsymbol{\kappa}_{jh}$. La n -pla $(x_1, \dots, x_n)$ verrà indicata con $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\kappa} \equiv (\overline{\boldsymbol{\kappa}} \mathbf{x})^T$ e, come si è detto, all'occorrenza la si considererà una matrice ad una riga ed n colonne. Tuttavia, in queste note, le componenti covarianti verranno usate solo per esprimere i prodotti scalari nella loro forma più compatta:

$$\langle x, y \rangle = x_h \bar{y}^h = x^i \boldsymbol{\kappa}_{ih} \bar{y}^h = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\kappa} \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{x}^* \bar{\mathbf{y}}.$$

Si noti che né la base $\mathbb{B}$ né la $\tilde{\mathbb{B}}$ dell'esempio $\mathbb{P}^n([a, b])$ sono ortonormali rispetto al citato prodotto scalare.

N.B. 1.5.2 Nel seguito, come d'uso, verrà sottinteso il simbolo di sommatoria quando due indici siano ripetuti; la somma essendo estesa alla dimensione dello spazio: $n < \infty$. Invece, quando ciò favorisce la chiarezza, quest'ultima verrà esplicitamente indicata scrivendo $\mathbb{V}^n$ in luogo di $\mathbb{V}$ ed $\mathbb{E}^n$ in luogo di $\mathbb{E}$. ◇

Dato un qualsiasi operatore $\mathcal{T} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, la scelta di una base $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ in $\mathbb{V}$ gli assegna una matrice $\mathbf{T} := \mathbf{T}^i_j$ (quadrata giacché l'operatore manda lo spazio in se stesso) che, per *convenzione*, viene presa tale che

$$\tau_j := \mathcal{T}e_j = \mathbf{T}^i_j e_i \quad \text{ovvero} \quad (\tau_j)^i = \mathbf{T}^i_j$$

e cioè tale che la sua j -ma colonna sia formata dalle componenti, in quella base, del $\mathcal{T}$ -trasformato $\mathcal{T}e_j$ del j -mo vettore di base e_j .

Fissata la base, l'operatore $\mathcal{T}$ associa alla n -pla $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ che rappresenta $x = x^h e_h$ nelle $\{e\}$ -coordinate, la n -pla $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^n)$ che nelle stesse coordinate rappresenta il vettore $\mathcal{T}x$:

$$y^i e_i = \mathbf{y} := \mathcal{T}x = x^h \mathcal{T}e_h = x^h \mathbf{T}^i_h e_i,$$

e quindi le seguenti espressioni sono equivalenti

$$\mathbf{y} = \mathcal{T}\mathbf{x} \iff \mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x} \iff \mathbf{y}^T = \mathbf{x}^T \mathbf{T}^T$$

e cioè

$$y^i = \mathbf{T}^i_h x^h \iff y^i = x^h \mathbf{T}^T_h{}^i.$$

Si ricordi che saturare l'indice di colonna significa operare il prodotto righe per colonne. La precedente espressione viene anche riassunta con $\mathcal{T}(\cdot) = \mathbf{T}^i_j \langle e^{*j}, \cdot \rangle e_i$.

In particolare se $\text{Det } \mathbf{T} \neq 0$, e quindi se $\mathcal{T} =: \mathcal{P}$ può essere considerato un *cambiamento di base* (si veda la Nota 1.5.5 più oltre), allora uno stesso vettore $x = x^i e_i$ avrà, rispetto alla nuova base $e_h = \mathcal{P}e_i = \mathbf{P}^i_h e_i$, $h = 1, \dots, n$, componenti $\{\xi^h\}_{h=1,\dots,n}$ tali che $x = \xi^h e_h$ e quindi tali che $x^i = \mathbf{P}^i_h \xi^h$, o anche $\mathbf{x} = \mathbf{P}\boldsymbol{\xi}$

Allo stesso modo i numeri $x_i := \langle x, e_i \rangle$ restano espressi da $\langle x, \mathcal{P}^{-1}e_i \rangle = \overline{\mathbf{P}}^{-1h}_i \langle x, e_h \rangle$, e cioè

$$x_i = \xi_h \overline{\mathbf{P}}^{-1h}_i \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{x}^* = \boldsymbol{\xi}^* \overline{\mathbf{P}}^{-1} \quad \text{o anche} \quad \langle x, e_h \rangle = \langle x, e_i \rangle \overline{\mathbf{P}}^i_h;$$

ed è da notare che la somma avviene *sulle righe* della matrice $\mathbf{P}$. È anche bene tener presente l'osservazione a metà della Nota 1.5.23 più avanti.

Si ricordi che, assegnato un generico $\mathcal{T} : \mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{V}^m$, si definiscono:

$$\text{Immagine dell'operatore: } \text{Im } \mathcal{T} := \left\{ y \in \mathbb{V}^m \mid \exists x \in \mathbb{V}^n : y = \mathcal{T}x \right\}.$$

$$\text{Kernel dell'operatore: } \text{Ker } \mathcal{T} := \left\{ x \in \mathbb{V}^n \mid \mathcal{T}x = 0 \right\}. \text{ Entrambi gli insiemi } \text{Im } \mathcal{T} \text{ e } \text{Ker } \mathcal{T} \text{ sono spazi lineari.}$$

Nell'esempio visto sopra, e con $\mathcal{T} = \frac{d}{dt}$, si ha:

$$\text{Im } \mathcal{T} = \mathbb{V}^{n-1} \quad \text{e} \quad \text{Ker } \mathcal{T} = \text{span}\{t^0\},$$

per cui in questo caso si ha $\text{Im } \mathcal{T} \supset \text{Ker } \mathcal{T}$. Tuttavia sussiste la

Proposizione 1.5.3 Sia $\mathcal{T} : \mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{V}^m$. Se $\{\epsilon_i\}_{i=1,\dots,k} \subset \mathbb{V}^m$ è una base per $\text{Im } \mathcal{T}$, allora esistono $n - k$ vettori $\{g_j\}_{j=1,\dots,n-k} \subset \mathbb{V}^n$ che sono una base per $\text{Ker } \mathcal{T}$, e si ha che $\{e_1, \dots, e_k, g_1, \dots, g_{n-k}\}$ è una base per $\mathbb{V}^n$, con $\{e_i\}_{i=1,\dots,k}$ tali che $\{\epsilon_i = \mathcal{T}e_i\}_{i=1,\dots,k}$. $\square$

Corollario 1.5.4

$$\dim(\text{Im } \mathcal{T}) + \dim(\text{Ker } \mathcal{T}) =: \text{Rank } \mathcal{T} + \text{Null } \mathcal{T} = n = \dim(\text{Dom } \mathcal{T})$$

$\square$

Dimostrazione Sia $\{g_h\}_{h=1,\dots,\ell}$ una base per $\text{Ker } \mathcal{T}$ ed $\{\epsilon_i\}_{i=1,\dots,k}$ una base per $\text{Im } \mathcal{T}$; certo si ha che $\ell, k \leq n$. Per ipotesi è possibile trovare $k \leq m$ vettori $\{e_i\}_{i=1,\dots,k} \subset \mathbb{V}^n$ linearmente indipendenti e tali che $\epsilon_i = \mathcal{T}e_i$, $i = 1, \dots, k$. D'altra parte si ha che: $\sum_{i=1}^k \lambda^i e_i + \sum_{h=1}^{\ell} \mu^h g_h = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^k \lambda^i \mathcal{T}e_i = 0 \Rightarrow \lambda^i = 0 \Rightarrow \sum_{h=1}^{\ell} \mu^h g_h = 0 \Rightarrow \mu^h = 0$ e pertanto gli $\{e_i, g_h\}_{i=1,\dots,k, h=1,\dots,\ell}$ sono linearmente indipendenti.

Infine ogni x in $\mathbb{V}$ è combinazione lineare degli $\{e_i, g_h\}_{i=1, \dots, k, h=1, \dots, \ell}$. Sia infatti x qualsiasi, $\mathcal{T}x =: \sum_{i=1}^k \xi^i e_i = \sum_{i=1}^k \mathcal{T}(\xi^i e_i)$, e $v = \sum_{i=1}^k \xi^i e_i$. Posto $x = (x - v) + v$ si ha $\mathcal{T}(x - v) = 0$ cioè $(x - v)$ è (qualsiasi) in $\text{Ker } \mathcal{T}$ e pertanto è esprimibile come combinazione lineare dei $\{g_h\}_{h=1, \dots, \ell}$ i quali, quindi, non possono essere in numero minore di $(n - k)$. ■

Nell'esempio: $x = a \frac{t^m}{m!} + bt^0$; $\mathcal{T}x = a \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}$; $v = a \frac{t^m}{m!}$; e pertanto:
 $x = (a \frac{t^m}{m!} + bt^0 - a \frac{t^m}{m!}) + a \frac{t^m}{m!}$.

Operatore (lineare) invertibile := Un operatore $\mathcal{T} : \mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{V}^m$ per il quale esista l'operatore (lineare) $\mathcal{T}^{-1}$ tale che

$$\mathcal{T} \circ \mathcal{T}^{-1} = \mathbb{I} \quad \text{su } \mathbb{V}^m \quad \text{e simultaneamente} \quad \mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{T} = \mathbb{I} \quad \text{su } \mathbb{V}^n;$$

ovvero

$$\mathcal{T} \text{ è su tutto } \mathbb{V}^m \quad \text{e simultaneamente} \quad \mathcal{T} \text{ è } 1 \longleftrightarrow 1 \text{ su } \mathbb{V}^n.$$

La linearità dell'operatore e dei suoi: Dominio e Immagine fanno sì che in tal caso l'operatore stabilisca un isomorfismo fra gli spazi $\mathbb{V}^n$ e $\mathbb{V}^m$, che allora hanno necessariamente uguale dimensione n .

Nota 1.5.5 Un operatore lineare $\mathcal{T}$ da uno spazio a dimensione finita $\mathbb{V}^n$ in sé risulta invertibile quando, equivalentemente,

(1.1) per qualsiasi $z \in \mathbb{V}^n$ esiste unico $x \in \mathbb{V}^n$ tale che $z = \mathcal{T}x$;

(1.2) $\mathcal{T}$ è $1 \xrightarrow{\text{onto}} 1$ su $\mathbb{V}^n$;

(1.3) $\text{Im } \mathcal{T} = \mathbb{V}^n$, ovvero $\text{Rank } \mathcal{T} = n$, ovvero $\text{Null } \mathcal{T} = 0$;

(1.4) $\text{Ker } \mathcal{T} = \{0\}$, e cioè $\text{Null } \mathcal{T} = 0$;

(1.5) $\mathcal{T}x = 0$ ammette come unica soluzione $x = 0$;

(1.6) $\mathcal{T}x = \mathcal{T}y$ ammette come unica soluzione $x = y$, $\forall x, y \in \mathbb{V}^n$;

(1.7) $\mathcal{T}$ trasforma una base in un'altra base, (cioè conserva l'indipendenza lineare);

[si consideri che $\text{Im } \mathcal{T} = \text{span } \{\mathcal{T}e_i\}_{i=1, \dots, n}$ e quindi $\text{Rank } \mathcal{T}$ è il numero di colonne di $\mathbf{T}$ che sono linearmente indipendenti; d'altra parte $\text{Rank } \mathcal{T}$ è anche il numero di righe di $\mathbf{T}$ che sono linearmente indipendenti. Ciò mostra che su uno spazio $\mathbb{V}^n$ non compatto un operatore $\mathcal{T}$ è $1 \longleftrightarrow 1$ se e solo se esso è "onto"];

(1.8) $\text{Det } \mathbf{T} \neq 0$, (in base $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ e quindi in ogni altra base).

In definitiva: ogni operatore invertibile $\mathcal{P}$ induce un cambio di base, e viceversa.

Si chiama Orientamento dello spazio vettoriale la classe di equivalenza di tutti gli operatori $\mathcal{P}$ con $\text{Det } \mathbf{P} > 0$ oppure $\text{Det } \mathbf{P} < 0$ rispettivamente. ▷

Ancora nel caso particolare in cui l'operatore mandi uno spazio vettoriale n -dimensionale $\mathbb{V}$ in sé, si ricordino le seguenti definizioni.

Sia dato un sottospazio $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$. Esso si dice

Sottospazio $\mathcal{T}$ -invariante: $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$:= quando $\forall x \in \mathbb{W}$ si ha che $\mathcal{T}x \in \mathbb{W}$. Ad esempio sia $\text{Ker } \mathcal{T}$ che $\text{Im } \mathcal{T}$ sono $\mathcal{T}$ -invarianti.

Operatore indotto $\mathcal{T}_{\mathbb{W}}$:= l'operatore definito dalla relazione $\mathcal{T}_{\mathbb{W}}x := \mathcal{T}x$ per ogni x nel sottospazio $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$.

Se $\mathbb{W}_1$ è $\mathcal{T}$ -invariante e se $\mathbb{V} = \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$ allora basta scegliere due basi $\mathbb{B}_1$ e $\mathbb{B}_2$ in $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$ rispettivamente per vedere che rispetto a $\mathbb{B} := \mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2$ la matrice di $\mathcal{T}$ viene "a blocchi":

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_r & \mathbf{T}_{r, n-r} \\ 0 & \mathbf{T}_{n-r} \end{pmatrix}$$

ove la matrice $\mathbf{T}_r$ è quadrata ed $r \times r$ se $r = \dim \mathbb{W}_1$; inoltre se anche $\mathbb{W}_2$ è $\mathcal{T}$ -invariante allora anche $\mathbf{T}_{r, n-r} = 0$.

Nota 1.5.6 Può essere comodo ricordare, [Voyevodin XI 92.G e 93.1], che:

(2.1) Se $M := \begin{pmatrix} A_r & B_{r,m-r} \\ C_{n-r,r} & D_{n-r,m-r} \end{pmatrix}$ è una matrice $n \times m$ avente A_r quadrata $r \times r$ non singolare, e se $V := \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -C_{n-r,r}A_r^{-1} & I \end{pmatrix}$ allora posto

$$E_{n-r,m-r} := D - CA^{-1}B \quad \text{risulta} \quad VA = \begin{pmatrix} A_r & B_{r,m-r} \\ 0 & E_{n-r,m-r} \end{pmatrix}.$$

(2.2) Se $M := \begin{pmatrix} A_r & B_{r,n-r} \\ C_{n-r,r} & D_{n-r} \end{pmatrix}$ è una matrice $n \times n$ avente A_r e D_{n-r} quadrate allora, [Gantmacher II.5.3],

$$\begin{aligned} \text{Det } M &= \text{Det } (A_r) \text{Det } (D_{n-r} - C_{n-r,r}A_r^{-1}B_{r,n-r}) \\ &= \text{Det } (A_r - B_{r,n-r}D_{n-r}^{-1}C_{n-r,r}) \text{Det } (D_{n-r}) \end{aligned}$$

ove la prima uguaglianza è valida se la matrice A_r è non singolare, mentre è valida la seconda se è non singolare D_{n-r} .

(2.3) Se $M := \begin{pmatrix} A_r & B_{r,n-r} \\ 0 & D_{n-r} \end{pmatrix}$ è una matrice $n \times n$ avente A_r ed D_{n-r} quadrate, e se $P := \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & P_{n-r} \end{pmatrix}$ ha P_{n-r} quadrata e non singolare, allora

$$\text{posto } C_{n-r} := P^T D P \quad \text{risulta} \quad P^T M P = \begin{pmatrix} A_r & B_{r,n-r}P_{n-r} \\ 0 & C_{n-r} \end{pmatrix}.$$

(2.4) [Gantmacher VIII 2.3] Se due matrici quadrate A e B commutano: $AB = BA$, e se $A = \begin{pmatrix} A_r & 0 \\ 0 & A_{n-r} \end{pmatrix}$

con A_r ed A_{n-r} non aventi autovalori in comune, allora anche $B = \begin{pmatrix} B_r & 0 \\ 0 & B_{n-r} \end{pmatrix}$ (si noti che nulla è detto sugli autovalori di B).

(2.5) Se $M := \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix}$ ha le quattro matrici A_r, B_r, C_r, D_r tutte dello stesso ordine allora, come caso particolare del punto (2.2), si ha

$$\begin{aligned} \text{Det } M &= \text{Det } (A_r D_r - A_r C_r A_r^{-1} B_r) & \text{se } \text{Det } (A_r) \neq 0 \\ \text{Det } M &= \text{Det } (A_r D_r - B_r D_r^{-1} C_r D_r) & \text{se } \text{Det } (D_r) \neq 0 \end{aligned}$$

e quindi, per esempio,

$$\text{Det } M = \text{Det } (A_r D_r - C_r B_r) \quad \text{se } A_r C_r = C_r A_r \quad \text{e } \text{Det } (A_r) \neq 0.$$

(Per le definizioni di autovalore ed autovettore si veda il § A.6).

Inoltre mediante lo sviluppo diretto si vede che $\text{Det} \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ I_r & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{r^2}$ per cui, siccome è $(-1)^{r^2+r} \equiv +1$, si ricava la relazione

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 0 & B_r \\ -C_r & 0 \end{pmatrix} = \text{Det} \left[\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_r & 0 \\ 0 & B_r \end{pmatrix} \right] = +\text{Det } (C_r B_r).$$

▷

Si consideri ora un operatore $\mathcal{T} : \mathbb{E}_1 \rightarrow \mathbb{E}_2$, ove $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$ sono spazi unitari.

Operatore aggiunto $\mathcal{T}^* : \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_1$:= l'operatore definito da

$$\langle \mathcal{T}x, y \rangle_2 = \langle x, \mathcal{T}^*y \rangle_1 \quad \forall x \in \mathbb{E}_1, y \in \mathbb{E}_2.$$

Tale operatore esiste unico, e se $\mathbb{E} := \mathbb{E}_1 = \mathbb{E}_2$ ha prodotto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e quindi matrice $\mathbf{\kappa}_{hk} := \langle e_h, e_k \rangle$ del tensore metrico $\mathcal{K}$, essa verifica la:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{T}^T \mathbf{\kappa} \bar{\mathbf{y}} = x^h \mathbf{T}^T{}_h{}^i \mathbf{\kappa}_{ik} \bar{y}^k = \langle \mathcal{T}x, y \rangle = \langle x, \mathcal{T}^*y \rangle = x^h \mathbf{\kappa}_{hj} \bar{\mathbf{T}}^{*j}{}_k \bar{y}^k = \mathbf{x}^T \mathbf{\kappa} \bar{\mathbf{T}}^* \bar{\mathbf{y}}$$

da cui

$$\mathbf{T}^T \mathbf{h}^i \mathbf{\kappa}_{ik} = \mathbf{T}^i \mathbf{h} \mathbf{\kappa}_{ik} = \mathbf{\kappa}_{hj} \overline{\mathbf{T}}^{*j}_k \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{T}^T \mathbf{\kappa} = \mathbf{\kappa} \overline{\mathbf{T}}^*.$$

Se ne ricava, (si veda la Nota 1.5.13 più oltre) avendo posto $\mathbf{\kappa}^{hj} \mathbf{\kappa}_{jk} = \delta_k^h$ e notato che $\overline{\mathbf{\kappa}}_{jk} = \mathbf{\kappa}_{kj}$, e cioè $\overline{\mathbf{\kappa}} = \mathbf{\kappa}^T$,

$$\mathbf{T}^{*j}_k = \mathbf{\kappa}^{hj} \overline{\mathbf{T}}^i_h \mathbf{\kappa}_{ki} \quad \text{o anche} \quad \mathbf{T}^* = (\mathbf{\kappa} \overline{\mathbf{T}} \mathbf{\kappa}^{-1})^T.$$

(•) Se la base è ortonormale la matrice dell'operatore aggiunto $\mathcal{T}^*$ è:

$$\mathbf{T}^{*j}_k = \delta^{hj} \overline{\mathbf{T}}^i_h \delta_{ki} = \overline{\mathbf{T}}^j_k, \quad \text{e cioè si ha} \quad \mathbf{T}^* = \overline{\mathbf{T}}^T.$$

(•) La trasposta coniugata di una matrice $\mathbf{T}$ rappresenta l'aggiunto dell'operatore $\mathcal{T}$ rappresentato da $\mathbf{T}$ solo se l'aggiunzione è riferita a quel prodotto scalare rispetto al quale la base è ortonormale.

Dalle relazioni viste si deduce anche che

$$\dim(\text{Im } \mathcal{T}) = \text{Rank } \mathcal{T} = \text{Rank } \mathcal{T}^* = \dim(\text{Im } \mathcal{T}^*).$$

In particolare se $\mathcal{T} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ è non singolare anche $\mathcal{T}^*$ è non singolare. D'altra parte se $\mathcal{T}^*y$ è nullo sono tutti nulli i $\langle y, \mathcal{T}e_k \rangle$, e quindi essendo $\{\mathcal{T}e_k\}_{k=1, \dots, n}$ una base non può che essere $y = 0$.

Sia $\mathcal{T}$ non singolare. Dati $x, y \in \mathbb{E}$ esistono unici $u, v \in \mathbb{E}$ tali che $\mathcal{T}u = x$ e $\mathcal{T}^*v = y$ e si ha

$$\langle x, (\mathcal{T}^{-1})^*y \rangle = \langle \mathcal{T}^{-1}x, y \rangle = \langle u, \mathcal{T}^*v \rangle = \langle \mathcal{T}u, v \rangle = \langle x, (\mathcal{T}^*)^{-1}y \rangle$$

che giustifica la notazione $\mathcal{T}^{-*} = (\mathcal{T}^*)^{-1} = (\mathcal{T}^{-1})^*$ analoga alla $\mathbf{T}^{-T} = (\mathbf{T}^T)^{-1} = (\mathbf{T}^{-1})^T$

Sia $\mathbb{W}$ un sottospazio di $\mathbb{E}$. Si definisce

Sottospazio $\mathbb{W}^\perp$ ortogonale a $\mathbb{W}$:= lo spazio $\{y \in \mathbb{E} \mid \langle y, x \rangle = 0, x \in \mathbb{W}\}$.

Si osservi che $\mathbb{W}^\perp \cap \mathbb{W} = \{0\}$. Infatti $\langle y, x \rangle = 0$ per qualsiasi $x \in \mathbb{W}$ ed $y \in \mathbb{W}^\perp$; ma allora se qualche x è anche in $\mathbb{W}^\perp$ per esso si ha $\langle x, x \rangle = 0$.

Ne segue che $\mathbb{E} = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^\perp$. Infatti se $z \in \mathbb{V}$ ed $\{e_1, \dots, e_k\}$ è una base ortonormale per $\mathbb{W}$ allora $z - \sum_{i=1}^k z^i e_i$ è necessariamente in $\mathbb{W}^\perp$, giacchè in tal caso si ha $\langle z - \sum_{i=1}^k z^i e_i, e_h \rangle = z_h - z^h = 0$.

È anche utile osservare (Gantmacher IX.8.2) che:

Proposizione 1.5.7 Se un sottospazio $\mathbb{W} \subset \mathbb{E}$ è $\mathcal{T}$ -invariante allora $\mathbb{W}^\perp$ è $\mathcal{T}^*$ -invariante. $\square$

Dimostrazione Scelto comunque $x \in \mathbb{W}$ si ha: $\mathcal{T}x \in \mathbb{W}$; quindi, per ciascun $y \in \mathbb{W}^\perp$ si ha $\langle y, \mathcal{T}x \rangle = 0 = \langle \mathcal{T}^*y, x \rangle$. $\blacksquare$

In particolare risulta $\text{Im } \mathcal{T}^* \perp \text{Ker } \mathcal{T}$, e cioè $\text{Im } \mathcal{T}^* \subset (\text{Ker } \mathcal{T})^\perp$. D'altra parte è $\dim(\text{Im } \mathcal{T}) + \dim(\text{Ker } \mathcal{T}) = n$ e, come si è visto, $\text{Rank } \mathcal{T} \equiv \text{Rank } \mathcal{T}^*$. Ne segue $\text{Im } \mathcal{T}^* = (\text{Ker } \mathcal{T})^\perp$ e se ne ricava $\mathbb{E} = \text{Ker } \mathcal{T} \oplus \text{Im } \mathcal{T}^* = \text{Ker } \mathcal{T}^* \oplus \text{Im } \mathcal{T}$. [Più in generale, se $\mathcal{T} : \mathbb{E}_1 \rightarrow \mathbb{E}_2$ si ha $\mathbb{E}_1 = \text{Ker } \mathcal{T} \oplus \text{Im } \mathcal{T}^*$ ed $\mathbb{E}_2 = \text{Ker } \mathcal{T}^* \oplus \text{Im } \mathcal{T}$].

Sia $\mathbb{B} := \{e_1, \dots, e_n\}$ una base di $\mathbb{E}$; si usi la notazione $\mathbb{B}_{(j)} := \{e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_n\}$, e sia $e^{*j} \in \mathbb{B}_{(j)}^\perp$ con $\langle e^{*j}, e_j \rangle = 1$, (certamente esistente e non nullo perchè $\mathbb{B}_{(j)}$ non è una base).

Base $\mathbb{B}^*$ duale di $\mathbb{B}$ rispetto al prodotto $\langle \cdot, \cdot \rangle$:= l'insieme $\{e^{*j}\}_{j=1, \dots, n}$ che si ottiene in tal modo al variare di j da 1 ad n .

Tale insieme è una base perchè costituito da n vettori indipendenti. Infatti: qualora fosse $x_j e^{*j} = 0$, sarebbe necessariamente $0 = \langle x_j e^{*j}, e_i \rangle = x_j \delta_i^j = x_i$ per ogni i . Se invece $x_j e^{*j} \neq 0$, allora la stessa relazione mostra che i numeri $\{x_j\}_{j=1, \dots, n}$ coincidono con le componenti covarianti del vettore $x := x_j e^{*j}$ (che sono banalmente uniche). In tal modo si riconosce lecita per un qualsiasi $x \in \mathbb{E}$ l'espressione cartesiana $x = x_j e^{*j}$. In particolare i versori di $\mathbb{B}$ sono esprimibili mediante quelli di $\mathbb{B}^*$ stante la $\mathbf{\kappa}_{hj} = \langle e_h, e_j \rangle =: (e_h)_j$ che fornisce le importanti relazioni:

$$e_h = \mathbf{\kappa}_{hj} e^{*j}, \quad \text{Det}(\mathbf{\kappa}_{hj}) \neq 0.$$

D'altra parte si ha che gli e^{*j} verificano le

$$(e^{*i})_h = \delta^i_h = \langle e^{*i}, e_h \rangle = (e^{*i})^j \langle e_j, e_h \rangle = (e^{*i})^j \mathbf{\kappa}_{jh}$$

e quindi è $(e^{*i})^j = \mathbf{K}^{ij}$ avendo indicato con $(\mathbf{K}^{ij})$ l'inversa di $(\mathbf{K}_{ji})$.

[Sia $\mathcal{T}$ un qualsiasi operatore su $\mathbb{E}$ euclideo, e si chiami *base propria di $\mathcal{T}$* una base che lo pone in forma di Jordan, (si veda il § A.6). Allora, [Voyevodin IX 75.2], una base propria $\{\epsilon^{*j}\}_{j=1,\dots,n}$ di $\mathcal{T}^*$ può essere scelta duale della $\{\epsilon_j\}_{j=1,\dots,n}$ base propria di $\mathcal{T}$. Infatti: sia $\{\epsilon_j\}_{j=1,\dots,n}$ una base (magari ortonormale) su $\mathbb{E}$, sia $\mathbf{T}$ la $\{e\}$ -matrice di $\mathcal{T}$, sia $\mathbf{P}_J$ la matrice che pone $\mathcal{T}$ in forma di Jordan e sia $\{\epsilon_j = \mathbf{P}_J e_j\}_{j=1,\dots,n}$ una base propria per $\mathcal{T}$, e quindi tale che $(\epsilon_j)^i = \mathbf{P}_J^i j$. La $\{e\}$ -matrice di $\mathcal{T}^*$ è

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^* &= \overline{\mathbf{K}}^{-1} \overline{\mathbf{T}}^T \overline{\mathbf{K}} = \mathbf{K}^{-T} \left(\overline{\mathbf{P}}_J \overline{\mathbf{T}}_J \overline{\mathbf{P}}_J^{-1} \right)^T \mathbf{K}^T = \mathbf{K}^{-T} \overline{\mathbf{P}}_J^{-T} \overline{\mathbf{T}}_J^T \overline{\mathbf{P}}_J^T \mathbf{K}^T \\ &= (\mathbf{K} \overline{\mathbf{P}}_J)^{-T} \overline{\mathbf{T}}_J^T (\mathbf{K} \overline{\mathbf{P}}_J)^T, \end{aligned}$$

e, poiché il trasposto coniugato di un blocco di Jordan è ancora un blocco di Jordan, si riconosce che $\mathcal{T}^*$ ha come base propria la n -pla di vettori $\{\epsilon^{*j}\}_{j=1,\dots,n}$ e cioè quella le cui $\{e\}$ -componenti controvarianti $(\epsilon^{*j})^k$ compongono le colonne della matrice $(\mathbf{K} \overline{\mathbf{P}}_J)^{-T}$

cosa questa anche facilmente ottenibile dalla definizione stessa. È infatti immediato leggere dalla $\langle \epsilon^{*j}, \epsilon_h \rangle = (\epsilon^{*j})^k \mathbf{K}_{ki} \overline{\mathbf{P}}^i_h = \delta_h^j$ il fatto che la matrice $\tilde{\mathbf{P}}^{kj} := (\epsilon^{*j})^k$ è l'inversa della $\mathbf{K} \overline{\mathbf{P}}$. Allo stesso modo si ha $(\epsilon^{*j})_h = \overline{\mathbf{P}}^{-1 j}_h$.

Si noti infine che $\epsilon^{*h} = \chi^{hk} \epsilon_k = \chi^{hk} \mathbf{P}^j_k e_j = \chi^{hk} \mathbf{P}^j_k \mathbf{K}_{ji} e^{*i} = (\chi^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{K})^h_{i} e^{*i} = (\chi^{hk} \mathbf{K}_{kj} \overline{\mathbf{P}}^{*j}_i) e^{*i} = \overline{\mathbf{P}}^{-1 h}_i e^{*i}$, diverso, in generale, da $\epsilon^{*h} = e^{*i} \mathbf{P}^{*h}_i$.

Proposizione 1.5.8 Se $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}^*$ ammettono un comune autovettore, allora i due corrispondenti autovalori sono l'uno il complesso coniugato dell'altro $\square$

Dimostrazione

$$\lambda = \langle \lambda \epsilon, \epsilon \rangle = \langle \mathcal{T} \epsilon, \epsilon \rangle = \langle \epsilon, \mathcal{T}^* \epsilon \rangle = \langle \epsilon, \mu \epsilon \rangle = \bar{\mu}, \quad \text{e cioè} \quad \mu = \bar{\lambda}.$$

■

Operatore normale := un operatore $\mathcal{T}$ definito su uno spazio unitario $\mathbb{E}$, a valori in $\mathbb{E}$, e tale che: $\mathcal{T}^* \mathcal{T} = \mathcal{T} \mathcal{T}^*$.

Proposizione 1.5.9 Se $\mathcal{T}$ è normale ed ha un autovalore λ allora $\mathbb{W}_\lambda := \text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda \mathbf{I})$, che è non vuoto, non solo è $\mathcal{T}$ -invariante, ma è anche $\mathcal{T}^*$ -invariante. $\square$

Dimostrazione

$$x \in \mathbb{W}_\lambda \Rightarrow \mathcal{T} \mathcal{T}^* x = \mathcal{T}^* \mathcal{T} x = \lambda \mathcal{T}^* x \text{ e quindi } \mathcal{T}^* x \in \mathbb{W}_\lambda.$$

■

Ma è noto (si veda il § A.6) che se un operatore lineare lascia invariante un spazio unitario allora esso vi ammette almeno un autovettore (l'equazione $\mathbf{T}x = \lambda x$ ammette sempre soluzione in $\mathbb{C}^n$ se $\text{Det}(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) = 0$).

Pertanto in $\mathbb{W}_\lambda$ si può trovare (giacché $\mathbb{E}$ è unitario) almeno un autovettore: ϵ_1 di $\mathcal{T}^*$; e siccome $\epsilon_1 \in \text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda \mathbf{I})$ si ha che ϵ_1 è autovettore comune ad entrambi $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}^*$.

D'altra parte si è visto che se un sottospazio $\mathbb{W} \subset \mathbb{E}$ è $\mathcal{T}$ -invariante allora $\mathbb{W}^\perp$ è $\mathcal{T}^*$ -invariante.

Allora: se ϵ_1 è un autovettore comune ad entrambi $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}^*$, e posto $\mathbb{W}_1 := \left(\text{span} \left\{ \epsilon_1 \right\} \right)$, se ne conclude che $\mathbb{W}_1^\perp$ non solo è $\mathcal{T}^*$ -invariante ma anche $\mathcal{T}$ -invariante, ed è possibile trovare in $\mathbb{W}_1^\perp$ un autovettore ϵ_2 comune ai due operatori. Procedendo in tal modo si ha la

Teorema 1.5.10 Un operatore normale $\mathcal{T}$ è diagonalizzabile in base ortonormale (e cioè ammette un sistema di autovettori che è una base ortogonale per lo spazio $\mathbb{V}$), e questa è anche autobase per $\mathcal{T}^*$. $\square$

Viceversa [Gantmacher IX 10.1] se $\mathcal{T}$ ammette un sistema ortonormale di autovettori $\{\epsilon_i\}_{i=1,\dots,n}$ che sia una base per lo spazio $\mathbb{V}$ allora $\mathcal{T}$ è normale. Infatti: chiamati $\eta_i := \mathcal{T}^* \epsilon_i - \bar{\lambda}_{(i)} \epsilon_i$ si hanno, con $k, i = 1, \dots, n$, le relazioni $\langle \epsilon_k, \eta_i \rangle = (\lambda_{(k)} - \lambda_{(i)}) \delta_{ki} = 0$ e quindi $\mathcal{T}^* \epsilon_i = \bar{\lambda}_{(i)} \epsilon_i$. Per ogni $i = 1, \dots, n$ segue allora $\mathcal{T} \mathcal{T}^* \epsilon_i = \lambda_{(i)} \bar{\lambda}_{(i)} \epsilon_i = \mathcal{T}^* \mathcal{T} \epsilon_i$. Si è così provata la:

Proposizione 1.5.11 Gli operatori normali sono tutti e soli gli operatori che ammettono un sistema ortonormale di autovettori che è anche una base per lo spazio. $\square$

Gli operatori normali sono cioè diagonalizzabili in base ortonormale, e questa può essere comune sia a $\mathcal{T}$ che a $\mathcal{T}^*$.

La proprietà qui accennata sugli autovettori degli operatori normali viene talvolta chiamata Teorema degli assi principali per ricordarne l'importante applicazione, nella meccanica del corpo rigido, alle omografie d'inerzia individuate come è noto da matrici reali simmetriche. La loro autobase ortonormale può essere e viene regolarmente usata come terna di proiezione proprio a causa delle sue caratteristiche di ortogonalità.

Si noti viceversa che non è affatto detto che un generico operatore diagonalizzabile lo sia con una base di autovettori ortogonali.

Operatore Unitario := un operatore (normale) $U : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ tale che

$$UU^* = \mathbb{I} .$$

Operatore Ortogonale := un operatore (normale) $U : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ con $\mathbb{E}$ reale, tale che

$$UU^* = \mathbb{I} .$$

Ciò accade se e solo se $|\lambda_i| = 1$, $\forall i = 1, \dots, n$; infatti, come si è visto, U ed U^* hanno autovalori complessi coniugati in corrispondenza ad uno stesso autovettore; quindi indicati con $\{\epsilon_i\}_{i=1, \dots, n}$ una base di autovettori di U e di U^* , per un qualsiasi $x = \sum_{i=1}^n x^i \epsilon_i$, si ha che

$$x = U^* U x = U^* \sum_{i=1}^n x^i \lambda_{(i)} \epsilon_i = \sum_{i=1}^n x^i \lambda_{(i)} \bar{\lambda}_{(i)} \epsilon_i .$$

Le seguenti sono equivalenti:

- U è unitario, (o ortogonale se lo spazio è reale);
- U conserva il prodotto scalare standard di ogni coppia di vettori;
- se $\mathbb{B}$ è una base ortonormale anche la base trasformata: $U\mathbb{B}$ lo è;

Operatore Autoaggiunto (o Hermitiano) := un operatore (normale) $\mathcal{H}$ tale che $\mathcal{H} = \mathcal{H}^*$. Ciò accade se e solo se $\lambda_i = \bar{\lambda}_i$, $\forall i = 1, \dots, n$. Infatti si ha:

$$\bar{\lambda}_{(j)} \langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle = \langle \epsilon_i, \mathcal{H} \epsilon_j \rangle = \langle \mathcal{H} \epsilon_i, \epsilon_j \rangle = \lambda_{(i)} \langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle .$$

Le relazioni viste mostrano che gli operatori autoaggiunti e reali sono gli

Operatori simmetrici := quegli operatori che hanno in base ortonormale (reale) matrice (reale e) simmetrica.

Essi sono pertanto quegli operatori $\mathcal{S}$ tali che $\langle u, \mathcal{S} v \rangle = \langle v, \mathcal{S} u \rangle$ come si vede facilmente mediante il ricorso ad una qualunque base ortonormale (reale).

Si noti che un operatore reale $\mathcal{T}$ autoaggiunto rispetto al prodotto scalare simmetrico è anche autoaggiunto come operatore complesso rispetto al prodotto scalare Hermitiano (si veda il § A.8). Ne segue in particolare che un operatore simmetrico ha reali tutti i suoi autovalori e quindi anche tutti i suoi autovettori, in quanto si può risolvere in $\mathbb{R}^n$ l'equazione $\mathcal{T}\epsilon = \lambda\epsilon$. Risulta allora possibile dimostrare anche per esso ed autonomamente il teorema degli assi principali. Infatti la restrizione $\mathcal{T}_{\mathbb{W}}$ di un operatore autoaggiunto in $\mathbb{E}$ ad un qualsiasi sottospazio $\mathbb{W} \subset \mathbb{E}$ è ancora autoaggiunto. È possibile quindi ripetere il ragionamento fatto per gli operatori normali e, per induzione, estrarre una base reale ortogonale dagli autovettori di $\mathcal{S}$.

Operatore definito positivo := un operatore autoaggiunto $\mathcal{H} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ tale che, per ogni $x \in \mathbb{E}$ si ha $\langle \mathcal{H} x, x \rangle > 0$. Ciò accade se e solo se $\lambda_i > 0$, $\forall i = 1, \dots, n$. Infatti posto $x = \xi^i \epsilon_i$, e avendo chiamata $\{\epsilon_i\}_{i=1, \dots, n}$ la base propria (ortonormale) di $\mathcal{H}$, si ha che $\langle \mathcal{H} x, x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\xi^i|^2$.

Operatore semi-definito positivo := un operatore autoaggiunto tale che, per ogni $x \in \mathbb{E}$ si ha $\langle \mathcal{H} x, x \rangle \geq 0$. Ciò accade se e solo se $\lambda_i \geq 0$, $\forall i = 1, \dots, n$.

- Se $\mathcal{H}$ è definito positivo anche $\mathcal{H}^{-1}$ è definito positivo, dato che se $\mathcal{H}$ è autoaggiunto esso ha una base ortonormale di autovettori sulla quale la matrice diagonale inversa è necessariamente matrice di $\mathcal{H}^{-1}$. Quindi anche $\mathcal{H}^{-1}$ è autoaggiunto ed ha per autovalori gli inversi di quelli di $\mathcal{H}$.

- Dato $\mathcal{H}$ (semi)-definito positivo si ha che esiste ed è (semi)-definito positivo l'operatore $\mathcal{H}^{1/2}$, e cioè quell'operatore tale che $(\mathcal{H}^{1/2})^2 = \mathcal{H}$. (Ciò sia in spazi complessi sia in spazi reali). Infatti anche ora basta definire $\mathcal{H}^{1/2}$ sulla base ortonormale di $\mathcal{H}$ come quell'operatore tale che $\mathcal{H}^{1/2}\epsilon_i = \sqrt{\lambda_i}\epsilon_i$, ed in tale definizione tutto è univocamente determinato.

Dati $\mathcal{H}$ definito positivo e B invertibile si ha che $B^*\mathcal{H}B$ e $B\mathcal{H}B^*$ sono entrambi definiti positivi. Infatti per ogni $x \neq 0$ si hanno $Bx \neq 0$ e $B^*x \neq 0$ e quindi $\langle B^*\mathcal{H}Bx, x \rangle = \langle \mathcal{H}Bx, Bx \rangle > 0$. In modo analogo si vede che, dato un qualunque operatore lineare $\mathcal{T}$, entrambi $\mathcal{T}\mathcal{T}^*$ e $\mathcal{T}^*\mathcal{T}$ sono operatori (autoaggiunti) semi-definiti positivi che hanno gli stessi autovalori e differiscono al più nella molteplicità dell'autovalore nullo. Risulta infatti $\langle \mathcal{T}\mathcal{T}^*x, x \rangle = \langle \mathcal{T}^*x, \mathcal{T}^*x \rangle \geq 0$ insieme con $\langle \mathcal{T}^*\mathcal{T}x, x \rangle = \langle \mathcal{T}x, \mathcal{T}x \rangle \geq 0$; e se, per esempio $(\mathcal{T}^*\mathcal{T})\epsilon_k = \rho_{(k)}^2\epsilon_k$, con $\rho_k^2 \geq 0$, allora $\rho_{(k)}^2 \langle \epsilon_h, \epsilon_k \rangle = \langle \mathcal{T}\epsilon_h, \mathcal{T}\epsilon_k \rangle$, il che mostra che il sistema $\{\mathcal{T}\epsilon_i\}_{i=1,\dots,n}$ seppure non una base è comunque ortogonale; inoltre $\mathcal{T}\mathcal{T}^*\mathcal{T}\epsilon_k = \rho_k^2\mathcal{T}\epsilon_k$ mostra che ρ_k^2 è autovalore sia di $\mathcal{T}\mathcal{T}^*$ che di $\mathcal{T}^*\mathcal{T}$.

Memento 1.5.12 È opportuno ricordare le seguenti definizioni. □

Forma bilineare $\mathcal{B} : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}$:= una funzione tale che: sia $\mathcal{B}(\cdot, y)$ sia $\mathcal{B}(x, \cdot)$ sono lineari ed omogenee: e cioè per ogni $\alpha \in \mathbb{K}$, $x, y \in \mathbb{V}$ si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(x+y, z) &= \mathcal{B}(x, z) + \mathcal{B}(y, z) & \mathcal{B}(\alpha x, y) &= \alpha \mathcal{B}(x, y) \\ \mathcal{B}(x, y+z) &= \mathcal{B}(x, y) + \mathcal{B}(x, z) & \mathcal{B}(x, \alpha y) &= \alpha \mathcal{B}(x, y) \end{aligned}$$

Forma Hermitiana $\mathcal{B}_H : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{C}$:= una funzione tale che

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_H(x+y, z) &= \mathcal{B}_H(x, z) + \mathcal{B}_H(y, z) & \mathcal{B}_H(\alpha x, y) &= \alpha \mathcal{B}_H(x, y) \\ \mathcal{B}_H(x, y+z) &= \mathcal{B}_H(x, y) + \mathcal{B}_H(x, z) & \mathcal{B}_H(x, \alpha y) &= \bar{\alpha} \mathcal{B}_H(x, y) . \end{aligned}$$

Forma Hermitiana simmetrica $\mathcal{B}_H : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{C}$:= una forma Hermitiana

tale che $\mathcal{B}_H(x, y) = \overline{\mathcal{B}_H(y, x)}$.

Scelta una base $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ in $\mathbb{V}$ ed assegnata una forma Hermitiana (o bilineare) $\mathcal{F}_H : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}$, con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ rispettivamente, resta univocamente definita la *matrice associata alla forma*

$$\mathbf{f}_{ij} := \mathcal{B}_H(e_i, e_j) ;$$

il valore $\mathcal{B}_H(x, y)$ per arbitrari $x, y \in \mathbb{V}$ risulta allora esprimibile mediante la

$$\mathcal{B}_H(x, y) =: \sum_{i,j} x^i \mathbf{f}_{ij} \bar{y}^j = \mathbf{x}^T \mathbf{f} \bar{\mathbf{y}} =: \mathcal{B}_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) .$$

Esempio: un prodotto scalare è una particolare forma Hermitiana simmetrica; per esso si è usata la notazione $\mathbf{\kappa}_{ij} := \langle e_i, e_j \rangle = \overline{\mathbf{\kappa}_{ji}}$.

Nota 1.5.13 Se lo spazio $\mathbb{V}$ è euclideo, è possibile usare un modo alternativo per esprimere una forma $\mathcal{B}(x, y)$, (o una $\mathcal{B}_H(x, y)$ nel caso complesso).

- Data in $\mathbb{V}$ una base $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ e detta $\{e^{*i}\}_{i=1,\dots,n}$ una sua base duale, e cioè una base tale che $\langle e^{*i}, e_j \rangle = (e_j)^i = \delta_j^i$;
- dette $\mathbf{\kappa}_{ih} := \langle e_i, e_h \rangle$ la matrice del tensore della metrica $\mathcal{K}$ (e cioè definito il prodotto scalare sullo spazio), e detto $\mathbf{\kappa}^{hi}$ il suo inverso:

$$\mathbf{\kappa}_{ih} \mathbf{\kappa}^{hj} = \delta_j^i \quad \mathbf{\kappa}^{ih} \mathbf{\kappa}_{hj} = \overline{\mathbf{\kappa}_{jh}} \overline{\mathbf{\kappa}^{hi}} = \delta_j^i ;$$

- ricordate le espressioni

$$e^{*i} = \mathbf{\kappa}^{ik} e_k , \quad e_h = \mathbf{\kappa}_{hi} e^{*i} ;$$

- dette x_i le componenti covarianti del generico vettore che, come si è detto, sono date da

$$x = x_i e^{*i} = x^i e_i, \quad x_i = \langle x, e_i \rangle = x^k \mathbf{\kappa}_{ki}, \quad x^k = x_i \mathbf{\kappa}^{ik} ;$$

ed introdotta la seguente notazione per le n -ple di coordinate rispetto alle dette basi

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{x}^T := (x^1, \dots, x^n), \quad \mathbf{x}^* := (x_1, \dots, x_n) ;$$

- ricavate le espressioni, valide per arbitrari operatori $\mathcal{T}, \mathcal{V} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(x, y) &= \langle \mathcal{T}x, y \rangle = x^h \mathbf{T}_h^j \boldsymbol{\kappa}_{jk} \bar{y}^k = \mathbf{x}^T \mathbf{T}^T \boldsymbol{\kappa} \bar{\mathbf{y}} = (\mathbf{T}\mathbf{x})_k \bar{y}^k = (\mathbf{T}\mathbf{x})^* \bar{\mathbf{y}}, \\ \mathcal{T}^*(x, y) &= \langle x, \mathcal{T}^*y \rangle = x^h \boldsymbol{\kappa}_{hj} \bar{\mathbf{T}}^{*j}_k \bar{y}^k = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\kappa} \bar{\mathbf{T}}^* \bar{\mathbf{y}} = x_j \bar{\mathbf{T}}^{*j}_k \bar{y}^k = \mathbf{x}^* \bar{\mathbf{T}}^* \bar{\mathbf{y}}, \\ \mathcal{V}(x, y) &= \langle x, \mathcal{V}y \rangle = x^h \boldsymbol{\kappa}_{hj} \bar{\mathbf{B}}^j_k \bar{y}^k = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\kappa} \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{y}} = x_j \bar{\mathbf{B}}^j_k \bar{y}^k = \mathbf{x}^* \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{y}};\end{aligned}$$

- ricavata, dalla $(\mathbf{b}_{kj} \mathbf{c}_{jh})^T = \mathbf{c}_{hj}^T \mathbf{b}_{jk}^T$, la

$$\mathbf{a}_{hk} := \mathbf{T}^T_h{}^j \boldsymbol{\kappa}_{jk} = (\mathbf{T}^T \boldsymbol{\kappa})_{hk} = (\bar{\boldsymbol{\kappa}}_{kj} \mathbf{T}^j_h)^T,$$

da cui

$$\mathbf{a}^T = \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{T} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{a} = \mathbf{T}^T \boldsymbol{\kappa},$$

ovvero

$$\mathbf{a}_{kh}^T := \bar{\boldsymbol{\kappa}}_{kj} \mathbf{T}^j_h \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{a}_{hk} = \mathbf{T}^j_h \boldsymbol{\kappa}_{jk},$$

resta comodo, a partire da una data una forma $\mathcal{B}_H(x, y) = x^i \mathbf{f}_{ij} \bar{y}^j$, definire in corrispondenza ad essa la coppia di operatori F e F^* tali che

$$\mathcal{B}(x, y) =: \langle Fx, y \rangle =: \langle x, F^*y \rangle$$

e quindi, in coordinate,

$$\mathbf{f}_{hk} =: \mathbf{F}^T_h{}^j \boldsymbol{\kappa}_{jk} = \boldsymbol{\kappa}_{hj} \bar{\mathbf{F}}^{*j}_k \quad \text{o anche} \quad \mathbf{f} = \mathbf{F}^T \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa} \bar{\mathbf{F}}^*;$$

le due $\{e\}$ -matrici dei due operatori F ed F^* rispettivamente, risultano pertanto tali che:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^T_h{}^j &:= \mathbf{f}_{hk} \boldsymbol{\kappa}^{kj} = \mathcal{B}_H(e_h, e_k) \boldsymbol{\kappa}^{kj} = \mathcal{B}_H(e_h, e^{*j}) \\ \bar{\mathbf{F}}^{*h}_k &:= \boldsymbol{\kappa}^{hi} \mathbf{f}_{ik} = \boldsymbol{\kappa}^{hi} \mathcal{B}_H(e_i, e_k) = \mathcal{B}_H(e^{*h}, e_k).\end{aligned}$$

- La matrice di un operatore reale autoaggiunto, in base ortonormale: $\boldsymbol{\kappa} = \mathbb{I}$, è reale simmetrica; (non necessariamente così in base non ortonormale).

▷

N.B. 1.5.14 Se la forma Hermitiana è simmetrica l'operatore F è autoaggiunto ed ha matrice $\mathbf{F} = \mathbf{F}^*$; e viceversa. Infatti si ha

$$\overline{\mathcal{B}_H(x, y)} = \mathcal{B}_H(y, x), \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{f}^T, \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{F}^* = \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{F}, \quad (5.22)$$

e questa implica $\mathbf{F}^* = \mathbf{F}$. Alternativamente si può vedere che è

$$\langle y, F^*x \rangle := \langle Fy, x \rangle = \mathcal{B}_H(y, x) = \overline{\mathcal{B}_H(x, y)} = \overline{\langle Fx, y \rangle} = \langle y, Fx \rangle.$$

◇

Lo spazio delle forme bilineari è uno spazio vettoriale analogo a quello degli operatori lineari. In esso una qualsiasi forma bilineare (reale) $\mathcal{B}$ è univocamente decomponibile nella somma delle sue:

$$\begin{aligned}\text{parte simmetrica} &:= \mathcal{B}_{sim} := \frac{1}{2}(\mathcal{B}(x, y) + \mathcal{B}(y, x)) \quad \text{e} \\ \text{parte antisimmetrica} &:= \mathcal{F}_{a.s.} := \frac{1}{2}(\mathcal{B}(x, y) - \mathcal{B}(y, x))\end{aligned}$$

(i secondi addendi sono coniugati nel caso complesso).

Forma quadratica $\mathcal{Q} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R} :=$ la funzione che si ottiene quando una forma bilineare $\mathcal{B}$ su $\mathbb{V}$ viene calcolata su uno stesso vettore: $\mathcal{Q}(x) := \mathcal{B}(x, x)$.

Se $\mathbb{V}$ è complesso, a partire da una forma Hermitiana $\mathcal{B}_H$ si ha, allo stesso modo, una forma quadratica Hermitiana $\mathcal{Q}_H : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{C}$. Essa risulta reale se, in aggiunta, la forma Hermitiana è simmetrica.

Siccome per ogni forma $\mathcal{B}$ vale la

$$\mathcal{B}(x, y) + \mathcal{B}(y, x) = \mathcal{B}(x + y, x + y) - \mathcal{B}(x, x) - \mathcal{B}(y, y),$$

ogni forma bilineare è univocamente esprimibile con:

$$\mathcal{B}(x, y) = \frac{1}{2}(\mathcal{Q}(x+y) - \mathcal{Q}(x) - \mathcal{Q}(y)) + \mathcal{B}_{a.s.}(x, y) ,$$

il che mostra che (solo) le forme bilineari simmetriche sono esprimibili mediante le (loro) forme quadratiche $\mathcal{Q}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{sim}(x, y) &= \frac{1}{2}(\mathcal{B}(x+y, x+y) - \mathcal{B}(x, x) - \mathcal{B}(y, y)) \\ &= \frac{1}{2}(\mathcal{Q}(x+y) - \mathcal{Q}(x) - \mathcal{Q}(y)) .\end{aligned}$$

Tuttavia nel caso Hermitiano c'è una corrispondenza biunivoca tra le $\mathcal{B}_H$ e le $\mathcal{Q}_H$, infatti sussiste la

$$4 \mathcal{B}_H(x, y) = \mathcal{Q}_H(x+y) - \mathcal{Q}_H(x-y) + i\mathcal{Q}_H(x+iy) - i\mathcal{Q}_H(x-iy) .$$

N.B. 1.5.15 La matrice $\mathbf{f}_{ij} := \mathcal{B}(e_i, e_j)$ è simmetrica (antisimmetrica) se e solo se la forma bilineare $\mathcal{B}$ è simmetrica (antisimmetrica); pertanto anche la $\mathbf{f}$ è univocamente esprimibile come $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{sim} + \mathbf{f}_{a.s.}$, con $\mathbf{f}_{sim} := \frac{1}{2}(\mathbf{f} + \mathbf{f}^T)$, e $\mathbf{f}_{a.s.} := \frac{1}{2}(\mathbf{f} - \mathbf{f}^T)$. (Nel caso Hermitiano simmetrico occorre anche coniugare la parte trasposta) $\diamond$

N.B. 1.5.16 Fissata la base, per ogni matrice quadrata $\mathbf{f}_{ij}$ esiste unica la forma bilineare che la ammette come matrice associata $\mathcal{B}(e_i, e_j) := \mathbf{f}_{ij}$; e quindi esiste unica la forma quadratica $\mathcal{Q}(x) = \mathcal{B}(x, x) \equiv \mathcal{B}_{sim}(x, x)$, con matrice associata simmetrica $\mathbf{q} = \mathbf{f}_{sim}$. Viceversa, sebbene ogni forma bilineare $\mathcal{B}$ individui univocamente la matrice quadrata $\mathbf{f}$ ad essa associata, *ciò non è vero* per le forme quadratiche (reali) $\mathcal{Q}$ che ne individuano la sola parte simmetrica: due forme bilineari $\mathcal{B}$ che differiscano fra loro per la sola parte antisimmetrica sono compatibili con una stessa $\mathcal{Q}$. In definitiva: una stessa forma quadratica è compatibile con *tutta una classe* di matrici quadrate $\mathbf{f}$, nella quale una sola: $\mathbf{q} = \mathbf{f}_{sim}$ è simmetrica, mentre tutte le altre differiscono da questa per una parte antisimmetrica. $\diamond$

Una forma quadratica reale (o proveniente da una forma Hermitiana simmetrica) è espressa, in coordinate, da un polinomio omogeneo di secondo grado del tipo $\mathcal{Q}(x) = \sum_{i,j} \mathbf{q}_{ij} x^i \bar{x}^j = \mathbf{x}^T \mathbf{q} \bar{\mathbf{x}} =: \mathcal{Q}(\mathbf{x})$ con coefficienti tali che:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{f}_{ij} + \overline{\mathbf{f}_{ji}}) = \mathbf{q}_{ij} = \overline{\mathbf{q}_{ji}} := \mathcal{B}_H \text{ sim}(e_i, e_j) .$$

Forma quadratica definita positiva := una forma quadratica $\mathcal{Q} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $x \neq 0 \iff \mathcal{Q}(x) > 0$; $\mathcal{Q}(0) = 0$.

L'osservazione fatta sopra mostra che un prodotto scalare definisce univocamente una forma quadratica definita positiva e viceversa (si veda la Nota 1.5.20).

Memento 1.5.17 Due matrici $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ si dicono:

Simili	se esiste	$\mathbf{P}$	quadrata non singolare:	$\mathbf{M}_2 = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{M}_1 \mathbf{P}$;
Congruenti	se esiste	$\mathbf{P}$	quadrata non singolare:	$\mathbf{M}_2 = \mathbf{P}^T \mathbf{M}_1 \mathbf{P}$;
Equivalenti	se esistono	$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$	quadrate non singolari:	$\mathbf{M}_2 = \mathbf{P}_1 \mathbf{M}_1 \mathbf{P}_2$.

Si dimostra [Voyevodin p.64] che $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ hanno lo stesso rango se e solo se sono equivalenti. In tal caso infatti esse corrispondono ad uno stesso operatore $\mathcal{T} : \mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{V}^m$ secondo opportune basi, scelte *indipendentemente* in ciascuno dei due spazi. $\square$

Il cambio di base.

Siano $\mathcal{e} := \{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ ed $\mathcal{E} := \{\epsilon_j := \mathcal{P}e_j\}_{j=1,\dots,n}$ basi di $\mathbb{V}$ non necessariamente ortonormali, e $\mathcal{P}$ l'operatore invertibile che trasforma l'una nell'altra:

$$\left\{e_i\right\}_{i=1,\dots,n} \xrightarrow{\mathcal{P}} \left\{\epsilon_j\right\}_{j=1,\dots,n} \quad \text{ tali che } \quad \epsilon_j = \mathbf{P}^i_j e_i .$$

Come si è visto,

$$\begin{aligned} \text{dalla } x &= x^i e_i = \xi^h \epsilon_h = \xi^h \mathbf{P}^i_h e_i \quad \text{segue} \quad x^i = \mathbf{P}^i_h \xi^h \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{x} = \mathbf{P} \boldsymbol{\xi}, \\ \text{e dalla } y &= y^j e_j = \mathcal{T} x = x^h \mathbf{T}^j_h e_i \quad \text{segue} \quad y^j = \mathbf{T}^j_h x^h \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{y} = \mathbf{T} \mathbf{x}. \end{aligned}$$

In maniera analoga al cambio da $\mathcal{E}$ a $\mathcal{E}$ si avrà che:

$$\begin{aligned} \text{il vettore } \mathcal{T}x \text{ nella base } \mathcal{E} &\text{ è espresso da } x^h \mathcal{T}e_h =: x^h \mathbf{T}^i_h e_i = y^i e_i, \\ \text{il vettore } \mathcal{T}x \text{ nella base } \mathcal{E} &\text{ è espresso da } \xi^j \mathcal{T}e_j =: \xi^j \mathbf{\aleph}^k_j \epsilon_k = \eta^k \epsilon_k. \end{aligned}$$

Uguagliando queste espressioni si ottiene $x^h \mathbf{T}^i_h e_i = \xi^j \mathbf{\aleph}^k_j \epsilon_k$ o anche

$$\mathbf{T} \mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{P} \boldsymbol{\eta} = \mathbf{P} \mathbf{\aleph} \boldsymbol{\xi} = \mathbf{P} \mathbf{\aleph} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x},$$

e quindi la matrice $\mathbf{\aleph}$ che la base $\mathcal{E}$ assegna all'operatore $\mathcal{T}$ verifica

$$\mathbf{\aleph} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{P} \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{\aleph}^k_j = \mathbf{P}^{-1k}_i \mathbf{T}^i_h \mathbf{P}^h_j.$$

Riassumendo:

$$\epsilon_j = \mathbf{P}^i_j e_i, \quad x^i = \mathbf{P}^i_j \xi^j, \quad \mathbf{\aleph}^k_j = \mathbf{P}^{-1k}_i \mathbf{T}^i_h \mathbf{P}^h_j.$$

Fra le matrici delle forme bilineari si stabiliscono, al cambio di base, relazioni *analoghe ma non identiche* a quelle viste nel caso degli operatori lineari.

Siano $\mathcal{E} := \{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ ed $\mathcal{E} := \{\epsilon_h\}_{h=1,\dots,n}$ due basi non necessariamente ortonormali, e $\mathcal{B} : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}$ una forma bilineare Hermitiana. Si pongano

$$\mathbf{f}_{ij} := \mathcal{B}(e_i, e_j) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\varphi}_{hk} := \mathcal{B}(\epsilon_h, \epsilon_k).$$

Si ottiene

$$\mathcal{B}(x, y) = x^i \mathbf{f}_{ij} \bar{y}^j = \xi^h \boldsymbol{\varphi}_{hk} \bar{\eta}^k.$$

Se poi $\{\epsilon_i = \mathcal{P} e_i\}_{i=1,\dots,n}$ allora

$$\boldsymbol{\varphi}_{hk} = \mathcal{B}(\epsilon_h, \epsilon_k) = \mathcal{B}(\mathcal{P} e_h, \mathcal{P} e_k) = \mathbf{P}^T_h \mathbf{f}_{ij} \mathbf{P}^j_k$$

o anche: $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{P}^T \mathbf{f} \bar{\mathbf{P}}$.

In particolare si ricava l'espressione che fornisce il cambio della matrice del tensore metrico al cambio di base:

$$\boldsymbol{\chi}_{hk} := \langle \epsilon_h, \epsilon_k \rangle = \mathbf{P}^T_h \boldsymbol{\kappa}_{ij} \mathbf{P}^j_k, \quad \text{o, più brevemente} \quad \boldsymbol{\chi} = \mathbf{P}^T \boldsymbol{\kappa} \bar{\mathbf{P}}.$$

Nota 1.5.18 Pertanto, al cambio di base, la matrice $\mathbf{F}$ dell'operatore F definito dalla $\mathcal{F}(x, y) =: \langle Fx, y \rangle \equiv \langle x, F^*y \rangle$ non si trasforma come la corrispondente matrice $\mathbf{f}$ della forma bilineare $\mathcal{B}$ a meno che il cambio di base sia (reale ed) ortogonale: $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$. Come si è visto, infatti, sussistono le

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{P} \quad \text{insieme con} \quad \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{P}^T \mathbf{f} \bar{\mathbf{P}},$$

e quindi le

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{P}^T \mathbf{f} \bar{\mathbf{P}} &= \mathbf{P}^T \boldsymbol{\kappa} \bar{\mathbf{F}}^* \bar{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^T \boldsymbol{\kappa} \bar{\mathbf{P}} \mathbf{P}^{-1} \bar{\mathbf{F}}^* \bar{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\chi} \bar{\boldsymbol{\Phi}}^* \\ \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{P}^T \mathbf{f} \bar{\mathbf{P}} &= \mathbf{P}^T \mathbf{F}^T \boldsymbol{\kappa} \bar{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{P}^T \boldsymbol{\kappa} \bar{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\chi}. \end{aligned}$$

▷

Esempio 5.19 Il cambio di base $\mathcal{P}$ è necessariamente ortogonale se, per esempio, la forma $\mathcal{B}$ è reale simmetrica, il prodotto scalare è reale, e la base iniziale $\mathcal{E}$, per ipotesi ortonormale, viene cambiata in quella degli autovettori di F . In tal caso infatti, per le prime due affermazioni si ha che l'operatore F è reale autoaggiunto e quindi, come si è detto, ha base propria reale ed ortonormale. Per la terza ipotesi, allora, l'operatore $\mathcal{P}$ che scambia fra loro tali basi è ortogonale in quanto

$$\mathbf{I} = \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{P}^{-T} \boldsymbol{\chi} \bar{\mathbf{P}}^{-1} = \mathbf{P}^{-T} \bar{\mathbf{P}}^{-1} \quad \text{da cui} \quad \mathbf{I} = \mathbf{P} \mathbf{P}^T.$$

In tal caso si ha anche

$$\mathbf{f} = \mathbf{F}^T = \overline{\mathbf{F}}^* = \mathbf{F} \quad \text{e} \quad \mathbf{P}^T \mathbf{f} \mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{P} .$$

In particolare, a partire da una forma quadratica reale, in uno spazio reale,

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = x^h \mathbf{q}_{hk} x^k \quad \text{con} \quad \mathbf{q} \equiv \overline{\mathbf{q}} \equiv \mathbf{q}^T ,$$

e mediante la $x^h = x_j \boldsymbol{\kappa}^{jh}$ e le

$$\boldsymbol{\kappa}^{jh} \mathbf{q}_{hk} = \mathbf{S}_{jk}^j \quad \text{ed} \quad \mathbf{S}^* = \boldsymbol{\kappa}^{-1} \mathbf{S}^T \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}^{-1} \mathbf{q}^T \boldsymbol{\kappa}^{-1} \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{S} ,$$

si definisce un operatore autoaggiunto (o simmetrico)

$$\mathcal{S} \quad \text{tale che} \quad \mathcal{Q}(x) = x_j \mathbf{S}_{jk}^j x^k .$$

È così possibile riconoscere che la forma $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = x^h \mathbf{q}_{hk} x^k$ può essere, magari non univocamente, trasformata nella forma canonica

$$\mathcal{Q}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi^i \boldsymbol{\kappa}_{hi} \xi^i , \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n ,$$

ove le $\xi^i = \widehat{\mathbf{P}}^{-1j} x^j$ sono le componenti dei vettori rispetto ad una base propria (ortonormale indipendentemente dal fatto che lo sia la base iniziale) di $\mathcal{S}$.

La non univocità è conseguenza del fatto che, siccome le λ sono tutte reali, non lede la generalità (ridefinendo le ξ) assumerle tutte di modulo unitario.

Si chiamano

Indice positivo d'inerzia $:=$ il numero delle $\lambda = +1$.

Indice negativo d'inerzia $:=$ il numero delle $\lambda = -1$.

Segnatura della forma $:=$ la differenza fra l'indice positivo e quello negativo.

La forma è definita positiva quando la sua segnatura vale $+n \equiv \dim(\mathbb{V})$, (Voyevodin 11.94).

Allo stesso modo, come si è visto, se $\mathcal{Q}_H$ è Hermitiana reale (in uno spazio unitario), l'operatore $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_H}$ è autoaggiunto e si ha $\mathcal{Q}_H(\mathbf{x}) = x^h \mathbf{q}_{hk} \bar{x}^k =: x_j \overline{\mathbf{S}}_h^j \bar{x}^h = x^h \mathbf{S}_h^j \bar{x}_j$, da cui

$$\mathbf{q}_{hk} = \mathbf{S}_h^j \boldsymbol{\kappa}_{jk} = \boldsymbol{\kappa}_{hj} \overline{\mathbf{S}}_k^j \quad \text{e cioè} \quad \mathbf{q} = \mathbf{S}^T \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa} \overline{\mathbf{S}} ,$$

e quindi $\mathcal{Q}_H(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi^i \boldsymbol{\kappa}_{ji} \bar{\xi}^i$ con le λ_i tutte reali. □

Nota 1.5.20 Se si ha un operatore $\mathcal{S}$ che oltre ad essere *autoaggiunto* rispetto ad un qualche prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è anche *definito positivo*, cioè tale che sia definita positiva la forma $\mathcal{Q}(x) := \langle x, \mathcal{S}x \rangle$, allora la forma bilineare

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}}(x, y) := \langle x, \mathcal{S}y \rangle = \langle \mathcal{S}x, y \rangle =: \langle x, y \rangle_{\mathcal{S}}$$

definisce nello spazio $\mathbb{E}$ un nuovo prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}}$ distinto da quello di partenza: $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Esso poi è reale se tale è $\mathcal{S}$. Si hanno allora le

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= x^i \langle e_i, e_k \rangle \bar{y}^k = x^i \boldsymbol{\kappa}_{ik} \bar{y}^k = x_k \bar{y}^k \\ \langle x, y \rangle_{\mathcal{S}} &= x^i \langle e_i, \mathcal{S}e_k \rangle \bar{y}^k = x^i \boldsymbol{\kappa}_{ih} \overline{\mathbf{S}}_k^h \bar{y}^k = x_h \overline{\mathbf{S}}_k^h \bar{y}^k . \end{aligned}$$

Più in generale, quindi, le definizioni e proprietà date sopra si possono ripetere relativamente a questo nuovo prodotto scalare, in particolare il concetto di aggiunzione e di ortogonalità. Ad esempio si ha:

- la matrice in base $\mathcal{S}$ -ortonormale del $\mathcal{S}$ -aggiunto di $\mathcal{T}$ è la trasposta (coniugata) di quella che $\mathcal{T}$ ha nella stessa base $\mathcal{S}$ -ortonormale; quindi
- un operatore (reale) $\mathcal{T}$ è $\mathcal{S}$ -autoaggiunto quando in base $\mathcal{S}$ -ortonormale gli corrisponde una matrice che è simmetrica.

▷

Ancora nel caso di un operatore definito positivo sussiste la:

Proposizione 1.5.21 Un operatore (autoaggiunto) $\mathcal{S}$ è definito positivo se e solo se esiste un operatore invertibile $\mathcal{P}^{-1}$ tale che $\mathcal{S} = \mathcal{P}^{-*}\mathcal{P}^{-1}$. $\square$

Dimostrazione

($\Leftarrow$) $\langle \mathcal{S}x, y \rangle = \langle \mathcal{P}^{-*}\mathcal{P}^{-1}x, y \rangle = \langle \mathcal{P}^{-1}x, \mathcal{P}^{-1}y \rangle = \langle x, \mathcal{P}^{-*}\mathcal{P}^{-1}y \rangle$ e pertanto $\mathcal{S} = \mathcal{S}^*$; inoltre $\langle \mathcal{S}x, x \rangle = \langle \mathcal{P}^{-1}x, \mathcal{P}^{-1}x \rangle > 0$ per ogni $x \neq 0$ stante l'invertibilità di $\mathcal{P}$.

($\Rightarrow$) Siano $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ basi in $\mathbb{E}$ delle quali la prima $\mathbb{I}$ -ortonormale e la seconda $\mathcal{S}$ -ortonormale, ovvero: $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ ed $\langle \mathcal{S}e_i, e_j \rangle = \langle e_i, \mathcal{S}e_j \rangle =: \langle e_i, e_j \rangle_{\mathcal{S}} = \delta_{ij}$; tali basi esistono per il procedimento di Gram-Schmidt dato che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ed $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}}$ sono due “qualsiasi” prodotti scalari.

A partire dalla $\mathcal{P}^{-1}e_j := e_i$ si definisca l'operatore $\mathcal{P}^{-1}$ cui la base $\mathcal{E}$ assegna matrice $\mathcal{P}^{-1}$ le colonne della quale sono formate dalle $\mathcal{E}$ -componenti dei versori $e_1, \dots, e_n$. Risulta $\langle \mathcal{P}^{-1}e_i, \mathcal{P}^{-1}e_j \rangle = \delta_{ij}$ e quindi

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{S}x, y \rangle &= \xi^i \langle \mathcal{S}e_i, e_j \rangle \bar{\eta}^j = \xi^i \delta_{ij} \bar{\eta}^j = \xi^i \langle \mathcal{P}^{-1}e_i, \mathcal{P}^{-1}e_j \rangle \bar{\eta}^j \\ &= \langle \mathcal{P}^{-1}x, \mathcal{P}^{-1}y \rangle =: \langle \mathcal{P}^{-*}\mathcal{P}^{-1}x, y \rangle. \end{aligned}$$

■

È chiaro che può ben essere $\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}^{-*} = \mathcal{S}^{1/2}$.

A volte il prodotto $\langle x, y \rangle_{\mathcal{S}}$ viene indicato con $\langle x, y \rangle_{\mathcal{E}}$ mettendo così in risalto il fatto che si tratta del prodotto scalare standard nella nuova base: $\mathcal{E} := \left\{ e_j = \mathcal{P}e_j \right\}_{j=1, \dots, n}$ che risulta, per definizione, $\mathcal{S}$ -ortonormale.

Nel caso generale, e cioè per $\mathcal{P}^{-1}$ qualunque in $\mathbb{L}(\mathbb{C}^n)$ e non necessariamente invertibile, l'operatore $\mathcal{P}^{-*}\mathcal{P}^{-1}$ risulta semi-definito positivo.

(•) In accordo con quanto si è visto per le forme bilineari, al cambio di base l'espressione del prodotto scalare verifica la relazione:

$$\langle x, y \rangle = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\kappa} \bar{\mathbf{y}} = \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P}^T \boldsymbol{\kappa} \bar{\mathbf{P}} \bar{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\chi} \bar{\boldsymbol{\eta}},$$

per cui si osserva che *anche supponendo ortonormale la base di partenza $\mathcal{E}$* , il “vecchio” prodotto scalare standard calcolato mediante le nuove componenti vale

$$\langle x, y \rangle = \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P}^T \mathbf{P} \bar{\boldsymbol{\eta}} = \xi^h \mathbf{P}_h^i \delta_{ij} \bar{\mathbf{P}}^j_k \bar{\eta}^k$$

e non coincide con il “nuovo” prodotto scalare standard

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{B}} := \mathbf{x}^T \mathbf{P}^{-T} \bar{\mathbf{P}}^{-1} \bar{\mathbf{y}} := \xi^h \delta_{hk} \bar{\eta}^k$$

a meno che *anche* la nuova base sia ortonormale: $\boldsymbol{\chi} = \mathbb{I}$, e cioè a meno che l'operatore di cambio di base sia un operatore ortogonale: $\mathcal{P}^* \mathcal{P} = \mathbb{I}$.

(•) In maniera analoga, il valore di $\langle x, \mathcal{T}y \rangle$ cambia secondo le

$$x^i \boldsymbol{\kappa}_{ih} \bar{\mathbf{T}}_j^h \bar{y}^j = \langle x, \mathcal{T}y \rangle = \xi^h \mathbf{P}^T_h{}^l \boldsymbol{\kappa}_{li} \bar{\mathbf{T}}_j^i \bar{\mathbf{P}}^j_k \bar{\eta}^k \equiv \xi^h \boldsymbol{\chi}_{hl} \bar{\mathbf{P}}^{-1}{}_i{}^l \bar{\mathbf{T}}_j^i \bar{\mathbf{P}}^j_k \bar{\eta}^k$$

e si hanno le

$$\begin{cases} \langle x, \mathcal{V}y \rangle = \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P}^T \boldsymbol{\kappa} \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{P}} \bar{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\chi} \bar{\mathbf{P}}^{-1} \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{P}} \bar{\boldsymbol{\eta}} \\ \langle \mathcal{T}x, y \rangle = \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P}^T \mathbf{T}^T \boldsymbol{\kappa} \bar{\mathbf{P}} \bar{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\xi}^T (\mathbf{P}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{P})^T \boldsymbol{\chi} \bar{\boldsymbol{\eta}} \end{cases}$$

Infatti è: $\langle e_i, \mathcal{V}e_j \rangle = \boldsymbol{\kappa}_{ih} \bar{\mathbf{B}}_j^h$, così come $\langle \mathcal{T}e_i, e_j \rangle = \mathbf{T}_i^h \boldsymbol{\kappa}_{hj}$.

Pertanto:

(•) Un operatore reale invertibile $\mathcal{P}$ è $\mathcal{S}$ -ortogonale se e solo se conserva il prodotto $\mathcal{S}$ -scalare e quindi, in virtù della

$$\boldsymbol{\chi} \bar{\boldsymbol{\Sigma}} =: \boldsymbol{\chi}_{\mathcal{S}} = \mathbf{P}^T \boldsymbol{\kappa}_{\mathcal{S}} \bar{\mathbf{P}} := \mathbf{P}^T \boldsymbol{\kappa} \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{P}},$$

se e solo se trasforma basi $\mathcal{S}$ -ortogonali in basi $\mathcal{S}$ -ortogonali. In tal caso si ha $\mathbb{I} = \mathbf{P}_{\mathcal{S}}^T \bar{\mathbf{P}}_{\mathcal{S}}$ se con $\mathbf{P}_{\mathcal{S}}$ si è indicata la matrice di $\mathcal{P}$ nella base $\mathcal{S}$ -ortogonale.

(•) Un qualsiasi operatore reale invertibile $\mathcal{P}$ trasforma basi $\mathbb{I}$ -ortonormali in basi $(\mathcal{P}^{-*}\mathcal{P}^{-1})$ -ortonormali. Inoltre se $\mathcal{P}^{-*}\mathcal{P}^{-1} \neq \mathbb{I}$ l'operatore $\mathcal{P}$ della proposizione non è ortogonale né rispetto ad $\mathbb{I}$ né rispetto a $\mathcal{S} := \mathcal{P}^{-*}\mathcal{P}^{-1}$ perché le due basi sono rispettivamente $\mathbb{I}$ -ortogonale ed $\mathcal{S}$ -ortogonale.

(•) Con $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ reali, detta $\mathbb{B}$ una base reale: $\{e_j = \mathcal{P}e_j\}_{j=1, \dots, n}$, e con $\mathcal{S} := \mathcal{P}^{-*}\mathcal{P}^{-1}$, sussistono la

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \langle x, y \rangle = \langle x, \mathcal{S}^{-1}y \rangle_{\mathbb{B}} = \langle x, \mathcal{P}\mathcal{P}^*y \rangle_{\mathbb{B}} = (x)_{\mathbb{B}}^T \cdot (\mathcal{P}\mathcal{P}^*y)_{\mathbb{B}} = \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}$$

e ciò poiché le $\mathbb{B}$ -coordinate di $\mathcal{P}\mathcal{P}^*y$ sono $\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{P}\mathbf{P}^T)\mathbf{P}\boldsymbol{\eta}$.

(•) Per un qualsiasi $C \in \mathbb{L}(\mathbb{V})$, ed ancora $\mathbb{V}$ e $\mathbb{B}$ reali, sussiste la

$$\langle x, \mathcal{C}y \rangle = \langle x, \mathcal{P}\mathcal{P}^*\mathcal{C}y \rangle_{\mathbb{B}} = \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P}^T \mathbf{P} \mathbf{C}_{\mathbb{B}} \boldsymbol{\eta},$$

ove $\mathbf{C}_{\mathbb{B}}$ è la matrice di $\mathbf{C}$ in base $\mathbb{B}$

(•) Se $\mathcal{T}$ è normale e $\mathcal{C}$ è simmetrico ciascuno ha matrice simile ($\equiv$ congruente) con una matrice diagonale nella base dell'altro.

Nota 1.5.22 La convenzione di porre *per colonne*, nella matrice che rappresenta un operatore in una data base, le componenti dei trasformati dei versori di base permette di individuare i vettori x e $\mathcal{T}x$ come “vettori colonna”:

$$x \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}x \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{T}_h^1 x^h \\ \vdots \\ \mathbf{T}_h^n x^h \end{pmatrix}.$$

In tal modo le varie operazioni sulle componenti seguono facilmente le usuali regole del prodotto (righe $\times$ colonne) fra le matrici rappresentative, sempre intendendo i vettori come particolari matrici ($n \times 1$). In questo modo assumono significato espressioni, già usate sopra, del tipo $\langle \mathcal{T}x, y \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{T}^T \boldsymbol{\kappa} \bar{\mathbf{y}}$ ove ciascuna lettera indica la matrice del corrispondente operatore in un'unica base fissata. L'indicare quindi il vettore $\mathcal{T}x$ con la notazione $\mathbf{T}x$ è cosa comune, soprattutto quando la scelta della base è fatta una volta per tutte, e non dà adito ad errori *fintanto che non ricompaiono i versori o le rappresentazioni cartesiane*. Se invece questo è il caso, occorre un minimo di attenzione; per esempio, sempre indicando il cambio di base con $\epsilon_i = \mathcal{P}e_i = \mathbf{P}_i^h e_h$, si ha $\mathcal{T}\epsilon_i = \mathcal{T}\mathcal{P}e_i = \mathbf{P}_i^h \mathcal{T}e_h = \mathbf{P}_i^h \mathbf{T}_h^k e_k = \mathbf{P}_i^h \mathbf{T}_h^k \mathbf{P}_h^{-1s} \epsilon_s$ e quindi $\mathcal{T}\epsilon_i$ dà, come è noto, $\mathbf{T}_i^s \epsilon_s = (\mathbf{P}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{P})_i^s \epsilon_s$ e non, come potrebbe venire voglia di scrivere qualora non si distinguesse l'operatore dalla sua matrice, $\mathbf{T}_i^s \epsilon_s$, né $\mathbf{T}_s^i \epsilon_s$, a meno che ϵ_i sia espresso mediante le sue $\{e\}$ -componenti:

$$(\mathcal{T}\epsilon_i)^k = \mathbf{T}_h^k (\epsilon_i)^h = \mathbf{T}_h^k \mathbf{P}_i^h, \quad \text{o perfino} \quad \mathbf{T}\epsilon_i = \mathbf{T}\mathbf{P}e_i.$$

In definitiva: o si mantiene sempre la notazione cartesiana con gli operatori o quella, *in base assegnata*, per sole componenti e matrici; ma non conviene mescolarle. $\triangleright$

Nota 1.5.23 Detta $\{\tilde{e}_i = \tilde{\mathcal{P}}e_i\}_{i=1, \dots, n}$ una trasformazione di base, e dette $\mathbf{T}$ e $\tilde{\mathbf{T}}$ le matrici di un operatore $\mathcal{T}$ nelle basi $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ e $\{\tilde{e}_i\}_{i=1, \dots, n}$ rispettivamente, le relazioni

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\tilde{e}_i &= \tilde{\mathbf{P}}_i^h \mathcal{T}e_h = \mathbf{T}_h^k \tilde{\mathbf{P}}_i^h e_k \\ \mathcal{T}\tilde{e}_i &= \tilde{\mathbf{T}}_i^h \tilde{e}_h = \tilde{\mathbf{P}}_h^k \tilde{\mathbf{T}}_i^h e_k \end{aligned}$$

mostrano che $\mathbf{P} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{T}}$ è la matrice, nella base $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ di quell'operatore $\mathcal{P} := \mathcal{T} \circ \tilde{\mathcal{P}}$ che *prima gira la base mediante $\tilde{\mathcal{P}}$ e poi agisce con $\mathcal{T}$* . Se anche $\mathcal{T}$ è invertibile, e quindi $\mathcal{T} \circ \tilde{\mathcal{P}} =: \mathcal{P}$ è esso stesso un cambio di base, allora tale $\mathcal{P}$ agisce sulle “vecchie” coordinate x in modo speculare:

$$\boldsymbol{\xi} = \tilde{\mathbf{P}}^{-1} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{T}}^{-1} \tilde{\mathbf{P}}^{-1} \mathbf{x} \quad \text{ovvero} \quad \xi^i = \tilde{\mathbf{P}}^{-1i} \mathbf{T}^{-1h} x^h = \tilde{\mathbf{T}}^{-1i} \tilde{\mathbf{P}}^{-1h} x^h.$$

In effetti, se $\epsilon'_i := \mathcal{P}''\epsilon'_i$ ed $\epsilon'_i := \mathcal{P}'e_i$, con $\mathcal{P}'', \mathcal{P}'$ invertibili, allora sussistono le:

$$\epsilon''_i = \begin{cases} \mathcal{P}'' \mathbf{P}'_i^h e_h = \mathbf{P}''_h^k \mathbf{P}'_i^h e_k \\ \mathbf{P}''_i^h \epsilon'_h = \mathbf{P}'_h^k \mathbf{P}''_i^h e_k \end{cases} =: \mathcal{P}'' \circ \mathcal{P}' e_i$$

da cui

$$\xi^i = \mathbf{P}'^{-1i} \mathbf{P}''^{-1h} x^h = \mathbf{P}''^{-1i} \mathbf{P}'^{-1h} x^h \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{x} = \mathbf{P}'' \mathbf{P}' \boldsymbol{\xi} = \mathbf{P}'' \mathbf{P}' \boldsymbol{\xi}.$$

Si osservi che, risolvendo la $\epsilon_i = \mathbf{P}_i^h e_h$ nella $e_h = \mathbf{P}^{-1i} \epsilon_i$, si ricava che la $\{\epsilon\}$ -matrice della base $\{e_h\}_{h=1, \dots, n}$ è proprio $\mathbf{P}^{-1i}$. A rigor di termini, a questo punto si dovrebbe notare tale matrice coincide con la $\{e\}$ -matrice dell'operatore $\mathcal{P}^{-1}$ in virtù delle $\epsilon''_i = \mathbf{P}'_h^k \mathbf{P}''_i^h e_k \equiv \mathbf{P}_h^k \mathbf{P}^{-1i} e_k$. $\triangleright$

Quanto si è visto nella precedente Nota 1.5.23 ha, fra l'altro, la seguente applicazione. Siano dati un operatore $\mathcal{T}_2$ simmetrico definito positivo, ed un operatore $\tilde{\mathcal{P}}$ invertibile, e siano $\mathbf{T}$ e $\tilde{\mathbf{P}}$, rispettivamente, le matrici che la base $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ assegna loro. L'operatore $\mathcal{P} := \mathcal{T}_2^{-1/2} \circ \tilde{\mathcal{P}}$ definisce una trasformazione di coordinate $\boldsymbol{\xi} := \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$, ed ha $\{e\}$ -matrice: $\mathbf{P} = \mathbf{T}^{-1/2}\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{T}^{-1/2}$. Si osservi che l'operatore $\mathcal{P}$ prima gira la base $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ nella $\{\tilde{e}_i := \tilde{\mathcal{P}}e_i\}_{i=1,\dots,n}$, e poi agisce con $\mathcal{T}_2^{-1/2}$. Quest'ultimo operatore, anch'esso reale simmetrico, ha $\{e\}$ -matrice: $\mathbf{T}^{-1/2}$.

Nota 1.5.24 Al solo scopo di rendere più chiaro l'effetto di $\mathcal{T}_2$, e cioè solo a titolo di esempio, verrà qui esaminato il caso particolare in cui l'operatore $\tilde{\mathcal{P}}$ dipende da $\mathcal{T}_2$ in modo tale che i versori $\{\tau_i := \tilde{\mathcal{P}}e_i\}_{i=1,\dots,n}$ siano autovettori di $\mathcal{T}_2$; in tal caso l'operatore $\mathcal{T}_2^{-1/2}$ li divide per $\sqrt{\lambda_i}$. Nel caso generale, in cui l'operatore $\tilde{\mathcal{P}}$ è assegnato apriori ed indipendente da $\mathcal{T}_2$ (per esempio per essere quello degli autovettori di un qualche altro operatore autoaggiunto), l'effetto di $\mathcal{T}_2$ sui τ sarà meno immediato, ma non tale da modificare la struttura geometrica delle osservazioni che qui seguono.

È bene notare subito che gli autovettori dell'operatore autoaggiunto $\mathcal{T}_2$, certo ortonormalizzabili secondo il prodotto $\langle \cdot, \cdot \rangle$, non lo sono secondo quello $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{T}_2}$ proprio per la presenza delle $\lambda_i \neq 1$.

Sia allora $\{\tau_i\}_{i=1,\dots,n}$ una base ortonormale di autovettori di $\mathcal{T}_2$; resta da questa definito un operatore $\tilde{\mathcal{P}}$ tale che $\{\tau_i := \tilde{\mathcal{P}}e_i\}_{i=1,\dots,n}$; questo, comunque invertibile, è ortogonale se e solo se tale è anche la base $\mathcal{E}$. Per costruzione risulta $\langle \mathcal{T}_2\tau_i, \tau_j \rangle = \lambda_{(i)}\delta_{ij}$.

Ponendo $\epsilon := \mathcal{T}_2^{-1/2}\tau =: \mathcal{P}e$, e cioè con $\mathcal{P} := \mathcal{T}_2^{-1/2} \circ \tilde{\mathcal{P}}$ avente $\mathcal{E}$ -matrice $\mathbf{P}_j^k = \tilde{\mathbf{P}}_i^k \lambda_{(i)}^{-1/2} \delta_j^i = \mathbf{T}^{-1/2} \mathbf{P}_j^k$, si ottiene una base di vettori $\mathcal{E} := \mathcal{P}\mathcal{E}$ tali che $\langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle_{\mathcal{T}_2} = \delta_{ij}$. Infatti

$$\langle \mathcal{T}_2\epsilon_i, \epsilon_j \rangle = \langle \mathcal{T}_2 \frac{\tau_i}{\sqrt{\lambda_{(i)}}}, \frac{\tau_j}{\sqrt{\lambda_{(j)}}} \rangle = \langle \sqrt{\lambda_{(i)}}\tau_i, \frac{\tau_j}{\sqrt{\lambda_{(j)}}} \rangle = \delta_{ij}.$$

È da notare però che anche se la base $\mathcal{E}$ è ortonormale, e quindi tale da rendere ortogonale l'operatore $\tilde{\mathcal{P}}$, l'operatore $\mathcal{P}$ non è ortogonale, a meno che $\mathcal{T}_2 = \mathbb{I}$; infatti

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}x, \mathcal{P}y \rangle &= x^i \langle \mathcal{T}_2^{-1/2}\tilde{\mathcal{P}}e_i, \mathcal{T}_2^{-1/2}\tilde{\mathcal{P}}e_j \rangle y^j = \\ &= x^i \langle \mathcal{T}_2^{-1/2}\tau_i, \mathcal{T}_2^{-1/2}\tau_j \rangle y^j = \frac{x_i y^i}{\lambda_{(i)}} \\ &\neq x_i y^i = \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Ciò significa che $\mathbf{P}^T \mathbf{P} = \tilde{\mathbf{P}}^T \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{P}} \neq \mathbb{I}$, e ciò malgrado la $\{e\}$ -matrice di $\mathcal{T}_2^{1/2}$ risulti $\mathbf{T}^{1/2} h_k = \tilde{\mathbf{P}}^h_j \mathbf{P}^{-1j}_k = \tilde{\mathbf{P}}^h_j \delta_i^j \lambda_{(i)}^{1/2} \tilde{\mathbf{P}}^{-1i}_k$ e quindi sia evidentemente simmetrica.

Infine, la simmetria di $\mathcal{T}_2^{-1/2}$ comporta che è sufficiente che l'operatore $\tilde{\mathcal{P}}$ sia ortogonale, anche se indipendente da $\mathcal{T}_2$, per assicurare la $\mathcal{T}_2$ -ortonormalità della base $\{\epsilon_i\}_{i=1,\dots,n}$. Dalle $\mathcal{T}_2^{-1/2} = \mathcal{P}\tilde{\mathcal{P}}^{-1} = \tilde{\mathcal{P}}^{-T}\mathcal{P}^T$ segue infatti $\mathcal{T}_2 = \mathcal{P}^{-T}\mathcal{P}^{-1}$ che implica

$$\langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle_{\mathcal{T}_2} = \langle \mathcal{P}^{-1}\epsilon_i, \mathcal{P}^{-1}\epsilon_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

▷

Nota 1.5.25 Ogni matrice simmetrica può essere ridotta in forma diagonale da una trasformazione ortogonale, ma non è detto che tale trasformazione sia unica. Inoltre la corrispondente forma quadratica può essere messa in forma canonica (magari non unica) anche da trasformazioni non ortogonali. ▷

Sussiste la seguente

Proposizione 1.5.26 La segnatura di una matrice simmetrica di rango $r \leq n$ è caratteristica della matrice e non dipende dalla base delle coordinate. □

Dimostrazione Si ricordi innanzi tutto che il rango della forma non dipende dalla base. Siano x le coordinate di partenza e si suppongano due forme canoniche per la stessa forma quadratica:

$$y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_r^2 = z_1^2 + \dots + z_h^2 - z_{h+1}^2 - \dots - z_r^2 \quad (5.23)$$

relative a due sistemi di coordinate

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}, \quad \mathbf{z} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x} \quad (5.24)$$

Si supponga, per assurdo, $k < h$ e si scriva il sistema di equazioni

$$y_1 = \dots = y_k = z_{h+1} = \dots = z_n = 0. \quad (5.25)$$

Usando le (5.24) si ottiene un sistema omogeneo di $(n - h + k)$ equazioni nelle x e quindi ne esiste una soluzione non banale: $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. D'altra parte, sostituendo le (5.24) nella (5.23) ed in essa la soluzione $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ si ottiene

$$-y_{k+1}^2(\alpha) - \dots - y_r^2(\alpha) = z_1^2(\alpha) + \dots + z_h^2(\alpha).$$

Questa dà senz'altro $z_1^2(\alpha) = \dots = z_h^2(\alpha) = 0$ che, insieme con le (3), indicano le $\{\alpha\}$ come soluzione non banale del sistema omogeneo nelle x dato da $z_1^2(x) = \dots = z_n^2(x) = 0$ il che contraddice le (5.24). ■

A.6 Richiami di Algebra Lineare. (II)

Sia $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale di dimensione n su un campo $\mathbb{K}$, e sia $\mathcal{T} \in \mathbb{L}(\mathbb{V})$ un operatore lineare su $\mathbb{V}$. Si indicherà con $\mathbf{T}$ la matrice che l'assegnata base $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ assegna all'operatore $\mathcal{T}$. Si definiscono:

Autovettore dell'operatore $\mathcal{T}$:= un qualunque $\epsilon \in \mathbb{V} \setminus \{0\}$ che verifica l'equazione: $\mathcal{T}\epsilon = \lambda\epsilon$ per qualche $\lambda \in \mathbb{K}$; ovvero un vettore $\epsilon \in \text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda\mathbb{I}) \neq \{0\}$.

Autovalore dell'operatore $\mathcal{T}$:= un elemento λ del campo $\mathbb{K}$ per il quale: $\mathcal{T} - \lambda\mathbb{I}$ è singolare, e quindi tale che $\text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda\mathbb{I}) \setminus \{0\}$ è non vuoto.

Questa condizione implica che λ sia soluzione di un'equazione algebrica, la:

$$\text{Equazione Secolare} := \det(\mathbf{T} - \lambda\mathbb{I}) = 0.$$

L'equazione Secolare non dipende dalla base, si ha infatti, per un qualsiasi $x \in \mathbb{K}$:

$$\text{Det}(\mathbf{P}\mathbf{T}\mathbf{P}^{-1} - x\mathbb{I}) = \text{Det}(\mathbf{P}(\mathbf{T} - x\mathbb{I})\mathbf{P}^{-1}) = \text{Det } \mathbf{P} \text{ Det}(\mathbf{T} - x\mathbb{I}) \text{ Det } \mathbf{P}^{-1}.$$

Polinomio caratteristico := il polinomio di grado n sul campo $\mathbb{K}$ dato da

$$p_{\mathcal{T}}(x) = \text{Det}(\mathbf{T} - x\mathbb{I}) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$$

e si riconosce che $c_n \neq 0$, $c_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{Tr } \mathcal{T}$, $c_0 = \text{Det } \mathcal{T}$, e $c_i \in \mathbb{K}$ per $i = 1, \dots, n$. I suoi zeri sono, per definizione, gli autovalori di $\mathcal{T}$.

Accade spesso di chiamare, sebbene impropriamente, "autovalore" di $\mathcal{T}$ una qualunque delle radici di questa equazione anche se, pur essendo $\mathcal{T}$ e $\mathbb{V}$ reali, essa non fosse reale, e pertanto tale che $\mathbb{V} \cap \text{Ker}(\mathcal{T} - \lambda\mathbb{I}) = \{0\}$.

Secondo queste definizioni, le proprietà degli operatori indotti ed il teorema fondamentale dell'algebra implicano che: *un operatore lineare definito su uno spazio vettoriale complesso $\mathfrak{C} \equiv \mathbb{C}^n$ ammette almeno un autovettore, nello spazio stesso ed in ciascun suo sottospazio invariante, mentre ciò non è detto se $\mathfrak{C}$ è reale.*

Operatore diagonalizzabile := un operatore che ammetta un sistema di autovettori (linearmente indipendenti) abbastanza ricco da poterne estrarre una base per lo spazio.

Talvolta [Hirsh] si riserva tale nome agli operatori reali che abbiano tale proprietà negli spazi reali sui quali sono definiti; e si chiamano semisemplici gli operatori reali i cui complessificati possiedono questa proprietà sui corrispondenti spazi complessificati di quelli reali.

Nota 1.6.1 Gli autovalori di un operatore compaiono anche in alcuni degli invarianti relativi all'operatore stesso: se $\mathcal{T}: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ è un operatore lineare ed $\mathbf{T}$ la sua matrice in una certa base $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$, allora: il determinante $p_{\mathcal{T}}(\lambda) := \text{Det}(\mathbf{T} - \lambda\mathbb{I})$ ha un solo termine di grado n in λ , e cioè $\prod_i (\mathbf{T}_i^i - \lambda)$, e questo termine contiene quello di grado $(n-1)$. Infatti nello sviluppo per colonne ciascun $\mathbf{T}_j^i$ con $i \neq j$ rimane moltiplicato per il complemento algebrico $\mathcal{A}_i^j$ e questo non contiene né $(\mathbf{T}_i^i - \lambda)$ né $(\mathbf{T}_j^j - \lambda)$, e pertanto è di grado $(n-2)$.

Si ha quindi, indicando con $\{\lambda_i\}_{i=1,\dots,n}$ gli autovalori di $\mathcal{T}$,

$$\begin{aligned} \text{Det } (\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) &= (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1} \left(\sum \mathbf{T}_i^i \right) \\ &\quad + \left(\text{termini che si annullano per } \lambda = 0 \right) + \text{Det } \mathbf{T} \\ &= [(\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)] (-1)^n \\ &= \left[\lambda^n - \lambda^{n-1} \left(\sum \lambda_i \right) + \left(\text{termini che si annullano per } \lambda = 0 \right) \right. \\ &\quad \left. + (-1)^n \left(\prod \lambda_i \right) \right] (-1)^n. \end{aligned}$$

Ne segue

$$\text{Tr } \mathcal{T} \equiv \text{Tr } \mathbf{T} = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad \text{Det } \mathcal{T} \equiv \text{Det } \mathbf{T} = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

Ciò perché né $p_{\mathcal{T}}(\lambda)$, né $\text{Tr } \mathcal{T}$, né $\text{Det } \mathcal{T}$, dipendono dalla base usata; infatti: $\text{Det } (\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2) = \text{Det } \mathbf{T}_1 \text{Det } \mathbf{T}_2$. Inoltre, se due operatori $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ hanno la stessa base propria, allora gli autovalori di $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ sono la somma dei rispettivi autovalori. Pertanto, per $t \in \mathbb{R}$, l'operatore $(\mathbf{I} + t\mathcal{T})$ ha autovalori $(1 + t\lambda_i)$ e si ha che

$$\text{Det } (\mathbf{I} + t\mathbf{T}) = \prod_{i=1}^n (1 + t\lambda_i) = 1 + t \sum_{i=1}^n \lambda_i + o(t) = 1 + t \text{Tr } \mathbf{T} + o(t).$$

▷

Indicati con $\rho(\mathcal{T}) := \text{Rank } \mathcal{T} \equiv \dim \text{Im } \mathcal{T}$; $\nu(\mathcal{T}) := \text{Null } \mathcal{T} \equiv \dim \text{Ker } \mathcal{T}$; e detti $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ gli autovalori distinti di $\mathcal{T}$, per $i \in \{1, \dots, r\}$ si ricordino le seguenti definizioni:

Molteplicità algebrica $a_i := a(\lambda_i)$:= molteplicità di λ_i quale radice della equazione secolare.

Autospazio relativo a λ_i := $\{x \in \mathbb{V} \mid \mathcal{T}x = \lambda_i x\} =: \text{Ker } (\mathcal{T} - \lambda_i \mathbf{I})$.

Molteplicità geometrica $g_i := g(\lambda_i)$:= numero di autovettori (linearmente indipendenti) relativi all'autovalore λ_i .

Sussistono i seguenti fatti:

- (i) $g_i \equiv \dim \text{Ker } (\mathcal{T} - \lambda_i \mathbf{I}) \equiv n - \text{Rank } (\mathcal{T} - \lambda_i \mathbf{I}) =: n - \rho_i$;
- (ii) $\text{Ker } (\mathcal{T} - \lambda_i \mathbf{I})$ è $\mathcal{T}$ -invariante, dato che $\mathcal{T}$ e $(\mathcal{T} - \lambda_j \mathbf{I})$ commutano;
- (iii) $\mathcal{T}$ è diagonalizzabile se e solo se $g_i = a_i$ per ogni $i = 1, \dots, r$.

In tal caso la molteplicità algebrica di ciascun autovalore non supera (e pertanto eguaglia) il numero di autovettori ad essa corrispondenti, e si ha (si veda il N.B.1 @ § III.2) $\sum_{i=1}^r g_i = n$.

Naturalmente se l'operatore ammette autovalori complessi tutto ciò è vero in ${}^c\mathbb{V}$; poi, se $\mathcal{T}$ è reale, sarà opportuno considerare in modo separato i piani relativi alle parti reali ed a quelle puramente immaginarie relative ad ogni coppia di autovettori complessi coniugati.

- (iv) Se $\{e_h\}_{h=1,\dots,g_i}$, è una base per $\text{Ker } (\mathcal{T} - \lambda_i \mathbf{I})$, completandola si ottiene che la matrice dell'operatore

$$\mathcal{T} \text{ ha la forma } \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}' & \vdots & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \mathbf{B} \end{pmatrix} \text{ dove } \mathbf{T}' \text{ è diagonale ed ha dimensioni } (g_i \times g_i), \text{ mentre } \mathbf{B} \text{ è } (\rho_i \times \rho_i);$$

e siccome

$$\text{Det } (\mathcal{T} - \lambda_i \mathbf{I}) = \text{Det } (\mathbf{T}' - \lambda_i \mathbf{I}_{g_i}) \text{Det } (\mathbf{B} - \lambda_i \mathbf{I}_{\rho_i})$$

si ha $p_{\mathcal{T}}(\lambda) = p_{\mathbf{T}'}(\lambda) \cdot p_{\mathbf{B}}(\lambda)$. D'altra parte $\mathcal{T}$ ristretto a $\text{Ker } (\mathcal{T} - \lambda_i \mathbf{I})$ è diagonale, e quindi $p_{\mathbf{T}'}(\lambda) = (\lambda_i - \lambda)^{g_i}$. Ciò implica solo che $g_i \leq a_i$, ed infatti λ_i può ancora annullare $p_{\mathbf{B}}$.

- (iv.1) nel caso di $\mathbf{I}$ si ha $n = g_i = a_i$;
- (iv.2) nel caso di tutte le radici λ_i distinte si ha $1 = g_i = a_i$;
- (iv.3) nel caso di un unico blocco elementare di Jordan J si ha $1 = g_i \neq a_i = n$.

- (v) Se per una certa λ_i risulta $g_i = a_i$ e quindi $q_j = 1$ si dice che l'operatore ha in sua corrispondenza Divisori elementari semplici, e cioè non ha alcun blocco di Jordan (non banale) relativamente al dato autovalore.
- (vi) Dato un qualsiasi operatore $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ è possibile decomporre $\mathbb{V}$ in una somma diretta $\mathbb{V} = \mathbb{V}_+ \oplus \mathbb{V}_0$ di spazi $\mathcal{S}$ -invarianti tali che $\mathcal{S}_{\mathbb{V}_+}$ è invertibile ed $\mathcal{S}_{\mathbb{V}_0}$ è nilpotente di un certo ordine $q \geq 1$. [La seconda affermazione significa che esiste $q \in \mathbb{N}$ tale che $\mathcal{S}^q x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{V}_0$, e, se $q > 1$, $\exists x \in \mathbb{V}_0$ tale che $\mathcal{S}^{q-1} x \neq 0$. La prima significa che per ciascun $y \in \mathbb{V}_+$ esiste unico $x \in \mathbb{V}_+$ tale che $\mathcal{S}x = y$]. I due spazi $\mathbb{V}_+$ e $\mathbb{V}_0$ sono $\mathcal{S}$ -invarianti, e quindi $\mathbb{V}$ ammette una base nella quale $\mathcal{S}$ ha matrice diagonale a blocchi: $\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{S}_2 \end{pmatrix}$ con $\mathcal{S}_1^q = 0$ e $\text{Det } \mathcal{S}_2 \neq 0$.

Dimostrazione

- (vi.1) $\text{Ker } \mathcal{S}^{k-1} \subset \text{Ker } \mathcal{S}^k$; e siccome $n = \dim(\mathbb{V}) < \infty$, esiste $q \geq 1$ tale che $\text{Ker } \mathcal{S}^{q-1} \subset \text{Ker } \mathcal{S}^q = \text{Ker } \mathcal{S}^{q+1}$.
- (vi.2) $\text{Im } \mathcal{S}^{k+1} = \mathcal{S} \text{ Im } \mathcal{S}^k \subseteq \text{Im } \mathcal{S}^k \subseteq \text{Im } \mathcal{S}^{k-1}$.
- (vi.3) $\mathbb{V} = \mathbb{V}_+ \oplus \mathbb{V}_0 := \text{Im } \mathcal{S}^q \oplus \text{Ker } \mathcal{S}^q$, (cosa generalmente non vera per $\mathcal{S}$).
 Infatti $\rho(\mathcal{S}^q) + \nu(\mathcal{S}^q) = n$; e se $x \in \text{Im } \mathcal{S}^q \cap \text{Ker } \mathcal{S}^k \subseteq \text{Im } \mathcal{S}^q \cap \text{Ker } \mathcal{S}^q$, con q definito in (vi.1) e $0 < k \leq q$, allora $x = 0$ perché $\begin{cases} x = \mathcal{S}^q y \\ \mathcal{S}^k x = 0 \end{cases}$ equivalgono a $y \in \text{Ker } \mathcal{S}^{q+k} = \text{Ker } \mathcal{S}^q$ e quindi $\mathcal{S}^q y = 0$.
 Inoltre è anche $\mathbb{V} = \text{Im } \mathcal{S}^{q+h} \oplus \text{Ker } \mathcal{S}^{q+h}$, e quindi $\text{Im } \mathcal{S}^{q+h} = \text{Im } \mathcal{S}^q$.
- (vi.4) $\mathcal{S}$ è nilpotente di ordine $q \in [0, n]$ su $\text{Ker } \mathcal{S}^q$, ($\text{Ker } \mathcal{S}^0 = \{0\}$); mentre la condizione $x \in \text{Im } \mathcal{S}^q$ implica che $\mathcal{S}x = 0$ se e solo se $x = 0$, perché il punto (vi.3) è valido anche per $k = 1$.

■

Si scriva il polinomio caratteristico nella forma

$$p_{\mathcal{T}}(\lambda) := \text{Det } (\mathcal{T} - \lambda \mathbb{I}) \equiv (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{a_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{a_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{a_r}$$

ove $a_1 + \cdots + a_r = n$, e dove gli autovalori $\{\lambda_j\}_{j=1, \dots, r}$ siano distinti fra loro. Sia $j \in \{1, \dots, r\}$ l'indice relativo a ciascuno degli autovalori distinti, e sia q_j tale che

$$\text{Ker } (\mathcal{T} - \lambda_j \mathbb{I})^{q_j-1} \subset \text{Ker } (\mathcal{T} - \lambda_j \mathbb{I})^{q_j} = \text{Ker } (\mathcal{T} - \lambda_j \mathbb{I})^{q_j+1}.$$

Si definisce

Autospazio generalizzato dell'operatore $\mathcal{T}$, relativo all'autovalore λ_j :=
 lo spazio

$$\mathbb{M}_j := \text{Ker } (\mathcal{T} - \lambda_j \mathbb{I})^{q_j}$$

Sussistono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \mathbb{M}_j &\subseteq \mathbb{M}_j \\ \mathbb{V} &= \mathbb{M}_1 \oplus \mathbb{M}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{M}_r \\ a_j &:= \text{molteplicità algebrica di } \lambda_j \equiv \dim \text{Ker } (\mathcal{T} - \lambda_j \mathbb{I})^{q_j} \equiv \dim \mathbb{M}_j \\ g_j &:= \text{molteplicità geometrica di } \lambda_j \equiv \dim \text{Ker } (\mathcal{T} - \lambda_j \mathbb{I}) \end{aligned}$$

Infatti: $\mathbb{M}_j$ ed il suo complementare $\mathbb{M}_j^c := \text{Im } (\mathcal{T} - \lambda_j \mathbb{I})^{q_j}$ sono invarianti non solo rispetto a $(\mathcal{T} - \lambda_j \mathbb{I})$ ma anche rispetto a $\mathcal{T}$, dato che $\mathcal{T}$ e $(\mathcal{T} - \lambda_j \mathbb{I})$ commutano.

Inoltre $(\mathcal{T} - \lambda_j \mathbb{I})$ è nilpotente di ordine q_j su $\mathbb{M}_j$, invertibile su $\mathbb{M}_j^c$ e quindi λ_j non è autovalore di $\mathcal{T}_2 := \mathcal{T}_{\mathbb{M}_j^c}$. Ma è $p_{\mathcal{T}}(\lambda) = (\lambda_j - \lambda)^{a_j} p_{\mathcal{T}_2}(\lambda)$ con $p_{\mathcal{T}_2}(\lambda_j) \neq 0$ e questo fa vedere che, per ogni j , la $\dim \mathbb{M}_j$ è necessariamente la molteplicità algebrica a_j . ■

Qualora l'operatore $\mathcal{T}$, che è reale, abbia autovalori complessi, dato che essi sono presenti a coppie coniugate, tutto quanto visto si può considerare in ${}^c\mathbb{R}^n$ nel quale ad ogni autospazio generalizzato $\mathbb{M}_j$ si affiancherà il suo complesso coniugato $\overline{\mathbb{M}}_j$ formando così un “piano ${}^c\mathcal{T}$ -invariante” $\mathbb{M}_j \oplus \overline{\mathbb{M}}_j$ la cui parte reale risulta un piano reale di uguale dimensione: $2a_j$, e $\mathcal{T}$ -invariante.

Teorema 1.6.2 [di Jordan]

L'operatore $(\mathcal{T} - \lambda_j \mathbb{I})_{\mathbb{M}_j}$, indotto sullo spazio $\mathbb{M}_j$ da $(\mathcal{T} - \lambda_j \mathbb{I})$, ammette una base sulla quale esso ha matrice

$$\mathbf{T}_J := \begin{pmatrix} 0 & \delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & \delta_{a_j-1} & \\ 0 & & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

con $\delta_k \in \{0, 1\}$ per $k = 1, 2, \dots, a_j - 1$. □

Nota 1.6.3 La molteplicità geometrica $g_i \equiv \dim(Ker(\mathcal{T} - \lambda_i \mathbb{I}))$ è certamente minore o uguale di quella algebrica $a_i \equiv \dim(Ker(\mathcal{T} - \lambda_i \mathbb{I})^{q_i})$ che è non minore dell'esponente q_i risultandogli uguale solo se è presente un unico blocco elementare per quel valore della i . È importante notare che può essere $q_i \leq g_i$; per esempio: per un solo blocco è $q_i \geq g_i = 1$, per l'unità $\mathbb{I}$ è $q_i \leq g_i = n$. Si ricordi che q_i è definito dalle

$$\begin{cases} Ker(\mathcal{T} - \lambda_i \mathbb{I})^{q_i-1} \subset Ker(\mathcal{T} - \lambda_i \mathbb{I})^{q_i} \\ Ker(\mathcal{T} - \lambda_i \mathbb{I})^{q_i} = Ker(\mathcal{T} - \lambda_i \mathbb{I})^{q_i+1} \end{cases}$$

▷

Autovettore generalizzato di rango k := un qualunque vettore $\epsilon^{(\lambda_i)}$ tale che

$$\epsilon^{(\lambda_i)} \in Ker(\mathcal{T} - \lambda_i \mathbb{I})^k \setminus Ker(\mathcal{T} - \lambda_i \mathbb{I})^{k-1}.$$

Base propria dell'operatore := una base costruita, per ciascun autospazio $\mathbb{M}_j$, mediante le “catene”

$$\begin{aligned} v &\in Ker(\mathcal{T} - \lambda_j \mathbb{I})^{q_j} \setminus (Ker(\mathcal{T} - \lambda_j \mathbb{I})^{q_j-1}) \\ \epsilon_{q_j}^{(\lambda_j)} &:= v \\ \epsilon_{q_j-1}^{(\lambda_j)} &:= (\mathcal{T} - \lambda_j \mathbb{I}) v \\ &\dots \\ \epsilon_2^{(\lambda_j)} &:= (\mathcal{T} - \lambda_j \mathbb{I})^{q_j-2} v \\ \epsilon_1^{(\lambda_j)} &:= (\mathcal{T} - \lambda_j \mathbb{I})^{q_j-1} v, \end{aligned}$$

e ripetendo il procedimento a partire da tutti gli altri possibili vettori v , linearmente indipendenti da quelli già precedentemente scelti.

Nota 1.6.4 In base propria la matrice di $\mathcal{T}$ è

$$\mathbf{T}_J = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & \vdots & 0 & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & \mathbf{J}_2 & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \mathbf{J}_3 \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

ove

$$\mathbf{J}_i := \lambda_j \mathbb{I}_k + \mathbf{E}_k \equiv \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda_j \end{pmatrix}$$

con $k \leq q_j \leq a(\lambda_j)$, $i = 1, \dots, g$, ove si è posto $g := \sum_{j=1}^r g_j$ il numero di autovettori indipendenti di $\mathcal{T}$ (o coppie di autovettori indipendenti, nel caso di coppie di autovalori complessi coniugati) e, come sopra, $j = 1, \dots, r$ varia sull'insieme degli autovalori distinti. Almeno uno dei $\mathbf{J}_i$ ha dimensione uguale al valore q_j della corrispondente λ_j . $\triangleright$

Nota 1.6.5 Se sono presenti coppie di radici complesse di molteplicità superiore ad uno, in ${}^c\mathbb{V}$ si hanno blocchi per esempio del tipo

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mu} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\mu} \end{pmatrix} \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{T}_J = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \bar{\mu} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\mu} \end{pmatrix}$$

e quindi si vede che nella base formata dalle parti reali e dagli opposti delle parti immaginarie dei vettori (generalizzati) che costituiscono la base propria di $\mathcal{T}$, questo ha matrice

$$\hat{\mathbf{T}} := \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 1 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

il cui esponenziale (si veda il Cap.III) è ovviamente la matrice

$$e^{\hat{\mathbf{T}}t} := e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t & 0 & 0 \\ \sin \beta t & \cos \beta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta t & -\sin \beta t \\ 0 & 0 & \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \left(\mathbb{I}_4 + t \begin{pmatrix} 0 & \vdots & \mathbb{I}_2 \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \right)$$

 $\triangleright$

Nota 1.6.6 Algoritmo per determinare la base propria di $\mathcal{T}$.

- (i) Scrivere $p_{\mathcal{T}}(\lambda) := (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{a_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{a_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{a_r} \equiv \text{Det} (\mathcal{T} - \lambda \mathbb{I})$ ove $\lambda_i \neq \lambda_j$ e $a_1 + \cdots + a_r = n$.
- (ii) Calcolare $\text{Ker} (\mathcal{T} - \lambda_1 \mathbb{I})^j$ per $j = 1, 2, \dots$ fino a trovare q_1 tale che $\text{Ker} (\mathcal{T} - \lambda_1 \mathbb{I})^{q_1-1} \subset \text{Ker} (\mathcal{T} - \lambda_1 \mathbb{I})^{q_1} = \text{Ker} (\mathcal{T} - \lambda_1 \mathbb{I})^{q_1+1}$.
- (iii) Fissare $v \in \text{Ker} (\mathcal{T} - \lambda_1 \mathbb{I})^{q_1} \setminus \text{Ker} (\mathcal{T} - \lambda_1 \mathbb{I})^{q_1-1}$ e definire gli autovettori generalizzati: $\epsilon_j^{(\lambda_1)} := (\mathcal{T} - \lambda_1 \mathbb{I})^{q_1-j} v$, $j = 1, \dots, q_1$, il che implica $\epsilon_{j-1}^{(\lambda_1)} := (\mathcal{T} - \lambda_1 \mathbb{I}) \epsilon_j^{(\lambda_1)}$ $j = 2, \dots, q_1$, ed $\epsilon_1^{(\lambda_1)} \in \text{Ker} (\mathcal{T} - \lambda_1 \mathbb{I})$.
- (iv) Se $q_1 < a_1$ fissare un altro $v^{(i)} \in \text{Ker} (\mathcal{T} - \lambda_1 \mathbb{I})^{q_1-i} \setminus \text{Ker} (\mathcal{T} - \lambda_1 \mathbb{I})^{q_1-i-1}$ se possibile con $i = 0$, altrimenti con $i = 1$ oppure con $i = 2$, etc., e che sia linearmente indipendente dai precedenti; poi ricominciare con (3) fino ad ottenere in tutto a_1 vettori linearmente indipendenti ripartiti in q_1 catene.
- (v) Ripetere (ii), (iii), (iv), con $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_r$.
- (vi) Scrivere $\mathbf{P}$ tale che $\{\epsilon_i = \mathbf{P}_i^h e_h\}_{i=1, \dots, n}$ e controllare che sia $\mathbf{P} \mathbf{T}_J = \mathbf{T} \mathbf{P}$.

 $\triangleright$

Esempio 6.7 [Non usare un computer!]

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ammette} \quad p_{\mathcal{T}}(\lambda) = (\lambda - 2)^5 \lambda \quad \text{da cui}$$

$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2, \quad \text{con} \quad a_1 = 1 \quad \text{ed} \quad a_2 = 5.$ In corrispondenza ad esse è

$$(\mathbf{T} - 2\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{T} - 2\mathbf{I})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{T} - 2\mathbf{I})^3 = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \ddots & & \ddots \\ 0 & \vdots & \mathbf{B}' \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{T} - 2\mathbf{I})^4 = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \ddots & & \ddots \\ 0 & \vdots & \mathbf{B}'' \end{pmatrix}$$

con $\mathbf{B}' := \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B}'' := \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$. Pertanto si ha $q_2 = 3$. Risolvendo poi l'equazione $(\mathbf{T} - 2\mathbf{I})x = 0$ si ricavano, sulle componenti degli autovettori di $\lambda = 2$, le seguenti condizioni necessarie: $x_1 = x_2$, $x_3 = -x_4$, $x_5 = x_6 = 0$; si riconosce pertanto che è $g_2 = 2$.

Successivamente, dopo aver fissato $\epsilon_1 \in \text{Ker}(\mathcal{T} - 0\mathbf{I})$ (per esempio: $\epsilon_1 = (0, 0, 0, 0, 1, -1)^T$), si ha $\mathbf{v} = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T \in \text{Ker}(\mathcal{T} - 2\mathbf{I})^3 \setminus \text{Ker}(\mathcal{T} - 2\mathbf{I})^2$ poiché ha $x_3 \neq -x_4$ e $x_5 = x_6$, e quindi si ricavano: $\epsilon_2 = (\mathbf{T} - 2\mathbf{I})^2 \mathbf{v} = (2, 2, 0, 0, 0, 0)^T$, ed $\epsilon_3 = (\mathbf{T} - 2\mathbf{I}) \mathbf{v} = (1, -1, 0, 0, 0, 0)^T$, ed $\epsilon_4 = \mathbf{v}$.

Visto poi che non ci sono altri v indipendenti in $\text{Ker}(\mathcal{T} - 2\mathbf{I})^3 \setminus \text{Ker}(\mathcal{T} - 2\mathbf{I})^2$ si fissa $w \in \text{Ker}(\mathcal{T} - 2\mathbf{I})^2 \setminus \text{Ker}(\mathcal{T} - 2\mathbf{I})$. Deve essere $x_3 = -x_4$ ed $x_5 = x_6$, quindi è giustificato il tentativo: $\mathbf{w} = (0, 0, 1, -1, 1, 1)^T$. Si controlla che w ed u siano indipendenti, poi si pone $\epsilon_5 = (\mathbf{T} - 2\mathbf{I}) \mathbf{w} = (0, 0, 2, -2, 0, 0)^T$ ed $\epsilon_6 = \mathbf{w}$. Ne risulta

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{T}_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{e si ha} \quad \mathbf{P}\mathbf{T}_J = \mathbf{T}\mathbf{P} \quad \text{ed} \quad e^{\mathbf{T}_J t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Si osservi che se lo scopo è quello di risolvere l'equazione $\dot{x} = \mathcal{T}x$, a questo punto è sufficiente usare la formula semplificata del § III.3 e proseguire come segue.

Il $\text{Ker}(\mathcal{T} - 2\mathbf{I})^3$ è lo spazio in cui le prime quattro componenti sono arbitrarie e le ultime due tali che $-4r + 4s = 0$ e quindi tali che $r = s$; esso è pertanto lo

$$\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T; \right. \\ \left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \right\};$$

allo stesso tempo l'unico autovettore di $\lambda_1 = 0$ è $\epsilon_1 = (0, 0, 0, 0, 1, -1)^T$. Quindi la decomposizione di $\mathbf{x}_0$ è del tipo

$$\mathbf{x}_0 =: \mathbf{x}_1|_0 + \mathbf{x}_2|_0 = (0, 0, 0, 0, a, -a)^T + (c_1, c_2, c_3, c_4, b, b)^T,$$

e si può controllare che la (FR) del § III.3 fornisce il vettore

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + t e^{2t}(c_1 - c_2 + c_3 + c_4) + t^2 e^{2t}(c_3 + c_4) \\ c_2 e^{2t} + t e^{2t}(c_1 - c_2 - c_3 - c_4) + t^2 e^{2t}(c_3 + c_4) \\ c_3 e^{2t} + 2t e^{2t}b \\ c_4 e^{2t} - 2t e^{2t}b \\ a + b e^{2t} \\ -a + b e^{2t} \end{pmatrix}$$

che naturalmente è lo stesso risultato che si ottiene dalla prima parte dell'esercizio applicando la matrice $\mathbf{P} e^{\mathbf{T}Jt}$ al vettore $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_6)^T$ tale che $(c_1, c_2, c_3, c_4, \xi_1 + \xi_6, -\xi_1 + \xi_6)^T := \mathbf{x}_0 = \mathbf{P}\boldsymbol{\xi}$. $\square$

A.7 Richiami di Analisi Reale

Sia dato uno spazio vettoriale $\mathbb{V}$, di *dimensione finita* n , su un campo $\mathbb{K}$ che in questo paragrafo si supporrà essere il campo dei reali. (Il ricorso a spazi vettoriali sul campo dei complessi verrà fatto solo saltuariamente e per ottenere risultati concernenti i primi in quanto sottoinsiemi dei secondi. È in tal senso conveniente supporre, per il momento, $\mathbb{K} \equiv \mathbb{C}$ per poter usare di tale maggiore generalità nelle definizioni e proprietà che qui vengono ricordate.)

Una norma su $\mathbb{V}$ è una funzione definita positiva, omogenea, subadditiva. Un prodotto scalare su $\mathbb{V}$ una forma bilineare (Hermitiana) simmetrica definita positiva (vedi oltre).

Verrà usata la seguente notazione (si veda preliminarmente il § A.5):

- $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ è una base in $\mathbb{V}$;
- $x = x^i e_i$ è la conseguente rappresentazione cartesiana del vettore $x \in \mathbb{V}$; si indicherà con $\mathbf{x} := (x^1, \dots, x^n)$ la n-pla dei numeri (del campo $\mathbb{K}$) che in tal modo la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ assegna al vettore x , ed all'occorrenza la si considererà una matrice ad n righe ed una colonna, riservando la notazione $\mathbf{x}^T$ alla matrice ad una riga ed n colonne *formata anch'essa dalle componenti controvarianti di x* ;
- $\langle x, y \rangle := \sum_{i,j=1}^n x^i \langle e_i, e_j \rangle \bar{y}^j = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\kappa} \bar{\mathbf{y}}$ è il prodotto scalare;
- $x_i := \langle x, e_i \rangle$ sono le componenti covarianti del vettore. Si indicherà con $\mathbf{x}^* := (x_1, \dots, x_n)$ la n-pla dei numeri (del campo $\mathbb{K}$) che in tal modo resta assegnata al vettore x , ed all'occorrenza la si considererà una matrice ad una riga ed n colonne;
- $\{e^{*i}\}_{i=1,\dots,n}$ una base nello spazio $\mathbb{V}^*$ *duale di $\mathbb{V}$* ; e cioè quello delle forme lineari su $\mathbb{V}$. [Siccome la più generale forma Hermitiana su x ha come risultato un numero $\sum a_i \bar{x}^i$, ciascuna forma: $a \equiv \langle a, \cdot \rangle \in \mathbb{V}^*$ è totalmente individuata dagli n scalari $\mathbf{a}^* = (a_1, \dots, a_n)$ mediante la: $a = a_i e^{*i}$]. Nel seguito, tuttavia, si farà generalmente ricorso al teorema dell'isomorfismo fra spazi vettoriali equidimensionali, e *si assumeranno definiti nello spazio $\mathbb{V}$ anche i "vettori" a che la base $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ ed il prodotto $\langle \cdot, \cdot \rangle$ individuano mediante la corrispondenza $a : x \mapsto \sum a_i \bar{x}^i \equiv a^j \langle e_j, e_i \rangle \bar{x}^i$ [In particolare, gli $\{e^{*i}\}_{i=1,\dots,n}$ sono quei vettori tali che $e^{*i} : x \mapsto \bar{x}^i = \langle e^{*i}, x \rangle$, e sono rappresentati da $e^{*i} = (e^{*i})^j e_j$ per definizione tali che $\langle e^{*i}, e_h \rangle = \delta_h^i = (e^{*i})^j \langle e_j, e_h \rangle$. In tal modo risulta valida l'espressione $x = x_i e^{*i}$ perché gli $\{e^{*i}\}_{i=1,\dots,n}$ sono una base, ed $x - x_i e^{*i}$ ha componenti (di Fourier) nulle su ogni versore e^{*j}].*

- Sussistono le

$$x_i = x^j \langle e_j, e_i \rangle =: x^j \boldsymbol{\kappa}_{ji}, \quad \langle x, y \rangle = x_i \bar{y}^i, \quad \mathbf{x}^* = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\kappa}, \quad \overline{\boldsymbol{\kappa}} = \boldsymbol{\kappa}^T,$$

e le

$$\begin{aligned} \bar{x}^i &= e^{*i}(x) & x &= \sum \overline{e^{*i}(x)} e_i & (e^{*i})^j &= \boldsymbol{\kappa}^{ij} & (e^{*i})_j &= \delta_j^i \\ x_i &= e_i(x^*) & x^* &= \sum e_i(x^*) e^{*i} & (e_i)_h &= \boldsymbol{\kappa}_{ih} & (e_i)^h &= \delta_i^h \end{aligned}$$

Sui prodotti scalari, e quando sia fissata la base, può essere allora conveniente usare la notazione con componenti miste. I numeri $\{x^i\}_{i=1,\dots,n}$ coincidono con i numeri $\{x_i\}_{i=1,\dots,n}$ soltanto quando la forma (Hermitiana) del prodotto scalare riconosce come ortonormali i versori di base $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$.

- Un operatore (invertibile) $\mathcal{P}$ induce un cambio di base: da $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ ad $\{\epsilon_i := \mathcal{P}e_i\}_{i=1,\dots,n}$. Detta $\mathbf{P}$ la sua $\{e\}$ -matrice, per definizione si ha

$$\epsilon_h = \mathbf{P}^k_h e_k \quad \text{e quindi} \quad e_k = \mathbf{P}^{-1h}_k \epsilon_h .$$

In modo conseguente mutano le componenti “naturalì” o controvarianti: $\{x^j\}_{j=1,\dots,n}$ di un vettore: $x = \xi^j \epsilon_j = x^h e_h$ secondo la $x^h = \mathbf{P}^h_j \xi^j$, ovvero $\mathbf{x} = \mathbf{P}\boldsymbol{\xi}$. A loro volta le componenti covarianti $\{x_i\}_{i=1,\dots,n}$ mutano secondo la

$$x_k := \langle x, e_k \rangle = \langle x, \epsilon_h \rangle \overline{\mathbf{P}}^{-1h}_k = \xi_h \overline{\mathbf{P}}^{-1h}_k = \overline{\mathbf{P}}^{-T}_k{}^h \xi_h$$

o anche

$$x_k := \langle x, e_k \rangle = \xi_j \langle \epsilon^{*j}, e_k \rangle = \xi_j \overline{\mathbf{P}}^{-1j}_i \langle \epsilon^{*i}, e_k \rangle = \xi_j \overline{\mathbf{P}}^{-1j}_k$$

ove si è usata la $\epsilon^{*j} = \overline{\mathbf{P}}^{-1j}_i \epsilon^{*i}$ e si è posto

$$\langle x, \epsilon_j \rangle = \xi^h \langle \epsilon_h, \epsilon_j \rangle =: \xi^h \boldsymbol{\chi}_{hj} = \xi_j ,$$

da non confondere con $\xi^h \boldsymbol{\kappa}_{hj}$.

Se ne ricava, con: $\boldsymbol{\xi}^* = \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\chi} = (\xi_1 \dots, \xi_n)$, l'espressione

$$\mathbf{x}^* = \boldsymbol{\xi}^* \overline{\mathbf{P}}^{-1} \equiv \boldsymbol{\xi}^* (\boldsymbol{\chi}^{-1} \mathbf{P}^T \boldsymbol{\kappa}) \equiv \boldsymbol{\xi}^* \boldsymbol{\chi}^{-1} \boldsymbol{\kappa} \overline{\mathbf{P}}^* .$$

Quando il tensore della metrica è comunque scelto unitario, la $\boldsymbol{\kappa}$ scompare, e si conviene di riservare la posizione in alto per l'indice di riga (e cioè l'indice che percorre lo spazio di arrivo).

Negli spazi vettoriali *reali* a dimensione finita sono di frequente uso le seguenti particolari norme:

Norma Euclidea standard $:= \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i)^2} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$

quella cioè definita a partire dal prodotto scalare standard

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x^i \bar{y}^i = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}^i, \quad \boldsymbol{\kappa}_{ij} := \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

e che quindi *assume i versori* $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ *come ortonormali*.

Norma Euclidea $:= \|x\|_2 \equiv \sqrt{\langle x, x \rangle} := \sqrt{\sum_{i=1}^n x^h \boldsymbol{\kappa}_{hi} \bar{x}^i} = \sqrt{\mathbf{x}^T \boldsymbol{\kappa} \bar{\mathbf{x}}}$;

Norma del “Tassinaro” $:= \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x^i|$;

Norma del Sup $:= \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x^i|$;

Norma Euclidea in base $\mathbb{B}$ $:=$ la norma $\|x\|_{\mathbb{B}}$ data da

$$\|x\|_{\mathbb{B}} := \sqrt{\sum_{i=1}^n \xi^i \boldsymbol{\kappa}_{ij} \bar{\xi}^j} = \sqrt{\boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\kappa} \bar{\boldsymbol{\xi}}} .$$

In questa relazione, le $(\xi^1, \dots, \xi^n)$ sono le componenti del vettore x rispetto ad un'altra base $\mathbb{B}$, e $\boldsymbol{\kappa}$ è la matrice del tensore della metrica $\mathcal{K}$ della base $\{e\}$, ovvero: $\boldsymbol{\kappa}_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$.

La base $\mathbb{B}$ sia individuata (ad esempio) mediante un operatore invertibile $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P} : \{e_i\}_{i=1,\dots,n} \mapsto \{\epsilon_j := \mathcal{P}e_j\}_{j=1,\dots,n} =: \mathbb{B} ,$$

e si chiami $\mathcal{P}^{-*}$ l'aggiunto di $\mathcal{P}^{-1}$ rispetto al prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La matrice del tensore $\mathcal{K}$ è allora anche esprimibile mediante la

$$\boldsymbol{\kappa}_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle = \langle \mathcal{P}^{-1} \epsilon_i, \mathcal{P}^{-1} \epsilon_j \rangle = \langle \epsilon_i, \mathcal{P}^{-*} \mathcal{P}^{-1} \epsilon_j \rangle =: \langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle_{\mathcal{S}}$$

ove si sono introdotti

$$\text{l'operatore def. pos. } \mathcal{S} := \mathcal{P}^{-*} \mathcal{P}^{-1}, \quad \text{ed il prodotto } \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}} := \langle \cdot, \mathcal{S} \cdot \rangle .$$

Il fatto che $\mathcal{K}$ sia un tensore metrico assicura che l'operatore $\mathcal{S}$ è definito positivo, e che il prodotto $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}}$ sia un corretto prodotto interno. Si osservi che *rispetto al prodotto scalare* $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}}$ (e non rispetto al prodotto scalare iniziale: $\langle \cdot, \cdot \rangle$) i versori $\{\epsilon_i := \mathcal{P}e_i\}_{i=1,\dots,n}$ hanno la stessa metrica dei versori $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$, e cioè:

$$(\chi_{\mathcal{S}})_{ij} := \langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle_{\mathcal{S}} = \langle \epsilon_i, \mathcal{S}\epsilon_j \rangle = \langle \mathcal{P}e_i, \mathcal{S}\mathcal{P}e_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \kappa_{ij},$$

in generale diversa dalla

$$\langle e_i, e_j \rangle_{\mathcal{S}} = \langle e_i, \mathcal{S}e_j \rangle = \langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle = \chi_{ij} =: (\kappa_{\mathcal{S}})_{ij}.$$

La norma $\|x\|_{\mathbb{B}}$ è quella indotta da tale prodotto scalare

$$\langle x, y \rangle_{\mathcal{S}} = \langle x, \mathcal{S}y \rangle = \xi^i \langle \epsilon_i, \mathcal{S}\epsilon_j \rangle \bar{\eta}^j = \xi^i \langle e_i, e_j \rangle \bar{\eta}^j = x^i \langle e_i, \mathcal{P}^{-*}\mathcal{P}^{-1}e_j \rangle \bar{y}^j,$$

ovvero

$$x \kappa_{\mathcal{S}} y = \xi \kappa \eta = x \kappa \overline{\mathcal{P}^{-*}} \overline{\mathcal{P}^{-1}} y$$

generalmente diverso da

$$x^i \kappa_{ij} \bar{y}^j = x^i \langle e_i, e_j \rangle \bar{y}^j = \langle x, y \rangle = \xi^i \langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle \bar{\eta}^j = \xi^i \chi_{ij} \bar{\eta}^j.$$

La norma $\|\cdot\|_{\mathbb{B}} = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{B}}}$ e la $\|\cdot\|_2 = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ non coincidono a meno che il cambio di base $\mathcal{P}$ sia (unitario o) ortogonale: $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}^{-1}$, e quindi $\mathcal{S} = \mathbf{I}$ ed $\mathcal{P}^{-T} \kappa = \kappa \mathcal{P}$. In tal caso entrambe le basi ammettono la stessa metrica, ed in particolare essere entrambe ortonormali rispetto ad uno stesso prodotto scalare.

È chiaro come mai, talvolta, la norma $\|\cdot\|_{\mathbb{B}}$ venga anche chiamata

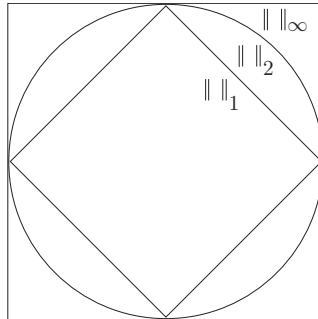
Norma rispetto all'operatore, (autoaggiunto) definito positivo, $\mathcal{S} := \mathcal{P}^{-*}\mathcal{P}^{-1}$.

N.B. 1.7.1 Si noti che la base ortonormale $\mathbb{B}_{\mathcal{S}} := \{\mathcal{P}_{\mathcal{S}}e_i\}_{i=1,\dots,n}$ fatta con gli autovettori di un qualsiasi operatore autoaggiunto $\mathcal{S}$ non è la base $\mathbb{B} := \{\mathcal{P}e_i\}_{i=1,\dots,n}$, qualora questa esista, determinata dall'operatore $\mathcal{P}$ che definisce $\mathcal{S}$ mediante la $\mathcal{S} = \mathcal{P}^{-*}\mathcal{P}^{-1}$,

La prima esiste certamente dato che $\mathcal{S}$ è normale, e può essere scelta ortonormale: $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}^* \mathcal{P}_{\mathcal{S}} = \mathbf{I} = \mathcal{P}_{\mathcal{S}}^{-*} \mathcal{P}_{\mathcal{S}}^{-1}$ (ove $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}$ è la $\{e\}$ -matrice di $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}$), o comunque con la stessa metrica della base $\{e\}$; conserva quindi il prodotto scalare: $\|x\|_{\mathbb{B}}^2 = x^T \kappa \bar{x} = \langle x, x \rangle = \xi_{\mathcal{S}}^T \kappa \bar{\xi}_{\mathcal{S}} = \|x\|_{\mathbb{B}_{\mathcal{S}}}^2$, e verifica la $\langle x, \mathcal{S}x \rangle = \lambda_{(i)} \xi_{\mathcal{S}}^j \kappa_{ji} \bar{\xi}_{\mathcal{S}}^i$ giacché assegna ad $\mathcal{S}$ la matrice $\lambda_{(i)} \delta_{ji}$.

Affinché esista la seconda occorre che l'operatore $\mathcal{S}$ (certamente semidefinito) sia *definito positivo*. In tal caso essa viene costruita mediante il procedimento di Gram-Schmidt a partire dal prodotto $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}}$; inoltre, come detto sopra, assegna all'operatore $\mathcal{S} = \mathcal{P}^{-*}\mathcal{P}^{-1}$ (la cui $\{e\}$ -matrice è $\mathcal{P}^{-*}\mathcal{P}^{-1}$) la matrice $\Sigma = \mathcal{P}^{-1} \mathcal{P}^{-*} = \overline{\chi}^{-1} \kappa$, e fornisce $\langle x, \mathcal{S}x \rangle \equiv \langle x, x \rangle_{\mathcal{S}} \equiv \|x\|_{\mathbb{B}}^2 = \xi^T \kappa \bar{\xi}$, apriori diverso da $\langle x, x \rangle = \xi_{\mathcal{S}}^T \kappa \bar{\xi}_{\mathcal{S}}$. Per la prima, $\chi = \mathcal{K}$ e $\chi_{\mathcal{S}} = \lambda_{(i)} \mathbf{I}$, per la seconda $\chi_{\mathcal{S}} = \mathcal{K}$ e Σ (la $\{e\}$ -matrice di $\mathcal{S}$) è generalmente diversa dalla matrice diagonale $\lambda_{(i)} \mathbf{I}$. $\diamond$

La figura mostra le frontiere degli insiemi $\{x \mid \|x\| \leq 1\}$



Si ricordi poi la definizione di:

Norme Equivalenti ϖ_1, ϖ_2 := esistono $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tali che

$$a\varpi_2(x) \leq \varpi_1(x) \leq b\varpi_2(x) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{V}.$$

Naturalmente l'equivalenza che ne risulta è ai fini delle convergenze *ma non* ai fini della rapidità con le quali le successioni convergono. Si osservi che quando le due norme sono equivalenti i due spazi metrici $(\mathbb{V}, \varpi_1)$ e $(\mathbb{V}, \varpi_2)$

sono metricamente equivalenti (e cioè le metriche indotte dalle due norme sono uniformemente equivalenti, nel senso che l'identità è funzione uniformemente continua); pertanto le successioni di Cauchy restano tali in entrambi gli spazi metrici.)

Proposizione 1.7.2 Giacché lo spazio $\mathbb{V}$ è a dimensione finita, se ϖ è una (qualunque) norma su $\mathbb{V}$ allora ogni altra norma è equivalente ad essa. $\square$

Dimostrazione È facile constatare che ϖ è funzione continua su $\mathbb{V}$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_2$. Infatti: esiste $\mu \in \mathbb{R}$ tale che $\varpi(x) \leq \sum |x^i| \varpi(e_i) \leq (\sum |x^i|) \mu \leq n\mu \|x\|_\infty \leq n\mu \|x\|_2$, e quindi $|\varpi(x) - \varpi(y)| \leq \varpi(x - y) \leq n\mu \|x - y\|_2$. D'altra parte la superficie sferica è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^n$, $n < \infty$, (sempre rispetto alla norma $\|\cdot\|_2$). Esistono quindi finiti $a := \min_{\|y\|_2=1} \varpi(y)$ e $b := \max_{\|y\|_2=1} \varpi(y)$. Infine, per $\alpha > 0$ si ha $\varpi(x/\alpha) = \varpi(x)/\alpha$; e siccome i vettori y che hanno $\|y\|_2 = 1$ sono tutti e soli del tipo $x/\|x\|_2$ con x qualsiasi in $\mathbb{V}$, ponendo $\alpha := \|x\|_2$ si ha per costruzione che

$$a \leq \frac{\varpi(x)}{\|x\|_2} \leq b \quad x \in \mathbb{V}.$$

■

Esempio 7.3

$$\|x\|_\infty^2 \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq n \|x\|_\infty^2;$$

ed analogamente

$$\frac{1}{n} \|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_1.$$

In particolare sussistono le

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2,$$

perchè le somme di quadrati di numeri non negativi sono non superiori ai quadrati delle somme e, d'altra parte, si ha che $0 \leq \sum_{i < j} (|x^i| - |x^j|)^2 = (n-1) (\sum |x^i|^2) - 2 \sum_{i < j} |x^i| |x^j| = n (\sum |x^i|^2) - (\sum |x^i|)^2$. $\square$

Si consideri ora un operatore $\mathcal{T} : \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_2$, e su entrambi $\mathbb{V}_1$ e $\mathbb{V}_2$ (reali, di dimensioni $n, m < \infty$) sia fissata la norma euclidea.

Si ponga poi: $\tau_{min} :=$ l'estremo inferiore dei numeri reali τ tali che risulti $\|\mathcal{T}x\|_2 \leq \tau \|x\|_2$ per ogni $x \in \mathbb{V}_1 \setminus \{0\}$.

N.B. 1.7.4 Almeno un τ esiste finito perché $\mathcal{T}$ è lineare continuo. D'altra parte, per l'omogeneità delle norme e di $\mathcal{T}$ si ha che τ_{min} è anche l'estremo inferiore dei numeri reali τ tali che $\|\mathcal{T}x_1\|_2 \leq \tau$ per ogni $x_1 \in \mathbb{R}^n$ con $\|x_1\|_2 = 1$. Infatti, l'omogeneità delle norme e la linearità di $\mathcal{T}$ implicano che $\|\mathcal{T}x\| = \|x\| \left\| \mathcal{T} \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\|$.

In particolare, sebbene la $\|x\| \leq \|y\|$ non basti a concludere che $\|\mathcal{T}x\| \leq \|\mathcal{T}y\|$, tuttavia questa sussiste se $x = \lambda y$ e se $|\lambda| \leq 1$. Ne segue che $\|\mathcal{T}x\| \leq \|\mathcal{T}(x/\|x\|)\|$ per tutti gli x che hanno $\|x\| \leq 1$.

Si osservi ora che per ogni $x \neq 0$ esiste x_1 tale che $x = \lambda x_1 = \|x\| x_1$, con $\|x_1\| = 1$; quindi per $\|x\| \leq 1$ si ha $\|\mathcal{T}x\| = \|x\| \|\mathcal{T}x_1\| \leq \|\mathcal{T}x_1\|$, da cui $\sup_{\|x\| \leq 1} \|\mathcal{T}x\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|\mathcal{T}x\|$. Sussiste però anche la seguente inclusione $\{x \in \mathbb{V} \mid \|x\| \leq 1\} \supset \{x \in \mathbb{V} \mid \|x\| = 1\}$, per cui risulta

$$\sup_{\|x\|=1} \|\mathcal{T}x\| \equiv \sup_{\|x\| \leq 1} \|\mathcal{T}x\|.$$

D'altra parte, il $\sup_{\|x\| \leq 1} \|\mathcal{T}x\|$ è anche un max, giacché la sfera unitaria è insieme chiuso e limitato in uno spazio a dimensione finita, e quindi compatto.

Quando la norma è la $\|\cdot\|_2$, si chiami α tale massimo. Esso è maggiore o uguale di $\|\mathcal{T}x\|_2$ per ogni $\|x\|_2 = 1$, e perciò $\tau_{min} \leq \alpha$. Ma è anche estremo superiore, e quindi esiste x_ε con $\|x_\varepsilon\| = 1$ tale che $\alpha - \varepsilon \leq \|\mathcal{T}x_\varepsilon\| \leq \tau_{min}$. Ciò vero per ogni $\varepsilon > 0$, è anche $\alpha \leq \tau_{min}$. $\diamond$

In definitiva si definisce:

Norma di un operatore: $\|\mathcal{T}\|$:= la funzione che associa ad ogni operatore lineare $\mathcal{T} : \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_2$ il numero non negativo

$$\tau_{min} \equiv \alpha := \max_{\|x\|_2=1} \|\mathcal{T}x\|_2 .$$

Tale funzione prende anche il nome di Norma Uniforme o Norma Spettrale.

N.B. 1.7.5 Essa ha infatti le proprietà di una norma:

- È definita positiva, infatti $\|\mathcal{T}x\|_2 \neq 0$ per almeno un x purchè $Im \mathcal{T} \neq \{0\}$;
- È omogenea, perchè tale è $\|\cdot\|_2$ e perchè $\max |\alpha| \|\mathcal{T}x\|_2 = |\alpha| \max \|\mathcal{T}x\|_2$;
- È subadditiva, perchè $\|(\mathcal{T} + \mathcal{S})x\|_2 \leq \|\mathcal{T}x\|_2 + \|\mathcal{S}x\|_2 \leq (\|\mathcal{T}\| + \|\mathcal{S}\|) \|x\|_2$;
- Sussiste la $\|\mathcal{T}\mathcal{S}\| \leq \|\mathcal{T}\| \|\mathcal{S}\|$;
- Induce una metrica, perchè $\|(\mathcal{T} - \mathcal{S})x\|_2 > 0$ purchè $\mathcal{T} \neq \mathcal{S}$;
- Si chiama spettrale, perchè detto $\hat{\lambda}_{max}$ il più grande autovalore (reale non negativo) dell'operatore $\mathbf{K}$ -autoaggiunto, semidefinito positivo, $\mathcal{S} := \mathcal{T}^* \mathcal{T}$, si ha $\|\mathcal{T}\| = \sqrt{\lambda_{max}^{(\mathcal{S})}}$. Infatti, espresso il prodotto scalare mediante le componenti nella base $\mathbf{K}$ -ortonormale degli autovettori di $\mathcal{S} = \mathcal{T}^* \mathcal{T}$ si vede che: $\|\mathcal{T}x\|_2^2 = \langle \mathcal{T}^* \mathcal{T}x, x \rangle = \sum \lambda_{(i)}^{(\mathcal{S})} \xi_{\mathcal{S}^j} \mathbf{K}_{ji} \xi_{\mathcal{S}^i}$, con $\{\xi_{\mathcal{S}^i}\}_{i=1, \dots, n}$ le componenti dei vettori in tale base. Inoltre la sfera unitaria contiene anche vettori con $\mathcal{S}$ -componenti tutte nulle salvo una.
- Se $\mathcal{T}$ stesso è autoaggiunto si ha $\|\mathcal{T}\| = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$, con $\{\lambda_i\}_{i=1, \dots, n}$ gli autovalori di $\mathcal{T}$.
(Nel caso generale non è detto che $\lambda_{max}^{(\mathcal{S})}$ sia il massimo dei λ_i^2 , che possono essere complessi; né è detto [Voyevodin IX.7.8; Gantmacher IX.12] che $\lambda_{(i)}^{(\mathcal{S})} = \lambda_{(i)} \bar{\lambda}_{(i)}$, a meno che $\mathcal{T}$ sia normale).
- Non va confusa questa norma con le altre, equivalenti, che si ottengono in modo analogo, quali per esempio le seguenti norme (il cui valore dipende dal sistema di coordinate scelto)

$$\begin{aligned} \max_{\|x\|_\infty=1} \|\mathcal{T}x\|_1 &= \sum_{i,j}^{1,n} |\mathbf{T}_j^i|, \\ \max_{\|x\|_\infty=1} \|\mathcal{T}x\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\mathbf{T}_j^i| \\ \max_{\|x\|_1=1} \|\mathcal{T}x\|_1 &= \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |\mathbf{T}_j^i|. \end{aligned}$$

◇

Proposizione 1.7.6 Lo spazio $\mathcal{L}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)$ degli operatori lineari

$$\mathcal{T} : \left(\mathbb{V}_1, \|\cdot\|^{(1)} \right) \longrightarrow \left(\mathbb{V}_2, \|\cdot\|^{(2)} \right)$$

è uno spazio lineare completo se lo è $\left(\mathbb{V}_2, \|\cdot\|^{(2)} \right)$. □

Un esempio di spazio completo è $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$, e quindi lo è anche qualunque $\left(\mathbb{V}_2, \|\cdot\|^{(2)} \right)$ che sia ad esso isomorfo.

Dimostrazione

Sia data una successione di Cauchy, per esempio rispetto alla norma detta, di operatori lineari $\{\mathcal{T}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Per un qualunque fissato $x \in \mathbb{V} \setminus \{0\}$ si pongano $y_i := \mathcal{T}_i x$. Per $\varepsilon > 0$ ed h, k sufficientemente grandi si ottiene $\|y_h - y_k\|^{(2)} = \|(\mathcal{T}_h - \mathcal{T}_k)x\|^{(2)} \leq \|\mathcal{T}_h - \mathcal{T}_k\| \|x\|^{(1)} \leq \varepsilon \|x\|^{(1)}$. Ma $\|x\|^{(1)}$ è indipendente da ε, h, k , e quindi $\{y_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ è Cauchy in $(\mathbb{V}_2, \|\cdot\|^{(2)})$. La completezza di quest'ultimo garantisce l'esistenza del limite $\hat{y} := \lim_{h \rightarrow \infty} y_h$. D'altra parte il passaggio al limite conserva la struttura lineare, e quindi il vettore $\hat{y}$ sarà necessariamente una combinazione lineare, con coefficienti che dipendono linearmente dalle componenti $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ di x , dei (peraltro arbitrari) vettori della base:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathcal{T}_h (x^k e_k^{(1)}) = x^k \lim_{h \rightarrow \infty} \mathcal{T}_h e_k^{(1)} =: x^k \tau_k = x^k \mathbf{T}^j_k e_j^{(2)}.$$

Esso è pertanto un trasformato lineare del vettore x , e quindi definisce un operatore $\mathcal{T} \in \mathbb{L}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)$ tale che $\hat{y} =: \mathcal{T}x$, e la cui $\{e\}$ -matrice è la $\mathbf{T}$.

Infine, siccome $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è Cauchy, per k grande l'operatore $\mathcal{T}$ verifica la

$$\left\| (\mathcal{T}_k - \mathcal{T}) \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{\|x\|} \quad \text{e quindi} \quad \max_{\|x\|=1} \|(\mathcal{T}_k - \mathcal{T})x\| \equiv \|\mathcal{T}_k - \mathcal{T}\| < \varepsilon.$$

L'operatore $\mathcal{T}$ è allora il (solo) *limite in norma* della successione $\{\mathcal{T}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. ■

Conseguenza

Data una successione di operatori $\{\mathcal{S}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{L}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)$ si considera la famiglia dei numeri $\|\mathcal{S}_k - \mathcal{S}_h\|$. Se questi sono piccoli per h, k grandi, e se $(\mathbb{V}_2, \|\cdot\|^{(2)})$ è completo, allora ha significato parlare dell'operatore limite (in norma) della successione.

In particolare se la successione è una successione di somme parziali $\mathcal{S}_h := \sum_{j=1}^h \mathcal{T}_j$, e si nota che, dato $\varepsilon > 0$, per h e k sufficientemente grandi sussiste la

$$\|\mathcal{S}_h - \mathcal{S}_k\| \equiv \left\| \sum_{j=k+1}^h \mathcal{T}_j \right\| \leq \varepsilon,$$

allora si può affermare che *esiste*, in $\mathbb{L}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)$, la *somma della serie*, e cioè un operatore $\mathcal{S} := \sum_{h=1}^{\infty} \mathcal{T}_h$ tale che

$$\left\| \mathcal{S} - \sum_{j=1}^h \mathcal{T}_j \right\| \xrightarrow[h \rightarrow \infty]{} 0.$$

Una tal serie si dice *assolutamente convergente* se accade che anche la serie delle norme $\sum_{k=1}^{\infty} \|\mathcal{T}_k\|$ è convergente (da non confondere con la successione, convergente, delle norme delle somme ridotte: $\left\| \sum_{j=1}^h \mathcal{T}_j \right\|$).

Nota 1.7.7 Sia data una qualsiasi successione $\{R_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ di operatori in $\mathbb{L}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)$. Esaminare le differenze $\|R_h - R_k\|$ è ben diverso dal considerare le differenze $\|R_h\| - \|R_k\|$.

Se accade che $\|R_h - R_k\| \leq \varepsilon$ per h, k abbastanza grandi, e cioè se la successione $\{R_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy, certo *ne segue* che la successione $\{\|R_h\|\}_{h \in \mathbb{N}}$ è anch'essa di Cauchy; infatti: $|\|R_k\| - \|R_h\|| \leq \|R_k - R_h\|$.

Tuttavia il viceversa non sussiste, in generale, a meno che: il limite delle $\|R_h\|$ sia zero, nel qual caso $\|R_h - R_k\| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2$, oppure quando la norma della differenza sia uguale alla differenza delle norme, e cioè quando gli operatori sono proporzionali: $R_h = \lambda_h R$; e anche in tal caso basta che la successione $\{\lambda_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ sia convergente per avere che $\{\|R_h\|\}_{h \in \mathbb{N}}$ è convergente, e che $\{R_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ è convergente. ▷

Sussiste, tuttavia, la seguente, generale,

Proposizione 1.7.8 Se la successione $\{R_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ è una successione di somme ridotte, e cioè ha come generico elemento $\mathcal{S}_k := \sum_{i=1}^k \mathcal{T}_i$, e quindi $\mathcal{S}_h - \mathcal{S}_k := \sum_{i=k+1}^h \mathcal{T}_i$, allora studiando la convergenza o meno

non già della successione delle norme delle somme $\{\|\mathcal{S}_k\|\}_{k \in \mathbb{N}}$, ma della successione delle somme delle norme $\{s_h := \sum_{i=1}^h \|\mathcal{T}_i\|\}_{h=1, \dots, n}$, dall'essere $\|\mathcal{S}_h - \mathcal{S}_k\| = \left\| \sum_{i=k+1}^h \mathcal{T}_i \right\| \leq \sum_{i=k+1}^h \|\mathcal{T}_i\|$ si può concludere che se lo spazio $\mathbb{L}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)$ è completo e se la serie $\sum_{i=1}^h \|\mathcal{T}_i\|$ delle norme degli argomenti è convergente allora è convergente in $\mathbb{L}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)$ (in norma, assolutamente ed uniformemente) la serie $\sum_{i=1}^h \mathcal{T}_i$ degli argomenti medesimi. $\square$

In effetti si è provato, più in generale, che: in uno spazio lineare normato completo ogni serie assolutamente convergente è convergente.

È infine opportuno notare che sussiste anche l'affermazione complementare:

Se dall'assoluta convergenza di una qualsiasi serie di uno spazio normato se ne può dedurre la convergenza, allora lo spazio è completo.

Infatti: data in esso una qualunque successione di Cauchy, se ne potrà estrarre una sottosuccessione $\{x_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ tale che $\|x_{h+1} - x_h\| < 2^{-h}$. La serie $\sum_{h=1}^{\infty} 2^{-h}$ è convergente e quindi l'ipotesi implica che è convergente la serie $\sum_{h=1}^{\infty} (x_{h+1} - x_h)$; le somme parziali di quest'ultima sono d'altronde $x_h - x_1$. È quindi convergente la sottosuccessione $\{x_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ e di qui la successione di partenza.

A.8 Richiami di Analisi Complessa

Con la locuzione *Retta complessa* $\mathbb{C}$ si intende lo spazio dei “numeri” z indicati con

$$z \equiv \alpha + i\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

dotato delle operazioni di somma e di prodotto secondo la:

$$\begin{cases} z + z' = (\alpha + \alpha') + i(\beta + \beta') \\ z \cdot z' = (\alpha\alpha' - \beta\beta') + i(\alpha\beta' + \beta\alpha'). \end{cases}$$

Tali operazioni sono

$$\begin{array}{lll} \text{commutative} & z_1 + z_2 = z_2 + z_1, & z_1 z_2 = z_2 z_1; \\ \text{associative} & z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, & z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3; \\ \text{"." è "+" distributiva} & z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3; & \end{array}$$

esistono gli elementi neutro ed inverso:

$$\begin{cases} \text{lo zero} & 0 := 0 + i0 \\ \text{l'unità} & 1 := 1 + i0 \end{cases} \quad \begin{cases} -z := z + (-z) = 0 \\ z^{-1} := z z^{-1} = 1 \quad \text{se } z \neq 0. \end{cases}$$

In particolare, riscrivendo quest'ultima relazione nella forma $\begin{cases} (\alpha\alpha' - \beta\beta') = 1 \\ (\beta\alpha' + \alpha\beta') = 0, \end{cases}$ ed usando il fatto che, per ipotesi, è $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, si ricava

$$z^{-1} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - i \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Riassumendo: *i complessi formano un campo.*

La mappa che lascia invariata la parte reale e cambia il segno di quella puramente immaginaria dei numeri di $\mathbb{C}$ si chiama

operazione di Coniugio : $z \mapsto \bar{z} := \alpha - i\beta.$

Introdotta la

funzione Modulo : $|\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definita dalla $|z|^2 := \alpha^2 + \beta^2$, risultano vere le

$$\begin{aligned} \overline{zz'} &= \bar{z} \bar{z'}, \\ \overline{z + z'} &= \bar{z} + \bar{z'}, \\ z^{-1} &= \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \\ zz &\equiv z^2 \neq |z|^2 \equiv z\bar{z}. \end{aligned}$$

Si noti che la coniugazione complessa *non è un'operazione* $\mathbb{C}$ -lineare.

Inoltre si ha

$$|z_1 z_2| = \sqrt{(\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2)^2 + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1)^2} = \sqrt{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2)} = |z_1| |z_2|$$

mentre è $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, e quindi $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$.

Mediante la definizione di prodotto in $\mathbb{C}$, considerato normato dalla funzione modulo, si può definire come segue la funzione:

$$\exp : \varsigma \in \mathbb{C} \mapsto e^\varsigma \in \mathbb{C}, \quad \varsigma \equiv \sigma + i\theta, \quad \sigma := \Re \varsigma \in \mathbb{R}, \quad \theta := \Im \varsigma \in \mathbb{R}.$$

Si nota innanzi tutto che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |\varsigma|^n = e^{|\varsigma|} < \infty$ implica la

$$\left| \sum_{n=0}^k \frac{\varsigma^n}{n!} - \sum_{n=0}^h \frac{\varsigma^n}{n!} \right| = \left| \sum_{n=h}^k \frac{\varsigma^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=h}^k \frac{1}{n!} |\varsigma|^n \xrightarrow{h,k \rightarrow \infty} 0$$

per cui la successione $\sum_{n=0}^k \frac{\varsigma^n}{n!}$ è di Cauchy in $(\mathbb{C}, |\cdot|)$. Questo, per la completezza di $\mathbb{R}$ ed il fatto che: $|\varsigma|$ tende a zero se e solo se σ e θ tendono simultaneamente a zero, assicura che per ogni $\varsigma \in \mathbb{C}$ la successione $\sum_{n=0}^k \frac{\varsigma^n}{n!}$ converge ad un limite appartenente a $\mathbb{C}$ ed indicato con e^ς .

In particolare per $\varsigma = i\theta$ si trova l'importante relazione:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} i \frac{(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos \theta + i \sin \theta. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Se allora si introducono le:

$$|z| =: \rho =: e^\sigma, \quad \Re z =: \alpha =: \rho \cos \theta, \quad \Im z =: \beta =: \rho \sin \theta,$$

l'espressione di sopra fornisce ($\rho \neq 0$) la nota

$$\alpha + i\beta = z = \rho e^{i\theta} = e^{\sigma+i\theta} = e^\varsigma; \quad \rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \theta = \arccos \frac{\alpha}{\rho} \cap \arcsin \frac{\beta}{\rho}.$$

Decomplexificare la retta complessa significa *far scomparire la i* , e cioè interpretare le precedenti operazioni come delle operazioni su *coppie ordinate di numeri reali* o, come più spesso si ricorda, su *vettori nel piano di Gauss*: ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$. L'isomorfismo tra $\mathbb{C}$ ed $\mathbb{R}^2$ si ottiene assumendo fissata, come base "canonica": $\{e_1, e_2\}$, la base rispetto alla quale il numero complesso z risulta rappresentato dal vettore $\mathbf{z} \equiv (\alpha, \beta)$ avente componenti rispettivamente $\alpha := \Re z$, $\beta := \Im z$. In particolare l'unità reale $1 + i0$ e l'unità immaginaria $0 + i1$ sono rappresentate dai versori della base: $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$.

Si nota che in ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ la somma è l'ordinaria somma per componenti, mentre il modulo $|z| \equiv |\mathbf{z}|$ è la norma euclidea standard.

La moltiplicazione di un generico $\mathbf{z}' \in \mathbb{C}$ per un numero (scalare) complesso $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, in quanto operazione che trasforma un certo vettore $\mathbf{z}' \in \mathbb{R}^2$ in un altro $\mathbf{z}'' \in \mathbb{R}^2$, risulta necessariamente rappresentata da una trasformazione lineare reale, e cioè da un punto in $\mathbb{L}(\mathbb{R}^2)$. Nel seguito si indicherà tale operatore mediante la notazione ${}^{\mathbb{R}}z : {}^{\mathbb{R}}\mathbb{C} \rightarrow {}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}$. Le due relazioni, valide in $\mathbb{C}$,

$$\mathbf{z} \cdot 1 = \mathbf{z} = \alpha + i\beta \quad \mathbf{z} \cdot i = -\beta + i\alpha =: \mathbf{z}_+$$

inducono in ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ le corrispondenti

$${}^{\mathbb{R}}z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = {}^{\mathbb{R}}z \mathbf{e}_1 = \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad {}^{\mathbb{R}}z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = {}^{\mathbb{R}}z \mathbf{e}_2 = \mathbf{z}_+ = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad (8.27)$$

e quindi in questa base risulta

$${}^{\mathbb{R}}z \equiv \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \equiv \rho \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (8.28)$$

Equivalentemente, ci si può servire della richiesta che (nella base scelta) accada

$$\mathbf{z}'' = {}^{\mathbb{R}}\mathbf{z} \mathbf{z}' = \begin{pmatrix} \Re(z z') \\ \Im(z z') \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha\alpha' - \beta\beta' \\ \beta\alpha' + \alpha\beta' \end{pmatrix} = {}^{\mathbb{R}}\mathbf{z}' \mathbf{z}, \quad (8.29)$$

e questa di nuovo fornisce l'espressione (8.28). Inoltre, mediante la

$$\begin{pmatrix} \alpha'' \\ \beta'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & -\beta' \\ \beta' & \alpha' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' - \beta\beta' & -(\alpha\beta' + \beta\alpha') \\ \beta\alpha' + \alpha\beta' & \alpha\alpha' - \beta\beta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si può controllare che la forma (8.28) risulta consistente con la moltiplicazione fra due qualunque scalari complessi: ${}^{\mathbb{R}}\mathbf{z} {}^{\mathbb{R}}\mathbf{z}' = {}^{\mathbb{R}}(zz') = {}^{\mathbb{R}}\mathbf{z}' {}^{\mathbb{R}}\mathbf{z}$, e cioè fra due punti di $\mathbb{L}({}^{\mathbb{R}}\mathbb{C})$, e che è assicurata la commutatività della moltiplicazione in $\mathbb{L}({}^{\mathbb{R}}\mathbb{C})$.

In particolare è agevole controllare che la moltiplicazione fra due numeri complessi z e z' ha come risultato un numero complesso z'' avente come modulo il prodotto dei loro moduli e come argomento la somma dei loro argomenti:

$$\mathbf{z}'' = \rho\rho' \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\theta' - \sin\theta \sin\theta' \\ \sin\theta \cos\theta' + \cos\theta \sin\theta' \end{pmatrix} = \rho\rho' \begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta') \\ \sin(\theta + \theta') \end{pmatrix}.$$

Questo, e la ricordata proprietà: $\rho \rightarrow 0 \iff a, b \rightarrow 0$, assicurano che anche i procedimenti di limite e di somma di serie si conservano nel passaggio da $\mathbb{C}$ ad ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}$.

Esempio 8.1 $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ implica ${}^{\mathbb{R}}i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e produce una rotazione di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario; (equivalentemente: $0 + i1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$).

A sua volta questa fornisce le componenti di i^n ; esse sono $\begin{pmatrix} \cos n\pi/2 \\ \sin n\pi/2 \end{pmatrix}$. □

Esempio 8.2

$$\mathbf{z} = {}^{\mathbb{R}}(\alpha + i\beta)\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

□

Esempio 8.3 $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = {}^{\mathbb{R}}\Re z := \frac{1}{2}{}^{\mathbb{R}}(z + \bar{z})$. □

Esempio 8.4

$$\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = {}^{\mathbb{R}}\Im z := -\frac{1}{2}{}^{\mathbb{R}}(z - \bar{z}){}^{\mathbb{R}}i = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2\beta \\ 2\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi ${}^{\mathbb{R}}\mathbf{z}\mathbf{e}_1 = ({}^{\mathbb{R}}\Re z)\mathbf{e}_1 + ({}^{\mathbb{R}}\Im z)\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \Re z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Im z \end{pmatrix}$. □

Esempio 8.5 (si veda anche l'Esempio 5.19); le espressioni

$$(i\beta)^{2k} = (-1)^k \beta^{2k} \quad \text{ed} \quad (i\beta)^{2k+1} = i(-1)^k \beta^{2k+1}$$

forniscono le

$${}^{\mathbb{R}}(i\beta)^{2k} = \beta^{2k}(-1)^k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^{\mathbb{R}}(i\beta)^{2k+1} = \beta^{2k+1}(-1)^k \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

In definitiva la decomplessificazione attribuisce a $\mathbb{C}$ la struttura di spazio vettoriale ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ (e di sottogruppo commutativo di $\mathbb{L}(\mathbb{R}^2)$), per cui ne condivide le proprietà di spazio normato. Si ricava così che il decomplessificato della somma di una serie convergente di numeri complessi è la somma della serie dei decomplessificati (convergente nella norma ereditata dal modulo: $\|{}^{\mathbb{R}}z\| := |z|$), e che il prodotto dei decomplessificati è commutativo ed è il decomplessificato del prodotto.

In particolare si può usare l'Esempio 8.5 per riottenere l'equivalente in $\mathbb{R}^2$ della (8.26), cosa senz'altro lecita visti i risultati sull'esistenza in $\mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$ dell'operatore esponenziale di uno reale. Dalla

$$e \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \theta^{2k} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \theta^{2k+1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

segue infatti

$$e^{\mathbb{R}(i\theta)} = e^{\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = {}^{\mathbb{R}}(e^{i\theta}) .$$

Moltiplicando quest'ultima per

$$e^{\mathbb{R}\sigma} = e^{\begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{\sigma} & 0 \\ 0 & e^{\sigma} \end{pmatrix} = {}^{\mathbb{R}}(e^{\sigma}) ,$$

e servendosi della nota proprietà della funzione esponenziale: $e^{\mathcal{T}}e^{\mathcal{S}} = e^{\mathcal{T}+\mathcal{S}}$, quando $\mathcal{TS} = \mathcal{ST}$, si ottiene la più generale:

$$e^{\mathbb{R}\varsigma} = e^{\begin{pmatrix} \sigma & -\theta \\ \theta & \sigma \end{pmatrix}} = e^{\sigma} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = {}^{\mathbb{R}}(e^{\varsigma}) = {}^{\mathbb{R}}(e^{(\sigma+i\theta)}) . \quad (8.30)$$

dalla quale si riconosce l'espressione esplicita per l'esponenziale della particolare matrice *reale* ${}^{\mathbb{R}}\varsigma \equiv \begin{pmatrix} \sigma & -\theta \\ \theta & \sigma \end{pmatrix}$.

Nota 1.8.6 La funzione e^{ς} , e la sua decompressificata, verificano le importanti proprietà:

$$\begin{cases} e^0 = 1 , \\ e^{\varsigma_1} e^{\varsigma_2} = e^{\varsigma_1 + \varsigma_2} , \\ e^{\sigma+i(\theta+2k\pi)} = e^{\sigma+i\theta} . \end{cases} \quad (8.31)$$

Ne segue che $z_1 z_2 = e^{(\sigma_1+\sigma_2)+i(\theta_1+\theta_2)} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ ed in particolare:

$$\begin{cases} z^n = \rho^n e^{in\theta} = \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \\ z^{1/n} = \rho^{1/n} \exp\left(i \frac{(\theta + 2k\pi)}{n}\right) \end{cases}$$

(naturalmente già ottenibili per induzione dalle relazioni trigonometriche viste in precedenza). Si noti che l'ultima di queste uguaglianze mostra che l'operazione di estrazione della radice n -ma di un numero complesso ammette sempre n soluzioni distinte: esse sono disposte sui vertici di un poligono regolare di n lati posto in modo simmetrico rispetto all'asse inclinato di θ/n su quello reale; se n è pari l'asse reale contiene due radici simmetriche rispetto all'origine; se dispari solo una. Pertanto se $\theta = \pi$ ed n è pari o dispari l'asse reale contiene nessuna o una radice rispettivamente (la rotazione di π/n fa passare l'asse reale per nessuno o uno rispettivamente dei vertici del poligono, in quanto tale arco è la metà degli n archi uguali in cui si viene a trovare suddiviso 2π). $\triangleright$

A partire dalla definizione di esponenziale si deduce quella di logaritmo $\sigma + i\theta \equiv \varsigma := \ln z$ di un numero complesso, definito per *un qualunque* $z \in \mathbb{C}$ dalla

$$e^{\sigma+i\theta} = e^{\Re \varsigma} [\cos(\Im \varsigma) + i \sin(\Im \varsigma)] \equiv e^{\varsigma} = z .$$

Ancora con $z = \alpha + i\beta = \rho e^{i\theta} = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$, il $\ln z$ è allora tale che $e^{\Re \varsigma} = \rho$ e simultaneamente $\Im \varsigma = \theta + 2k\pi$; ovvero

$$z = e^{\sigma+i\theta} = \rho e^{i\theta} \implies \ln z = \ln \rho + i(\theta + 2k\pi) .$$

Si vede pertanto che il $\ln z$ (in quanto “inversa” di funzione periodica) è una funzione sul piano di Gauss solo qualora se ne restringa il codominio alla striscia: $\mathbb{R}^1 \times (-\pi, \pi]$, e cioè per $k = 0$ e $\theta = \text{Arg}(\varsigma)$; alternativamente va considerato come una “funzione a più valori”: le parti $\Im m$ non risultando univocamente determinate. Si verifica inoltre l'importante relazione

$$\ln(z_1 z_2) = \varsigma_1 + \varsigma_2 = \ln z_1 + \ln z_2 . \quad (8.32)$$

A sua volta quest'ultima induce la definizione di funzione esponenziale relativa ad una base qualsiasi: $a \in \mathbb{C}$

$$a^{\varsigma} := e^{\varsigma \ln a} \quad a, \varsigma \in \mathbb{C} ;$$

e mediante quest'ultima si può ottenere la

$$(e^{\varsigma_1})^{\varsigma_2} = e^{\varsigma_2 \ln(e^{\varsigma_1})} = e^{\varsigma_1 \varsigma_2} .$$

La a^{ς} verifica ancora le (8.31), (ma non più la $(a^{\varsigma})' = a^{\varsigma}$). Inoltre dalla $\ln a^{\varsigma} = \varsigma \ln a$ si deduce $\frac{\ln a^{\varsigma}}{\ln a} = \varsigma =: \log_a a^{\varsigma}$ e quindi

$$z := a^{\varsigma} \implies \varsigma = \log_a z = \frac{\ln z}{\ln a}$$

che verifica ancora la (8.32), ma non più la $\ln z = \int_1^z d\zeta/\zeta$.

Per quanto osservato precedentemente, tutte queste relazioni possono essere decomplessificate e riscritte per gli operatori ${}^{\mathbb{R}}z$. In particolare:

$$\ln {}^{\mathbb{R}}z := {}^{\mathbb{R}}(\ln z) = \begin{pmatrix} \sigma & -(\theta + 2k\pi) \\ \theta + 2k\pi & \sigma \end{pmatrix} \quad \text{con } \sigma := \ln \rho,$$

$$\rho = ((\Re z)^2 + (\Im z)^2)^{1/2}, \quad \theta = \arccos \frac{\Re z}{\rho} \cap \arcsin \frac{\Im z}{\rho}.$$

Sia dato, ora, uno spazio vettoriale reale $\mathbb{V}$ di dimensione n , e sia esso rappresentato da $\mathbb{R}^n$. Si definisce complessificato ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^n$ di $\mathbb{R}^n$ (e conseguentemente rappresentante il complessificato ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{V}$ di $\mathbb{V}$) lo spazio complesso n -dimensionale $\mathbb{C}^n$ costruito mediante le combinazioni lineari complesse dei vettori di $\mathbb{R}^n$ e cioè

$${}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^n := \left\{ z \in \mathbb{C}^n \mid z = \sum_{i=1}^n \mu^i x_i, \quad x_i \in \mathbb{R}^n, \quad \mu^i \in \mathbb{C} \right\}.$$

Tale spazio è isomorfo al più generale spazio vettoriale complesso n -dimensionale $\mathbb{C}$ in quanto i vettori $z \in \mathbb{C}$ sono rappresentati da n -ple z di numeri complessi $(z^1, \dots, z^n)$ o, equivalentemente, *coppie ordinate di n -ple di numeri reali* indicate usualmente con l'espressione $z = x + iy$. La somma è, conseguentemente, per componenti; ed il prodotto per uno *scalare* complesso $(\alpha + i\beta)$ verifica la

$$(\alpha + i\beta)(x + iy) := (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x), \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^1.$$

Per base nello spazio ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{V}$ si potrà scegliere la base reale (in quanto costituita da vettori complessi a parte immaginaria nulla) ereditata da quella dello spazio reale, e cioè

$${}^{\mathbb{C}}\{e_1, \dots, e_n\} := \{(1 + i0)e_1, \dots, (1 + i0)e_n\} \equiv \{e_1 + i0, \dots, e_n + i0\}.$$

Rispetto ad essa il generico vettore $z \in {}^{\mathbb{C}}\mathbb{V}$ ha rappresentazione cartesiana $\sum_{i=1}^n z^i e_i$, è individuato dalla n -pla $z \equiv (z^1, \dots, z^n) \in \mathbb{C}^n$, ed in tal senso ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^n$ rappresenta ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{V} = \mathbb{C}\text{-span}\{e_1, \dots, e_n\}$.

Il complesso coniugato di un vettore $z \in {}^{\mathbb{C}}\mathbb{V}$ è quel vettore $\bar{z}$ che nella base ${}^{\mathbb{C}}\{e_1, \dots, e_n\}$ ha come componenti i complessi coniugati delle componenti di z , e cioè $\bar{z} = (\bar{z}^1, \dots, \bar{z}^n)$. Un vettore $x \in {}^{\mathbb{C}}\mathbb{V}$ è reale quando coincide con il suo complesso coniugato. *In una base "complessa coniugata", e cioè tale che contenendo un vettore ne contiene anche il complesso coniugato, esso avrà componenti necessariamente complesse coniugate.* Infatti la $\xi^1 \epsilon + \xi^2 \bar{\epsilon} = \overline{(\xi^1 \epsilon + \xi^2 \bar{\epsilon})}$ implica $\xi^2 = \bar{\xi}^1$. In particolare un vettore reale in base reale (per esempio la ${}^{\mathbb{C}}\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$)

ha tutte le componenti reali ed è della forma $(x, 0)$ in quanto $x = (x^h e_h + i0)$.

N.B. 1.8.7 La differenza fra un (particolare) spazio complesso ed uno complessificato si percepisce quando essi siano sottospazi di un qualche spazio complesso che li contenga entrambi: un sottospazio $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^m$, e cioè il $\mathbb{C}$ -span di n vettori complessi, è il complessificato di uno spazio reale n -dimensionale, e cioè il $\mathbb{C}$ -span di n vettori reali $x_1, \dots, x_n$ se e solo se contenendo un vettore z contiene anche il suo complesso coniugato $\bar{z}$. Infatti siccome $\mu \in \mathbb{C}$ implica $\bar{\mu} \in \mathbb{C}$, nella base reale ${}^{\mathbb{C}}\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ si ha che se $\sum_i \mu^i x_i = z \in \mathbb{C}^n$ senz'altro anche $\bar{z} = \sum_i \bar{\mu}^i x_i \in \mathbb{C}^n$. D'altra parte, se uno spazio complesso $\mathbb{C}$ contiene entrambi $z, \bar{z}$ allora certo contiene entrambi $\frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $-\frac{i}{2}(z - \bar{z})$ che sono due vettori reali. Ciò essendo vero per ogni vettore, lo sarà anche per i vettori di base che risultano allora una combinazione $\mathbb{C}$ -lineare di vettori reali. Al contrario, per esempio, il sottospazio $\mathbb{W} := \mathbb{C}\text{-span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{C}^2$ non è il complessificato di alcuno spazio reale, infatti z è in $\mathbb{W}$ quando è della forma $z = \mu(e_1 + ie_2) = (\mu e_1 + i\mu e_2)$ ed il vettore $\bar{z} = \bar{\mu}e_1 - i\bar{\mu}e_2$ non è di questo tipo. $\diamond$

Come logica estensione dell'operazione di moltiplicazione di un vettore complesso $z \in {}^{\mathbb{C}}\mathbb{V}$ per uno scalare complesso $(\alpha + i\beta)$ si consideri in generale un operatore $\mathbb{C}$ -lineare $\mathcal{T} : {}^{\mathbb{C}}\mathbb{V}^n \rightarrow {}^{\mathbb{C}}\mathbb{V}^m$, di dimensioni n ed m rispettivamente. Si chiama

Operatore Coniugato di $\mathcal{T}$ $:=$ l'operatore $\bar{\mathcal{T}}$ definito dalla: $\bar{\mathcal{T}}z := \overline{\mathcal{T}\bar{z}}$.

Anche l'operatore $\bar{\mathcal{T}}$ è un operatore lineare:

$$\bar{\mathcal{T}}(cz) = \overline{\mathcal{T}\bar{c}\bar{z}} = \bar{c}\bar{\mathcal{T}}\bar{z} = c\bar{\mathcal{T}}z$$

e quindi, in particolare, $\bar{\mathcal{T}}(iy) = i\bar{\mathcal{T}}y$ per un qualsiasi y reale.

Posto $\mathcal{A} := \Re \mathcal{T} := \frac{1}{2}(\mathcal{T} + \overline{\mathcal{T}}) = \overline{\mathcal{A}}$ si ha che è reale ciascun elemento della matrice $\mathcal{A}$ che la base reale ${}^c\{e_1, \dots, e_n\}$ assegna all'operatore $\mathcal{A}$. Infatti preso comunque $z = x + iy$ con x, y vettori reali in ${}^c\mathbb{V}^n$ si ha

$$\begin{aligned} (\Re \mathcal{T})x &= \frac{1}{2}(\mathcal{T} + \overline{\mathcal{T}})x = \frac{1}{2}(\mathcal{T}x + \overline{\mathcal{T}x}) = \Re(\mathcal{T}x) \\ (\Re \mathcal{T})(iy) &= \frac{1}{2}(\mathcal{T} + \overline{\mathcal{T}})(iy) = i \frac{1}{2}(\mathcal{T} + \overline{\mathcal{T}})y = i \Re(\mathcal{T}y) \end{aligned}$$

e quindi per un qualsiasi $z \in {}^c\mathbb{V}^n$ si ottiene:

$$\mathcal{A}z = (\Re \mathcal{T})z = \Re(\mathcal{T}x) + i \Re(\mathcal{T}y),$$

da cui segue, scegliendo $z \in {}^c\mathbb{V}^n$ puramente reale, che anche $\mathcal{A}z$ deve avere tutte le sue componenti reali (vista la scelta della base: reale).

Analogamente chiamato $\mathcal{B}$ l'operatore reale "parte immaginaria" di $\mathcal{T} : \mathcal{B} := \Im \mathcal{T} := -\frac{i}{2}(\mathcal{T} - \overline{\mathcal{T}}) = \overline{\mathcal{B}}$ si ha che ciascun elemento della matrice che, nella base detta, rappresenta l'operatore $\mathcal{B}$ è reale: infatti

$$\begin{aligned} (\Im \mathcal{T})x &= -\frac{i}{2}(\mathcal{T} - \overline{\mathcal{T}})x = -\frac{i}{2}(\mathcal{T}x - \overline{\mathcal{T}x}) = \Im(\mathcal{T}x) \\ (\Im \mathcal{T})(iy) &= -\frac{i}{2}(\mathcal{T} - \overline{\mathcal{T}})(iy) = i \left(-\frac{i}{2}(\mathcal{T} - \overline{\mathcal{T}})y\right) = i \Im(\mathcal{T}y) \end{aligned}$$

e quindi per un qualsiasi z si ottiene:

$$\mathcal{B}z = (\Im \mathcal{T})z = \Im(\mathcal{T}x) + i \Im(\mathcal{T}y)$$

da cui, scegliendo z puramente reale, si ha che anche $\mathcal{B}z$ lo deve essere.

In definitiva: un generico operatore lineare complesso $\mathcal{T} : {}^c\mathbb{V}^n \rightarrow {}^c\mathbb{V}^m$ può essere sempre rappresentato con la somma $\mathcal{T} = \mathcal{A} + i\mathcal{B}$ con $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ che preservano, e quindi $i\mathcal{B}$ che inverte, il carattere reale o immaginario del vettore su cui operano:

$$\mathcal{T}z = (\mathcal{A} + i\mathcal{B})(x + iy) = (\mathcal{A}x - \mathcal{B}y) + i(\mathcal{B}x + \mathcal{A}y).$$

In particolare l'operatore di moltiplicazione per un numero complesso $\mu = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ risulta avere $\mathcal{A} = \alpha \mathbb{I}_n$ e $\mathcal{B} = \beta \mathbb{I}_n$.

Ne segue che in base reale la matrice del coniugato di un qualunque operatore complesso è la complessa coniugata della matrice dell'operatore, e che il trasformato $\mathbb{C}$ -lineare di un vettore reale è reale ed il trasformato $\mathbb{C}$ -lineare di un vettore immaginario puro è immaginario puro se e solo se $\mathcal{T}$ è reale e cioè tale che $\mathcal{T} = \overline{\mathcal{T}}$, o anche: $\mathcal{B} = 0$.

Si ottiene in particolare un operatore reale partendo da un operatore $\mathbb{R}$ -lineare $\mathcal{T} : \mathbb{V}^n \rightarrow \mathbb{V}^m$, e che quindi certo lascia invariato il carattere reale dei vettori, e definendo il suo *complessificato* ${}^c\mathcal{T} : {}^c\mathbb{V}^n \rightarrow {}^c\mathbb{V}^m$ come quell'operatore $\mathbb{C}$ -lineare che ne produce gli stessi effetti su ${}^c\mathbb{V}^n$. Esso pertanto sarà senz'altro un operatore avente parte immaginaria nulla, e cioè tale che ${}^c\mathcal{T}(z) = \mathcal{A}x + i\mathcal{A}y$ (somma, questa, di due vettori in ${}^c\mathbb{R}^n$). Esso mantiene separate le parti reale ed immaginaria di $z \in {}^c\mathbb{V}^n$, ed agisce allo stesso modo su entrambe, trasformando come fa $\mathcal{T}$ i vettori reali in vettori reali e gli immaginari puri in immaginari puri.

Si vuole ora estendere il procedimento di decomplessificazione di $\mathbb{C}$ che si è visto all'inizio del paragrafo.

Così come in $\dim = 1$ alla moltiplicazione per un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ si fa corrispondere un operatore lineare reale ${}^{\mathbb{R}}z \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^2)$, qui ad un operatore complesso $\mathcal{T} \in \mathbb{L}(\mathbb{C}^n)$ e rappresentato in $\mathbb{L}(\mathbb{C}^n)$ da una matrice complessa $n \times n$, si vuole far corrispondere un operatore reale ${}^{\mathbb{R}}\mathcal{T} \in \mathbb{L}(\mathbb{V}^{2n})$ a sua volta rappresentato da una matrice reale in $\mathbb{L}(\mathbb{R}^{2n})$.

Innanzitutto occorre decomplessificare ${}^c\mathbb{V}^n$ e cioè considerare vettori $2n$ -dimensionali nello spazio reale ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{V}^n$ isomorfo a $\mathbb{R}^{2n}$ in luogo dei vettori complessi n -dimensionali $z = x + iy$. A tale scopo, in ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}^n$ si sceglie la base $\left\{ \begin{pmatrix} e_1 \\ 0_n \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} e_n \\ 0_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n \\ e_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0_n \\ e_n \end{pmatrix} \right\}$, mediante la quale il vettore $z = x + iy \in {}^c\mathbb{R}^n$ viene rappresentato con il vettore (reale) $2n$ -dimensionale $\begin{pmatrix} \Re z \\ \Im z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Ne segue che anche in ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{V}^n$ la somma è l'ordinaria somma per componenti, mentre il modulo $|z|$ è la norma euclidea standard.

In secondo luogo, a partire da un operatore complesso $\mathcal{T} : {}^c\mathbb{R}^n \rightarrow {}^c\mathbb{R}^m$ qualsiasi si definisce, analogamente alla (8.29),

Decomplessificato di $\mathcal{T}$:= l'operatore lineare reale ${}^{\mathbb{R}}\mathcal{T} : {}^{\mathbb{R}}\mathbb{V}^n \rightarrow {}^{\mathbb{R}}\mathbb{V}^m$ che è definito nello spazio vettoriale $\mathbb{L}(\mathbb{V}^{2n})$, e che (rispetto alla detta base in ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{V}^n$) verifica la

$${}^{\mathbb{R}}\mathcal{T}z \equiv {}^{\mathbb{R}}(\mathcal{A} + i\mathcal{B}) \begin{pmatrix} \Re z \\ \Im z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \Re(\mathcal{T}z) \\ \Im(\mathcal{T}z) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathcal{A}x - \mathcal{B}y \\ \mathcal{A}y + \mathcal{B}x \end{pmatrix}; \quad (8.33)$$

di conseguenza, ad esso la base detta assegna la matrice $(2n \times 2n)$

$${}^{\mathbb{R}}\mathcal{T} = {}^{\mathbb{R}}(\mathcal{A} + i\mathcal{B}) =: \begin{pmatrix} \mathcal{A} & -\mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix}.$$

Come deve, esso ha per colonne i trasformati dei versori di base. In particolare, il decomplessificato dell'operatore di moltiplicazione per un numero complesso $\mu = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ risulta avere l'espressione ${}^{\mathbb{R}}\mu = \begin{pmatrix} \alpha \mathbf{I}_n & -\beta \mathbf{I}_n \\ \beta \mathbf{I}_n & +\alpha \mathbf{I}_n \end{pmatrix}$. Ad esempio si ha ${}^{\mathbb{R}}i = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n & +0 \end{pmatrix}$.

Osservazione importante.

Se ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{V}^n$ ha la "stessa" base (reale) ${}^{\mathbb{C}}\{e_1, \dots, e_n\}$ ereditata da quella $\{e_1, \dots, e_n\}$ di $\mathbb{V}^n$, la matrice $\mathbf{T}$ del complessificato ${}^{\mathbb{C}}\mathcal{T}$ è la stessa matrice che la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ assegna a $\mathcal{T}$, visto che ${}^{\mathbb{C}}\mathcal{T}e_j = \mathcal{T}e_j + i0$ vettore reale in ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{V}^n$.

Di conseguenza, nello spazio ${}^{\mathbb{R}\mathbb{C}}\mathbb{V}^n$ la matrice di ${}^{\mathbb{R}\mathbb{C}}\mathcal{T}$ è: $\begin{pmatrix} \mathbf{T} & 0 \\ 0 & \mathbf{T} \end{pmatrix}$, ancora essendo $\mathbf{T}$ la $\{e\}$ -matrice di $\mathcal{T}$, e ciò mostra esplicitamente che il complessificato di un operatore reale, che si caratterizza fra gli altri operatori $\mathbb{C}$ -lineari per essere tale che ${}^{\mathbb{C}}\mathcal{T} = \overline{{}^{\mathbb{C}}\mathcal{T}}$, è anche caratterizzato dal fatto che ${}^{\mathbb{C}}\mathcal{T}(\mathbb{V}^n) \subset \mathbb{V}^n$; oppure, dal fatto che ${}^{\mathbb{R}\mathbb{C}}\mathcal{T}$ lascia separatamente invarianti i due sottospazi di ${}^{\mathbb{R}\mathbb{C}}\mathbb{V}^n$ nei quali assumono valori le parti reali e le parti immaginarie dei vettori di ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{V}^n$.

Appare ormai evidente che ${}^{\mathbb{C}}\mathcal{T}$, ristretto a $\mathbb{V}^n$, ha lo stesso effetto di $\mathcal{T}$.

Sia $\mathcal{T} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ un operatore $\mathbb{R}$ -lineare reale; con le ormai usuali scelte delle basi, si hanno i seguenti risultati (generalmente non veri per un qualsiasi operatore complesso $\mathcal{T}$)

- (i) Se μ è un autovalore di $\mathcal{T}$, nel senso che μ è una radice dell'equazione $\text{Det}(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) = 0$, allora μ è anche autovalore di ${}^{\mathbb{C}}\mathcal{T}$ e viceversa.

Infatti le due matrici nelle due basi $\{e_1, \dots, e_n\}$ ed ${}^{\mathbb{C}}\{e_1, \dots, e_n\}$ sono le stesse.

- (ii) Se μ è un autovalore di ${}^{\mathbb{C}}\mathcal{T}$ allora anche $\bar{\mu}$ è autovalore di ${}^{\mathbb{C}}\mathcal{T}$.

Infatti, se $\epsilon_\mu \in \text{Ker}({}^{\mathbb{C}}\mathcal{T} - \mu \mathbf{I}) \subset {}^{\mathbb{C}}\mathbb{V}$ si ha che

$${}^{\mathbb{C}}\mathcal{T}\epsilon_\mu = \mu\epsilon_\mu \iff \overline{{}^{\mathbb{C}}\mathcal{T}\epsilon_\mu} = \bar{\mu}\bar{\epsilon}_\mu \iff {}^{\mathbb{C}}\mathcal{T}\bar{\epsilon}_\mu = \bar{\mu}\bar{\epsilon}_\mu$$

e risulta $\bar{\epsilon}_\mu \in \text{Ker}({}^{\mathbb{C}}\mathcal{T} - \bar{\mu} \mathbf{I}) \subset {}^{\mathbb{C}}\mathbb{V}$. Quindi si potrà scegliere $\epsilon_{\bar{\mu}} = \bar{\epsilon}_\mu$.

- (iii) Se μ è un autovalore di $\mathcal{T}$ allora anche $\bar{\mu}$ è autovalore di $\mathcal{T}$.

Infatti: ciò segue dai due punti precedenti, e conferma che entrambi μ e $\bar{\mu}$ sono soluzioni della $\text{Det}(\mathbf{T} - \mu \mathbf{I}) = 0$.

Si supponga allora che l'operatore reale $\mathcal{T}$ ammetta una coppia di autovalori complessi coniugati: $\mu, \bar{\mu} \in \mathbb{C}$, e che pertanto sia

$${}^{\mathbb{C}}\mathcal{T}\epsilon_\mu = \mu\epsilon_\mu =: (\alpha + i\beta)(x_\mu - iy_\mu) \quad (8.34)$$

ove si sono chiamati $\mu =: \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, ed $x_\mu, y_\mu \in {}^{\mathbb{C}}\mathbb{V}$ definiti dalla

$$\epsilon_\mu =: x_\mu - iy_\mu \quad \text{e cioè} \quad \begin{cases} x_\mu := \Re \epsilon_\mu := (\epsilon_\mu + \bar{\epsilon}_\mu)/2 \\ y_\mu := -\Im \epsilon_\mu := i(\epsilon_\mu - \bar{\epsilon}_\mu)/2 \end{cases}$$

e si noti il segno meno nella definizione di y_μ ;

- (iv) Se l'autovalore μ è non puramente reale allora l'autovettore $\epsilon_\mu \in {}^{\mathbb{C}}\mathbb{V}$ è non puramente reale.

Infatti: se lo fosse, nella (8.34) si avrebbe il primo membro reale mentre il secondo membro avrebbe parte immaginaria non nulla.

- (v) Se l'autovettore ϵ_μ è non puramente reale allora l'autovalore μ (se semplice o di molteplicità dispari) è non puramente reale.

Infatti: se fosse $\mu = \bar{\mu}$ dal punto (ii) segue che μ dovrebbe avere due autovettori reali indipendenti x_μ ed y_μ per uno stesso autovalore μ , e ciò è assurdo se μ è semplice o di molteplicità dispari.

- (vi) Se μ è non puramente reale allora x_μ ed y_μ sono reali e $\mathbb{C}$ -linearmente indipendenti, e quindi a fortiori $\mathbb{R}$ -linearmente indipendenti.

Infatti: dalla definizione segue subito che x_μ ed y_μ sono reali. Poi, se fosse $x_\mu = \lambda y_\mu$ sarebbe $\epsilon_\mu = x_\mu - i y_\mu =: z x_\mu$ con z non reale né nullo, ed x_μ reale. Ne segue, per la ${}^c\mathcal{T} z x_\mu = \mu z x_\mu$ che l'operatore ${}^c\mathcal{T}$ avrebbe un autovettore reale per l'autovalore complesso μ . In particolare, se μ è non puramente reale non può nemmeno avvenire che $\epsilon_\mu = -\bar{\epsilon}_\mu$, e cioè $x_\mu = 0$.

- (vii) Se x_μ ed y_μ sono $\mathbb{C}$ -linearmente indipendenti, e quindi non nulli, senz'altro si ha che ϵ_μ è non puramente reale.

Dalle precedenti considerazioni segue subito che se un operatore reale ammette qualche autovalore complesso, e quindi anche il suo corrispondente complesso coniugato, per studiarne gli autovettori sarà necessario considerarne il complessificato ${}^c\mathcal{T}$ agente nello spazio complessificato ${}^c\mathbb{V}^n$ in quanto è solo quest'ultimo, e non l'operatore reale, che ammette autovettori in corrispondenza agli autovalori complessi.

È opportuno ricordare ancora una volta che la scelta della "stessa" base reale sia per $\mathbb{R}^n$ che per $\mathbb{C}\mathbb{R}^n$ assegna la stessa matrice $\mathbf{T}$ ad entrambi i due operatori $\mathcal{T}$ e ${}^c\mathcal{T}$, ed in particolare essa sarà reale essendola la base di (entrambi) gli spazi. Pertanto *entrambi gli operatori hanno gli stessi autovalori* soluzioni della equazione secolare: $\text{Det}(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) = 0$.

Quando tutti gli autovalori dell'operatore $\mathcal{T}$, e quindi anche di ${}^c\mathcal{T}$, siano distinti, dei quali: $\lambda_1, \dots, \lambda_\nu$ reali, e $\mu_1, \bar{\mu}_1, \dots, \mu_\tau, \bar{\mu}_\tau$ complessi, con $\nu + 2\tau = n$, allora sussiste la

Proposizione 1.8.8 È possibile esprimere $\mathbb{V}^n$ come somma diretta di $\mathbb{V}^\nu \oplus \Re({}^c\mathbb{V}^{2\tau})$, e l'operatore reale $\mathcal{T}$ come somma diretta di operatori reali $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{(\nu)} \oplus \mathcal{T}_{(\tau)}$, ove si è posto $\mathcal{T}_{(\nu)} : \mathbb{V}^\nu \rightarrow \mathbb{V}^\nu$, e $\mathcal{T}_{(\tau)} : \Re({}^c\mathbb{V}^{2\tau}) \rightarrow \Re({}^c\mathbb{V}^{2\tau})$. Esistono inoltre τ sottospazi: ${}^c\mathbb{V}_{(h)}^{2\tau}$, $h = 1, \dots, \tau$, tali che ${}^c\mathbb{V}^{2\tau} = \bigoplus_{h=1}^{\tau} {}^c\mathbb{V}_{(h)}^{2\tau}$, e τ operatori reali $\mathcal{T}_{\mu_h} : \mathbb{V}_{(h)}^2 \rightarrow \mathbb{V}_{(h)}^2$, $h = 1, \dots, \tau$, tali che $\mathcal{T}_{(\tau)} = \mathcal{T}_{\mu_1} \oplus \mathcal{T}_{\mu_2} \oplus \dots \oplus \mathcal{T}_{\mu_\tau}$, e che lasciano separatamente invarianti le τ parti reali $\mathbb{V}_{(h)}^2$ dei ${}^c\mathbb{V}_{(h)}^2$. $\square$

Dimostrazione Dopo essere passati a considerare ${}^c\mathcal{T} : {}^c\mathbb{V}^n \rightarrow {}^c\mathbb{V}^n$ si nota che i suoi autovettori: ϵ_{μ_h} , $h = 1, \dots, 2\tau$, sono tutti distinti. Inoltre, il $\mathbb{C}$ - $\text{span}\{\epsilon_{\mu_1}, \bar{\epsilon}_{\mu_1}, \dots, \epsilon_{\mu_\tau}, \bar{\epsilon}_{\mu_\tau}\}$ così come il $\mathbb{C}$ - $\text{span}\{\epsilon_{\lambda_1}, \dots, \epsilon_{\lambda_\nu}\}$ sono sottospazi ${}^c\mathcal{T}$ -invarianti di ${}^c\mathbb{V}^n$ chiusi rispetto alla coniugazione complessa. Anzi *ciascuno dei piani* ${}^c\mathbb{V}_{(h)}^2 := \mathbb{C}\text{-span}\{\epsilon_{\mu_h}, \bar{\epsilon}_{\mu_h}\}_{h=1, \dots, \tau}$ e *ciascuno degli assi* $\mathbb{C}\text{-span}\{\epsilon_{\lambda_h}\}_{h=1, \dots, \nu}$ ha questa proprietà. Inoltre, per loro definizione, essi sono dei complessificati di altrettanti piani ed assi reali. Per ciascun $\mu = \mu_h$, $h = 1, \dots, \tau$, il $\mathbb{C}\text{-span}\{\epsilon_\mu, \bar{\epsilon}_\mu\}$ è anche il $\mathbb{C}\text{-span}\{x_\mu, y_\mu\}$, ove con x_μ, y_μ si sono indicati la parte reale e l'opposto di quella immaginaria del vettore ϵ_μ :

$$x_\mu := \frac{1}{2}(\epsilon_\mu + \bar{\epsilon}_\mu), \quad y_\mu := \frac{i}{2}(\epsilon_\mu - \bar{\epsilon}_\mu),$$

e questi sono entrambi reali. Esso è pertanto la complessificazione del piano reale $\mathbb{R}\text{-span}\{x_\mu, y_\mu\}$ e la sua parte reale è proprio il piano reale $\mathbb{R}\text{-span}\{x_\mu, y_\mu\}$ [infatti: se $v, \bar{v} \in \mathbb{C}\text{-span}\{x_\mu, y_\mu\}$, e se $\bar{v} = v$ allora deve essere $\overline{ax_\mu + by_\mu} = ax_\mu + by_\mu$, e la realtà di x_μ, y_μ implica quella di a, b]. Ma lo spazio $\Re(\mathbb{C}\text{-span}\{\epsilon_\mu, \bar{\epsilon}_\mu\})$ è da solo invariante rispetto a ${}^c\mathcal{T}$ [infatti: come si è detto il complessificato di un operatore reale preserva il carattere reale od immaginario dei vettori], e perciò è anche invariante rispetto a $\mathcal{T}$ [infatti: ${}^c\mathcal{T}$ ristretto a tale piano agisce come $\mathcal{T}$].

In altre parole: ciascun vettore z del piano $\mathbb{C}\text{-span}\{\epsilon_\mu, \bar{\epsilon}_\mu\}$ invece che essere decomposto lungo i due assi complessi $\mathbb{C}\text{-span}\{\epsilon_\mu\}$ e $\mathbb{C}\text{-span}\{\bar{\epsilon}_\mu\}$, ciascuno con la propria parte reale e parte immaginaria, può essere più opportunamente separato nella somma dei due vettori, rispettivamente formati dalle sue parti reale ed immaginaria, la prima in $\mathbb{R}\text{-span}\{x_\mu, y_\mu\}$, e la seconda in $i\mathbb{R}\text{-span}\{x_\mu, y_\mu\}$. In $\{e\}$ -componenti:

$$\begin{aligned} z &= z_1 \epsilon_\mu + z_2 \bar{\epsilon}_\mu = (\alpha_1 + i\beta_1)(x_\mu - i y_\mu) + (\alpha_2 + i\beta_2)(x_\mu + i y_\mu) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2)x_\mu + (\beta_1 - \beta_2)y_\mu + i((\beta_1 + \beta_2)x_\mu - (\alpha_1 - \alpha_2)y_\mu) \\ &= \Re z + i \Im z. \end{aligned}$$

Siccome $\mathcal{T}$ è reale e quindi ${}^c\mathcal{T}$ non muta il carattere $\Re$ od $\Im$ dei vettori sui quali opera, i due piani (reale e puramente immaginario) $\mathbb{R}\text{-span}\{x_\mu, y_\mu\}$ ed $i\mathbb{R}\text{-span}\{x_\mu, y_\mu\}$ risultano *separatamente invarianti* rispetto a ${}^c\mathcal{T}$ (pur non essendo $\mathbb{C}$ -sottospazi di ${}^c\mathbb{V}^n$ ma solo $\mathbb{R}$ -sottospazi di ${}^{\mathbb{R}\mathbb{C}}\mathbb{V}^n$), e quindi i due vettori $\Re z$ ed $\Im z$ vengono trasformati da ${}^c\mathcal{T}$ in due vettori, rispettivamente il primo in $\mathbb{R}\text{-span}\{x_\mu, y_\mu\}$, ed il secondo in $i\mathbb{R}\text{-span}\{x_\mu, y_\mu\}$:

$$\Re({}^c\mathcal{T}z) = \mathcal{T} \Re z \quad \text{ed} \quad \Im({}^c\mathcal{T}z) = \mathcal{T} \Im z$$

come si legge nella (8.33) quando $\mathcal{B} = 0$.

Se allora apriori si sa che un vettore complesso è contenuto in uno di tali piani, per esempio se si sa che esso è puramente reale: $x \in \mathbb{R}\text{-span}\{x_\mu, y_\mu\}$, e si vuole conoscere come $\mathcal{T}$ agisce su di esso, ci si può limitare a studiare la restrizione di ${}^c\mathcal{T}$ sul piano stesso:

$${}^c\mathcal{T}|_{\mathbb{R}\text{-span}\{x_\mu, y_\mu\}} = \mathcal{T}|_{\mathbb{R}\text{-span}\{x_\mu, y_\mu\}} =: \mathcal{T}_\mu.$$

■

Si noti che gli operatori $\mathcal{T}_\mu$, così come lo stesso $\mathcal{T}$, hanno come autovalori $\mu, \bar{\mu}$ *solo nel senso che*

$${}^c(\mathcal{T}|_{\mathbb{R}\text{-span}\{x_\mu, y_\mu\}}) = {}^c\mathcal{T}|_{\mathbb{C}\text{-span}\{x_\mu, y_\mu\}} \quad \text{ha matrice } \mathbf{T} \text{ nella base } {}^c\{e_1, \dots, e_n\},$$

e naturalmente *non hanno autovettori nel piano* $\mathbb{R}\text{-span}\{x_\mu, y_\mu\}$ il quale contiene solo la parte reale di certe loro combinazioni lineari.

Tuttavia, giacché x_μ ed y_μ sono reali, sussistono le:

$$\begin{cases} \mathcal{T}_\mu x_\mu = {}^c\mathcal{T}_\mu x_\mu = \frac{1}{2} {}^c\mathcal{T}(\epsilon_\mu + \bar{\epsilon}_\mu) = +\Re(\mu\epsilon_\mu) = +\alpha x_\mu + \beta y_\mu \\ \mathcal{T}_\mu y_\mu = {}^c\mathcal{T}_\mu y_\mu = \frac{i}{2} {}^c\mathcal{T}(\epsilon_\mu - \bar{\epsilon}_\mu) = -\Im(\mu\epsilon_\mu) = -\beta x_\mu + \alpha y_\mu. \end{cases}$$

Ciò implica in particolare che se su ciascun piano $\mathbb{R}\text{-span}\{x_\mu, y_\mu\}$ si sceglie come base canonica proprio $\{x_\mu, y_\mu\}$ allora la matrice che questa base assegna all'operatore $\mathcal{T}_\mu$ è proprio $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ per cui tale piano si può addirittura considerare come il decomplessificato *di un asse complesso*: $\mathbb{R}\text{-span}\{x_\mu, y_\mu\} = {}^{\mathbb{R}}\{\mathbb{C}\text{-span}\{x_\mu\}\}$, e sui vettori paralleli a tale retta complessa l'operatore $\mathcal{T}_\mu$ agisce come il prodotto per la μ ; infatti, nella base canonica del suo piano decomplessificato, esso ha matrice ${}^{\mathbb{R}}\mu$.

In definitiva, se gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_\nu$ reali e $\mu_1, \bar{\mu}_1, \dots, \mu_\tau, \bar{\mu}_\tau$ complesse sono tutti distinti, con $\nu + 2\tau = n$, allora la n -pla di vettori reali $\epsilon_{\lambda_1}, \dots, \epsilon_{\lambda_\nu}, x_{\mu_1}, y_{\mu_1}, \dots, x_{\mu_\tau}, y_{\mu_\tau}$ è una base per $\mathbb{V}^n$, ed in essa la matrice dell'operatore reale $\mathcal{T}$ risulta essere:

$$\tilde{\mathbf{T}} := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_\nu & & & & & \\ & & & \alpha_1 & -\beta_1 & & & \\ & & & \beta_1 & \alpha_1 & & & \\ & & & & & \alpha_2 & -\beta_2 & \\ & & & & & \beta_2 & \alpha_2 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

trasformata, secondo la $\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{P}}^{-1}\mathbf{T}\tilde{\mathbf{P}}$, della matrice $\mathbf{T}$ che in base $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ rappresenta $\mathcal{T}$ (ed in base ${}^c\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ l'operatore ${}^c\mathcal{T}$). La $\tilde{\mathbf{P}}$ ha per colonne le componenti in base $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ degli autovettori $\{\epsilon_{\lambda_i}\}_{i=1, \dots, \nu}$ corrispondenti agli autovalori reali $\{\lambda_i\}_{i=1, \dots, \nu}$ e delle coppie di vettori $(\Re \epsilon_\mu, -\Im \epsilon_\mu)$, una per ogni coppia di autovalori complessi coniugati $\{\mu_i, \bar{\mu}_i\}_{i=1, \dots, \tau}$ e sempre che tutti gli autovalori siano distinti: $\nu + 2\tau = n$. La matrice $\tilde{\mathbf{P}}$ è non singolare per quanto detto nei punti (i), ..., (vii).

A partire da questa espressione per la matrice di $\mathcal{T}$ risulta agevole calcolare quella di $e^{\mathcal{T}}$ nella stessa base; per quanto visto, essa sarà $e^{\tilde{T}}$ data da:

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & e^{\lambda_\nu} & & & & & \\ & & & e^{\alpha_1} \cos \beta_1 & -e^{\alpha_1} \sin \beta_1 & & & \\ & & & e^{\alpha_1} \sin \beta_1 & e^{\alpha_1} \cos \beta_1 & & & \\ & & & & & e^{\alpha_2} \cos \beta_2 & -e^{\alpha_2} \sin \beta_2 & \\ & & & & & e^{\alpha_2} \sin \beta_2 & e^{\alpha_2} \cos \beta_2 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

La precedente espressione per $e^{\mathcal{T}}$ e quindi per $e^{\mathcal{T}t}$ risolve, direttamente nello spazio reale $\mathbb{V}^n$, il problema differenziale $\dot{x} = \mathcal{T}x$, $x_0 \in \mathbb{V}$, quando $\mathcal{T}$ abbia autovalori (reali o complessi) tutti distinti. Infatti, data l'invarianza degli assi e dei piani detti sia rispetto all'operatore $\mathcal{T}$ che al suo esponenziale, l'espressione qui sopra assegna in $\mathbb{R}^n$ matrice $e^{\tilde{T}t}$ all'evolvente di $\tilde{\xi} = \tilde{T} \tilde{\xi}$, e quindi di $\dot{x} = T x$ pur di agire con $\tilde{\xi} = \tilde{P}^{-1} x$.

Nota 1.8.9 Alternativamente, il problema (reale) avrebbe anche potuto essere affrontato risolvendo esplicitamente il corrispondente problema complessificato e poi calcolando (aposteriori) la parte reale della soluzione di quello. Ciò è lecito perché (come d'altra parte ci si aspetta data la discussione nella precedente Proposizione) *per un campo lineare complessificato di uno reale, l'evoluzione (complessa) di condizioni iniziali reali rimane reale*. Per convincersi di queste affermazioni, si consideri un generico operatore $\mathbb{C}$ -lineare $\mathcal{T} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, con $C \in \mathbb{L}(\mathbb{C}^n)$ la matrice che gli corrisponde in una fissata base in $\mathbb{C}^n$, e si esamini l'equazione $\dot{z} = C z$ con $z \in \mathbb{C}^n$ e condizioni iniziali $z(0) = z_0$. È questa che si deve innanzi tutto risolvere e sulla quale poi verificare il fatto che: quando $\mathcal{T}$ è il complessificato di un operatore reale allora condizioni iniziali reali evolvono in un moto reale.

D'altra parte la risoluzione di un'equazione complessa può essere ottenuta in due modi: o direttamente nel mondo complesso, oppure facendo ricorso al decomplessificato.

(•) Primo modo: si estende agli operatori complessi la definizione di esponenziale di operatore: $e^{\mathcal{T}t} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{T}^k t^k}{k!}$ il che permette la risoluzione in $\mathbb{C}^n$ dell'equazione data. Essa si otterrà diagonalizzando in $\mathbb{C}^n$ l'operatore $\mathcal{T}$ (cosa sempre possibile se i suoi autovalori sono distinti) e sfruttando il fatto che tale base rende diagonale anche la matrice di $e^{\mathcal{T}t}$, per cui le evolute delle coordinate proprie $\zeta := P^{-1}z$ hanno la forma $\zeta^h(t) = e^{\mu_h t} \zeta_0^h$, $h = 1, \dots, n$.

Per risolvere il problema reale si nota poi che quando l'operatore complesso $\mathcal{T}$ è il complessificato ${}^c\mathcal{T}$ di un operatore reale $\mathcal{T}$ l'equazione complessa $\dot{z} = {}^c\mathcal{T}z$ ha come coniugata la $\dot{\bar{z}} = \overline{{}^c\mathcal{T}z} = {}^c\mathcal{T}\bar{z}$ e cioè che è invariante per coniugio.

Ne segue che condizioni iniziali fra loro complesse coniugate danno luogo a soluzioni fra loro complesse coniugate, e che la soluzione del problema reale è la parte reale della soluzione, uscente da dati iniziali reali, del problema complessificato.

N.B. 1.8.10 Ciò non è vero nei casi in cui il campo è tale che $v(t, \bar{z}) \neq \overline{v(t, z)}$, e quindi si ritrova che perfino nel caso più semplice, e cioè: $v(z) = \mu z$ con $\mu, z \in \mathbb{C}$ il problema *non* disaccoppia le parti reale ed immaginaria se la costante μ non è puramente reale. $\diamond$

(•) Secondo modo: la definizione di decomplessificato e la linearità di $\frac{d}{dt}$ implicano che al vettore complesso $\frac{d}{dt}z$ corrisponda in ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n$ il vettore $\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\Re z \\ \frac{d}{dt}\Im z \end{pmatrix}$.

Ne segue che la soluzione dell'equazione $\dot{z} = C z$ è $\phi : t \mapsto z(t) \in \mathbb{C}^n$ se e solo se: $\begin{pmatrix} \Re \phi \\ \Im \phi \end{pmatrix} : t \mapsto \zeta(t) \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n$ è soluzione di $\dot{\zeta} = {}^{\mathbb{R}}C \zeta$, e cioè di un sistema reale di due equazioni (n -dimensionali) accoppiate:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (8.35)$$

con condizioni iniziali $\zeta(0) = \zeta_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

Il sistema (8.35) ha evoluzione nota, e data da

$$\zeta(t) = e^{{}^{\mathbb{R}}Ct} \zeta_0 = e^{t \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}} \zeta_0.$$

Ne segue innanzi tutto, ed in particolare, che l'equazione $\dot{z} = \mu z$, con $z \in \mathbb{C}$ equivale alla $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ con $x, y \in \mathbb{R}^1$, e quindi ha soluzione $z(t) = e^{\mu t} z_0$, in quanto questa corrisponde a

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

In secondo luogo, quando l'operatore $\mathcal{T}$ sia il complessificato di un operatore reale $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, e quindi sia: ${}^c\mathcal{T}(x + iy) = \mathcal{A}x + i\mathcal{A}y$, allora l'equazione $\dot{z} = {}^c\mathcal{T}z$ con $z \in \mathbb{C}^n$ sussiste *se e solo se* per il vettore $(x, y) \in \mathbb{V}^{2n}$ sussiste l'equazione

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = {}^{\mathbb{R}\mathbb{C}}\mathcal{T} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero, in coordinate:} \quad \begin{cases} \dot{x} = \mathbf{A} x \\ \dot{y} = \mathbf{A} y \end{cases}.$$

Le soluzioni di quest'ultimo sono naturalmente

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{{}^{\mathbb{R}\mathbb{C}}\mathcal{T} t} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\mathbf{A}t} & 0 \\ 0 & e^{\mathbf{A}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \quad (8.36)$$

Pertanto, dato che questo sistema è disaccoppiato, risulta evidente che la soluzione della $\dot{z} = {}^c\mathcal{T}z$ con condizioni iniziali reali è reale. Ciò che si è fatto nella discussione che precede questa nota è stato, in definitiva, il limitarsi allo studio delle sole prime n componenti del vettore (8.36).

Si noti che per entrambi i metodi è essenziale il fatto che l'equazione sia lineare. $\triangleright$

A.9 Disuguaglianza generalizzata di Gronwall

Siano $\phi, \alpha \in C^0([a, b], \mathbb{R})$, e $\beta \geq 0$ reale ed integrabile su $[a, b]$, [Hale].

Se

$$\phi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\phi(s)ds, \quad t \in [a, b]$$

allora, per ogni $t \in [a, b]$ si ha

$$\phi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\alpha(s) \left(\exp \int_s^t \beta(\tau)d\tau \right) ds \quad (9.37)$$

Dimostrazione Si ponga $R(t) := \int_a^t \beta(s)\phi(s)ds$.

Si ha $\dot{R}(t) = \beta(t)\phi(t) \leq \beta(t)\alpha(t) + \beta(t)R(t)$, o anche

$$\dot{R} - \beta R \leq \beta\alpha. \quad (9.38)$$

Usando $\exp(-\int_a^s \beta(s)ds)$ come fattore integrante si ricava

$$\frac{d}{ds} \left[\exp \left(-\int_a^s \beta(s)ds \right) R(s) \right] \leq \exp \left(-\int_a^s \beta(s)ds \right) \beta(s)\alpha(s).$$

Integrando si ottiene

$$R(t) \leq \int_a^t \left(\exp \int_s^t \beta(\tau)d\tau \right) \beta(s)\alpha(s)ds.$$

Corollario 1.9.1 Se anche $\dot{\alpha} \geq 0$ è continua, integrando per parti nella (9.38) si ha

$$\begin{aligned} \phi(t) &\leq \alpha(t) - \left[\alpha(\cdot) \exp \left(-\int_t^\cdot \beta(\tau)d\tau \right) \right]_a^t + \int_a^t \left(\exp \int_s^t \beta(\tau)d\tau \right) \dot{\alpha}(s)ds \\ &= \alpha(a) \exp \int_a^t \beta(\tau)d\tau + \int_a^t \left(\exp \int_s^t \beta(\tau)d\tau \right) \dot{\alpha}(s)ds \\ &\leq \left(\exp \int_a^t \beta(\tau)d\tau \right) \left[\alpha(a) + \int_a^t \dot{\alpha}(s)ds \right] \\ &\leq \alpha(t) \exp \int_a^t \beta(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

□

In particolare quest'ultima, con $\alpha = cost$, prende il nome di *Disuguaglianza di Gronwall*. Nel caso in cui ϕ, β siano entrambe continue non negative, ed $\alpha = cost$, quest'ultimo risultato si ottiene in modo più semplice (si veda il § I.3) ■

Bibliografia

La bibliografia esistente sull'argomento è, ovviamente, enorme. Sono qui citati solo alcuni dei titoli che, sia come spirito sia come diffusione alla "Sapienza", sono più vicini e noti agli studenti della Sapienza. Occorre tenere presente che alcuni dei testi qui citati sono semplici, altri *molto* meno. Prima di avventurarsi in una loro lettura, soprattutto se dettagliata, conviene chiedere consigli e suggerimenti in merito.

- [1] ANDRONOV - LEONTOVIC - GORDON - MAYER *Qualitative Theory of second order Dynamical Systems* J. Wiley 1969
- [2] T.M. APOSTOL *Calcolo Boringheri* 1977
- [3] V.I. ARNOLD *Equazioni Differenziali Ordinarie* Mir 1979
- [4] V.I. ARNOLD *Lectures on partial Differential Equations* Springer 2000
- [5] D.K. ARROWSMITH - C.M. PLACE *Ordinary Differential Equations* Chapman 1982
- [6] N.H. ASMAR *Partial Differential Equations with Fourier series and Boundary Value Problems* Prentice Hall 2005
- [7] M. BARNESLEY *Fractals Everywhere* Academic Press, San Diego 1988
- [8] C.M. BENDER - S. ORSZAG *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers* McGraw hill 1978
- [9] W.E. BOYCE - R.C. DI PRIMA *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* J. Wiley 2001
- [10] M. BRAUN *Differential Equations and their Applications* Springer 1975
- [11] I. GASPARINI CATTANEO *Strutture Algebriche ed Operatori Lineari* Veschi 1978
- [12] I. GASPARINI CATTANEO *Complementi di Geometria ed Algebra* Veschi 1989
- [13] L. CESARI *Asymptotic Behaviour and Stability Problems in ODE* Academic Press 1965
- [14] E.A. CODDINGTON - N. LEVISON *Theory of Ordinary Differential Equations* McGraw Hill 1955
- [15] J.D. COLE *Perturbation Methods in Applied Mathematics* Blaisdell 1968
- [16] P. COLLET - J.P. ECKMANN *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems* Progr. on Phys., 1 , Birkhäuser 1980
- [17] R. DEVANEY *An Introduction to Chaotic Dynamical System.* nd ed. Addison Wesley 1988
- [18] W. ECKHAUS *Asymptotic Analysis of Singular Perturbations* North Holland 1979
- [19] M. EISENBERG *Topology* Holt 1974
- [20] F.R. GANTMACHER *The Theory of Matrices* Chelsea 1977
- [21] A. GHIZZETTI - F. ROSATI *Lezioni di Analisi Matematica* Veschi 1972
- [22] J. GUCKENHEIMER - P. HOLMES *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields* Springer, AMS 42 1983
- [23] R. HABERMAN *Mathematical Models: Mechanical Vibrations, Population Dynamics, and Traffic Flow* Prentice Hall 1977
- [24] J. HALE *Ordinary Differential Equations* J. Wiley 1969
- [25] C. HAYASHI *Nonlinear Oscillations in Physical Systems* McGraw hill 1964
- [26] J. HALE - H. KOCAC *Dynamics and Bifurcations* Springer 1997

- [27] P. HARTMAN *Ordinary Differential Equations* Birkhäuser 1982
- [28] M.W. HIRSH - S. SMALE *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra* Academic Press 1974
- [29] J.H. HUBBARD - B.H. WEST *Differential Equations: a Dynamical Systems Approach* Springer, TAM 18 1995
- [30] E.L. INCE *Ordinary Differential Equations* Dover 1956
- [31] G. IOOS - D.D. JOSEPH *Elementary Stability and Bifurcation Theory* Springer 1980
- [32] D.W. JORDAN - P. SMITH *Non Linear Ordinary Differential Equations* Clarendon Press 1977
- [33] J.L.KELLEY *General Topology* Springer, GTM 27 1975
- [34] A.N. KOLMOGOROV - S.V. FOMIN *Elementi di teoria delle funzioni di variabile reale* Mir 1980
- [35] J. LASALLE - S. LEFSHETZ *Stability by Liapunov Direct Method* Academic Press 1961
- [36] S. LEFSCHETZ *Differential Equations, Geometric Theory* Dover 1977
- [37] A.N. MICHEL - R.K. MILLER *Ordinary Differential Equations* Academic Press 1982
- [38] A.H. NAYFEH *Introduction to Perturbation Methods* J. Wiley 1981
- [39] R.E. O'MALLEY *Introduction to Singular Perturbations* Academic Press 1974
- [40] J. PALIS - W. DE MELO *Geometric Theory of Dynamical Systems: an Introduction* Springer 1982
- [41] L. PERKO *Differential Equations and Dynamical Systems* Springer 1991
- [42] L. PONTRYAGIN *Ordinary Differential Equations* Pergamon 1962
- [43] M. REED - B. SIMON *Functional Analysis* Academic Press 1980
- [44] J.A. SANDERS - F. VERHULST *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems* Springer 1985
- [45] H.G SCHUSTER *Deterministic Chaos: an introduction* V C H 1988
- [46] G.F. SIMMONS *Differential Equations with Applications and Historical Notes* McGraw Hill 1972
- [47] M. TENENBAUM - H. POLLARD *Ordinary Differential Equations* Dover 1985
- [48] F. VERHULST *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems* Springer 1990
- [49] V.V. VOYEVODIN *Linear Algebra* Mir 1983
- [50] S. WIGGINS *Global Bifurcations and Chaos* Springer, AMS 73 1988
- [51] S. WIGGINS *An Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos* Springer, TAM 2 1990

Indice analitico

- $\mathbb{K}$ -modulo, 382
- ϵ -catena, 286
- $\phi = O(\delta)$, 306
- $f = O(g)$, 304
- $f = O_s(g)$, 304
- $f = o(g)$, 304
- $f \ll (g)$, 304
- $f \sim g$, 304
- f_{aa} di f , 304
- $g = f_{aa}$, 305
- Ampiezze
 - lentamente variabili, 368
- Analisi grafica, 232
- Anello, 382
- Aperti, 379
- Aperto
 - semplicemente connesso, 36
- Applicazione
 - d'avanzamento, 2
 - tangente, 439
- Approssimazione
 - Asintotica, 307
- Assioma
 - di numerabilità, 379
- Asymptotic Matching Principle, 347
- Atlante, 435
- Atlante
 - massimale, 435
- Attrattore, 286
- Attrattore caotico, 253
- Attrattore della mappa quadratica, 244
- Attrattore di Feigenbaum, 240
- Attrattore di Henon, 278
- Attrattore espansivo, 278
- Attrattore strano, 286
- Automorfismi del toro, 283
- Automorfismi ergodici, 257
- Automorfismo, 230
- Autospazi
 - generalizzati, 121
- Autospazio, 460
- Autospazio
 - generalizzato, 461
- Autovalore, 459
- Autovettore, 459
- Autovettore
 - generalizzato, 462
- Avanzamento
 - locale, 4
- Bacino
 - di attrazione, 170
- Bacino di attrazione, 242
- Base, 44, 379
- Base
 - di intorni, 379
 - di vettori, 396
 - duale, 413, 415, 448
 - propria dell'operatore, 462
- Biforcazione a forchetta, 273
- Biforcazione a forchetta subcritica, 273
- Biforcazione secondaria alla Hopf, 277
- Biforcazione tangente, 271
- Biforcazione transcritica, 274
- Bilancio
 - Dominato, 312
- Blocco
 - elementare di Jordan, 117
 - nilpotente, 116
- Boundary
 - layer, 342
 - layer, 353
- Brachistocrona, 43
- Cambio
 - di base, 454
 - di coordinate, 439
- Cambio di stabilità, 274
- Cammino
 - generalmente regolare, 33
 - semplice, 33
- Campi
 - Localmente Lipschitz, 19
 - vettoriali
 - Lipschitz, 19
 - vettoriali coniugati, 151
 - vettoriali equivalenti, 152
 - vettoriali topologicamente equivalenti, 153
- Campo, 382
- Campo
 - variato, 186
 - vettoriale, 5, 443
- Carta, 434
- Carte
 - compatibili, 434
- Catena di Markov, 250
- Catenaria, 41
- Centro, 183
- Chiusura, 380
- Ciclo
 - isolato, 169
 - limite, 160
- Ciclo superstabile, 237
- Cilindro, 249
- Cluster, 380
- Codimensione, 395, 410
- Coefficienti
 - di Fourier, 399

- Complemento
 - ortogonale, 410
- Complessificato
 - di un operatore reale, 476
 - di uno spazio reale, 475
- Completare
 - uno spazio, 386
- Completezza
 - dello spazio degli operatori, 469
- Componenti
 - covarianti , 413
- Condizione
 - di Schwartz, 36
- Condizioni
 - di Lipschitz, 19
- Connessione
 - lineare semplice, 36
- Continuità rispetto ai dati, 189
- Contrazione, 22
- Convergenza
 - debole, 388
 - in L_1 , 398
 - in L_2 , 398
 - in metrica, 384
 - in misura, 398
 - in norma, 384, 470
 - puntuale, 390
 - quasi ovunque, 398
 - totale, 54
 - uniforme, 384, 398
- Coordinata, 434
- Coordinate
 - adattate al flusso, 164
 - equivalenti, 437
 - naturali, 444
 - normali, 86
- Criterio
 - di Cauchy, 384
- Curva
 - basata in x , 437
 - integrale, 3
- Curva di fase, 3
- Curve
 - di inseguimento, 41
 - tangenti, 437
- Decomplessificato
 - di $\mathcal{T}$, 476
- Decomplessificazione, 472
- Derivata, 439
- Derivata
 - direzionale, 161
- Derivata di Schwartz, 240
- Derivato, 380
- Determinante
 - di Hill, 144
- Determining
 - Equation, 330
- Diagonalizzabilità, 459
- Diagonalizzabilità
 - di forme , 84
- Diffeomorfismo, 2, 439
- Dimensione
 - della varietà, 435
- Dinamica caotica, 253, 281, 287
- Dinamica grafica, 232
- Dinamica Simbolica, 248
- Dipendenza continua, 189
- Dipendenza sensibile dal dato, 248
- Direzione di espansività, 248
- Disuguaglianza
 - di Bessel, 408
 - di Schwarz, 383
 - generalizzata di Gronwall, 481
- Divario
 - fra due insiemi, 191
- Divisori
 - elementari semplici, 461
- Dominio, 5
- Endomorfismo, 230
- Endomorfismo del toro, 231
- Energia, 173
- Epsilon-rete, 392
- Equazione
 - Van der Pol, 331
 - aggiunta, 416
 - del pianeta, 180
 - di Bernoulli, 40
 - di Bessel, 62, 68
 - di Clairaut, 31
 - di Duffing, 179, 359, 370
 - di Duffing
 - debolmente forzata, 375
 - forzata, 373
 - di Eulero, 216
 - di Hermite, 60
 - di Hill, 140
 - di Lienard, 224
 - di Lighthill, 324, 333, 350
 - di Mathieu, 140
 - di ordine n , 124
 - di Riccati, 40
 - di Schrödinger, 59
 - di Van Der Pol, 210, 223
 - di Van der Pol, 188
 - di Volterra Lotka, 224
 - ipergeometrica di Gauss, 72
 - lineare
 - scalare, 39
 - linearizzata, 75
 - logistica, 30
 - Secolare, 459
 - Variazionale, 26, 303
- Equazione di Duffing, 289
- Equazione di Eulero, 290
- Equazione di Van Der Pol, 205
- Equazione differenziale associata, 157

- Equazioni
 - di Hamilton, 82
 - differenziali
 - esatte, 33
 - omogenee, 32
- Equicontinuità, 394
- Equivalenza
 - fra metriche, 390
 - metrica fra spazi, 391
 - topologica, 151
 - topologica fra metriche, 390
 - topologica fra spazi, 390
- Ergodico, 256
- Espansività, 258
- Esponente
 - di Liapunov, 139
 - indiciale, 63
- Esponente di Liapunov, 254, 278, 287
- Esponenti
 - caratteristici, 138
- Esponenti di Liapunov, 288
- Esponenziale
 - di operatore, 480
 - di un numero complesso, 474
 - di un operatore, 96
- Famiglia
 - equicontinua, 394
 - locale
 - di applicazioni, 4
 - uniformemente limitata, 394
- Fattore
 - di Controllo, 315
 - integrante, 38, 166
- Fibrato
 - tangente, 442
- Flip-bifurcation, 276
- Flussi
 - coniugati, 203
- Flusso
 - di fase, 2
- Fold-bifurcation, 271
- Forma
 - bilineare, 451
 - Esatta, 34
 - Hermitiana, 451
 - quadratica, 452
 - quadratica
 - definita positiva, 453
- Forme quadratiche
 - non degeneri, 202
- Forte
 - stabilità, 143
- Frontiera, 380
- Funzionale
 - lineare continuo, 410
- Funzionali, 388
- Funzione, 387
- Funzione
 - Γ , 69
 - analitica, 55
 - Bijettiva, 387
 - Continua, 387
 - d'ordine, 306
 - definita positiva, 211
 - di gauge, 306
 - di Liapunov, 213
 - Hamiltoniana, 82
 - Iniettiva, 387
 - invertibile, 387
 - Ipergeometrica di Gauss, 72
 - liscia, 402
 - liscia a tratti, 420
 - omogenea di grado $p \in \mathbb{R}$, 211
 - scarto, 303
 - semicontinua superiormente, 394
 - Suriettiva, 387
- Funzione dispari, 400
- Funzione pari, 400
- Funzione quasi periodica, 268
- Funzione unimodale, 236
- Funzione universale di Feigenbaum, 240
- Funzioni
 - di Bessel, 69
- Fuoco, 109
- Gatto di Arnold, 257, 284
- Generatore, 257
- Generatore
 - di un gruppo, 94
- Generazione del caos, 300
- Genericità, 204
- Genuinamente lineare, 197
- Gradiente, 161
- Grafico
 - di un operatore, 426
- Grahm-Schmidt, 396
- Gruppo, 382
- Gruppo
 - di evolutori, 2
 - locale, 2
- Identità
 - di Lagrange, 417
- Immagine
 - del moto, 3
 - di un operatore, 445
- Indice
 - positivo d'inerzia, 455
- Indice
 - negativo d'inerzia, 455
- Insieme
 - ω -limite, 169
 - affatto denso, 381
 - aperto, 204
 - attrattivo, 170
 - compatto, 391
 - compatto numerabile, 391

- completo, 395
- denso, 204, 381
- generico, 204
- invariante, 170
- limitato, 381
- normale, 36
- ovunque denso, 381
- positivamente invariante, 170
- precompatto, 393
- regolare, 36
- relativamente compatto, 393
- residuo, 204
- semplice, 36
- totalmente limitato, 392
- uniformemente limitato , 394
- Insieme affatto denso, 256
- Insieme di biforcazione, 270
- Insieme di Cantor, 247, 252
- Insieme equicontinuo, 394
- Insieme iperbolico, 287
- Insieme non decomponibile, 286
- Insieme non erratico, 256
- Insieme perfetto, 247
- Insieme totalmente disconnesso , 252
- Insiemi
 - Chiusi, 380
 - ortogonali, 410
- Insiemi totalmente disconnessi, 240
- Integrale
 - ellittico, 178, 362
 - primo, 162
- Integrale primo
 - dipendente dal tempo, 165
- Integrali
 - primi locali, 165
- Intermittenze, 272
- Interno, 380
- Intersezione trasversa, 289
- Intervallo
 - massimale, 125
 - Massimo di esistenza, 18
- Intorni
 - deboli, 388
- Intorno, 379
- Inversione
 - del teorema del Dirichlet, 226
- Inviluppo
 - lineare, 389
- Iperbolicità, 287
- Isocline, 158
- Isomorfismo, 230
- Kernel, 411
- Kernel
 - di un operatore, 445
- Lemma
 - di Gronwall, 19
 - di Uryshon, 389
- Limite
 - esterno, 346
 - intermedio, 344
 - interno, 346
- Linear hull, 389
- Linearizzazione, 321
- Linearizzazione
 - di un sistema hamiltoniano, 82
 - di un sistema lagrangiano, 84
- Linee
 - di corrente, 11
 - di flusso, 11
 - di livello, 163
- Logaritmo
 - di un numero complesso, 474
 - di un operatore, 133
- m-test, 397
- Mappa
 - di primo ritorno, 169
- Mappa a ferro di cavallo, 279
- Mappa Bijettiva, 229
- Mappa d'avanzamento, 250
- Mappa del panettiere, 254
- Mappa di Henon, 277
- mappa di Poincaré linearizzata, 292
- Mappa Iniettiva, 229
- Mappa invertibile, 229
- Mappa lineare, 229
- Mappa quadratica, 234, 258, 260, 274
- Mappa Suriettiva, 229
- Mappe, 227
- Mappe caotiche, 253
- Mappe di Poincaré, 261
- Matrice
 - fondamentale, 94, 127
 - monodroma, 136
 - principale, 94, 127
 - simplettica, 143
- Matrici
 - congruenti, 453
 - equivalenti, 453
 - simili, 453
- Metodo
 - del Matching Asintotico, 342
 - della media, 363
 - delle Scale Multiple, 336
 - di Frobenius, 62
 - di Lighthill, 333
 - di Lindstet, 326
 - di Rinormalizzazione, 332
 - perturbativo diretto, 318
- Metodo di Volterra, 157
- Metrica, 380
- Metriche
 - equivalenti, 390
 - topologicamente equivalenti, 390
- Minimalità, 255
- Misura di Borel, 256

- Modello
 - ecologico, 91
 - ecologico , 29
- Modi
 - normali, 86, 208
- Molteplicità
 - algebrica, 460
 - geometrica, 460
- Moltiplicatori
 - caratteristici, 138
- Momenti
 - Coniugati, 80
- Moto, 2
- Moto ergodico, 254
- Nodo, 106
- Nodo
 - improprio, 119
- Nodo-sella, 271
- Norma, 382
- Norma
 - del “Tassinaro”, 466
 - del Sup, 466
 - di un operatore, 469
 - Euclidea, 466
 - Euclidea in base $\mathbb{B}$, 466
 - Euclidea standard, 466
 - rispetto ad un operatore, 467
 - Spettrale, 469
 - Uniforme, 469
- Norme
 - Equivalenti, 467
- Nucleo
 - Risolvente, 131
- Numeri
 - caratteristici, 138
- Numero di Lebesgue, 257
- Omeomorfismo, 390
- Omeomorfismo ergodico, 256
- Omoclina, 185
- Omoclina trasversa, 289
- Omoclina degeneri, 254
- Omomorfismo, 230
- Operatore
 - aggiunto, 415, 447
 - Autoaggiunto, 450
 - autoaggiunto, 416, 455
 - compatto, 426
 - Coniugato, 475
 - d’evoluzione, 2
 - Definito Positivo, 416
 - definito positivo, 450
 - diagonalizzabile, 459
 - elementare nilpotente, 116
 - indotto, 446
 - invertibile, 424, 425
 - limitato, 411
 - lineare, 44
 - lineare continuo, 410
 - lineare invertibile, 424, 446
 - lineare limitato, 410
 - nilpotente di ordine $q \leq n$, 116
 - non singolare, 424
 - normale, 449
 - Ortagonale, 450
 - precompatto, 426
 - reciproco, 142
 - semi-definito positivo, 450
 - strettamente singolare, 426
 - suriettivo, 425
 - Unitario, 450
- Operatore chiuso, 426
- Operatore di “transizione”, 250
- Operatore di avanzamento, 250
- Operatore di compatibilità, 250
- Operatore di shift, 250
- Operatori
 - di troncamento, 347
- Operatori semisemplici, 204
- Operazione
 - di coniugio, 471
- Orbita, 3
- Orbita omoclina, 289
- Orbita periodica attrattiva, 241
- Orbite periodiche superstabili, 234
- Ordine di grandezza di δ , 306
- Orientamento, 446
- Oscillatore, 106, 111, 118
- Oscillatore
 - armonico, 322, 372
 - smorzato, 328, 340
- Oscillatore armonico, 263
- Palla, 380
- Pendoli
 - accoppiati, 86
- Pendolo
 - fisico, 104, 113, 358
 - fisico conservativo, 176
 - oscillante, 139
 - smorzato, 205
- Pendolo uniformemente rotante, 260
- Period doubling, 239, 276
- Periodo del moto, 150
- Persistenza
 - delle selle- k , 204
- Piani
 - paralleli, 413
- Piano, 412
- Piccole
 - oscillazioni, 86
- Pitchfork, 273
- Polinomi
 - di Hermite, 61
- Polinomio
 - caratteristico, 459
- Posizione

- di equilibrio, 4
- Preda - predatore, 91
- Principio
 - del Paragone Asintotico, 347
- Problema
 - alle variazioni, 76
 - di Sturm-Liouville, 419
 - Esterno, 343
 - esterno, 346
 - Interno, 343
 - interno, 346
 - variazionale, 76
- Procedimento
 - di Grahm-Schmidt, 396
- Processo
 - deterministico, 1
 - differenziabile, 1
 - stazionario, 2
- Prodotto
 - interno, 383
 - scalare, 383
 - scalare definito da un operatore, 455
- Proiezioni
 - stereografiche, 436
- Prolungabilità, 18
- Pulsazioni
 - proprie, 86, 208
- Punti di diramazione, 270
- Punti eteroclini, 254
- Punti omoclini, 254
- Punto
 - ω -limite, 169
 - di aderenza, 379
 - di contatto, 379
 - di equilibrio regolare, 181
 - interno, 379
 - Iperbolico, 78
 - isolato di un insieme, 380
 - limite di una successione, 380
 - ordinario, 58
- Punto critico, per una mappa, 229
- Punto di accumulazione, 380
- Punto di biforcazione, 260, 270
- Punto di biforcazione a forchetta, 272
- Punto di biforcazione alla Hopf, 274
- Punto di gomito, 271
- Punto di raddoppio di periodo, 276
- Punto fisso, per una mappa, 229
- Punto iperbolico, per una mappa, 229
- Punto non erratico, 256
- Punto omoclinico, 289
- Punto periodico, per una mappa, 229
- Punto regolare, 270
- Punto ricorrente, 256
- Punto singolare regolare, 58
- Quasi
 - ovunque, 397
- Quasi-periodico, 141
- Regione
 - di accessibilità, 428
 - esterna, 346
 - interna, 346
- Regola di Lighthill, 333
- Retta
 - complessa, 471
- Ricoprimento
 - aperto, 391
- Riduzione
 - di ordine, 42
- Risonanza
 - parametrica, 145
- Rotazione del toro, 231, 257
- Rotazione irrazionale del toro, 259
- Segmento
 - trasverso, 168
- Segnatura, 455
- Sella
 - standard, 104, 183
- Sella (k), 184
- Semiorbite, 190
- Separatrice, 177
- Separazione
 - di variabili, 27
- Serie
 - Asintotica, 307
 - di Frobenius, 63
 - di Neumann, 429
- Sezione stroboscopica, 263
- Sezioni trasverse, 291
- Sfera, 380
- Shift di Markov, 248
- Sistema, 1
- Sistema
 - dinamico
 - locale, 4
 - perturbato, 303
 - aggiunto, 130
 - centrato, 391
 - conservativo, 163
 - deterministico, 1
 - di Volterra - Lotka, 91
 - dinamico, 4
 - fondamentale, 95, 126
 - genuinamente lineare, 197
 - hamiltoniano, 79
 - Lagrangiano, 79
 - locale di coordinate, 434
 - meccanico, 1
 - meccanico conservativo, 79
 - ortogonale, 396
 - reciproco, 142
- Sistema caotico, 253
- Sistema di Markov, 248
- Sistema espansivo, 258
- Sistema minimale, 255
- Sistema topologicamente transitivo, 256

- Sistemi
 - Hamiltoniani, 166
 - Hamiltoniani lineari periodici, 142
 - Meccanici posizionali scalari, 173
 - periodici equivalenti, 136
- Sistemi discreti, 227
- Sistemi topologicamente coniugati, 252
- Smale horseshoe, 279
- Solenoidi, 285
- Soluzione
 - asintoticamente stabile, 196
 - generale, 30
 - Liapunov-stabile, 195
 - singolare, 31
 - stabile, 195
 - uniformemente stabile, 196
- Soluzione orbitalmente stabile, 190
- Soluzioni
 - Normali, 138
- Somma
 - Asintotica, 307
 - Asintotica
 - di funzioni, 306
 - di una serie, 399
 - di una serie di operatori, 470
 - diretta, 395, 410
- Sottospazi
 - ortogonali, 410
- Sottospazio, 395
- Sottospazio
 - $\mathcal{T}$ -invariante, 446
 - invariante, 446
 - ortogonale, 448
- Sottovarietà, 435
- Span, 395
- Spazi
 - euclidei isomorfi, 409
 - metricamente equivalenti, 391
 - omeomorfi, 390
 - Topologicamente equivalenti, 390
- Spazio
 - 2-numerabile, 434
 - a dimensione finita, 396
 - a misura finita, 397
 - delle fasi, 1
 - di Banach, 386
 - di Hausdorff, 381, 434
 - di Hilbert, 408
 - duale, 411
 - euclideo, 383
 - euclideo separabile, 396
 - metrico, 380
 - metrico Completo, 384
 - normato, 382
 - prodotto, 389
 - separabile, 382
 - tangente, 437
 - unitario, 383, 444
 - vettoriale, 44
 - vettoriale $\mathbb{V}$, 382
- Spazio topologico, 379
- Specchio, 39
- Spirale, 109
- Stabilità
 - alla Liapunov, 195
 - asintotica, 196
 - dei sistemi lineari, 197
 - uniforme, 196
- Stabilità alla Poincaré, 190
- Stabilità orbitale, 190
- Stabilità strutturale, 259
- stabilità strutturale, 259
- Stato
 - del sistema, 1
- Storia plausibile, 250
- Strato
 - limite, 342
- Struttura
 - differenziabile, 435
 - euclidea, 383
- strutturale stabilità, 259
- Sub-shift finito, 285
- Subbase, 379
- Subshift finito, 250
- Successione
 - Asintotica, 307
 - Asintotica
 - di funzioni, 306
 - di funzioni d'ordine, 306
 - convergente, 380
 - di Cauchy, 384
 - di funzioni continue, 398
 - uniformemente di Cauchy, 384
- Successioni
 - equivalenti, 386
- Superfici
 - Equipotenziali, 173
- Superficie
 - singolare, 156
- Sviluppo
 - Asintotico, 308
 - Composto, 346, 347
 - di Taylor, 308
 - esterno, 346
 - interno, 346
 - non uniforme, 324
 - Regolare, 319
 - Singolare, 319
 - Uniforme, 319
- Tent-map sul toro, 253
- Teorema
 - degli assi principali, 450
 - del sottoinsieme invariante, 215
 - dell'isomorfismo, 409
 - delle contrazioni, 22
 - di Ascoli-Arzelà, 394
 - di Cauchy-Picard, 23

- di conservazione, 162
- di Dirichlet-Laplace-Liapunov, 214
- di Floquet, 135
- di Fourier, 402
- di Jordan, 462
- di La Salle, 215
- di Liapunov, 214
- di Liapunov (lineare), 200
- di Liapunov (diretto), 219
- di Peano, 18
- di persistenza delle selle- k , 204
- di primo ritorno, 167
- di Prolungabilità, 18
- di regolarità, 22, 26
- di rettificazione, 163
- di unicità, 19
- di Weierstrass (1), 399
- di Weierstrass (2), 402
- di Chetaiev, 218
- Poincaré-Bendixon, 171
- Teorema di Grobman-Hartman, 259
- Teorema di Sarkowski, 242
- Teoremi
 - di stabilità lineare, 197
- Topologia, 379
- Topologia
 - debole
 - generata da F , 388
 - su $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$, 388
 - su $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$, 388
 - discreta, 381
 - indotta dalla metrica, 381
 - quoziente, 381
- Topologia prodotto, 249
- Topologia relativa, 381
- Traiettoria, 3
- Traiettoria
 - Omoclina, 185
- Traiettorie
 - eterocline, 177
 - omocline, 177
- Traiettorie omocline, 254
- Transitività topologica, 286
- Transizione al caos, 272
- Trasformazione
 - di coordinate, 440
 - di Van Der Pol, 367
- Trasformazione espansiva, 258
- Trasformazione minimale, 255
- Trasformazione topologicamente transitiva, 256
- Twist-map, 282
- Uguaglianza
 - di Parseval, 408
- Variabili
 - esterne, 345
 - interne, 346
- Varietà
 - connessa, 435
 - differenziabile, 435
 - globali, 184
 - lineare, 394, 411
 - locali, 184
 - topologica, 434
- Varietà stabile, 288
- Velocità, 437
- Velocità
 - di fase, 4
- Vettore
 - tangente, 437
 - velocità, 437
- Vettori
 - equivalenti, 395
 - linearmente indipendenti, 128
 - ortogonali, 383
- Vortici puntiformi, 290
- Weierstrass
 - m -test, 54
- Weierstrass m -test, 397
- Wronskiano, 46, 129
- Zone
 - di non uniformità, 319

Indice analitico

- $\mathbb{K}$ -modulo, 382
- ϵ -catena, 286
- $\phi = O(\delta)$, 306
- $f = O(g)$, 304
- $f = O_s(g)$, 304
- $f = o(g)$, 304
- $f \ll (g)$, 304
- $f \sim g$, 304
- f_{aa} di f , 304
- $g = f_{aa}$, 305
- Ampiezze
 - lentamente variabili, 368
- Analisi grafica, 232
- Anello, 382
- Aperti, 379
- Aperto
 - semplicemente connesso, 36
- Applicazione
 - d'avanzamento, 2
 - tangente, 439
- Approssimazione
 - Asintotica, 307
- Assioma
 - di numerabilità, 379
- Asymptotic Matching Principle, 347
- Atlante, 435
- Atlante
 - massimale, 435
- Attrattore, 286
- Attrattore caotico, 253
- Attrattore della mappa quadratica, 244
- Attrattore di Feigenbaum, 240
- Attrattore di Henon, 278
- Attrattore espansivo, 278
- Attrattore strano, 286
- Automorfismi del toro, 283
- Automorfismi ergodici, 257
- Automorfismo, 230
- Autospazi
 - generalizzati, 121
- Autospazio, 460
- Autospazio
 - generalizzato, 461
- Autovalore, 459
- Autovettore, 459
- Autovettore
 - generalizzato, 462
- Avanzamento
 - locale, 4
- Bacino
 - di attrazione, 170
- Bacino di attrazione, 242
- Base, 44, 379
- Base
 - di intorni, 379
 - di vettori, 396
 - duale, 413, 415, 448
 - propria dell'operatore, 462
- Biforcazione a forchetta, 273
- Biforcazione a forchetta subcritica, 273
- Biforcazione secondaria alla Hopf, 277
- Biforcazione tangente, 271
- Biforcazione transcritica, 274
- Bilancio
 - Dominato, 312
- Blocco
 - elementare di Jordan, 117
 - nilpotente, 116
- Boundary
 - layer, 342
 - layer, 353
- Brachistocrona, 43
- Cambio
 - di base, 454
 - di coordinate, 439
- Cambio di stabilità, 274
- Cammino
 - generalmente regolare, 33
 - semplice, 33
- Campi
 - Localmente Lipschitz, 19
 - vettoriali
 - Lipschitz, 19
 - vettoriali coniugati, 151
 - vettoriali equivalenti, 152
 - vettoriali topologicamente equivalenti, 153
- Campo, 382
- Campo
 - variato, 186
 - vettoriale, 5, 443
- Carta, 434
- Carte
 - compatibili, 434
- Catena di Markov, 250
- Catenaria, 41
- Centro, 183
- Chiusura, 380
- Ciclo
 - isolato, 169
 - limite, 160
- Ciclo superstabile, 237
- Cilindro, 249
- Cluster, 380
- Codimensione, 395, 410
- Coefficienti
 - di Fourier, 399

- Complemento
 - ortogonale, 410
- Complessificato
 - di un operatore reale, 476
 - di uno spazio reale, 475
- Completare
 - uno spazio, 386
- Completezza
 - dello spazio degli operatori, 469
- Componenti
 - covarianti , 413
- Condizione
 - di Schwartz, 36
- Condizioni
 - di Lipschitz, 19
- Connessione
 - lineare semplice, 36
- Continuità rispetto ai dati, 189
- Contrazione, 22
- Convergenza
 - debole, 388
 - in L_1 , 398
 - in L_2 , 398
 - in metrica, 384
 - in misura, 398
 - in norma, 384, 470
 - puntuale, 390
 - quasi ovunque, 398
 - totale, 54
 - uniforme, 384, 398
- Coordinata, 434
- Coordinate
 - adattate al flusso, 164
 - equivalenti, 437
 - naturali, 444
 - normali, 86
- Criterio
 - di Cauchy, 384
- Curva
 - basata in x , 437
 - integrale, 3
- Curva di fase, 3
- Curve
 - di inseguimento, 41
 - tangenti, 437
- Decomplessificato
 - di $\mathcal{T}$, 476
- Decomplessificazione, 472
- Derivata, 439
- Derivata
 - direzionale, 161
- Derivata di Schwartz, 240
- Derivato, 380
- Determinante
 - di Hill, 144
- Determining
 - Equation, 330
- Diagonalizzabilità, 459
- Diagonalizzabilità
 - di forme , 84
- Diffeomorfismo, 2, 439
- Dimensione
 - della varietà, 435
- Dinamica caotica, 253, 281, 287
- Dinamica grafica, 232
- Dinamica Simbolica, 248
- Dipendenza continua, 189
- Dipendenza sensibile dal dato, 248
- Direzione di espansività, 248
- Disuguaglianza
 - di Bessel, 408
 - di Schwarz, 383
 - generalizzata di Gronwall, 481
- Divario
 - fra due insiemi, 191
- Divisori
 - elementari semplici, 461
- Dominio, 5
- Endomorfismo, 230
- Endomorfismo del toro, 231
- Energia, 173
- Epsilon-rete, 392
- Equazione
 - Van der Pol, 331
 - aggiunta, 416
 - del pianeta, 180
 - di Bernoulli, 40
 - di Bessel, 62, 68
 - di Clairaut, 31
 - di Duffing, 179, 359, 370
 - di Duffing
 - debolmente forzata, 375
 - forzata, 373
 - di Eulero, 216
 - di Hermite, 60
 - di Hill, 140
 - di Lienard, 224
 - di Lighthill, 324, 333, 350
 - di Mathieu, 140
 - di ordine n , 124
 - di Riccati, 40
 - di Schrödinger, 59
 - di Van Der Pol, 210, 223
 - di Van der Pol, 188
 - di Volterra Lotka, 224
 - ipergeometrica di Gauss, 72
 - lineare
 - scalare, 39
 - linearizzata, 75
 - logistica, 30
 - Secolare, 459
 - Variazionale, 26, 303
- Equazione di Duffing, 289
- Equazione di Eulero, 290
- Equazione di Van Der Pol, 205
- Equazione differenziale associata, 157

- Equazioni
 - di Hamilton, 82
 - differenziali
 - esatte, 33
 - omogenee, 32
- Equicontinuità, 394
- Equivalenza
 - fra metriche, 390
 - metrica fra spazi, 391
 - topologica, 151
 - topologica fra metriche, 390
 - topologica fra spazi, 390
- Ergodico, 256
- Espansività, 258
- Esponente
 - di Liapunov, 139
 - indiziale, 63
- Esponente di Liapunov, 254, 278, 287
- Esponenti
 - caratteristici, 138
- Esponenti di Liapunov, 288
- Esponenziale
 - di operatore, 480
 - di un numero complesso, 474
 - di un operatore, 96
- Famiglia
 - equicontinua, 394
 - locale
 - di applicazioni, 4
 - uniformemente limitata, 394
- Fattore
 - di Controllo, 315
 - integrante, 38, 166
- Fibrato
 - tangente, 442
- Flip-bifurcation, 276
- Flussi
 - coniugati, 203
- Flusso
 - di fase, 2
- Fold-bifurcation, 271
- Forma
 - bilineare, 451
 - Esatta, 34
 - Hermitiana, 451
 - quadratica, 452
 - quadratica
 - definita positiva, 453
- Forme quadratiche
 - non degeneri, 202
- Forte
 - stabilità, 143
- Frontiera, 380
- Funzionale
 - lineare continuo, 410
- Funzionali, 388
- Funzione, 387
- Funzione
 - Γ , 69
 - analitica, 55
 - Bijettiva, 387
 - Continua, 387
 - d'ordine, 306
 - definita positiva, 211
 - di gauge, 306
 - di Liapunov, 213
 - Hamiltoniana, 82
 - Iniettiva, 387
 - invertibile, 387
 - Ipergeometrica di Gauss, 72
 - liscia, 402
 - liscia a tratti, 420
 - omogenea di grado $p \in \mathbb{R}$, 211
 - scarto, 303
 - semicontinua superiormente, 394
 - Suriettiva, 387
- Funzione dispari, 400
- Funzione pari, 400
- Funzione quasi periodica, 268
- Funzione unimodale, 236
- Funzione universale di Feigenbaum, 240
- Funzioni
 - di Bessel, 69
- Fuoco, 109
- Gatto di Arnold, 257, 284
- Generatore, 257
- Generatore
 - di un gruppo, 94
- Generazione del caos, 300
- Genericità, 204
- Genuinamente lineare, 197
- Gradiente, 161
- Grafico
 - di un operatore, 426
- Grahm-Schmidt, 396
- Gruppo, 382
- Gruppo
 - di evolutori, 2
 - locale, 2
- Identità
 - di Lagrange, 417
- Immagine
 - del moto, 3
 - di un operatore, 445
- Indice
 - positivo d'inerzia, 455
- Indice
 - negativo d'inerzia, 455
- Insieme
 - ω -limite, 169
 - affatto denso, 381
 - aperto, 204
 - attrattivo, 170
 - compatto, 391
 - compatto numerabile, 391

- completo, 395
- denso, 204, 381
- generico, 204
- invariante, 170
- limitato, 381
- normale, 36
- ovunque denso, 381
- positivamente invariante, 170
- precompatto, 393
- regolare, 36
- relativamente compatto, 393
- residuo, 204
- semplice, 36
- totalmente limitato, 392
- uniformemente limitato, 394
- Insieme affatto denso, 256
- Insieme di biforcazione, 270
- Insieme di Cantor, 247, 252
- Insieme equicontinuo, 394
- Insieme iperbolico, 287
- Insieme non decomponibile, 286
- Insieme non erratico, 256
- Insieme perfetto, 247
- Insieme totalmente disconnesso, 252
- Insiemi
 - Chiusi, 380
 - ortogonali, 410
- Insiemi totalmente disconnessi, 240
- Integrale
 - ellittico, 178, 362
 - primo, 162
- Integrale primo
 - dipendente dal tempo, 165
- Integrali
 - primi locali, 165
- Intermittenze, 272
- Interno, 380
- Intersezione trasversa, 289
- Intervallo
 - massimale, 125
 - Massimo di esistenza, 18
- Intorni
 - deboli, 388
- Intorno, 379
- Inversione
 - del teorema del Dirichlet, 226
- Involuppo
 - lineare, 389
- Iperbolicità, 287
- Isocline, 158
- Isomorfismo, 230
- Kernel, 411
- Kernel
 - di un operatore, 445
- Lemma
 - di Gronwall, 19
 - di Uryshon, 389
- Limite
 - esterno, 346
 - intermedio, 344
 - interno, 346
- Linear hull, 389
- Linearizzazione, 321
- Linearizzazione
 - di un sistema hamiltoniano, 82
 - di un sistema lagrangiano, 84
- Linee
 - di corrente, 11
 - di flusso, 11
 - di livello, 163
- Logaritmo
 - di un numero complesso, 474
 - di un operatore, 133
- m-test, 397
- Mappa
 - di primo ritorno, 169
- Mappa a ferro di cavallo, 279
- Mappa Bijettiva, 229
- Mappa d'avanzamento, 250
- Mappa del panettiere, 254
- Mappa di Henon, 277
- mappa di Poincaré linearizzata, 292
- Mappa Iniettiva, 229
- Mappa invertibile, 229
- Mappa lineare, 229
- Mappa quadratica, 234, 258, 260, 274
- Mappa Suriettiva, 229
- Mappe, 227
- Mappe caotiche, 253
- Mappe di Poincaré, 261
- Matrice
 - fondamentale, 94, 127
 - monodroma, 136
 - principale, 94, 127
 - simplettica, 143
- Matrici
 - congruenti, 453
 - equivalenti, 453
 - simili, 453
- Metodo
 - del Matching Asintotico, 342
 - della media, 363
 - delle Scale Multiple, 336
 - di Frobenius, 62
 - di Lighthill, 333
 - di Lindstedt, 326
 - di Rinormalizzazione, 332
 - perturbativo diretto, 318
- Metodo di Volterra, 157
- Metrica, 380
- Metriche
 - equivalenti, 390
 - topologicamente equivalenti, 390
- Minimalità, 255
- Misura di Borel, 256

- Modello
 - ecologico, 91
 - ecologico , 29
- Modi
 - normali, 86, 208
- Molteplicità
 - algebrica, 460
 - geometrica, 460
- Moltiplicatori
 - caratteristici, 138
- Momenti
 - Coniugati, 80
- Moto, 2
- Moto ergodico, 254
- Nodo, 106
- Nodo
 - improprio, 119
- Nodo-sella, 271
- Norma, 382
- Norma
 - del “Tassinaro”, 466
 - del Sup, 466
 - di un operatore, 469
 - Euclidea, 466
 - Euclidea in base $\mathbb{B}$, 466
 - Euclidea standard, 466
 - rispetto ad un operatore, 467
 - Spettrale, 469
 - Uniforme, 469
- Norme
 - Equivalenti, 467
- Nucleo
 - Risolvente, 131
- Numeri
 - caratteristici, 138
- Numero di Lebesgue, 257
- Omeomorfismo, 390
- Omeomorfismo ergodico, 256
- Omoclina, 185
- Omoclina trasversa, 289
- Omoclina degeneri, 254
- Omomorfismo, 230
- Operatore
 - aggiunto, 415, 447
 - Autoaggiunto, 450
 - autoaggiunto, 416, 455
 - compatto, 426
 - Coniugato, 475
 - d’evoluzione, 2
 - Definito Positivo, 416
 - definito positivo, 450
 - diagonalizzabile, 459
 - elementare nilpotente, 116
 - indotto, 446
 - invertibile, 424, 425
 - limitato, 411
 - lineare, 44
 - lineare continuo, 410
 - lineare invertibile, 424, 446
 - lineare limitato, 410
 - nilpotente di ordine $q \leq n$, 116
 - non singolare, 424
 - normale, 449
 - Ortagonale, 450
 - precompatto, 426
 - reciproco, 142
 - semi-definito positivo, 450
 - strettamente singolare, 426
 - suriettivo, 425
 - Unitario, 450
- Operatore chiuso, 426
- Operatore di “transizione”, 250
- Operatore di avanzamento, 250
- Operatore di compatibilità, 250
- Operatore di shift, 250
- Operatori
 - di troncamento, 347
- Operatori semisemplici, 204
- Operazione
 - di coniugio, 471
- Orbita, 3
- Orbita omoclina, 289
- Orbita periodica attrattiva, 241
- Orbite periodiche superstabili, 234
- Ordine di grandezza di δ , 306
- Orientamento, 446
- Oscillatore, 106, 111, 118
- Oscillatore
 - armonico, 322, 372
 - smorzato, 328, 340
- Oscillatore armonico, 263
- Palla, 380
- Pendoli
 - accoppiati, 86
- Pendolo
 - fisico, 104, 113, 358
 - fisico conservativo, 176
 - oscillante, 139
 - smorzato, 205
- Pendolo uniformemente rotante, 260
- Period doubling, 239, 276
- Periodo del moto, 150
- Persistenza
 - delle selle- k , 204
- Piani
 - paralleli, 413
- Piano, 412
- Piccole
 - oscillazioni, 86
- Pitchfork, 273
- Polinomi
 - di Hermite, 61
- Polinomio
 - caratteristico, 459
- Posizione

- di equilibrio, 4
- Preda - predatore, 91
- Principio
 - del Paragone Asintotico, 347
- Problema
 - alle variazioni, 76
 - di Sturm-Liouville, 419
 - Esterno, 343
 - esterno, 346
 - Interno, 343
 - interno, 346
 - variazionale, 76
- Procedimento
 - di Grahm-Schmidt, 396
- Processo
 - deterministico, 1
 - differentiabile, 1
 - stazionario, 2
- Prodotto
 - interno, 383
 - scalare, 383
 - scalare definito da un operatore, 455
- Proiezioni
 - stereografiche, 436
- Prolungabilità, 18
- Pulsazioni
 - proprie, 86, 208
- Punti di diramazione, 270
- Punti eteroclini, 254
- Punti omoclini, 254
- Punto
 - ω -limite, 169
 - di aderenza, 379
 - di contatto, 379
 - di equilibrio regolare, 181
 - interno, 379
 - Iperbolico, 78
 - isolato di un insieme, 380
 - limite di una successione, 380
 - ordinario, 58
- Punto critico, per una mappa, 229
- Punto di accumulazione, 380
- Punto di biforcazione, 260, 270
- Punto di biforcazione a forchetta, 272
- Punto di biforcazione alla Hopf, 274
- Punto di gomito, 271
- Punto di raddoppio di periodo, 276
- Punto fisso, per una mappa, 229
- Punto iperbolico, per una mappa, 229
- Punto non erratico, 256
- Punto omoclinico, 289
- Punto periodico, per una mappa, 229
- Punto regolare, 270
- Punto ricorrente, 256
- Punto singolare regolare, 58
- Quasi
 - ovunque, 397
- Quasi-periodico, 141
- Regione
 - di accessibilità, 428
 - esterna, 346
 - interna, 346
- Regola di Lighthill, 333
- Retta
 - complessa, 471
- Ricoprimento
 - aperto, 391
- Riduzione
 - di ordine, 42
- Risonanza
 - parametrica, 145
- Rotazione del toro, 231, 257
- Rotazione irrazionale del toro, 259
- Segmento
 - trasverso, 168
- Segnatura, 455
- Sella
 - standard, 104, 183
- Sella (k), 184
- Semiorbite, 190
- Separatrice, 177
- Separazione
 - di variabili, 27
- Serie
 - Asintotica, 307
 - di Frobenius, 63
 - di Neumann, 429
- Sezione stroboscopica, 263
- Sezioni trasverse, 291
- Sfera, 380
- Shift di Markov, 248
- Sistema, 1
- Sistema
 - dinamico
 - locale, 4
 - perturbato, 303
 - aggiunto, 130
 - centrato, 391
 - conservativo, 163
 - deterministico, 1
 - di Volterra - Lotka, 91
 - dinamico, 4
 - fondamentale, 95, 126
 - genuinamente lineare, 197
 - hamiltoniano, 79
 - Lagrangiano, 79
 - locale di coordinate, 434
 - meccanico, 1
 - meccanico conservativo, 79
 - ortogonale, 396
 - reciproco, 142
- Sistema caotico, 253
- Sistema di Markov, 248
- Sistema espansivo, 258
- Sistema minimale, 255
- Sistema topologicamente transitivo, 256

- Sistemi
 - Hamiltoniani, 166
 - Hamiltoniani lineari periodici, 142
 - Meccanici posizionali scalari, 173
 - periodici equivalenti, 136
- Sistemi discreti, 227
- Sistemi topologicamente coniugati, 252
- Smale horseshoe, 279
- Solenoidi, 285
- Soluzione
 - asintoticamente stabile, 196
 - generale, 30
 - Liapunov-stabile, 195
 - singolare, 31
 - stabile, 195
 - uniformemente stabile, 196
- Soluzione orbitalmente stabile, 190
- Soluzioni
 - Normali, 138
- Somma
 - Asintotica, 307
 - Asintotica
 - di funzioni, 306
 - di una serie, 399
 - di una serie di operatori, 470
 - diretta, 395, 410
- Sottospazi
 - ortogonali, 410
- Sottospazio, 395
- Sottospazio
 - $\mathcal{T}$ -invariante, 446
 - invariante, 446
 - ortogonale, 448
- Sottovarietà, 435
- Span, 395
- Spazi
 - euclidei isomorfi, 409
 - metricamente equivalenti, 391
 - omeomorfi, 390
 - Topologicamente equivalenti, 390
- Spazio
 - 2-numerabile, 434
 - a dimensione finita, 396
 - a misura finita, 397
 - delle fasi, 1
 - di Banach, 386
 - di Hausdorff, 381, 434
 - di Hilbert, 408
 - duale, 411
 - euclideo, 383
 - euclideo separabile, 396
 - metrico, 380
 - metrico Completo, 384
 - normato, 382
 - prodotto, 389
 - separabile, 382
 - tangente, 437
 - unitario, 383, 444
 - vettoriale, 44
 - vettoriale $\mathbb{V}$, 382
- Spazio topologico, 379
- Specchio, 39
- Spirale, 109
- Stabilità
 - alla Liapunov, 195
 - asintotica, 196
 - dei sistemi lineari, 197
 - uniforme, 196
- Stabilità alla Poincaré, 190
- Stabilità orbitale, 190
- Stabilità strutturale, 259
- stabilità strutturale, 259
- Stato
 - del sistema, 1
- Storia plausibile, 250
- Strato
 - limite, 342
- Struttura
 - differenziabile, 435
 - euclidea, 383
 - strutturale stabilità, 259
- Sub-shift finito, 285
- Subbase, 379
- Subshift finito, 250
- Successione
 - Asintotica, 307
 - Asintotica
 - di funzioni, 306
 - di funzioni d'ordine, 306
 - convergente, 380
 - di Cauchy, 384
 - di funzioni continue, 398
 - uniformemente di Cauchy, 384
- Successioni
 - equivalenti, 386
- Superfici
 - Equipotenziali, 173
- Superficie
 - singolare, 156
- Sviluppo
 - Asintotico, 308
 - Composto, 346, 347
 - di Taylor, 308
 - esterno, 346
 - interno, 346
 - non uniforme, 324
 - Regolare, 319
 - Singolare, 319
 - Uniforme, 319
- Tent-map sul toro, 253
- Teorema
 - degli assi principali, 450
 - del sottoinsieme invariante, 215
 - dell'isomorfismo, 409
 - delle contrazioni, 22
 - di Ascoli-Arzelà, 394
 - di Cauchy-Picard, 23

- di conservazione, 162
- di Dirichlet-Laplace-Liapunov, 214
- di Floquet, 135
- di Fourier, 402
- di Jordan, 462
- di La Salle, 215
- di Liapunov, 214
- di Liapunov (lineare), 200
- di Liapunov (diretto), 219
- di Peano, 18
- di persistenza delle selle- k , 204
- di primo ritorno, 167
- di Prolungabilità, 18
- di regolarità, 22, 26
- di rettificazione, 163
- di unicità, 19
- di Weierstrass (1), 399
- di Weierstrass (2), 402
- di Chetaiev, 218
- Poincaré-Bendixon, 171
- Teorema di Grobman-Hartman, 259
- Teorema di Sarkowski, 242
- Teoremi
 - di stabilità lineare, 197
- Topologia, 379
- Topologia
 - debole
 - generata da F , 388
 - su $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$, 388
 - su $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$, 388
 - discreta, 381
 - indotta dalla metrica, 381
 - quoziente, 381
- Topologia prodotto, 249
- Topologia relativa, 381
- Traiettoria, 3
- Traiettoria
 - Omoclina, 185
- Traiettorie
 - eterocline, 177
 - omocline, 177
- Traiettorie omocline, 254
- Transitività topologica, 286
- Transizione al caos, 272
- Trasformazione
 - di coordinate, 440
 - di Van Der Pol, 367
- Trasformazione espansiva, 258
- Trasformazione minimale, 255
- Trasformazione topologicamente transitiva, 256
- Twist-map, 282
- Uguaglianza
 - di Parseval, 408
- Variabili
 - esterne, 345
 - interne, 346
- Varietà
 - connessa, 435
 - differenziabile, 435
 - globali, 184
 - lineare, 394, 411
 - locali, 184
 - topologica, 434
- Varietà stabile, 288
- Velocità, 437
- Velocità
 - di fase, 4
- Vettore
 - tangente, 437
 - velocità, 437
- Vettori
 - equivalenti, 395
 - linearmente indipendenti, 128
 - ortogonali, 383
- Vortici puntiformi, 290
- Weierstrass
 - m -test, 54
- Weierstrass m -test, 397
- Wronskiano, 46, 129
- Zone
 - di non uniformità, 319