SIMAI
e-Lecture Notes
ISSN 1970-4429

Elementi di Calcolo Tensoriale

Cristina Padovani

Istituto di Scienza e Tecnologie
dell'Informazione ”Alessandro Faedo“
Consiglio Nazionale delle Ricerche
Via G. Moruzzi 1, 56124 Pisa
cristina.padovani@isti.cnr.it

Vol. 10 - 2012

ISBN-A: 10.978.88905708/96

Published by:
SIMAI - Società Italiana di Matematica Applicata e Industriale
Via dei Taurini, 19 c/o IAC/CNR
00185, ROMA (ITALY)

SIMAI e-Lecture Notes
ISSN: 1970-4429

Volume 10, 2012
ISBN-13: 978-88-905708-9-6
ISBN-A: 10.978.88905708/96

Indice

Prefazione

Queste note raccolgono le lezioni di calcolo tensoriale tenute presso la Scuola di Dottorato in Ingegneria “Leonardo da Vinci” dell’Università di Pisa dal 2006 al 2011[1]. Gli argomenti trattati nelle lezioni, finalizzate a fornire le conoscenze e gli strumenti di base per lo studio della meccanica dei continui, riguardano i risultati fondamentali dell’algebra e dell’analisi tensoriale. Dopo una breve introduzione degli spazi vettoriali di dimensione finita, descritti nel capitolo 1, nel capitolo 2 sono trattati i classici argomenti del calcolo tensoriale, tra i quali i tensori simmetrici e antisimmetrici, il teorema di decomposizione polare, i tensori del quarto ordine, le funzioni tensoriali isotrope e il calcolo differenziale delle funzioni tensoriali. Il testo è corredato da numerosi esempi e esercizi.

Desidero ringraziare il Prof. Stefano Bennati dell’Università di Pisa per avermi invitato a tenere queste lezioni ed incoraggiato a scrivere queste note.

Pisa, 5 giugno 2012 Cristina Padovani

[1]Le lezioni sono state tenute nell’ambito dei corsi “Algebra per la Meccanica” (2006, 2007, 2008), “Introduzione al Calcolo Tensoriale” (2009), “Algebra e Analisi Tensoriale con Applicazioni alla Meccanica” (2010) e “Introduzione al calcolo tensoriale” (2011).

Capitolo 1

Spazi vettoriali di dimensione finita

In questo capitolo sono introdotte le nozioni di spazio vettoriale, norma, prodotto scalare, convergenza di vettori, applicazioni tra spazi vettoriali, continuità e differenziabilità che saranno utilizzate nel capitolo successivo. Per le dimostrazioni di alcuni dei risultati enunciati e per approfondimenti si rimanda a [2], [3], [4], [5] e [9].

1.1 Notazioni

Sia X un insieme, la scrittura $x \in X$ indica che x è un elemento di X e $x \notin X$ indica che x non è un elemento di X. Per esprimere il fatto che Y è un sottoinsieme di X si usa la notazione $Y \subset X$. Dati A e B sottoinsiemi di X, si definiscono i seguenti sottoinsiemi di X,

$$A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \text{ oppure } x \in B\}, \tag{1.1}$$

$$A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \text{ e } x \in B\}, \tag{1.2}$$

detti rispettivamente l'*unione* e l'*intersezione* di A e B. Indichiamo con $\varnothing$ l'insieme vuoto; due insiemi A e B si dicono *disgiunti* se $A \cap B = \varnothing$. Se A è un sottoinsieme di X, la differenza

$$X - A = \{x \in X \mid x \in X \text{ e } x \notin A\}, \tag{1.3}$$

si dice *complemento* o *insieme complementare* di A (in X) e si indica con $\complement A$.

Siano X_1 e X_2 due insiemi. L'insieme delle coppie (x_1, x_2), con $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$, si dice il *prodotto cartesiano* di X_1 e X_2; esso viene indicato con $X_1 \times X_2$.

Indichiamo con $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ l'insieme dei numeri naturali, con $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali e con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali.

Siano X e Y due insiemi non vuoti, un'*applicazione* T di X in Y (o *funzione* su X a valori in Y) è una legge che ad ogni elemento $x \in X$ associa un elemento $y \in Y$. Si usa scrivere

$$T : X \to Y \tag{1.4}$$

ed indicare con $T(x)$ l'elemento y che si dice *immagine* di x mediante T.

Sia A un sottoinsieme di X, l'insieme

$$T(A) = \{v \in Y \mid v = T(u) \text{ per qualche } u \in A\} \tag{1.5}$$

è detto *immagine* di A mediante T ($T(\varnothing) = \varnothing$). Sia B un sottoinsieme di Y, l'insieme

$$T^{-1}(B) = \{u \in X \mid T(u) \in B\} \tag{1.6}$$

è detto *immagine inversa* di B mediante T ($T^{-1}(\varnothing) = \varnothing$).

L'applicazione $T : X \to Y$ è *iniettiva* se

$$u_1 \neq u_2 \Longrightarrow T(u_1) \neq T(u_2), \tag{1.7}$$

è *surgettiva* se per ogni $w \in Y$ esiste almeno $u \in X$ tale che $w = T(u)$, in tal caso $T(X) = Y$. Un'applicazione T iniettiva e surgettiva è detta *biunivoca* o *bigettiva.*

Sia X un insieme. Una *distanza* (o *metrica*) su X è una funzione d sul prodotto cartesiano $X \times X$ a valori reali,

$$d : X \times X \to \mathbb{R} \tag{1.8}$$

tale che per ogni scelta di $x, y, z \in X$, si abbia

d1. $d(x, y) \geq 0$,

d2. $d(x, y) = d(y, x)$,

d3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (relazione triangolare)

d4. $d(x, y) = 0$ se e soltanto se $x = y$.

Il numero reale $d(x, y)$ è detto *distanza tra x ed y*. Un insieme X con la distanza d è detto *spazio metrico* ed è di solito indicato con (X, d). Gli elementi di X sono anche detti *punti.*

Le condizioni **d1** e **d4** sono piuttosto naturali qualunque sia il significato che si vuole attribuire alla distanza come misura di quanto sono lontani i punti x e y. La condizione **d2** corrisponde anch'essa all'idea intuitiva di distanza nel senso geometrico, ma non sono poche le occasioni in cui nel linguaggio comune si parla ugualmente di distanza e tale condizione è violata (si pensi alla distanza automobilistica tra due punti di un centro cittadino ricco di sensi unici). La condizione **d3** non è del tutto ovvia, essa estende una nota proprietà dei triangoli (la lunghezza di un lato è minore della somma delle lunghezze degli altri due lati). Senza di esso la funzione distanza sarebbe priva di importanti requisiti; ad esempio tale condizione consente di dimostrare che una successione convergente in uno spazio metrico ha un unico limite.

È importante sottolineare che due metriche differenti d e d' su uno stesso insieme X danno luogo a spazi metrici differenti (X, d) e (X, d').

Proposizione 1 *Sia X un insieme con la distanza d, per ogni $x, y, z \in X$ si ha*

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y). \tag{1.9}$$

Dimostrazione. Si osservi che dalla relazione triangolare in **d3** segue che

$$d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y),$$

Scambiando x con y e tenendo conto di **d2** si ha

$$d(y,z) - d(x,z) \leq d(x,y),$$

da cui segue (1.9). ■

Sia $\mathbb{R}^n$ l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, la funzione

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}, \tag{1.10}$$

con $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ è una distanza detta *distanza Euclidea*. Le condizioni **d1**, **d2** e **d4** sono di facile verifica. La relazione **d3** discende dalla diseguaglianza

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}, \tag{1.11}$$

posti $a_i = x_i - y_i$ e $b_i = y_i - z_i$, $i = 1, ..., n$. La diseguaglianza (1.11) è ovvia se $a_i = 0$ o $b_i = 0$ per $i = 1, ..., n$, supponiamo allora che qualche a_i e qualche b_i siano diversi da zero. Per ogni $\lambda > 0$ dalle diseguaglianze

$$(\sqrt{\lambda} a_i + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} b_i)^2 \geq 0, \quad (\sqrt{\lambda} a_i - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} b_i)^2 \geq 0,$$

si ricava

$$2|a_i b_i| \leq \lambda a_i^2 + \frac{1}{\lambda} b_i^2, \quad i = 1, ..., n \tag{1.12}$$

da cui discende

$$2|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i| \leq \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} b_i^2. \tag{1.13}$$

I due addendi a secondo membro sono uguali per $\lambda = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} / \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$ e per questo valore di λ (1.13) diventa

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}, \tag{1.14}$$

nota come diseguaglianza di Cauchy-Schwarz. Pertanto, in vista di (1.14), si ha

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i| \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

$$= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2$$

che coincide con (1.11).

Sia X un insieme ($X \neq \varnothing$), la funzione

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y, \\ 1 & x \neq y, \end{cases} \tag{1.15}$$

è una metrica detta *metrica discreta*.

Sia X l'insieme di tutte le possibili sequenze di k bit, ogni elemento di X è costituito da una stringa $x = x_1 x_2 ... x_k$ di k simboli con $x_i \in \{0,1\}$, $i = 1, ..., k$. Definiamo distanza tra due elementi x ed y di X come il numero di posizioni nelle quali i simboli corrispondenti sono diversi. Questa distanza, detta *distanza di Hamming*, misura il numero di sostituzioni necessarie per convertire una stringa nell'altra, o il numero di errori che hanno trasformato una stringa nell'altra. Ad esempio, per $k = 6$, per $x = 001001$ e $y = 000011$, si ha $d(x,y) = 2$.

Sia A un insieme di numeri reali, $b \in \mathbb{R}$ è un *maggiorante* per A se $a \leq b$, per ogni $a \in A$. In tal caso si dice che A è *limitato superiormente*. Si definisce *estremo superiore* di A, e si indica con $\sup A$, il minimo s dei maggioranti di A. s è caratterizzato dalle seguenti condizioni,

$$a \leq s, \quad \text{per ogni } a \in A, \tag{1.16}$$

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } a \in A \text{ tale che } a > s - \varepsilon. \tag{1.17}$$

$c \in \mathbb{R}$ è un *minorante* per A se $a \geq c$, per ogni $a \in A$. In tal caso si dice che A è *limitato inferiormente*. Si definisce *estremo inferiore* di A, e si indica con $\inf A$, il massimo i dei minoranti di A. i è caratterizzato dalle seguenti condizioni,

$$a \geq i, \quad \text{per ogni } a \in A, \tag{1.18}$$

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } a \in A \text{ tale che } a < i + \varepsilon. \tag{1.19}$$

1.2 Spazi vettoriali

Uno *spazio vettoriale* (reale) è un insieme $\mathcal{S}$ di elementi chiamati *vettori* in cui sono definite due operazioni, l'addizione e la moltiplicazione per un numero reale, che soddisfa i seguenti assiomi.

(A) Ad ogni coppia $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ di vettori in $\mathcal{S}$ corrisponde un vettore $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, chiamato la somma di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, con le seguenti proprietà

1. l'addizione è commutativa, $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$,
2. l'addizione è associativa, $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$,
3. esiste in $\mathcal{S}$ un unico vettore $\mathbf{0}$ tale che $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$ per ogni vettore $\mathbf{a}$,
4. ad ogni vettore $\mathbf{a}$ in $\mathcal{S}$ corrisponde un unico vettore $-\mathbf{a}$ tale che $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$.

(B) Ad ogni coppia α e $\mathbf{a}$, dove α è un numero reale e $\mathbf{a}$ un vettore in $\mathcal{S}$, corrisponde un vettore $\alpha\mathbf{a}$, chiamato il prodotto di α e $\mathbf{a}$ in modo tale che

1. la moltiplicazione è associativa, $\alpha(\beta\mathbf{a})=(\alpha\beta)\mathbf{a}$,
2. $1\mathbf{a}=\mathbf{a}$ per ogni vettore $\mathbf{a}$.

(C) Valgono le proprietà distributive

1. $\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$, per ogni $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}\in\mathcal{S}$, $\alpha\in\mathbb{R}$,
2. $(\alpha+\beta)\mathbf{a}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a}$, per ogni $\mathbf{a}\in\mathcal{S}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Sono spazi vettoriali l'insieme $\mathbb{R}^n$ delle $n-$uple di numeri reali $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)$, l'insieme $\mathcal{P}_n$ dei polinomi di grado minore od uguale ad n a coefficienti reali, $p(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$, con x appartenente all'intervallo $[0,1]$ e l'insieme $\mathcal{M}_{m,n}$ delle matrici $A=[a_{ij}]_{\substack{i=1,...,m\\ j=1,...,n}}$ a coefficienti reali con m righe ed n colonne.

1.3 Norme su uno spazio vettoriale

Dato lo spazio vettoriale $\mathcal{S}$, una *norma* è una funzione $\|\ \|$ su $\mathcal{S}$ a valori in $\mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti condizioni

n1. $\|\mathbf{a}\|\geq 0$ per ogni $\mathbf{a}\in\mathcal{S}$,

n2. $\|\mathbf{a}\|=0$ se e solo se $\mathbf{a}=\mathbf{0}$,

n3. $\|\alpha\mathbf{a}\|=|\alpha|\ \|\mathbf{a}\|$ per ogni $\mathbf{a}\in\mathcal{S}$, $\alpha\in\mathbb{R}$,

n4. $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|\leq\|\mathbf{a}\|+\|\mathbf{b}\|$ per ogni $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathcal{S}$ (diseguaglianza triangolare).

$\mathcal{S}$ con la norma $\| \ \|$ si dice *spazio normato.*

In $\mathbb{R}^n$ possiamo definire le seguenti norme

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|, \tag{1.20}$$

$$\|\mathbf{x}\|_k = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^k \right)^{1/k}, \quad \text{con } k \text{ intero, } k \geq 1, \tag{1.21}$$

e in $\mathcal{P}_n$ sono delle norme le seguenti funzioni

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)| \tag{1.22}$$

e

$$\|f\|_k = \left(\int_0^1 |f(x)|^k \, dx \right)^{1/k}, \quad \text{con } k \text{ intero, } k \geq 1. \tag{1.23}$$

Infine

$$\|A\| = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \tag{1.24}$$

$$\|A\| = \max_{i,j} |a_{ij}|, \tag{1.25}$$

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}, \tag{1.26}$$

sono norme su $\mathcal{M}_{m,n}$. Quest'ultima norma è detta norma di Schur.

Osservazione 2 *Dalla proprietà **n4** discende che*

$$| \, \|\mathbf{a}\| - \|\mathbf{b}\| \, | \leq \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|, \quad \textit{per ogni } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{S}. \tag{1.27}$$

È immediato verificare che uno spazio normato $\mathcal{S}$ è uno spazio metrico con la distanza indotta da $\| \ \|$

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{S}. \tag{1.28}$$

Ad esempio, in $\mathbb{R}^n$ la norma $\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$ induce la distanza Euclidea (1.10).

Osservazione 3 *Si può dimostrare che una distanza d su uno spazio vettoriale $\mathcal{S}$ è indotta da una norma se e solo se*

1. d è invariante per traslazioni,

$$d(\mathbf{a}+\mathbf{c},\mathbf{b}+\mathbf{c}) = d(\mathbf{a},\mathbf{b}), \quad \textit{per ogni } \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in \mathcal{S}, \tag{1.29}$$

2. d è invariante per omotetie,

$$d(\lambda\mathbf{a},\mathbf{0}) = |\lambda| d(\mathbf{a},\mathbf{0}), \quad \textit{per ogni } \mathbf{a} \in \mathcal{S},\ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1.30}$$

Esistono metriche su uno spazio vettoriale $\mathcal{S}$ che non sono indotte da nessuna norma. Ad esempio in $\mathbb{R}^n$ non esiste nessuna norma che induca la distanza d definita in (1.15), in quanto d non soddisfa (1.30). In $\mathbb{R}^2$ consideriamo la metrica Euclidea d definita in (1.10), è facile provare che

$$d' = \frac{d}{1+d} \tag{1.31}$$

è ancora una distanza su $\mathbb{R}^2$, infatti le proprietà **d1**, **d2** e **d4** sono di verifica immediata e per quanto riguarda la diseguaglianza triangolare per ogni $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$d'(\mathbf{x},\mathbf{y}) + d'(\mathbf{y},\mathbf{z}) = \frac{d(\mathbf{x},\mathbf{y})}{1+d(\mathbf{x},\mathbf{y})} + \frac{d(\mathbf{y},\mathbf{z})}{1+d(\mathbf{y},\mathbf{z})} \geq \frac{d(\mathbf{x},\mathbf{y})}{1+d(\mathbf{x},\mathbf{y})+d(\mathbf{y},\mathbf{z})}$$

$$+\frac{d(\mathbf{y},\mathbf{z})}{1+d(\mathbf{x},\mathbf{y})+d(\mathbf{y},\mathbf{z})} \geq \frac{d(\mathbf{x},\mathbf{z})}{1+d(\mathbf{x},\mathbf{z})},$$

in quanto la funzione $f(b) = \frac{b}{1+b}$, $b \geq 0$, è crescente e d soddisfa la diseguaglianza triangolare. Poiché d' non soddisfa (1.30), non esiste una norma che la induca.

1.4 Prodotti interni

Sia $\mathcal{S}$ uno spazio vettoriale, un *prodotto interno* (o *prodotto scalare*) è una funzione $(\ ,\ )$ su $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ a valori in $\mathbb{R}$ tale che

s1. $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{b},\mathbf{a})$ per ogni $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathcal{S}$ (simmetria),

s2. $(\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2,\mathbf{b}) = \alpha_1(\mathbf{a}_1,\mathbf{b})+\alpha_2(\mathbf{a}_2,\mathbf{b})$ per ogni $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{b} \in \mathcal{S}$, e $\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}$ (bilinearità),

s3. $(\mathbf{a},\mathbf{a}) \geq 0$ per ogni $\mathbf{a} \in \mathcal{S}$ (positività),

s4. $(\mathbf{a},\mathbf{a}) = 0$ se e solo se $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

I vettori $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathcal{S}$ sono *ortogonali* se $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0$.
I vettori $\mathbf{u}_1,...,\mathbf{u}_m \in \mathcal{S}$ sono *ortonormali* se

$$(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{1.32}$$

In questo caso si dice che $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_m\}$ è un *insieme ortonormale* di vettori di $\mathcal{S}$.

In $\mathbb{R}^n$ possiamo definire il prodotto interno

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \tag{1.33}$$

e nello spazio vettoriale $\mathcal{P}_n$ il prodotto

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x) dx, \qquad f, g \in \mathcal{P}_n \tag{1.34}$$

è un prodotto interno.

Nello spazio $\mathcal{M}_{m,n}$ il prodotto

$$(A, B) = \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} a_{ij} b_{ij}, \qquad A, B \in \mathcal{M}_{m,n} \tag{1.35}$$

è un prodotto interno.

In $\mathbb{R}^3$ i vettori

$$\mathbf{x}^1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{x}^2 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{x}^3 = (0, 0, 1) \tag{1.36}$$

sono ortonormali. In $\mathcal{P}_n$ i polinomi $f(x) = 1$, $g(x) = x - 1/2$, $x \in [0, 1]$, sono ortogonali rispetto al prodotto scalare (1.34), infatti $(f, g) = \int_0^1 (x - 1/2) dx = 0$.

Assegnato in $\mathcal{S}$ un prodotto interno, la funzione che ad ogni vettore $\mathbf{a}$ associa la quantità

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} \tag{1.37}$$

soddisfa le condizioni **n1-n4** ed è pertanto una norma su $\mathcal{S}$, detta norma associata al prodotto interno (,). La quantità (1.37) è detta *lunghezza* (o norma) del vettore $\mathbf{a} \in \mathcal{S}$.

Proposizione 4 *Sia $\mathcal{S}$ uno spazio vettoriale con il prodotto scalare (,). Dati $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{S}$, valgono la diseguaglianza di Schwarz*

$$|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leq \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|, \tag{1.38}$$

la legge del parallelogramma

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = 2 \|\mathbf{a}\|^2 + 2 \|\mathbf{b}\|^2, \tag{1.39}$$

e il teorema di Pitagora

$$\textit{se } (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \textit{ allora } \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2. \tag{1.40}$$

Dimostrazione. Se $\mathbf{a} = 0$, (1.38) è banalmente verificata. Supponiamo allora $\mathbf{a} \neq 0$ e sia $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq (\alpha\mathbf{a} + \mathbf{b}, \alpha\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha^2 \|\mathbf{a}\|^2 + 2\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \|\mathbf{b}\|^2 =$$

$$\|\mathbf{a}\|^2 \left[\alpha^2 + \frac{2\alpha}{\|\mathbf{a}\|^2}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2}{\|\mathbf{a}\|^4}\right] + \|\mathbf{b}\|^2 - \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2}{\|\mathbf{a}\|^2} =$$

$$\|\mathbf{a}\|^2 \left[\alpha + \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\|^2}\right]^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2}{\|\mathbf{a}\|^2}. \tag{1.41}$$

Se poniamo $\alpha = -(\mathbf{a}, \mathbf{b})/\|\mathbf{a}\|^2$, da (1.41) si ricava

$$\|\mathbf{b}\|^2 \geq \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2}{\|\mathbf{a}\|^2}$$

e quindi (1.38). ■

Abbiamo visto che dato un prodotto interno in $\mathcal{S}$, risulta naturalmente definita la norma (1.37) in $\mathcal{S}$. Però si possono definire delle norme che non sono associate a nessun prodotto interno. Ad esempio in $\mathcal{P}_1$, la norma (1.22) non è associata a nessun prodotto interno. Ciò discende dal fatto che (1.22) non soddisfa la legge del parallelogramma, come si verifica facilmente scegliendo i polinomi $f_1(x) = 1$ e $f_2(x) = x$, $x \in [0, 1]$, per i quali si ha $\|f_1\|_\infty = \|f_2\|_\infty = 1$, $\|f_1 - f_2\|_\infty = 1$ e $\|f_1 + f_2\|_\infty = 2$.

Analogamente in $\mathbb{R}^2$ la norma (1.20) non soddisfa la legge del parallelogramma (scelti $\mathbf{x} = (1, 1)$ e $\mathbf{y} = (1, 0)$ si ha $\|\mathbf{x}\|_\infty = \|\mathbf{y}\|_\infty = 1$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty = 1$ e $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_\infty = 2$) e quindi non è associata a nessun prodotto interno.

È possibile provare che se una norma $\| \ \|$ verifica la identità del parallelogramma, allora $\| \ \|$ è associata al prodotto scalare

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{4}(\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2). \tag{1.42}$$

1.5 Aperti, chiusi, intorni

Sia $\mathcal{S}$ uno spazio vettoriale con la norma $\| \ \|$. Dati $\mathbf{a} \in \mathcal{S}$, $r > 0$, gli insiemi

$$B(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{b} \in \mathcal{S} \mid \ \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| < r\}, \tag{1.43}$$

$$B'(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{b} \in \mathcal{S} \mid \ \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \leq r\}, \tag{1.44}$$

$$S(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{b} \in \mathcal{S} \mid \ \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = r\}, \tag{1.45}$$

si dicono rispettivamente *palla aperta*, *palla chiusa* e *sfera* di centro $\mathbf{a}$ e raggio r.

Ad esempio in $\mathcal{S} = \mathbb{R}^2$ con il prodotto interno (1.33) si ha

$$B(\mathbf{0}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < r^2\}, \tag{1.46}$$

$$B'(\mathbf{0}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq r^2\}, \tag{1.47}$$

$$S(\mathbf{0}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = r^2\}. \tag{1.48}$$

Un sottoinsieme A di $\mathcal{S}$ si dice *aperto* se per ogni $\mathbf{a} \in A$ esiste $r > 0$ tale che $B(\mathbf{a}, r) \subset A$. Un sottoinsieme C di $\mathcal{S}$ si dice *chiuso* se il suo complementare $\mathcal{S} - C$ è aperto. Dato $\mathbf{a} \in \mathcal{S}$, un sottoinsieme U_a di $\mathcal{S}$ che contenga una palla aperta di centro $\mathbf{a}$ si dice *intorno* di $\mathbf{a}$.

I concetti di palla aperta, palla chiusa e sfera possono essere introdotti in un insieme X dotato di distanza d, sono stati introdotti in uno spazio vettoriale normato perché in questo corso siamo interessati a studiare spazi vettoriali normati.

Vale la seguente proposizione.

Proposizione 5 *Gli insiemi $\mathcal{S}$ e $\emptyset$ sono aperti e chiusi.*
L'unione di una arbitraria famiglia di insiemi aperti è un aperto.
L'intersezione di una famiglia finita di insiemi aperti è un aperto.
L'intersezione di una arbitraria famiglia di insiemi chiusi è un chiuso.
L'unione di una famiglia finita di insiemi chiusi è un chiuso.

Un sottoinsieme $\mathcal{K}$ di $\mathcal{S}$ si dice *convesso* se dati $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{K}$, risulta $\alpha\mathbf{a} + (1 - \alpha)\mathbf{b} \in \mathcal{K}$, per ogni $\alpha \in [0, 1]$.

Un sottoinsieme $\mathcal{K}$ di $\mathcal{S}$ si dice *limitato* se esiste $\kappa > 0$ tale che $||\mathbf{a}|| \leq \kappa$ per ogni $\mathbf{a} \in \mathcal{K}$.

1.6 Basi di uno spazio vettoriale

SIa $\mathcal{S}$ uno spazio vettoriale. Dati i vettori $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_m \in \mathcal{S}$ e gli scalari $\alpha_1, ..., \alpha_m$, il vettore $\alpha_1\mathbf{u}_1 + ... + \alpha_m\mathbf{u}_m$ è una *combinazione lineare* di $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_m$.

I vettori $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_m \in \mathcal{S}$ sono *linearmente indipendenti* se

$$\alpha_1\mathbf{u}_1 + ... + \alpha_m\mathbf{u}_m = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_m = 0. \tag{1.49}$$

Se invece esistono degli scalari α_i non tutti nulli tali che $\alpha_1\mathbf{u}_1 + ... + \alpha_m\mathbf{u}_m = 0$, allora i vettori $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_m$ sono *linearmente dipendenti.*

Una *base* di $\mathcal{S}$ è un insieme $\mathcal{B}$ di vettori linearmente indipendenti di $\mathcal{S}$ tali che ogni vettore in $\mathcal{S}$ sia esprimibile come una (e quindi una sola) combinazione lineare (finita) di elementi di $\mathcal{B}$. Si può dimostrare che ogni spazio vettoriale possiede almeno una base. Uno spazio vettoriale si dice di *dimensione finita* se ha una base finita. È possibile provare che se $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ sono due basi dello spazio di dimensione finita $\mathcal{S}$, allora $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ hanno lo stesso numero di elementi. Ciò consente di definire la *dimensione* di uno spazio di dimensione finita $\mathcal{S}$, che è il numero di elementi di una base di $\mathcal{S}$.

Considereremo da qui in avanti spazi vettoriali $\mathcal{S}$ di dimensione finita n ed indicheremo con $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n\}$ una *base* di $\mathcal{S}$,

$$\text{per ogni } \mathbf{u} \in \mathcal{S} \quad \text{esistono unici } \beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{R} \; \text{ tali che } \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{u}_i.$$

Se i vettori $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n$ sono ortonormali, allora $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n\}$ è una *base ortonormale.*

In $\mathbb{R}^n$ si considerino i vettori

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^1 &= (1, 0, ..., 0), \\ \mathbf{x}^2 &= (0, 1, ..., 0), \\ & \;\; ... \\ \mathbf{x}^n &= (0, 0, ..., 1), \end{aligned}$$

$\{\mathbf{x}^1, ..., \mathbf{x}^n\}$ è una base ortonormale, detta base canonica. La dimensione di $\mathbb{R}^n$ è n.

In $\mathbb{R}^2$ si considerino i vettori $\mathbf{x}^1 = (1, 0)$ e $\mathbf{x}^2 = (1, 1)$, $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$, ma non è ortonormale.

In $\mathcal{P}_1$ si considerino i polinomi $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $g_2(x) = \sqrt{3}(1 - 2x)$, $x \in [0, 1]$, $\{f_1, f_2\}$ è una base e $\{f_1, g_2\}$ è una base ortonormale. La dimensione dello spazio vettoriale $\mathcal{P}_n$ è $n + 1$.

Esercizio 6 *Sia $\mathcal{S}$ uno spazio vettoriale con prodotto interno* $(\ ,\ )$. *Provare che* $|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|$ *se e solo se* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$ *sono linearmente dipendenti.*

Soluzione. Supponiamo $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ supponiamo che per ogni α reale sia $\alpha\mathbf{a} + \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Allora nell'ipotesi che risulti $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|$, si ricava

$$0 < (\alpha\mathbf{a} + \mathbf{b}, \alpha\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\alpha \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|)^2 \text{ per ogni } \alpha \in \mathbb{R}. \tag{1.50}$$

Scegliendo $\alpha = -\frac{\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{a}\|}$ si viola (1.50). Si giunge ad un risultato analogo se $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|$.

Siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ due spazi vettoriali, un'applicazione $T : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ è *lineare* se è *omogenea*

$$T(\alpha\mathbf{a}) = \alpha T(\mathbf{a}), \quad \text{per ogni } \mathbf{a} \in \mathcal{U},\ \alpha \in \mathbb{R}, \tag{1.51}$$

e *additiva*

$$T(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = T(\mathbf{a}) + T(\mathbf{b}), \quad \text{per ogni } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{U}. \tag{1.52}$$

In particolare se T è lineare allora $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Un'applicazione lineare e biunivoca è detta *isomorfismo* e due spazi vettoriali $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ sono detti *isomorfi* se esiste un isomorfismo $T : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$.

Spazi vettoriali con la stessa dimensione sono isomorfi. Si ha infatti il seguente teorema.

Teorema 7 *Ogni spazio vettoriale $\mathcal{S}$ di dimensione n è isomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Sia $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n\}$ una base di $\mathcal{S}$. Allora ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{S}$ può essere scritto nella forma $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{u}_i$, con $\beta_1, ..., \beta_n$ scalari univocamente determinati. La corrispondenza biunivoca

$$\mathbf{u} \mapsto (\beta_1, ..., \beta_n) \tag{1.53}$$

tra $\mathcal{S}$ e $\mathbb{R}^n$ è l'isomorfismo cercato. ■

Viceversa due spazi vettoriaIi $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ isomorfi hanno la stessa dimensione ed in particolare, se $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n\}$ è una base di $\mathcal{U}$, allora $\{T\mathbf{u}_1, ..., T\mathbf{u}_n\}$ è una base di di $\mathcal{W}$. Innanzi tutto si dimostra che i vettori $T\mathbf{u}_1, ..., T\mathbf{u}_n$ sono linearmente indipendenti. Infatti,

$$\alpha_1 T\mathbf{u}_1 + ... + \alpha_n T\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

implica

$$T(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + ... + \alpha_n \mathbf{u}_n) = \mathbf{0}$$

e quindi per l'iniettività di T si ha

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + ... + \alpha_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

da cui si deduce

$$\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0,$$

perché $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n$ sono linearmente indipendenti. Per dimostrare che ogni $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ si esprime in modo unico come combinazione lineare dei vettori $T\mathbf{u}_1, ..., T\mathbf{u}_n$, si procede nel modo seguente. Poiché T è bigettiva, dato $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ esiste $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ tale che $T\mathbf{u} = \mathbf{w}$. Dalla relazione $\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + ... + \alpha_n \mathbf{u}_n$ segue che $\mathbf{w} = \alpha_1 T\mathbf{u}_1 + ... + \alpha_n T\mathbf{u}_n$.

1.7 Sottospazi vettoriali

Un sottoinsieme non vuoto $\mathcal{M}$ di uno spazio vettoriale $\mathcal{S}$ è un *sottospazio vettoriale* se per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{M}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il vettore $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ appartiene a $\mathcal{M}$.

Sia $\mathcal{D}$ un insieme non vuoto di vettori di $\mathcal{S}$, l'intersezione di tutti i sottospazi che contengono $\mathcal{D}$ è un sottospazio di $\mathcal{S}$, detto *spazio vettoriale generato da* $\mathcal{D}$ ed indicato con Span($\mathcal{D}$). Span($\mathcal{D}$) è costituito da tutte le possibili combinazioni lineari di elementi di $\mathcal{D}$.

Se $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ sono due sottospazi di $\mathcal{S}$, Span($\mathcal{M}_1$,$\mathcal{M}_2$) è il sottospazio di $\mathcal{S}$ costituito da tutti i vettori della forma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ con $\mathbf{a} \in \mathcal{M}_1$, $\mathbf{b} \in \mathcal{M}_2$ ed è indicato con $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$.

Un sottospazio $\mathcal{M}_2$ di $\mathcal{S}$ è detto *complemento di un sottospazio* $\mathcal{M}_1$ se

$$\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \{\mathbf{0}\} \text{ e } \mathcal{S} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2. \tag{1.54}$$

Si dice allora che $\mathcal{S}$ è la *somma diretta* dei sottospazi $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ e si scrive

$$\mathcal{S} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2. \tag{1.55}$$

In questa circostanza, ogni vettore $\mathbf{s} \in \mathcal{S}$ può essere scritto in modo unico nella forma

$$\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \text{ con } \mathbf{a} \in \mathcal{M}_1, \mathbf{b} \in \mathcal{M}_2. \tag{1.56}$$

Infatti (1.56) discende dalla definizione di $\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2$, mentre per provare l'unicità di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, supponiamo di avere

$$\mathbf{s} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2,\ \ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathcal{M}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathcal{M}_2. \tag{1.57}$$

Allora si ha

$$\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1,$$

e quindi da $(1.54)_1$ si ottiene $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2$ e $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$.

In $\mathbb{R}^2$, dati $\mathbf{x}^1 = (1,0)$ e $\mathbf{x}^2 = (1,1)$, siano $\mathcal{M}_1 =$Span$(\mathbf{x}^1)$ e $\mathcal{M}_2 =$Span$(\mathbf{x}^2)$, si ha

$$\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \{(0,0)\} \text{ e } \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = \mathbb{R}^2,$$

pertanto $\mathbb{R}^2 = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$.

In $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori $\mathbf{x}^1 = (1,0,0), \mathbf{x}^2 = (0,1,0)$ e $\mathbf{x}^3 = (0,0,1)$; posto $\mathcal{M}_1 =$Span$(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$ e $\mathcal{M}_2 =$Span$(\mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3)$, si ha $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = \mathbb{R}^3$, ma $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 =$Span$(\mathbf{x}^2)$, quindi $\mathbb{R}^3$ non è somma diretta di $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$.

Il sottospazio vettoriale $\mathcal{M}$ di $\mathcal{S}$ ha dimensione m se è generato da m vettori di $\mathcal{S}$ linearmente indipendenti.

Dato un sottospazio $\mathcal{M}$ di dimensione m di uno spazio vettoriale $\mathcal{S}$ di dimensione n $(m \leq n)$, esiste sempre una base di $\mathcal{S}$ che contiene una base di $\mathcal{M}$.

Sia $\mathcal{S}$ uno spazio vettoriale con il prodotto scalare $(\ ,\ )$. Due sottospazi $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ di $\mathcal{S}$ sono detti *ortogonali* se ogni vettore dell'uno è ortogonale ad ogni vettore dell'altro.

Proposizione 8 *Sia $\mathcal{S}$ uno spazio vettoriale con il prodotto scalare $(\ ,\ )$. Sia $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_m\}$ un insieme ortonormale di vettori di $\mathcal{S}$. Per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{S}$, posto $\alpha_i = (\mathbf{u}, \mathbf{u}_i)$, vale la diseguaglianza di Bessel*

$$\sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 . \tag{1.58}$$

Inoltre il vettore $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{u}_i$ è ortogonale a Span$(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_m)$.

Dimostrazione. Si ha

$$0 \leq \|\mathbf{u}'\|^2 = (\mathbf{u} - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{u}_i, \mathbf{u} - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{u}_i) =$$

$$\|\mathbf{u}\|^2 - \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^2 - \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^2 + \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^2 =$$

$$\|\mathbf{u}\|^2 - \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^2,$$

da cui discende (1.58). Per quanto riguarda la seconda asserzione, si ha

$$(\mathbf{u}', \mathbf{u}_j) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}_j) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \alpha_j - \alpha_j = 0.$$

■

1.8 Basi ortonormali

Un insieme ortonormale $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_m\}$ di vettori di $\mathcal{S}$ si dice *completo* se non è contenuto in nessun altro insieme ortonormale più grande. In particolare un insieme ortonormale completo di $\mathcal{S}$ è una base ortonormale di $\mathcal{S}$, vale infatti la seguente proposizione.

Proposizione 9 *Sia $\mathcal{O} = \{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_m\}$ un insieme ortonormale di vettori dello spazio vettoriale $\mathcal{S}$ dotato del prodotto interno (,). Le seguenti condizioni sono equivalenti.*

(1) *L'insieme ortonormale $\mathcal{O}$ è completo.*

(2) *Se $(\mathbf{u}, \mathbf{u}_j) = 0$ per $j = 1, ..., m$ allora $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.*

(3) *Il sottospazio Span($\mathcal{O}$) coincide con $\mathcal{S}$.*

(4) *Se $\mathbf{u} \in \mathcal{S}$, si ha $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{u}, \mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i$.*

(5) *Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{S}$, vale l'identità di Parseval,*

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{u}, \mathbf{u}_i)(\mathbf{v}, \mathbf{u}_i). \tag{1.59}$$

(6) *Se $\mathbf{u} \in \mathcal{S}$, allora si ha*

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{u}, \mathbf{u}_i)^2. \tag{1.60}$$

Dimostrazione. (1) $\Longrightarrow$ (2) Se fosse $(\mathbf{u}, \mathbf{u}_j) = 0$ per $j = 1, ..., m$ con $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, allora si potrebbe aggiungere a $\mathcal{O}$ il vettore $\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$, ottenendo un insieme ortonormale di $\mathcal{S}$ contenente $\mathcal{O}$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Se esistesse $\mathbf{u} \in \mathcal{S}$ che non è una combinazione lineare degli $\mathbf{u}_i$, allora in vista della proposizione 8 il vettore $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{u}, \mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i$ sarebbe diverso da zero ed ortogonale ad ogni $\mathbf{u}_i$.

(3) $\Longrightarrow$ (4) Se ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{S}$ ha la forma $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mathbf{u}_j$, allora per ogni $i = 1, ..., m$,

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}_i) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j (\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i) = \alpha_i.$$

(4) $\Longrightarrow$ (5) Se $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{u}, \mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i$, $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{m} (\mathbf{v}, \mathbf{u}_j)\mathbf{u}_j$, allora

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^{m} (\mathbf{u}, \mathbf{u}_i)(\mathbf{v}, \mathbf{u}_j)(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{u}, \mathbf{u}_i)(\mathbf{v}, \mathbf{u}_i).$$

(5) $\Longrightarrow$ (6) Basta porre $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ nella relazione (1.59).

(6) $\Longrightarrow$ (1) Se $\mathcal{O}$ non fosse completo, esisterebbe $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{S}$ ortogonale a tutti gli $\mathbf{u}_i$. Si avrebbe allora

$$\|\mathbf{u}_0\|^2 = \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_i)^2 = 0$$

che implica $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$. ■

Sia $\mathcal{M}$ un sottospazio di $\mathcal{S}$; l'insieme

$$\mathcal{M}^{\perp} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{S} \,|(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{M}\} \tag{1.61}$$

è un sottospazio di $\mathcal{S}$ detto *complemento ortogonale* di $\mathcal{M}$.

$\mathcal{S}$ è la somma diretta di $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}^{\perp}$,

$$\mathcal{S} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}. \tag{1.62}$$

Infatti detta $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m\}$ una base ortonormale di $\mathcal{M}$, per ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{S}$ si ha

$$\mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}} + \mathbf{v}_o. \tag{1.63}$$

dove $\overline{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{e}_i, \mathbf{v})\mathbf{e}_i \in \mathcal{M}$ e $\mathbf{v}_o = \mathbf{v} - \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{e}_i, \mathbf{v})\mathbf{e}_i \in \mathcal{M}^{\perp}$, in vista della proposizione 8.

Siano $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ due spazi vettoriali con prodotti interni rispettivamente $(.,.)_{\mathcal{S}_1}$ e $(.,.)_{\mathcal{S}_2}$. Un'applicazione lineare $T : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ è detta un'*isometria* se

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathcal{S}_1} = (T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v}))_{\mathcal{S}_2}, \quad \text{per ogni } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{S}_1. \tag{1.64}$$

Un isomorfismo che soddisfa (1.64) si dice *isomorfismo isometrico* e gli spazi $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ sono detti *isometricamente isomorfi*.

Proposizione 10 *Ogni spazio vettoriale $\mathcal{S}$ di dimensione n con prodotto interno $(\ ,\ )_{\mathcal{S}}$ è isometricamente isomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Sia $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ una base ortonormale di $\mathcal{S}$, l'applicazione T da $\mathcal{S}$ in $\mathbb{R}^n$ definita da

$$T(\mathbf{u}) = (u_1, ..., u_n), \quad u_i = (\mathbf{e}_i, \mathbf{u})_{\mathcal{S}}, \quad i = 1, ..., n \tag{1.65}$$

è un isomorfismo isometrico, infatti per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$ si ha

$$(T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v}))_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{e}_i, \mathbf{u})_{\mathcal{S}} (\mathbf{e}_i, \mathbf{v})_{\mathcal{S}} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathcal{S}}, \tag{1.66}$$

dove l'ultima uguaglianza discende da (1.59). ■

1.9 Convergenza di vettori

Introduciamo il concetto di convergenza di una successione di vettori in uno spazio vettoriale dotato di prodotto interno.

Si dice che una successione $\{\mathbf{v}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ di vettori di $\mathcal{S}$ *converge* ad un vettore $\mathbf{v} \in \mathcal{S}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{k} > 0$ tale che

$$\left\| \mathbf{v}^{(k)} - \mathbf{v} \right\| < \varepsilon \quad \text{ per ogni } \; k \geq \overline{k}. \tag{1.67}$$

In tal caso la successione$\{\mathbf{v}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ si dice *convergente* e il vettore $\mathbf{v}$ si dice *limite* di $\{\mathbf{v}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ e si scrive

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{v}, \text{ oppure} \quad \mathbf{v}^{(k)} \to \mathbf{v}, \text{ per } k \to \infty. \tag{1.68}$$

È facile provare che il limite di una successione convergente $\{\mathbf{v}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ è unico. Supponiamo infatti che sia

$$\mathbf{v}^{(k)} \to \mathbf{v} \quad \text{ e } \quad \mathbf{v}^{(k)} \to \mathbf{w}, \quad \text{ per } k \to \infty. \tag{1.69}$$

Si ha allora

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \leq \left\| \mathbf{v} - \mathbf{v}^{(k)} \right\| + \left\| \mathbf{v}^{(k)} - \mathbf{w} \right\|, \tag{1.70}$$

da cui, in vista di (1.67) si ricava $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = 0$.

Per ogni $\mathbf{w} \in \mathcal{S}$, dalla diseguaglianza di Schwarz discende che

$$|(\mathbf{v}^{(k)} - \mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq \left\| \mathbf{v}^{(k)} - \mathbf{v} \right\| \; ||\mathbf{w}||$$

quindi se $\{\mathbf{v}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\mathbf{v}$ si ha che

$$\lim_{k\to\infty} (\mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{w}) = (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \text{ per ogni } \mathbf{w} \in \mathcal{S}. \tag{1.71}$$

Se la condizione (1.71) è soddisfatta, si dice che la successione $\{\mathbf{v}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ di $\mathcal{S}$ *converge debolmente* a $\mathbf{v} \in \mathcal{S}$ e si scrive $\mathbf{v}^{(k)} \rightharpoonup \mathbf{v}$, per $k \to \infty$.

A differenza di quanto accade negli spazi vettoriali di dimensione infinita, nei quali la convergenza forte e debole non coincidono, negli spazi vettoriali di dimensione finita ogni successione debolmente convergente è convergente. Supponiamo infatti che valga (1.71) e sia $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n\}$ una base ortonormale di $\mathcal{S}$. Si ha allora che $(\mathbf{v}^{(k)} - \mathbf{v}, \mathbf{u}_i) \to 0 \quad$ quando $k \to \infty$, per ogni $i = 1, ..., n$. In vista della relazione (1.60) della proposizione 9 si ha

$$\left\|\mathbf{v}^{(k)} - \mathbf{v}\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{v}^{(k)} - \mathbf{v}, \mathbf{u}_i)^2,$$

quindi $\lim_{k\to\infty} \mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{v}$.

Sia $\mathcal{S}$ uno spazio vettoriale normato, una successione $\{\mathbf{v}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ è una *successione di Cauchy* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{q} \in \mathbb{N}$ tale che $\left\|\mathbf{v}^{(p)} - \mathbf{v}^{(q)}\right\| < \varepsilon$ quando $p, q > \overline{q}$ o equivalentemente se $\left\|\mathbf{v}^{(p)} - \mathbf{v}^{(q)}\right\| \to 0$, per $p, q \to \infty$.

Uno spazio vettoriale normato $\mathcal{S}$ si dice *completo* se per ogni successione di Cauchy $\{\mathbf{v}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ esiste un unico vettore $\mathbf{v} \in \mathcal{S}$ tale che $\mathbf{v}_k \to \mathbf{v}$ quando $k \to \infty$.

Proposizione 11 *Ogni spazio vettoriale $\mathcal{S}$ di dimensione finita con prodotto interno (,) è completo.*

Dimostrazione. Dalla proposizione 10 discende che se $\mathcal{S}$ ha dimensione n allora è isometricamente isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Siano T l'isomorfismo isometrico definito in (1.65) e $\{\mathbf{v}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ una successione di Cauchy, si ha

$$\begin{aligned} ||T(\mathbf{v}^{(p)}) - T(\mathbf{v}^{(q)})||^2_{\mathbb{R}^n} &= (T(\mathbf{v}^{(p)}) - T(\mathbf{v}^{(q)}), T(\mathbf{v}^{(p)}) - T(\mathbf{v}^{(q)}))_{\mathbb{R}^n} \\ &= (\mathbf{v}^{(p)} - \mathbf{v}^{(q)}, \mathbf{v}^{(p)} - \mathbf{v}^{(q)})_{\mathcal{S}} = ||\mathbf{v}^{(p)} - \mathbf{v}^{(q)}||^2_{\mathcal{S}}, \end{aligned} \tag{1.72}$$

quindi $\{T(\mathbf{v}^{(k)})\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}^n$. Poiché $\mathbb{R}^n$ è completo, esiste $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tale che $T(\mathbf{v}^{(k)}) \to \mathbf{x}$ per $k \to \infty$, e in vista della surgettività di T esiste $\mathbf{v} \in \mathcal{S}$ tale che $T(\mathbf{v}) = \mathbf{x}$. Si ha allora,

$$||\mathbf{v} - \mathbf{v}^{(k)}||_{\mathcal{S}} = ||T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{v}^{(k)})||_{\mathbb{R}^n} = ||\mathbf{x} - T(\mathbf{v}^{(k)})||_{\mathbb{R}^n}, \tag{1.73}$$

da cui discende che $\mathbf{v}^{(k)} \to \mathbf{v}$ quando $k \to \infty$. ■

Due norme $\| \ \|_1$ e $\| \ \|_2$ su uno spazio vettoriale $\mathcal{U}$ si dicono *equivalenti* se esistono due costanti positive λ e μ tali che

$$\lambda \|\mathbf{u}\|_1 \leq \|\mathbf{u}\|_2 \leq \mu \|\mathbf{u}\|_1 \quad \text{per ogni } \mathbf{u} \in \mathcal{U}. \tag{1.74}$$

Vale il seguente teorema.

Teorema 12 *In uno spazio vettoriale di dimensione finita tutte le norme sono equivalenti.*

1.10 Applicazioni tra spazi vettoriali

Siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ spazi vettoriali normati e $T : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ un'applicazione.

T è *continua* in $\mathbf{a}_0 \in \mathcal{U}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$ che soddisfa $||\mathbf{a} - \mathbf{a}_0||_{\mathcal{U}} < \delta$, si ha $||T(\mathbf{a}) - T(\mathbf{a}_0)||_{\mathcal{W}} < \varepsilon$.

T è continua in $\mathcal{U}$ se è continua in ogni $\mathbf{a}_0 \in \mathcal{U}$. In altre parole, T è *continua* in $\mathbf{a}_0$ se per ogni palla aperta $B(T(\mathbf{a}_0), \varepsilon)$ di centro $T(\mathbf{a}_0)$ e raggio ε esiste una palla aperta $B(\mathbf{a}_0, \delta)$ di centro $\mathbf{a}_0$ e raggio δ tale che $T(B(\mathbf{a}_0, \delta)) \subset B(T(\mathbf{a}_0), \varepsilon)$.

Può essere utile la seguente formulazione alternativa in termini di aperti e chiusi.

Proposizione 13 *Siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ spazi vettoriali normati e $T : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ un'applicazione. T è continua in $\mathcal{U}$ (cioè in ogni $\mathbf{a}_0 \in \mathcal{U}$) se e solo se per ogni aperto (chiuso) $\mathcal{A}$ di $\mathcal{W}$, l'immagine inversa $T^{-1}(\mathcal{A})$ di $\mathcal{A}$ mediante T, è un aperto (chiuso) di $\mathcal{U}$.*

La nozione di convergenza di una successione di vettori può essere utilizzata per caratterizzare gli insiemi chiusi e le funzioni continue. Valgono infatti le seguenti proposizioni.

Proposizione 14 *Sia $\mathcal{C}$ un sottoinsieme non vuoto dello spazio vettoriale normato $\mathcal{S}$. $\mathcal{C}$ è chiuso se e solo se ogni successione convergente costituita da vettori di $\mathcal{C}$, converge ad un vettore di $\mathcal{C}$.*

Il seguente risultato esprime il legame ben noto per le funzioni reali tra continuità e convergenza di successioni.

Proposizione 15 *Siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ spazi vettoriali normati e $T : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ un'applicazione. T è continua in $\mathbf{a}_0 \in \mathcal{U}$ se e solo se per ogni successione $\{\mathbf{a}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{U}$ tale che $\lim_{k \to \infty} \mathbf{a}^{(k)} = \mathbf{a}_0$, si ha $\lim_{k \to \infty} T(\mathbf{a}^{(k)}) = T(\mathbf{a}_0)$.*

Un'applicazione $T : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ è *lineare* se sono soddisfatte le proprietà (1.51) e (1.52).

Esempio 16 *Sia $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m\}$ un insieme ortonormale di $\mathcal{S}$, l'applicazione L definita da $\mathcal{S}$ in Span$(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m)$ tale che*

$$L(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{u}, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{S}, \tag{1.75}$$

è lineare, mentre l'applicazione che ad ogni vettore $\mathbf{u}$ di $\mathcal{S}$ associa il vettore costante $\overline{\mathbf{u}}$ non è lineare.

Un'applicazione T bigettiva è *invertibile* e l'applicazione $T^{-1} : \mathcal{W} \to \mathcal{U}$ definita da $T^{-1}(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$ se e solo se $T(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$ si chiama *inversa* di T. Se T è lineare ed invertibile allora T^{-1} è lineare.

Sia $T : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ un'applicazione lineare, T è *limitata* se esiste $\kappa > 0$ tale che

$$||T(\mathbf{a})||_{\mathcal{W}} \leq \kappa ||\mathbf{a}||_{\mathcal{U}}, \quad \text{per ogni } \mathbf{a} \in \mathcal{U}. \tag{1.76}$$

Negli spazi vettoriali di dimensione finita tutte le applicazioni lineari sono limitate, vale infatti la seguente proposizione.

Proposizione 17 *Siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ spazi vettoriali normati di dimensione finita. Ogni applicazione lineare $L : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ è limitata.*

Dimostrazione. Limitiamoci a dimostrare la proposizione nel caso in cui la norma su $\mathcal{U}$ è associata al prodotto scalare $(\ ,\ )_{\mathcal{U}}$. Sia $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ una base ortonormale di $\mathcal{U}$, per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ si ha

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \mathbf{e}_i, \tag{1.77}$$

con $u_i = (\mathbf{u}, \mathbf{e}_i)_{\mathcal{U}}$, $i = 1, ..., n$, da cui

$$L(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} u_i L(\mathbf{e}_i). \tag{1.78}$$

Quindi in vista delle proprietà **n3** e **n2** della norma, da (1.78) si ottiene

$$||L(\mathbf{u})||_{\mathcal{W}} \leq \sum_{i=1}^{n} |u_i|\ ||L(\mathbf{e}_i)||_{\mathcal{W}} \leq \beta \sum_{i=1}^{n} |u_i|, \tag{1.79}$$

dove $\beta = \max_{i=1,...,n} ||L(\mathbf{e}_i)||_{\mathcal{W}}$. Infine da (1.79), utilizzando la diseguaglianza di Schwarz si ricava che

$$||L(\mathbf{u})||_{\mathcal{W}} \leq \beta \sum_{i=1}^{n} |(\mathbf{u}, \mathbf{e}_i)_{\mathcal{U}}| \leq \beta \sum_{i=1}^{n} ||\mathbf{e}_i||_{\mathcal{U}}\ ||\mathbf{u}||_{\mathcal{U}} = \beta n ||\mathbf{u}||_{\mathcal{U}}, \tag{1.80}$$

per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, quindi L è limitata. ■

Proposizione 18 *Sia $T : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ un'applicazione lineare; T è continua in $\mathcal{U}$ se e solo se è continua in $\mathbf{0} \in \mathcal{U}$.*

Dimostrazione. Supponiamo che T sia continua in $\mathbf{0} \in \mathcal{U}$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $||\mathbf{a}||_{\mathcal{U}} < \delta$ allora $||T(\mathbf{a})||_{\mathcal{V}} < \varepsilon$ (in vista della linearità di T, $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$). Sia allora $\mathbf{a}_0 \in \mathcal{U}$, per ogni $\mathbf{a} \in \mathcal{U}$ tale che $||\mathbf{a} - \mathbf{a}_0||_{\mathcal{U}} < \delta$ si ha $||T(\mathbf{a}) - T(\mathbf{a}_0)||_{\mathcal{V}} = ||T(\mathbf{a} - \mathbf{a}_0)||_{\mathcal{V}} < \varepsilon$, quindi T è continua in $\mathbf{a}_0$. ■

Proposizione 19 *Sia $T : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ un'applicazione lineare. T è continua in $\mathcal{U}$ se e solo se è limitata in $\mathcal{U}$.*

Dimostrazione. Supponiamo che T sia limitata, allora da (1.76) segue che T è continua in $\mathbf{0} \in \mathcal{U}$; la tesi discende dalla proposizione 18. Viceversa supponiamo che T sia continua e supponiamo per assurdo che T non sia limitata: allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $\mathbf{u}^{(k)} \in \mathcal{U}$ tale che

$$||T(\mathbf{u}^{(k)})||_{\mathcal{W}} > k||\mathbf{u}^{(k)}||_{\mathcal{U}}. \tag{1.81}$$

In particolare si ha $\mathbf{u}^{(k)} \neq \mathbf{0}$, quindi possiamo porre

$$\mathbf{v}^{(k)} = \frac{\mathbf{u}^{(k)}}{k||\mathbf{u}^{(k)}||_{\mathcal{U}}}. \tag{1.82}$$

La successione $\{\mathbf{v}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\mathbf{0}$, però

$$||T(\mathbf{v}^{(k)})||_{\mathcal{W}} = \frac{||T(\mathbf{u}^{(k)})||_{\mathcal{W}}}{k||\mathbf{u}^{(k)}||_{\mathcal{U}}} > 1 \tag{1.83}$$

che contrasta con la continuità di T. ■

Osservazione 20 *Negli spazi vettoriali di dimensione non finita esistono applicazioni lineari che non sono continue. Si consideri l'insieme $\mathcal{P}$ dei polinomi su $[0,1]$ con il prodotto scalare $(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ e sia $L : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ l'applicazione che ad ogni polinomio associa la sua derivata. L è lineare, però non è limitata. Dati i polinomi $f_k(t) = t^k$, $k \in \mathbb{N}$, si ha*

$$||f_k||^2 = \frac{1}{2k+1} < 1$$

mentre

$$||L(f_k)||^2 = k^2 \int_0^1 t^{2k-2}dt = \frac{k^2}{2k-1},$$

quindi $||L(f_k)||^2 \to +\infty$ quando $k \to \infty$.

Proposizione 21 *Ogni sottospazio vettoriale $\mathcal{M}$ di uno spazio vettoriale $\mathcal{S}$ con prodotto interno è chiuso.*

Dimostrazione. Detta $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_m\}$ una base ortonormale di $\mathcal{M}$, si consideri l'applicazione lineare $C : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ che ad ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{S}$ associa il vettore $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \sum_{i=1}^m (\mathbf{u}_i, \mathbf{u})\mathbf{u}_i$. Poiché C è lineare, C è limitata in vista della proposizione 17 e quindi continua per la proposizione 19, in particolare,

$$||C(\mathbf{u})||^2 = ||\mathbf{u}'||^2 = ||\mathbf{u}||^2 - \sum_{i=1}^m (\mathbf{u}_i, \mathbf{u})^2 \leq ||\mathbf{u}||^2.$$

$C(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ se e solo se $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$. La proposizione 13 consente di concludere che $\mathcal{M}$ è chiuso in quanto è l'immagine inversa del chiuso $\{\mathbf{0}\} \subset \mathcal{S}$ mediante la funzione continua C. ■

Osservazione 22 *La proposizione 21 può essere dimostrata anche facendo ricorso alla proposizione 14. Siano $\mathcal{M}$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $\mathcal{S}$ e $\{\mathbf{v}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ una successione convergente a $\mathbf{v} \in \mathcal{S}$. Indicata con $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_m\}$ una base ortonormale di $\mathcal{M}$, si ha*

$$\mathbf{v}^{(k)} = \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i, \qquad k \in \mathbb{N},$$

e

$$\left\| \mathbf{v}^{(k)} - \mathbf{v} \right\| \to 0 \qquad \text{quando} \quad k \to \infty.$$

Dalla diseguaglianza

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{v}, \mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i - \mathbf{v} \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{v}, \mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i - \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{v}^{(k)}, \mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i \right\| + \left\| \mathbf{v}^{(k)} - \mathbf{v} \right\|$$

facendo tendere k a ∞ e tenendo conto che $\{\mathbf{v}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\mathbf{v}$ e quindi converge debolmente a $\mathbf{v}$, si ricava che $\mathbf{v} \in \mathcal{M}$.

Siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ spazi vettoriali con prodotto interno di dimensione rispettivamente n e m. Denotiamo con $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$ l'insieme di tutti le applicazioni lineari da $\mathcal{U}$ in $\mathcal{W}$

$$\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{W}) = \{L : \mathcal{U} \to \mathcal{W} \mid L \text{ è lineare}\}. \tag{1.84}$$

Se si definiscono la somma di due applicazioni e il prodotto per uno scalare nel modo naturale

$$(L_1 + L_2)(\mathbf{u}) = L_1(\mathbf{u}) + L_2(\mathbf{u}), \tag{1.85}$$
$$(\alpha L_1)(\mathbf{u}) = \alpha L_1(\mathbf{u})$$

per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$ risulta uno spazio vettoriale.

Siano $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n\}$ e $\{\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_m\}$ basi ortonormali di $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ rispettivamente. Le $m \times n$ applicazioni lineari L_{ij} definiti da

$$L_{ij}(\mathbf{u}_k) = \begin{cases} \mathbf{w}_j & k = i \\ \mathbf{0} & k \neq i \end{cases}, \quad i = 1, ..., n, \; j = 1, ..., m \tag{1.86}$$

sono linearmente indipendenti. Infatti dalla condizione $\sum_{i,j} \alpha_{ij} L_{ij} = 0$ si deduce che $\sum_{i,j} \alpha_{ij} L_{ij}(\mathbf{u}_k) = \mathbf{0}$, $k = 1, ..., n$ e quindi in vista di (1.86), $\sum_{j} \alpha_{kj}\mathbf{w}_j = \mathbf{0}$, $k = 1, ..., n$. Dalla lineare indipendenza dei vettori $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_m$ discende quindi che i coefficienti α_{ij} sono tutti nulli. Inoltre per ogni $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$ si ha

$$L = \sum_{\substack{i=1,...,n \\ j=1,...,m}} (L(\mathbf{u}_i), \mathbf{w}_j)_{\mathcal{W}} \; L_{ij}. \tag{1.87}$$

Infatti per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, si ha $\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{u}, \mathbf{u}_k)_{\mathcal{U}}\ \mathbf{u}_k$, da cui

$$\sum_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}} (L(\mathbf{u}_i), \mathbf{w}_j)_{\mathcal{W}}\ L_{ij}(\mathbf{u}) = \sum_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}} (L(\mathbf{u}_i), \mathbf{w}_j)_{\mathcal{W}}\ L_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{u}, \mathbf{u}_k)_{\mathcal{U}}\ \mathbf{u}_k\right) =$$

$$\sum_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}} (L(\mathbf{u}_i), \mathbf{w}_j)_{\mathcal{W}}\ (\mathbf{u}, \mathbf{u}_i)_{\mathcal{U}}\ \mathbf{w}_j =$$

$$\sum_{j=1,\dots,m} (L\left(\sum_{i=1,\dots,n} (\mathbf{u}, \mathbf{u}_i)_{\mathcal{U}}\ \mathbf{u}_i\right), \mathbf{w}_j)_{\mathcal{W}}\ \mathbf{w}_j =$$

$$\sum_{j=1,\dots,m} (L(\mathbf{u}), \mathbf{w}_j)_{\mathcal{W}}\ \mathbf{w}_j = L(\mathbf{u}),$$

e quindi (1.87) è dimostrata.

Possiamo allora concludere che le applicazioni definite in (1.86) sono una base dello spazio vettoriale $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$ e che la dimensione di $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$ è $m \times n$.

Per ogni $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$ si consideri la quantità

$$||L||_N = \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{U},\ \mathbf{u} \neq \mathbf{0}} \frac{||L(\mathbf{u})||_{\mathcal{W}}}{||\mathbf{u}||_{\mathcal{U}}}. \tag{1.88}$$

È facile verificare che (1.88) è una norma su $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$. Innanzi tutto se $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$ allora L è limitata (proposizione 17), quindi esiste $\kappa > 0$ tale che $||L(\mathbf{u})||_{\mathcal{V}} \leq \kappa ||\mathbf{u}||_{\mathcal{U}}$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, quindi $\sup\limits_{\mathbf{u} \in \mathcal{U},\ \mathbf{u} \neq \mathbf{0}} ||L\mathbf{u}||_{\mathcal{W}} / ||\mathbf{u}||_{\mathcal{U}}$ esiste ed è finito. Inoltre, dalla linearità di L discende che

$$\sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{U},\ \mathbf{u} \neq \mathbf{0}} \frac{||L(\mathbf{u})||_{\mathcal{W}}}{||\mathbf{u}||_{\mathcal{U}}} = \sup_{||\mathbf{u}||_{\mathcal{U}}=1} ||L(\mathbf{u})||_{\mathcal{W}} \tag{1.89}$$

e

$$\begin{aligned} ||L_1 + L_2||_N &= \sup_{||\mathbf{u}||_{\mathcal{U}}=1} ||L_1(\mathbf{u}) + L_2(\mathbf{u})||_{\mathcal{W}} \leq \sup_{||\mathbf{u}||_{\mathcal{U}}=1} (||L_1(\mathbf{u})||_{\mathcal{W}} + ||L_2(\mathbf{u})||_{\mathcal{W}}) \\ &\leq \sup_{||\mathbf{u}||_{\mathcal{U}}=1} ||L_1(\mathbf{u})||_{\mathcal{W}} + \sup_{||\mathbf{u}||_{\mathcal{U}}=1} ||L_2(\mathbf{u})||_{\mathcal{W}} = ||L_1||_N + ||L_2||_N. \end{aligned} \tag{1.90}$$

Analogamente si dimostra che $||\alpha L||_N = |\alpha|\ ||L||_N$ per ogni $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Finalmente si ha $||L||_N = 0$ se e solo se $\sup\limits_{||\mathbf{u}||_{\mathcal{U}}=1} ||L(\mathbf{u})||_{\mathcal{W}} = 0$ se e solo se $||L(\mathbf{u})||_{\mathcal{W}} \leq 0$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, $||\mathbf{u}||_{\mathcal{U}} = 1$, se e solo se $L(\mathbf{u}) = 0$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$. Ciò consente di concludere che (1.88) è una norma su $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$.

La norma (1.88) non è associata a nessun prodotto scalare. Per convincersi di ciò si scelga $\mathcal{U} = \mathcal{W}$ e indicata con $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ una base ortonormale di $\mathcal{U}$ si considerino le applicazioni lineari

$$L_1(\mathbf{u}) = \mathbf{u},\ \ L_2(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1;$$

si ha $||L_1 + L_2||_N = 2$, $||L_1 - L_2||_N = 1$, $||L_1||_N = ||L_2||_N = 1$, quindi (1.88) non soddisfa la regola del parallelogramma.

Esempio 23 *Sia $T : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ un'isometria, si ha*

$$||T||_N = \sup_{\mathbf{u}\in\mathcal{U},\ \mathbf{u}\neq\mathbf{0}} \frac{||T(\mathbf{u})||_{\mathcal{W}}}{||\mathbf{u}||_{\mathcal{U}}} = \sup_{\mathbf{u}\in\mathcal{U},\ \mathbf{u}\neq\mathbf{0}} \frac{||\mathbf{u}||_{\mathcal{U}}}{||\mathbf{u}||_{\mathcal{U}}} = 1. \tag{1.91}$$

Si consideri l'applicazione (1.75) dell'esempio 16, si ha

$$||L||_N = \sup_{\mathbf{u}\in\mathcal{S},\ \mathbf{u}\neq\mathbf{0}} \frac{||L(\mathbf{u})||_{\mathcal{S}}}{||\mathbf{u}||_{\mathcal{S}}} = \sup_{\mathbf{u}\in\mathcal{S},\ \mathbf{u}\neq\mathbf{0}} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{k} |(\mathbf{u}, \mathbf{e}_i)|^2}}{||\mathbf{u}||_{\mathcal{S}}} \leq 1,$$

scegliendo poi $\mathbf{u} \in$Span$(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_k)$, si ricava $||L||_N = 1$.

1.11 Funzionali

Sia $\mathcal{S}$ spazio vettoriale con prodotto interno (,). Un'applicazione ψ di $\mathcal{S}$ in $\mathbb{R}$ prende il nome di *funzionale*. ψ è un funzionale *lineare* se sono soddisfatte le proprietà (1.51) e (1.52), ossia se risulta

1. $\psi(\alpha\mathbf{a}) = \alpha\psi(\mathbf{a})$, per ogni $\mathbf{a} \in \mathcal{S}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (omogeneità).
2. $\psi(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \psi(\mathbf{a}) + \psi(\mathbf{b})$, per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{S}$ (additività),

Fissato $\mathbf{b} \in \mathcal{S}$ il funzionale $\psi(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{b})$, $\mathbf{u} \in \mathcal{S}$ è lineare, mentre $\psi(\mathbf{u}) = ||\mathbf{u}||$, $\mathbf{u} \in \mathcal{S}$, non è lineare, infatti in generale, si ha $||\alpha\mathbf{u}|| = |\alpha|\ ||\mathbf{u}|| \neq \alpha||\mathbf{u}||$.

Dimostriamo adesso il seguente teorema di rappresentazione dei funzionali lineari.

Teorema 24 *Siano $\mathcal{S}$ uno spazio vettoriale di dimensione finita con prodotto interno $(,)$ e $\psi : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare. Allora esiste un unico $\mathbf{a} \in \mathcal{S}$ tale che si abbia*

$$\psi(\mathbf{u}) = (\mathbf{a}, \mathbf{u}), \quad \textit{per ogni } \mathbf{u} \in \mathcal{S}. \tag{1.92}$$

Dimostrazione. Se $\psi = 0$, (1.92) è verificata con $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Supponiamo allora $\psi \neq 0$ e consideriamo i sottospazi di $\mathcal{S}$,

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{S} \mid \psi(\mathbf{v}) = 0\} \tag{1.93}$$

e

$$\mathcal{M}^{\perp} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{S} \mid (\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0 \ \text{ per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{M}\}. \tag{1.94}$$

Poiché $\psi \neq 0$, $\mathcal{M}^{\perp}$ contiene almeno un elemento $\mathbf{z}$ non nullo, e quindi possiamo porre $\mathbf{a} = \psi(\mathbf{w})\mathbf{w}$, dove $\mathbf{w} = \mathbf{z}/||\mathbf{z}||$. Si ha

$$(\mathbf{a}, \mathbf{w}) = \psi(\mathbf{w})(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \psi(\mathbf{w}) \tag{1.95}$$

e, se $\mathbf{u} \in \mathcal{M}$, $0 = \psi(\mathbf{u}) = (\mathbf{a}, \mathbf{u})$.

Sia ora $\mathbf{u} \in \mathcal{S}$; per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$\mathbf{u} = \lambda \mathbf{w} + \mathbf{u} - \lambda \mathbf{w}, \tag{1.96}$$

dove $\lambda \mathbf{w} \in \mathcal{M}^{\perp}$, e se scegliamo $\lambda = \psi(\mathbf{u})/\psi(\mathbf{w})$ risulta

$$\psi(\mathbf{u} - \lambda \mathbf{w}) = \psi(\mathbf{u}) - \frac{\psi(\mathbf{u})}{\psi(\mathbf{w})}\psi(\mathbf{w}) = 0, \tag{1.97}$$

per cui $\mathbf{u} - \lambda \mathbf{w} \in \mathcal{M}$. Tenendo conto della linearità di ψ, della scelta di λ e di (1.95), si ha

$$(\mathbf{a}, \mathbf{u}) = (\mathbf{a}, \lambda \mathbf{w} + \mathbf{u} - \lambda \mathbf{w}) = (\mathbf{a}, \lambda \mathbf{w}) = \frac{\psi(\mathbf{u})}{\psi(\mathbf{w})}(\mathbf{a}, \mathbf{w}) = \psi(\mathbf{u}), \tag{1.98}$$

che dimostra l'esistenza di $\mathbf{a}$. Per quanto riguarda l'unicità, supponiamo che esistano $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathcal{S}$ tali che

$$\psi(\mathbf{u}) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{u}) = (\mathbf{a}_2, \mathbf{u}), \quad \text{per ogni } \mathbf{u} \in \mathcal{S}. \tag{1.99}$$

Scelto $\mathbf{u} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$ da (1.99) si ha

$$(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) = 0, \tag{1.100}$$

da cui, in vista della proprietà **s3**. del prodotto interno, discende $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2$. ■

Il sottospazio $\mathcal{M}$ è detto il *nucleo* di ψ. Dal teorema precedente segue che se $\mathcal{S}$ ha dimensione n e ψ è diverso da 0, allora la dimensione di $\mathcal{M}$ è $n-1$.

Un funzionale $\varphi : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ è *continuo* in $\mathbf{a}_0 \in \mathcal{S}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $\mathbf{a} \in \mathcal{S}$ che soddisfa $||\mathbf{a} - \mathbf{a}_0|| < \delta$, si ha $|\varphi(\mathbf{a}) - \varphi(\mathbf{a}_0)| < \varepsilon$.

φ è continuo in $\mathcal{S}$ se è continuo in ogni $\mathbf{a}_0 \in \mathcal{S}$.

Il funzionale $||\ || : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ che ad ogni vettore associa la sua norma, è continuo in ogni $\mathbf{a}_0 \in \mathcal{S}$, infatti, in vista della diseguaglianza (1.27) si ha

$$|||\mathbf{a}|| - ||\mathbf{a}_0||| \leq ||\mathbf{a} - \mathbf{a}_0||.$$

Ancora ricorrendo alla diseguaglianza (1.27) si dimostra che per ogni $\overline{\mathbf{a}} \in \mathcal{S}$ fissato, il funzionale $\varphi : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ definito da $\varphi(\mathbf{v}) = ||\mathbf{v} - \overline{\mathbf{a}}||$ con $\mathbf{v} \in \mathcal{S}$ è continuo.

Osservazione 25 *Dal teorema 24 discende che ogni funzionale lineare $\psi : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ è limitato e quindi continuo in $\mathcal{S}$. Infatti da (1.92) e dalla diseguaglianza di Schwarz (1.38) si ricava*

$$|\psi(\mathbf{v})| \leq ||\mathbf{a}||\ ||\mathbf{v}|| \quad \textit{per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{S}, \tag{1.101}$$

quindi ψ è limitato.

Lo spazio vettoriale $\mathcal{S}^* = \mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$ costituito dai funzionali lineari su $\mathcal{S}$ è detto il *duale* di $\mathcal{S}$. Se lo spazio vettoriale $\mathcal{S}$ ha dimensione n, anche $\mathcal{S}^*$ ha dimensione n. Indicata con $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ una base ortonormale di $\mathcal{S}$, gli n funzionali lineari $\varphi_i \in \mathcal{S}^*$ con $\varphi_i(\mathbf{u}) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{u})$, per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{S}$ costituiscono una base di $\mathcal{S}^*$. Infatti la lineare indipendenza dei φ_i, $i = 1, ..., n$ è una conseguenza della lineare indipendenza dei vettori $\mathbf{e}_i$, $i = 1, ..., n$, inoltre, dato $\varphi \in \mathcal{S}^*$ per il teorema 24 esiste $\mathbf{a} \in \mathcal{S}$ tale che $\varphi(\mathbf{u}) = (\mathbf{a}, \mathbf{u})$, per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{S}$ e

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{a}, \mathbf{e}_i)\varphi_i.$$

In vista di (1.88) e (1.101) si ha

$$||\varphi||_N = ||\mathbf{a}||. \tag{1.102}$$

1.12 Proiezioni

Siano $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ sottospazi vettoriali di $\mathcal{S}$ con $\mathcal{M}_2$ complemento di $\mathcal{M}_1$. Allora ogni $\mathbf{s} \in \mathcal{S}$ può essere scritto in modo unico nella forma $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$, con $\mathbf{s}_1 \in \mathcal{M}_1$ e $\mathbf{s}_2 \in \mathcal{M}_2$. *La proiezione su* $\mathcal{M}_1$ *lungo* $\mathcal{M}_2$ è l'applicazione $P_{\mathcal{M}_1}$ definita da $P_{\mathcal{M}_1}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}_1$. $P_{\mathcal{M}_1}$ è lineare ed idempotente, $(P_{\mathcal{M}_1})^2 = P_{\mathcal{M}_1}$.

Esempio 26 *In* $\mathbb{R}^2$ *dati* $\mathbf{x}^1 = (1, 0)$ *e* $\mathbf{x}^2 = (1, 1)$, *consideriamo i sottospazi* $\mathcal{M}_1 =$*Span*$(\mathbf{x}^1)$ *e* $\mathcal{M}_2 =$*Span*$(\mathbf{x}^2)$. *Per ogni* $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, *si ha* $\mathbf{v} = \mathbf{v}^1 + \mathbf{v}^2$, *con* $\mathbf{v}^1 = (v_1 - v_2, 0) \in \mathcal{M}_1$, $\mathbf{v}^2 = (v_2, v_2) \in \mathcal{M}_2$, *e la proiezione su* $\mathcal{M}_1$ *lungo* $\mathcal{M}_2$ *è definita da* $P_{\mathcal{M}_1}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^1$. *Posto poi* $\mathbf{x}^3 = (1, 2)$ *e* $\mathcal{M}_3 =$*Span*$(\mathbf{x}^3)$, *si ha* $\mathbf{v} = \mathbf{u}^1 + \mathbf{u}^2$, *con* $\mathbf{u}^1 = (\frac{2v_1 - v_2}{2}, 0) \in \mathcal{M}_1$, $\mathbf{u}^2 = (\frac{v_2}{2}, v_2) \in \mathcal{M}_3$, *e la proiezione su* $\mathcal{M}_1$ *lungo* $\mathcal{M}_3$ *è definita da* $P_{\mathcal{M}_1}(\mathbf{v}) = \mathbf{u}^1$.

Sia $\mathcal{M}$ un sottospazio di $\mathcal{S}$, la *proiezione ortogonale* su $\mathcal{M}$ è l'applicazione lineare $P_{\mathcal{M}}$ che ad ogni $\mathbf{v} \in S$ associa il vettore $\overline{\mathbf{v}} = P_{\mathcal{M}}(\mathbf{v}) \in \mathcal{M}$ definito in (1.63). $\overline{\mathbf{v}}$ soddisfa la condizione

$$(\mathbf{v} - \overline{\mathbf{v}}, \mathbf{w}) = 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{w} \in \mathcal{M}. \tag{1.103}$$

Estendiamo ora il concetto di proiezione su un convesso non vuoto chiuso di $\mathcal{S}$.

Se $\mathcal{A}$ è un sottoinsieme di $\mathcal{S}$ e $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{S}$, la *distanza* di $\mathbf{u}_0$ da $\mathcal{A}$ è il numero

$$dist((\mathbf{u}_0, \mathcal{A}) = \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{A}} ||\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}||. \tag{1.104}$$

Il risultato seguente è noto come teorema di minima norma.

Teorema 27 *Sia $\mathcal{S}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione finita munito del prodotto interno (,) e sia $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}$ un sottoinsieme non vuoto chiuso e convesso. Per ogni $\mathbf{f} \in \mathcal{S}$ esiste un unico $\mathbf{u} \in \mathcal{K}$ che soddisfa le seguenti condizioni equivalenti*

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{u}\| = \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{K}} \|\mathbf{f} - \mathbf{v}\| = dist(\mathbf{f}, \mathcal{K}), \tag{1.105}$$

$$(\mathbf{f} - \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \leq 0 \quad \textit{per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{K}. \tag{1.106}$$

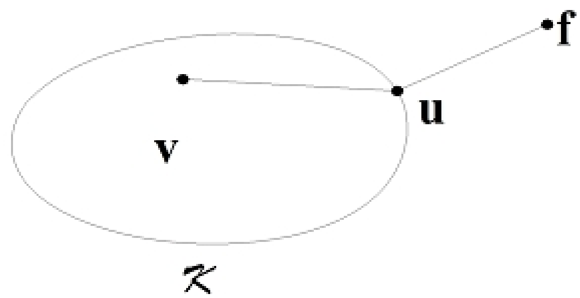

Figura 1.1: Il convesso $\mathcal{K}$.

Il vettore $\mathbf{u} = P_{\mathcal{K}}(\mathbf{f})$ è detto *proiezione* di $\mathbf{f}$ sul convesso chiuso $\mathcal{K}$.
Dimostrazione. Innanzi tutto dimostriamo che esiste $\mathbf{u} \in \mathcal{K}$ che soddisfa (1.105), dopodichè proviamo l'equivalenza di (1.105) e (1.106) e finalmente l'unicità di $\mathbf{u} \in \mathcal{K}$ che soddisfa (1.106).

Se $\mathbf{f} \in \mathcal{K}$, allora $\mathbf{u} = \mathbf{f}$; se $\mathbf{f} \notin \mathcal{K}$, poniamo $d = dist(\mathbf{f}, \mathcal{K})$. Allora per definizione di estremo inferiore esiste una successione $\{\mathbf{u}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$ tale che $d_k = \left\|\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{f}\right\| \to d$, per $k \to \infty$. $\{\mathbf{u}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy, infatti applicando la regola del parallelogramma (1.39) con $\mathbf{a} = \mathbf{f} - \mathbf{u}^{(p)}$, $\mathbf{b} = \mathbf{f} - \mathbf{u}^{(q)}$, ricordando che $\mathcal{K}$ è convesso, si ha

$$||\mathbf{u}^{(p)} - \mathbf{u}^{(q)}||^2 \leq 2d_p^2 + 2d_q^2 - 4d^2, \tag{1.107}$$

da cui si ottiene

$$||\mathbf{u}^{(p)} - \mathbf{u}^{(q)}|| \to 0, \quad \text{quando } \ p, q \to \infty. \tag{1.108}$$

Così, $\mathbf{u}^{(p)} \to \mathbf{u} \in \mathcal{K}$ per $p \to \infty$ (proposizione 14)e $d = \|\mathbf{u} - \mathbf{f}\|$ in quanto il funzionale norma è continuo.

Ora dobbiamo provare l'equivalenza di (1.105) e (1.106). Supponiamo che $\mathbf{u} \in \mathcal{K}$ soddisfi (1.105), per ogni $\mathbf{w} \in \mathcal{K}$ si ha

$$\mathbf{v} = (1 - t)\mathbf{u} + t\mathbf{w} \in \mathcal{K} \ \text{ per ogni } t \in [0, 1]$$

e quindi
$$\|\mathbf{f}-\mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{f}-(1-t)\mathbf{u}-t\mathbf{w}\| = \|\mathbf{f}-\mathbf{u}-t(\mathbf{w}-\mathbf{u})\|.$$
Conseguentemente, per $t \in (0,1]$, si ha
$$\|\mathbf{f}-\mathbf{u}\|^2 \leq \|\mathbf{f}-\mathbf{u}\|^2 - 2t(\mathbf{f}-\mathbf{u},\mathbf{w}-\mathbf{u}) + t^2\|\mathbf{w}-\mathbf{u}\|^2$$
e quindi $2(\mathbf{f}-\mathbf{u},\mathbf{w}-\mathbf{u}) \leq t\|\mathbf{w}-\mathbf{u}\|^2$ che conduce a (1.106) quando $t \to 0$.

Viceversa, supponiamo che $\mathbf{u} \in \mathcal{K}$ soddisfi (1.106), si ha
$$\|\mathbf{u}-\mathbf{f}\|^2 - \|\mathbf{v}-\mathbf{f}\|^2 = 2(\mathbf{f}-\mathbf{u},\mathbf{v}-\mathbf{u}) - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 \leq 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{K},$$
da cui segue (1.105).

Per provare l'unicità di $\mathbf{u}$, siano $\mathbf{u}_1$,$\mathbf{u}_2 \in \mathcal{K}$ che soddisfano (1.106). Si ha
$$(\mathbf{f}-\mathbf{u}_1,\mathbf{v}-\mathbf{u}_1) \leq 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{K}, \tag{1.109}$$
$$(\mathbf{f}-\mathbf{u}_2,\mathbf{v}-\mathbf{u}_2) \leq 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{K}. \tag{1.110}$$
Posto $\mathbf{v}=\mathbf{u}_2$ in (1.109) e $\mathbf{v}=\mathbf{u}_1$ in (1.110), sommando si ottiene
$$||\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1||^2 \leq 0. \tag{1.111}$$
■

Esempio 28 *Siano $\mathcal{S}=\mathbb{R}^2$ con il prodotto scalare definito in (1.33), $\mathcal{K}=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1^2+x_2^2\leq 1\}$. Se $\mathbf{f}\notin\mathcal{K}$, si ha $P_{\mathcal{K}}(\mathbf{f})=\mathbf{f}/||\mathbf{f}||$. Per ogni $\mathbf{v}\in\mathcal{K}$, si ha infatti*
$$||\mathbf{f}-\mathbf{v}|| \geq |||\mathbf{f}||-||\mathbf{v}||| = ||\mathbf{f}||-||\mathbf{v}|| \geq ||\mathbf{f}||-1 = |||\mathbf{f}||-1| = ||\mathbf{f}-\frac{\mathbf{f}}{||\mathbf{f}||}||.$$

L'applicazione $P_{\mathcal{K}}:\mathcal{S}\to\mathcal{K}$ definita dal teorema precedente è continua, vale infatti la seguente proposizione.

Proposizione 29 *Sotto le ipotesi del teorema 27 si ha*
$$||P_{\mathcal{K}}(\mathbf{f}_1)-P_{\mathcal{K}}(\mathbf{f}_2)|| \leq ||\mathbf{f}_1-\mathbf{f}_2||, \quad \textit{per ogni } \mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2\in\mathcal{S}. \tag{1.112}$$

Dimostrazione. Posti $\mathbf{u}_1=P_{\mathcal{K}}(\mathbf{f}_1)$ e $\mathbf{u}_2=P_{\mathcal{K}}(\mathbf{f}_2)$, in vista di (1.106) si ha
$$(\mathbf{f}_1-\mathbf{u}_1,\mathbf{v}-\mathbf{u}_1) \leq 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{K}, \tag{1.113}$$
$$(\mathbf{f}_2-\mathbf{u}_2,\mathbf{v}-\mathbf{u}_2) \leq 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{K}. \tag{1.114}$$
Ponendo $\mathbf{v}=\mathbf{u}_2$ in (1.113) e $\mathbf{v}=\mathbf{u}_1$ in (1.114), sommando si ottiene
$$||\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2||^2 \leq (\mathbf{f}_1-\mathbf{f}_2,\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2),$$
che, tenendo conto della diseguaglianza di Schwarz, implica
$$||\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2|| \leq ||\mathbf{f}_1-\mathbf{f}_2||.$$
■

Poichè un sottospazio vettoriale è chiuso e convesso, la proiezione ortogonale su un sottospazio vettoriale definita in (1.103) può essere ottenuta come caso particolare del teorema di minima norma, vale infatti la seguente proposizione.

Proposizione 30 *Se* $\mathcal{K} = \mathcal{M}$, *con* $\mathcal{M}$ *sottospazio vettoriale di* $\mathcal{S}$, *per ogni* $\mathbf{f} \in \mathcal{S}$ *la proiezione* $\mathbf{u} = P_{\mathcal{M}}(\mathbf{f})$ *di* $\mathbf{f}$ *su* $\mathcal{M}$ *è caratterizzata da*

$$\mathbf{u} \in \mathcal{M}, \quad (\mathbf{f} - \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \quad \textit{per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{M}, \tag{1.115}$$

e $P_{\mathcal{M}}$ *è un'applicazione lineare.*

Dimostrazione. Da (1.106) si ottiene

$$(\mathbf{f} - \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \leq 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{M},$$

e dunque

$$(\mathbf{f} - \mathbf{u}, t\mathbf{v} - \mathbf{u}) \leq 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{M}, \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R},$$

ne segue che

$$(\mathbf{f} - \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{M}.$$

Inversamente se $\mathbf{u}$ verifica (1.115) si ha

$$(\mathbf{f} - \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) = 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{M}.$$

Dati $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in \mathcal{S}$, posto $\mathbf{u}_1 = P_{\mathcal{M}}(\mathbf{f}_1)$ e $\mathbf{u}_2 = P_{\mathcal{M}}(\mathbf{f}_2)$, da (1.115) segue che

$$(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 - \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}_1 - \mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + (\mathbf{f}_2 - \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = 0, \tag{1.116}$$

per ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{M}$, quindi $P_{\mathcal{M}}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2) = P_{\mathcal{M}}(\mathbf{f}_1) + P_{\mathcal{M}}(\mathbf{f}_2)$. Analogamente si dimostra che $P_{\mathcal{M}}(\alpha\mathbf{f}) = \alpha P_{\mathcal{M}}(\mathbf{f})$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{f} \in \mathcal{S}$. ∎

1.13 Differenziabilità

Siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ spazi vettoriali con prodotto interno e T un'applicazione definita in un intorno di $\mathbf{0} \in \mathcal{U}$ a valori in $\mathcal{W}$. Si dice che $T(\mathbf{u})$ *converge a zero più velocemente di* $\mathbf{u}$ e si scrive

$$T(\mathbf{u}) = o(\mathbf{u}) \quad \text{per } \mathbf{u} \to \mathbf{0} \tag{1.117}$$

se

$$\lim_{\mathbf{u} \neq \mathbf{0},\ \mathbf{u} \to \mathbf{0}} \frac{||T(\mathbf{u})||_{\mathcal{W}}}{||\mathbf{u}||_{\mathcal{U}}} = 0^1. \tag{1.118}$$

Se T_1 e T_2 sono due applicazioni, $T_1(\mathbf{u}) = T_2(\mathbf{u}) + o(\mathbf{u})$ significa che $T_1(\mathbf{u}) - T_2(\mathbf{u}) = o(\mathbf{u})$.

Ad esempio per $\mathcal{U} = \mathcal{W} = \mathbb{R}$ e $T(t) = t^\alpha$ con $\alpha > 1$, si ha $T(t) = o(t)$ quando $t \to 0$.

[1] In altre parole, per ogni $k > 0$ esiste $k' > 0$ tale che $||T(\mathbf{u})||_{\mathcal{W}} < k||\mathbf{u}||_{\mathcal{U}}$ se $||\mathbf{u}||_{\mathcal{U}} < k'$.

Sia $\mathbf{g}$ una funzione definita sull'aperto $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ a valori nello spazio vettoriale $\mathcal{W}$, la *derivata* di $\mathbf{g}$ in t, se esiste, è così definita

$$\dot{\mathbf{g}}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{g}(t) = \lim_{s\to 0}\frac{\mathbf{g}(t+s) - \mathbf{g}(t)}{s}. \tag{1.119}$$

In questo caso si dice che $\mathbf{g}$ è *differenziabile* in t. La funzione $\mathbf{g} : \mathcal{D} \to \mathcal{W}$ è di classe C^1 se $\dot{\mathbf{g}}(t)$ esiste per ogni $t \in \mathcal{D}$ e se la funzione $\dot{\mathbf{g}}$ è continua in $\mathcal{D}$.

Sia $\mathbf{g}$ differenziabile in t, allora

$$\lim_{s\to 0}\frac{\mathbf{g}(t+s) - \mathbf{g}(t) - s\dot{\mathbf{g}}(t)}{s} = 0, \tag{1.120}$$

o equivalentemente

$$\mathbf{g}(t+s) = \mathbf{g}(t) + s\dot{\mathbf{g}}(t) + o(s), \quad s \to 0. \tag{1.121}$$

Dato che $s\dot{\mathbf{g}}(t)$ è lineare in s, $\mathbf{g}(t+s) - \mathbf{g}(t)$ risulta uguale ad una funzione lineare di s più un termine che converge a zero più velocemente di s.

Siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ spazi vettoriali normati, $\mathcal{D}$ un aperto di $\mathcal{U}$ e $T : \mathcal{D} \to \mathcal{W}$ un'applicazione. Si dice che T è *differenziable (secondo Fréchet)* in $\mathbf{u} \in \mathcal{D}$ se la differenza $T(\mathbf{u}+\mathbf{h}) - T(\mathbf{u})$ è uguale ad una funzione lineare di $\mathbf{h}$ più un termine che converge a zero più velocemente di $\mathbf{h}$. Più precisamente, se esiste un'applicazione lineare

$$DT(\mathbf{u}) : \mathcal{U} \to \mathcal{W} \tag{1.122}$$

tale che

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{h}) = T(\mathbf{u}) + DT(\mathbf{u})[\mathbf{h}] + o(\mathbf{h}), \quad \mathbf{h} \to \mathbf{0}. \tag{1.123}$$

Se $DT(\mathbf{u})$ esiste, è unica. Infatti per ogni $\mathbf{h} \in \mathcal{U}$ si ha

$$DT(\mathbf{u})[\mathbf{h}] = \lim_{\alpha\to 0}\frac{T(\mathbf{u}+\alpha\mathbf{h}) - T(\mathbf{u})}{\alpha} = \frac{d}{d\alpha}T(\mathbf{u}+\alpha\mathbf{h})|_{\alpha=0}. \tag{1.124}$$

$DT(\mathbf{u})$ è la *derivata* (di *Fréchet)* di T in $\mathbf{u}$.

Se T è differenziable in ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{D}$ allora DT è un'applicazione definita in $\mathcal{D}$ a valori nello spazio vettoriale $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$ delle applicazioni lineari di $\mathcal{U}$ in $\mathcal{W}$, introdotto in (1.84),

$$DT : \mathcal{D} \to \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{W}), \tag{1.125}$$

che ad ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{D}$ associa l'applicazione lineare $DT(\mathbf{u})$.

Un'applicazione $T : \mathcal{D} \to \mathcal{W}$ è di classe C^1 se T è differenziabile in ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{D}$ e DT è continua. T è di classe C^2 se T è di classe C^1 e DT è di classe C^1. In generale, T è di classe C^n con $n \geq 3$ se T è di classe C^{n-1} e la sua derivata $(n-1)$-esima è di classe C^1.

Se $\mathcal{D}$ è un aperto di $\mathbb{R}$ e $\mathbf{g}$ una funzione da $\mathcal{D}$ in $\mathcal{W}$, dalla relazione (1.121) segue che $D\mathbf{g}(t)[s] = s\dot{\mathbf{g}}(t)$.

Accanto alla differenziabilià secondo Fréchet si può introdurre una nozione più debole di differenziabilità.

Un'applicazione $T : \mathcal{D} \to \mathcal{W}$ è *differenziabile secondo Gateaux* in $\mathbf{u} \in \mathcal{D}$ se per ogni $\mathbf{h} \in \mathcal{U}$ esiste ed è finito in $\mathcal{W}$ il limite del rapporto

$$\frac{T(\mathbf{u} + \theta\mathbf{h}) - T(\mathbf{u})}{\theta} \tag{1.126}$$

al tendere di θ a 0. Indicato con $T'(\mathbf{u}, \mathbf{h})$ questo limite, si dice che $T'(\mathbf{u}, \mathbf{h})$ è la *derivata di Gateaux* di T in $\mathbf{u}$ nella direzione $\mathbf{h}$. L'applicazione $\mathbf{h} \mapsto T'(\mathbf{u}, \mathbf{h})$ definita da $\mathcal{U}$ in $\mathcal{W}$ è omogeneo,

$$T'(\mathbf{u}, \alpha\mathbf{h}) = \lim_{\theta\to 0} \frac{T(\mathbf{u} + \alpha\theta\mathbf{h}) - T(\mathbf{u})}{\theta} = \alpha \lim_{\vartheta\to 0} \frac{T(\mathbf{u} + \vartheta\mathbf{h}) - T(\mathbf{u})}{\vartheta} = \alpha T'(\mathbf{u}, \mathbf{h}), \tag{1.127}$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, ma in generale non è additiva.

Osservazione 31 *Se T è differenziabile secondo Fréchet in $\mathbf{u}$, allora T è differenziabile secondo Gateaux in $\mathbf{u}$ e le due derivate coincidono,*

$$DT(\mathbf{u})[\mathbf{h}] = T'(\mathbf{u}, \mathbf{h}), \quad \textit{per ogni } \mathbf{h} \in \mathcal{U}.$$

Infatti sia $\mathbf{h} \in \mathcal{U}$,

$$T'(\mathbf{u}, \mathbf{h}) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{T(\mathbf{u} + t\mathbf{h}) - T(\mathbf{u})}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{DT(\mathbf{u})[t\mathbf{h}] + o(t\mathbf{h})}{t}$$

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{tDT(\mathbf{u})[\mathbf{h}] + o(t\mathbf{h})}{t} = DT(\mathbf{u})[\mathbf{h}].$$

Esistono applicazioni differenziabili secondo Gateaux che non sono differenziabili secondo Fréchet, come mostra il seguente esempio. Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definito da

$$T(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) = (0, 0), \\ \frac{x^5}{(x-y)^2 + x^4}, & (x, y) \neq (0, 0). \end{cases} \tag{1.128}$$

T è differenziabile secondo Gateaux in $(0, 0)$ in ogni direzione $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$, infatti

$$\frac{T(\theta h_1, \theta h_2) - T(0, 0)}{\theta} = \frac{\theta^2 h_1^5}{(h_1 - h_2)^2 + \theta^2 h_1^4}, \tag{1.129}$$

quindi

$$T'((0, 0), (h_1, h_2)) = \begin{cases} 0, & h_1 \neq h_2, \\ h_1, & h_1 = h_2. \end{cases} \tag{1.130}$$

T non è differenziabile secondo Fréchet in $(0,0)$, scelti infatti

$$\mathbf{h}_1 = (6,1), \quad \mathbf{h}_2 = (3,8), \tag{1.131}$$

si ha

$$T'(\mathbf{0}, \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2) = 9 \neq T'(\mathbf{0}, \mathbf{h}_1) + T'(\mathbf{0}, \mathbf{h}_2) = 0. \tag{1.132}$$

Vale il seguente teorema.

Teorema 32 *Sia $T : \mathcal{D} \to \mathcal{W}$ un'applicazione, con $\mathcal{D}$ aperto di $\mathcal{U}$. Se T è differenziabile secondo Fréchet in $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{D}$ allora T è continua in $\mathbf{u}_0$.*

Dimostrazione. Per $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, si ha

$$T(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}) - T(\mathbf{u}_0) = T(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}) - T(\mathbf{u}_0) - DT(\mathbf{u}_0)[\mathbf{u}] + DT(\mathbf{u}_0)[\mathbf{u}], \tag{1.133}$$

dato che il rapporto

$$\frac{||T(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}) - T(\mathbf{u}_0) - DT(\mathbf{u}_0)[\mathbf{u}]||}{||\mathbf{u}||} \tag{1.134}$$

converge a 0 per $\mathbf{u} \to \mathbf{0}$, esiste $\delta_0 > 0$ tale che se $0 < ||\mathbf{u}|| < \delta_0$ si ha

$$||T(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}) - T(\mathbf{u}_0) - DT(\mathbf{u}_0)[\mathbf{u}]|| \leq ||\mathbf{u}||. \tag{1.135}$$

Inoltre, poiché $DT(\mathbf{u}_0)$ è lineare, per la proposizione 17, è anche limitata, quindi esiste $\kappa > 0$ tale che

$$||DT(\mathbf{u}_0)[\mathbf{u}]|| \leq \kappa ||\mathbf{u}||, \quad \text{per ogni } \mathbf{u} \in \mathcal{U}. \tag{1.136}$$

Allora per $||\mathbf{u}|| < \delta_0$ si ha

$$\begin{aligned} ||T(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}) - T(\mathbf{u}_0)|| \leq {} & ||T(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}) - T(\mathbf{u}_0) - DT(\mathbf{u}_0)[\mathbf{u}]|| + \\ & ||DT(\mathbf{u}_0)[\mathbf{u}]|| \leq (1+\kappa)||\mathbf{u}||. \end{aligned} \tag{1.137}$$

Quindi per ogni $\varepsilon > 0$, posto $\delta = \min(\delta_0, \varepsilon/1+\kappa)$, si ha la continuità di T in $\mathbf{u}_0$. ■

Osservazione 33 *La differenziabilità secondo Gateaux non implica la continuità. Se prendiamo ad esempio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) = (0,0), \\ \left(\frac{x^2 y}{x^4+y^2}\right)^2, & (x,y) \neq (0,0), \end{cases} \tag{1.138}$$

si ha che f è differenziabile secondo Gateaux in $(0,0)$, infatti per ogni $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ si ha

$$\frac{f(\theta v_1, \theta v_2) - f(0,0)}{\theta} = \frac{\theta v_1^4 v_2^2}{(\theta^2 v_1^4 + v_2^2)^2},$$

e quindi

$$f'(\mathbf{0}, \mathbf{v}) = 0,$$

tuttavia f non è continua in $(0,0)$ poiché $\{\mathbf{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $\mathbf{x}_k = (x_k, y_k) = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right)$ è una successione convergente a $(0,0)$, ma $f(x_k, y_k) \to \frac{1}{4}$ per $k \to \infty$.

Esempio 34 *Sia* $L : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ *un'applicazione lineare. Per* $\mathbf{u}_0, \mathbf{u} \in \mathcal{U}$ *si ha*

$$L(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}) = L(\mathbf{u}_0) + L(\mathbf{u}),$$

quindi $DL(\mathbf{u}_0) = L$*, cioè* DL *è costante.*

Siano $\mathcal{M}$ *un sottospazio dello spazio vettoriale* $\mathcal{S}$*,* $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_k\}$ *una base ortonormale di* $\mathcal{M}$ *ed* $P_{\mathcal{M}}$ *la proiezione su* $\mathcal{M}$*,* $P_{\mathcal{M}}(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{v}, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i$*. Si ha*

$$DP_{\mathcal{M}}(\mathbf{v})[\mathbf{h}] = \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{h}, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i = P_{\mathcal{M}}(\mathbf{h}), \quad \textit{per ogni } \mathbf{h} \in \mathcal{S}.$$

Esempio 35 *Siano* $\mathcal{U}$ *uno spazio vettoriale dotato di prodotto interno* $(,)$*,* $T : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ *il funzionale non lineare definito da* $T(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u})$*,* $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$*. Si ha*

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{h}) = (\mathbf{u} + \mathbf{h}, \mathbf{u} + \mathbf{h}) = T(\mathbf{u}) + 2(\mathbf{u}, \mathbf{h}) + T(\mathbf{h}),$$

con $T(\mathbf{h}) = o(\mathbf{h})$ *quando* $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$*, infatti*

$$\frac{(\mathbf{h}, \mathbf{h})}{||\mathbf{h}||} = ||\mathbf{h}|| \to 0 \textit{ per } \mathbf{h} \to \mathbf{0}.$$

Poichè $2(\mathbf{u}, \mathbf{h})$ *è lineare in* $\mathbf{h}$*, si ha che*

$$DT(\mathbf{u})[\mathbf{h}] = 2(\mathbf{u}, \mathbf{h}), \quad \textit{per ogni } \mathbf{h} \in \mathcal{U}. \tag{1.139}$$

Siano $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ e $\mathcal{Y}$ spazi vettoriali di dimensione finita dotati di prodotto interno; $\mathcal{D}$ un sottoinsieme aperto di $\mathcal{X}$.

Consideriamo un'applicazione bilineare[2] $\pi : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \to \mathcal{Y}$ che assegna a ogni $\mathbf{f}_0 \in \mathcal{X}_1$ e $\mathbf{g}_0 \in \mathcal{X}_2$ il prodotto $\pi(\mathbf{f}_0, \mathbf{g}_0) \in \mathcal{Y}$. In questo contesto, il prodotto $P = \pi(F, G)$ di due funzioni $F : \mathcal{D} \to \mathcal{X}_1$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{X}_2$ è la funzione $P : \mathcal{D} \to \mathcal{Y}$ definita da

$$P(\mathbf{u}) = \pi(F(\mathbf{u}), G(\mathbf{u})), \quad \text{per ogni } \mathbf{u} \in \mathcal{D}. \tag{1.140}$$

Enunciamo adesso la seguente proposizione fondamentale.

Proposizione 36 *(regola di derivazione del prodotto di applicazioni) Siano* F *e* G *differenziabili in* $\mathbf{u} \in \mathcal{D}$*. Allora il loro prodotto* $P = \pi(F, G)$ *è differenziabile in* $\mathbf{u}$ *e*

$$DP(\mathbf{u})[\mathbf{h}] = \pi(DF(\mathbf{u})[\mathbf{h}], G(\mathbf{u})) + \pi(F(\mathbf{u}), DG(\mathbf{u})[\mathbf{h}]) \tag{1.141}$$

per ogni $\mathbf{h} \in \mathcal{X}$*.*

[2] Un'applicazione $\pi : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \to \mathcal{Y}$ si dice bilineare se $\pi(\alpha\mathbf{f}_1 + \beta\mathbf{f}_2, \mathbf{g}) = \alpha\pi(\mathbf{f}_1, \mathbf{g}) + \beta\pi(\mathbf{f}_2, \mathbf{g})$ e $\pi(\mathbf{f}, \alpha\mathbf{g}_1 + \beta\mathbf{g}_2) = \alpha\pi(\mathbf{f}, \mathbf{g}_1) + \beta\pi(\mathbf{f}, \mathbf{g}_2)$ per ogni $\mathbf{f}, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in \mathcal{X}_1$, $\mathbf{g}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in \mathcal{X}_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Siano $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ una base ortonormale di $\mathcal{X}_1$ e $\{\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m\}$ una base ortonormale di $\mathcal{X}_2$ e poniamo $\widetilde{\kappa} = \max\{||\pi(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j)||,\ i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., m\}$. Si può dimostrare che in vista della bilinearità di π, per ogni $\mathbf{a} \in \mathcal{X}_1, \mathbf{b} \in \mathcal{X}_2$ si ha

$$||\pi(\mathbf{a}, \mathbf{b})|| \leq \widetilde{\kappa}\ n\ m||\mathbf{a}||\ ||\mathbf{b}||. \tag{1.142}$$

Inoltre si ha

$$||DF(\mathbf{u})[\mathbf{h}]|| \leq \kappa_1||\mathbf{h}||, \quad ||DG(\mathbf{u})[\mathbf{h}]|| \leq \kappa_2||\mathbf{h}||, \quad \mathbf{h} \in \mathcal{X} \tag{1.143}$$

in quanto $DF(\mathbf{u})$ e $DG(\mathbf{u})$ sono applicazioni lineari. Osserviamo che

$$F(\mathbf{u} + \mathbf{h}) = F(\mathbf{u}) + DF(\mathbf{u})[\mathbf{h}] + o(\mathbf{h}), \quad \text{per } \mathbf{h} \to \mathbf{0}, \tag{1.144}$$

$$G(\mathbf{u} + \mathbf{h}) = G(\mathbf{u}) + DG(\mathbf{u})[\mathbf{h}] + o(\mathbf{h}), \quad \text{per } \mathbf{h} \to \mathbf{0}, \tag{1.145}$$

e

$$\begin{aligned} ||\pi(DF(\mathbf{u})[\mathbf{h}], DG(\mathbf{u})[\mathbf{h}])|| \leq \widetilde{\kappa}\ n\ m||DF(\mathbf{u})[\mathbf{h}]||\ ||DG(\mathbf{u})[\mathbf{h}]|| \leq \\ \widetilde{\kappa}\ n\ m\ \kappa_{1\kappa 2}\ ||\mathbf{h}||^2 = o(\mathbf{h}), \quad \text{per } \mathbf{h} \to \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{1.146}$$

$$||\pi(DF(\mathbf{u})[\mathbf{h}], o(\mathbf{h}))|| \leq \widetilde{\kappa}\ n\ m\ \kappa_1||\mathbf{h}||\ ||o(\mathbf{h})|| = o(\mathbf{h}), \quad \text{per } \mathbf{h} \to \mathbf{0}, \tag{1.147}$$

$$||\pi(o(\mathbf{h}), DG(\mathbf{u})[\mathbf{h}])|| \leq \widetilde{\kappa}\ n\ m\ \kappa_2||\mathbf{h}||\ ||o(\mathbf{h})|| = o(\mathbf{h}), \quad \text{per } \mathbf{h} \to \mathbf{0}. \tag{1.148}$$

Finalmente

$$\begin{gathered} P(\mathbf{u} + \mathbf{h}) = \pi(F(\mathbf{u} + \mathbf{h}), G(\mathbf{u} + \mathbf{h})) = \\ \pi(F(\mathbf{u}), G(\mathbf{u})) + \pi(F(\mathbf{u}), DG(\mathbf{u})[\mathbf{h}]) + \\ \pi(DF(\mathbf{u})[\mathbf{h}], G(\mathbf{u})) + o(\mathbf{h}) = \\ P(\mathbf{u}) + \pi(F(\mathbf{u}), DG(\mathbf{u})[\mathbf{h}]) + \\ \pi(DF(\mathbf{u})[\mathbf{h}], G(\mathbf{u})) + o(\mathbf{h}), \quad \text{per } \mathbf{h} \to \mathbf{0}. \end{gathered} \tag{1.149}$$

Dato che $\pi(F(\mathbf{u}), DG(\mathbf{u})[\mathbf{h}])$ e $\pi(DF(\mathbf{u})[\mathbf{h}], G(\mathbf{u}))$ sono lineari in $\mathbf{h}$ si ha la tesi.
■

Osservazione 37 *Se $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, sostituendo $\mathbf{u}$ con t in (1.141) si ha*

$$\dot{P}(t) = \pi(\dot{F}(t), G(t)) + \pi(F(t), \dot{G}(t)). \tag{1.150}$$

Siano $\mathcal{G}$ un aperto di $\mathcal{X}_1$, $F : \mathcal{D} \to \mathcal{X}_1$ e $G : \mathcal{G} \to \mathcal{Y}$, con $F(\mathcal{D}) = \{\mathbf{v} \in \mathcal{X}_1 \mid \mathbf{v} = F(\mathbf{u}),\ \mathbf{u} \in \mathcal{D}\} \subset \mathcal{G}$.

Proposizione 38 *(regola di derivazione della composizione di applicazioni)*
Siano F differenziabile in $\mathbf{u} \in \mathcal{D}$ e G differenziabile in $\mathbf{v} = F(\mathbf{u})$. Allora la composizione $C = G \circ F$ è differenziabile in $\mathbf{u}$ e

$$DC(\mathbf{u})[\mathbf{h}] = DG(F(\mathbf{u}))[DF(\mathbf{u})[\mathbf{h}]] \tag{1.151}$$

per ogni $\mathbf{h} \in \mathcal{X}$.

Osservazione 39 *Se $\mathcal{X} = \mathbb{R}$, sostituendo $\mathbf{u}$ con t in (1.151) si ha*

$$\frac{d}{dt}C(t) = DG(F(t)[\dot{F}(t)]. \tag{1.152}$$

Esempio 40 *Si consideri il funzionale $T_1 : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ definito da $T_1(\mathbf{u}) = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$, $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$. T_1 è la composizione della funzione $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definita da $f(s) = \sqrt{s}$, per ogni $s \in \mathbb{R}^+$ e del funzionale T dell'esempio 35,*

$$T_1(\mathbf{u}) = f(T(\mathbf{u})), \quad \mathbf{u} \in \mathcal{U}. \tag{1.153}$$

Dalla proposizione 38, tenendo conto di (1.139), si ricava che la derivata di T_1 in $\mathbf{u}$ è definita da

$$DT_1(\mathbf{u})[\mathbf{h}] = Df(T(\mathbf{u}))[DT(\mathbf{u})[\mathbf{h}]]$$
$$= \frac{1}{2}(T(\mathbf{u}))^{-1/2}\ 2(\mathbf{u}, \mathbf{h}) = \frac{1}{||\mathbf{u}||}(\mathbf{u}, \mathbf{h}), \quad \textit{per ogni } \mathbf{h} \in \mathcal{U}.$$

Capitolo 2

Calcolo tensoriale

Questo capitolo è dedicato ad alcuni risultati di algebra e analisi tensoriale, dove, con il termine tensore, indichiamo un'applicazione lineare di uno spazio vettoriale dotato di prodotto interno in sé. Dettagli e approfondimenti possono essere trovati in [1], [6], [7], [8], [10], [12] e [13].

Sia $\mathcal{V}$ uno spazio vettoriale reale di dimensione $n \geq 2$ dotato del prodotto scalare $\cdot$. Indicata con $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}$, per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ le quantità

$$u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i, \qquad i = 1, ..., n \tag{2.1}$$

sono le *componenti* (cartesiane) di $\mathbf{u}$ e si ha

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \qquad \text{e} \qquad \|\mathbf{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}. \tag{2.2}$$

Se $n = 3$ si può dimostrare per via geometrica che $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}|| \cos\theta$, dove $\theta \in [0, \pi]$ è l'angolo compreso tra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

2.1 Tensori del secondo ordine

Un *tensore (del secondo ordine)* $\mathbf{A}$ è un'applicazione lineare di $\mathcal{V}$ in $\mathcal{V}$,

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{A}\mathbf{u} + \beta\mathbf{A}\mathbf{v}, \quad \text{per ogni } \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \tag{2.3}$$

L'insieme

$$\mathrm{Lin} = \{\mathbf{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{V} \mid \mathbf{A} \text{ è lineare}\} \tag{2.4}$$

di tutti i tensori è uno spazio vettoriale. Dati $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in$Lin, $\alpha \in \mathbb{R}$, i tensori $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ e $\alpha\mathbf{A}$ sono così definiti

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{v}, \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \tag{2.5}$$

$$(\alpha\mathbf{A})\mathbf{v} = \alpha\mathbf{A}\mathbf{v}, \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \tag{2.6}$$

L'elemento nullo di Lin è il tensore $\mathbf{0}$ definito da

$$\mathbf{0}\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \tag{2.7}$$

e il tensore identità $\mathbf{I}$ è definito da

$$\mathbf{I}\mathbf{v} = \mathbf{v}, \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \tag{2.8}$$

Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, l'applicazione che ad ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ associa $\alpha\mathbf{v}$ è un tensore, mentre l'applicazione che a $\mathbf{v}$ associa $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$ non è un tensore perché non è lineare.

Se $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in$ Lin, allora il *prodotto* $\mathbf{AB} \in$ Lin è definito da $(\mathbf{AB})\mathbf{u} = \mathbf{A}(\mathbf{Bu})$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$. In generale $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$; se $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ si dice che $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ *commutano*. Dati $\mathbf{A} \in$ Lin ed un intero $k \geq 0$, si definisce

$$\mathbf{A}^k = \begin{cases} \mathbf{I} & \text{se } k = 0, \\ \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{A} & \text{se } k \geq 1. \end{cases} \tag{2.9}$$

Proposizione 41 *Per ogni tensore $\mathbf{A} \in$ Lin esiste un unico tensore $\mathbf{A}^T$ tale che*

$$\mathbf{A}^T\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\mathbf{u} \qquad \textit{per ogni } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \tag{2.10}$$

Il tensore $\mathbf{A}^T$ è detto trasposto di $\mathbf{A}$.

Dimostrazione. Dimostriamo innanzi tutto che per ogni $\mathbf{A} \in$ Lin esiste un tensore $\mathbf{A}^T$ che soddisfa (2.10). A questo proposito, fissato $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, si consideri il funzionale lineare $\psi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ definito da $\psi(\mathbf{u}) = \mathbf{Au} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$. Per il teorema di rappresentazione dei funzionali lineari, esiste un unico $\mathbf{a}_\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ tale che

$$\psi(\mathbf{u}) = \mathbf{Au} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{a}_\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \qquad \text{per ogni } \mathbf{u} \in \mathcal{V}. \tag{2.11}$$

Si consideri adesso l'applicazione $\mathbf{B}$ da $\mathcal{V}$ in $\mathcal{V}$ definita da

$$\mathbf{Bv} = \mathbf{a}_\mathbf{v}, \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{V}; \tag{2.12}$$

B è lineare, infatti se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned} &\mathbf{B}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{a}_{\mathbf{v}+\mathbf{w}} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{Au} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \\ &\mathbf{Au} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{Au} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{a}_\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{a}_\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = \\ &\mathbf{Bv} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{Bw} \cdot \mathbf{u}, \quad \text{per ogni } \mathbf{u} \in \mathcal{V}; \qquad (2.13) \\ &\mathbf{B}(\alpha\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{a}_{\alpha\mathbf{v}} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{Au} \cdot (\alpha\mathbf{v}) = \\ &\alpha\mathbf{a}_\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \alpha\mathbf{Bv} \cdot \mathbf{u}, \quad \text{per ogni } \mathbf{u} \in \mathcal{V}. \qquad (2.14) \end{aligned}$$

Poniamo $\mathbf{A}^T = \mathbf{B}$, si ha

$$\mathbf{Au} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{a_v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{Bv} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{A}^T\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \quad \text{per ogni } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \tag{2.15}$$

Per dimostrare l'unicità supponiamo che esistano due tensori $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ tali che

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{Au} = \mathbf{Bv} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{Cv} \cdot \mathbf{u} \quad \text{per ogni } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \tag{2.16}$$

allora

$$(\mathbf{B} - \mathbf{C})\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{2.17}$$

per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Posto $\mathbf{u} = (\mathbf{B} - \mathbf{C})\mathbf{v}$ da (2.17) si ottiene $||(\mathbf{B} - \mathbf{C})\mathbf{v}|| = 0$, da cui si ricava $(\mathbf{B} - \mathbf{C})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, e quindi $\mathbf{B} - \mathbf{C} = \mathbf{0}$. ∎

Proposizione 42 *Siano* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in$*Lin, valgono le seguenti proprietà,*

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T, \tag{2.18}$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T, \tag{2.19}$$

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}. \tag{2.20}$$

Dimostrazione. Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T\mathbf{v} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{Au} + \mathbf{Bu}) \cdot \mathbf{v} = \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}^T\mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{B}^T\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T)\mathbf{v}, \end{aligned} \tag{2.21}$$

che dimostra (2.18). Le proprietà (2.19) e (2.20) discendono direttamente dalle seguenti uguaglianze,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{AB})^T\mathbf{v} = (\mathbf{AB})\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{A}(\mathbf{Bu}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{Bu} \cdot \mathbf{A}^T\mathbf{v} = \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T\mathbf{v}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{A}^T)^T\mathbf{v} = \mathbf{A}^T\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{Av}. \tag{2.23}$$

∎

2.2 Tensori simmetrici e antisimmetrici

Un tensore $\mathbf{A} \in$ Lin è *simmetrico* se $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, è *antisimmetrico* se $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$. Denotiamo con

$$\mathrm{Sym} = \{\mathbf{A} \in \mathrm{Lin} \mid \mathbf{A} = \mathbf{A}^T\} \tag{2.24}$$

il sottospazio di Lin di tutti i tensori simmetrici e con

$$\mathrm{Skw} = \{\mathbf{W} \in \mathrm{Lin} \mid \mathbf{W} = -\mathbf{W}^T\} \tag{2.25}$$

il sottospazio di Lin di tutti i tensori antisimmetrici. Ogni $\mathbf{A} \in$ Lin è unicamente decomposto nella somma di $(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)/2 \in$ Sym e $(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)/2 \in$ Skw. Inoltre, poiché Sym$\cap$Skw $= \{\mathbf{0}\}$, Lin è la somma diretta di Sym e Skw,

$$\mathrm{Lin} = \mathrm{Sym} \oplus \mathrm{Skw}. \tag{2.26}$$

I tensori $(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)/2$ e $(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)/2$ sono detti rispettivamente *parte simmetrica* e *parte antisimmetrica* di $\mathbf{A}$.

2.3 Diadi

Dati $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ è l'elemento di Lin definito dalla relazione,

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} \quad \text{per ogni } \mathbf{u} \in \mathcal{V}. \tag{2.27}$$

Il tensore $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ è anche detto *diade* e con l simbolo $\otimes$ si denota il *prodotto tensore* o *prodotto tensoriale*. La relazione (2.27) definisce effettivamente un tensore, infatti,

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = [(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{b}]\mathbf{a} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} =$$

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{u} + (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{v}, \tag{2.28}$$

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}(\alpha\mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} = \alpha(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{u} \tag{2.29}$$

per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposizione 43 **(i)** *Siano* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathcal{V}$, *e* $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ *una base ortonormale di* $\mathcal{V}$, *valgono le seguenti proprietà*

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T = (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}), \tag{2.30}$$

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \otimes \mathbf{d}), \tag{2.31}$$

$$(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l, & j = k, \end{cases} \tag{2.32}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i = \mathbf{I}. \tag{2.33}$$

(ii) *Una diade* $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ *è simmetrica se e solo se* $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *ed è antisimmetrica se e solo se* $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Dimostrazione. La dimostrazione di (2.30) segue dalle uguaglianze

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T\mathbf{v} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) =$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})\mathbf{b} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})\mathbf{v}, \quad \text{per ogni } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \tag{2.34}$$

Dalle relazioni

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d})\mathbf{u} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{u})\mathbf{c} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{u})\mathbf{a} =$$

$$(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \otimes \mathbf{d})\mathbf{u}, \quad \text{per ogni } \mathbf{u} \in \mathcal{V}, \tag{2.35}$$

discende (2.31), mentre (2.32) segue direttamente da (2.31). Per quanto riguarda (2.33) si ha

$$(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + ... + \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_n)\mathbf{u} =$$

$$u_1\mathbf{e}_1 + ... + u_n\mathbf{e}_n = \mathbf{I}\mathbf{u}, \quad \text{per ogni } \mathbf{u} \in \mathcal{V}. \tag{2.36}$$

Infine per dimostrare (ii), si tenga conto del fatto che $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} = \mathbf{b}\otimes\mathbf{a}$ se e solo se

$$(\mathbf{b}\cdot\mathbf{u})\mathbf{a} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{u})\mathbf{b}, \quad \text{per ogni } \mathbf{u}\in\mathcal{V}, \tag{2.37}$$

che è equivalente alla condizione $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ e che $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} = -\mathbf{b}\otimes\mathbf{a}$ se e solo se

$$(\mathbf{b}\cdot\mathbf{u})\mathbf{a} = -(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u})\mathbf{b}, \quad \text{per ogni } \mathbf{u}\in\mathcal{V}. \tag{2.38}$$

Supponiamo che $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$ e $||\mathbf{a}|| = ||\mathbf{b}|| = 1$. Da (2.38) per $\mathbf{u}=\mathbf{a}$ e $\mathbf{u}=\mathbf{b}$ si ricavano le uguaglianze

$$(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a} = -\mathbf{b}, \quad \mathbf{a} = -(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}, \tag{2.39}$$

ed in particolare

$$\mathbf{a} = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})^2\mathbf{a}. \tag{2.40}$$

(2.40) implica $(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})^2 = 1$ o $(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})^2 = 0$. Se fosse $(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})^2 = 1$, moltiplicando scalarmente entrambi i membri di $(2.39)_1$ per $\mathbf{b}$ si ricaverebbe $||\mathbf{b}|| = -1$. Si conclude allora che $(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})^2 = 0$, da cui in vista di (2.39) si ricava $\mathbf{a}=\mathbf{b}=\mathbf{0}$. ■

Esercizio 44 *Dimostrare che dati $\mathbf{A}\in Lin$ e $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathcal{V}$, si ha*

$$\mathbf{A}(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}) = \mathbf{A}\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}, \tag{2.41}$$

$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\mathbf{A} = \mathbf{a}\otimes\mathbf{A}^T\mathbf{b}. \tag{2.42}$$

Soluzione. Per ogni $\mathbf{u}\in\mathcal{V}$, si ha

$$\mathbf{A}(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\mathbf{u} = \mathbf{A}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{u})\mathbf{a} = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{u})\mathbf{A}\mathbf{a} = (\mathbf{A}\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\mathbf{u}, \tag{2.43}$$

$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\mathbf{A}\mathbf{u} = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{A}\mathbf{u})\mathbf{a} = (\mathbf{A}^T\mathbf{b}\cdot\mathbf{u})\mathbf{a} = (\mathbf{a}\otimes\mathbf{A}^T\mathbf{b})\mathbf{u}. \tag{2.44}$$

Sia $\mathbf{e}\in\mathcal{V}$ con $||\mathbf{e}|| = 1$, per ogni $\mathbf{v}\in\mathcal{V}$ il vettore $(\mathbf{e}\otimes\mathbf{e})\mathbf{v} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e}$ è la proiezione di $\mathbf{v}$ nella direzione di $\mathbf{e}$; il vettore $(\mathbf{I}-\mathbf{e}\otimes\mathbf{e})\mathbf{v}$ è la proiezione di $\mathbf{v}$ sul sottospazio ortogonale a $\mathbf{e}$,

$$P_{\mathrm{Span}(\mathbf{e})} = \mathbf{e}\otimes\mathbf{e}, \quad P_{\mathrm{Span}(\mathbf{e})^\perp} = \mathbf{I}-\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}.$$

2.4 Componenti di un tensore

Fissata una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n\}$ di $\mathcal{V}$, le *componenti cartesiane* di un tensore $\mathbf{A}\in$ Lin sono

$$A_{ij} = \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{A}\mathbf{e}_j, \quad i,j = 1,...,n. \tag{2.45}$$

Per $\mathbf{u}\in\mathcal{V}$, posto $\mathbf{v}=\mathbf{A}\mathbf{u}$, per ogni $i = 1,...,n$ si ha

$$v_i = \mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_i = \mathbf{A}\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i\cdot\sum_{j=1}^n\mathbf{A}(u_j\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^n\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{A}\mathbf{e}_j u_j = \sum_{j=1}^n A_{ij}u_j. \tag{2.46}$$

Proposizione 45 *Sia* $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ *una base ortonormale di* $\mathcal{V}$*, le diadi* $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}_{i,j=1,...,n}$ *costituiscono una base di Lin. In particolare, per ogni* $\mathbf{A} \in$ *Lin, si ha*

$$\mathbf{A} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j). \tag{2.47}$$

Dimostrazione. Cominciamo con il dimostrare che le diadi $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}_{i,j=1,...,n}$ costituiscono un insieme di tensori linearmente indipendenti. Si consideri la combinazione lineare delle diadi $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}_{i,j=1,...,n}$ con coefficienti α_{ij}, si ha

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \mathbf{0} \tag{2.48}$$

se e solo se

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\mathbf{u} = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}u_j\mathbf{e}_i = \mathbf{0}, \quad \text{per ogni } \mathbf{u} \in \mathcal{V}. \tag{2.49}$$

Posto

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}u_j, \quad i = 1, ..., n \tag{2.50}$$

da (2.49) si ricava $\beta_1 = ... = \beta_n = 0$ e quindi

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\mathbf{e}_j\right) \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{per ogni } \mathbf{u} \in \mathcal{V},\ i = 1, ..., n. \tag{2.51}$$

Le relazioni in (2.51) sono equivalenti a

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\mathbf{e}_j = \mathbf{0},\ i = 1, ..., n, \tag{2.52}$$

che, a loro volta, tenendo conto della lineare indipendenza dei vettori $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$, conduce alle uguaglianze $\alpha_{ij} = 0$, $i, j = 1, ..., n$. Per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ si ha

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{A}\mathbf{u})_i\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}u_j\mathbf{e}_i = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_i = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\mathbf{u},$$

che dimostra (2.47) e consente di concludere che $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}_{i,j=1,...,n}$ è una base dello spazio vettoriale Lin che quindi ha dimensione n^2. ■

Proposizione 46 *Dato* $\mathbf{A} \in$ *Lin, si ha*

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{A}\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j). \tag{2.53}$$

Inoltre dati $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}$*, si ha*

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j, \quad i, j = 1, ..., n. \tag{2.54}$$

Dimostrazione. Per dimostrare (2.53) si usano la rappresentazione (2.47) e (2.45) e la relazione (2.31), da cui si ricava

$$\mathbf{A} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i)(\mathbf{A}\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j) =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j,$$

dove l'ultima uguaglianza discende da (2.33). Infine,

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{e}_j = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i)(\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_j) = a_i b_j.$$

■

Dato un tensore $\mathbf{A} \in$ Lin, la matrice

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & . & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & . & A_{2n} \\ . & . & . & . \\ A_{n1} & A_{n2} & & A_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.55}$$

è la *matrice delle componenti* di $\mathbf{A}$ rispetto a $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$.

Dati i tensori $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in$Lin, si ha

$$[\mathbf{A}^T] = [\mathbf{A}]^T, \tag{2.56}$$

$$[\mathbf{AB}] = [\mathbf{A}][\mathbf{B}], \tag{2.57}$$

$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.58}$$

2.5 Prodotto interno e norma in Lin

La *traccia* è il funzionale lineare su Lin che ad ogni tensore $\mathbf{A}$ associa lo scalare $tr\mathbf{A}$ e soddisfa

$$tr(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad \text{per ogni } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V} \tag{2.59}$$

Dalla relazione (2.47) e dalla linearità di tr si ha

$$tr\mathbf{A} = tr\left(\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\right) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} tr(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) =$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}. \tag{2.60}$$

Proposizione 47 *Il funzionale traccia ha le seguenti proprietà*

$$tr\mathbf{A} = tr\mathbf{A}^T, \tag{2.61}$$

$$tr(\mathbf{AB}) = tr(\mathbf{BA}), \tag{2.62}$$

per ogni $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in Lin$.

Dimostrazione. Si ha

$$tr\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}^T\mathbf{e}_i = tr\mathbf{A}^T,$$

e (2.61) è dimostrato. Per provare (2.62) osserviamo che

$$\mathbf{AB} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \right) \left(\sum_{l,m=1}^{n} B_{lm}(\mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m) \right) =$$

$$\sum_{i,j,l,m=1}^{n} A_{ij}B_{lm}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m) = \sum_{i,j,m=1}^{n} A_{ij}B_{jm}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m), \tag{2.63}$$

$$\mathbf{BA} = \left(\sum_{l,m=1}^{n} B_{lm}(\mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m) \right) \left(\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \right) =$$

$$\sum_{i,j,l,m=1}^{n} A_{ij}B_{lm}(\mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m)(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \sum_{i,j,l=1}^{n} A_{ij}B_{li}(\mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_j). \tag{2.64}$$

Da (2.63) si ottiene

$$tr(\mathbf{AB}) = \sum_{i,j,m=1}^{n} A_{ij}B_{jm}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_m) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}B_{ji},$$

mentre da (2.64) si ha

$$tr(\mathbf{BA}) = \sum_{i,j,l=1}^{n} A_{ij}B_{li}(\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}B_{ji},$$

da cui la tesi. ■

In particolare, dalla dimostrazione precedente, discende che le componenti del prodotto **AB** sono date da

$$(AB)_{ml} = \sum_{j=1}^{n} A_{mj}B_{jl}, \quad m, l = 1, ..., n. \tag{2.65}$$

Lo spazio vettoriale Lin può essere dotato del prodotto interno

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = tr(\mathbf{A}^T\mathbf{B}), \quad \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Lin}. \tag{2.66}$$

Verifichiamo che (2.66) è effettivamente un prodotto interno. La simmetria è soddisfatta, infatti

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = tr(\mathbf{A}^T\mathbf{B}) = tr(\mathbf{B}^T\mathbf{A}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A},$$

per quanto riguarda la bilinearità, dati $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in$Lin si ha

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = tr(\mathbf{A}^T(\mathbf{B} + \mathbf{C})) = tr(\mathbf{A}^T\mathbf{B}) + tr(\mathbf{A}^T\mathbf{C}) =$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C},$$

inoltre per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{A} \cdot (\alpha\mathbf{B}) = tr(\alpha\mathbf{A}^T\mathbf{B}) = \alpha tr(\mathbf{A}^T\mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

Infine, per quanto riguarda la positività, si ha

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = tr(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = tr\left[\left(\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i)\right)\sum_{l,m=1}^{n} A_{lm}(\mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m)\right] =$$
$$tr\left(\sum_{i,j,l,m=1}^{n} A_{ij}A_{lm}(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m)\right) = tr\left(\sum_{i,j,m=1}^{n} A_{ij}A_{im}(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_m)\right) =$$
$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^2 \geq 0,$$

inoltre $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = 0$ se e solo se $A_{ij} = 0$ per $i, j = 1, ..., n$.

Il prodotto interno di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ in termini di componenti è dato da

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}B_{ij}. \tag{2.67}$$

Nello spazio vettoriale Lin al prodotto interno (2.66) è associata la norma

$$||\mathbf{A}|| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} = \sqrt{tr(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}, \quad \mathbf{A} \in \text{Lin}. \tag{2.68}$$

In particolare si ha

$$||\mathbf{A}|| = ||\mathbf{A}^T||, \tag{2.69}$$

infatti

$$\begin{aligned} ||\mathbf{A}||^2 &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = tr(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = tr(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) \\ &= tr((\mathbf{A}^T)^T\mathbf{A}^T) = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}^T = ||\mathbf{A}^T||^2. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Esercizio 48 *La norma definita (2.68) è submoltiplicativa,*

$$||\mathbf{AB}|| \leq ||\mathbf{A}|| \; ||\mathbf{B}|| \qquad \textit{per ogni } \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \textit{Lin}. \tag{2.71}$$

Proposizione 49 *Siano* $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in$*Lin,* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}$*, valgono le seguenti relazioni*

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = tr\mathbf{A}, \tag{2.72}$$

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{AB}) = (\mathbf{A}^T\mathbf{C}) \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{CB}^T) \cdot \mathbf{A}, \tag{2.73}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{Av} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}), \tag{2.74}$$

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}), \tag{2.75}$$

$$||\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}|| = ||\mathbf{u}||^2. \tag{2.76}$$

Dimostrazione. (2.72) è ovvia, per dimostrare (2.73) si osserva che

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{AB}) = tr(\mathbf{C}^T\mathbf{AB}) = tr((\mathbf{A}^T\mathbf{C})^T\mathbf{B}) = (\mathbf{A}^T\mathbf{C}) \cdot \mathbf{B} =$$
$$tr(\mathbf{BC}^T\mathbf{A}) = tr((\mathbf{CB}^T)^T\mathbf{A}) = (\mathbf{CB}^T) \cdot \mathbf{A}.$$

Inoltre

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{Av} = \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^n A_{ij} v_j = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} u_i v_j = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})_{ij} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}),$$

quindi (2.74) è dimostrata. Infine

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j u_i v_j = \left(\sum_{i=1}^n a_i u_i\right) \left(\sum_{i=1}^n b_j v_j\right) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}),$$

e anche (2.75) è provata. Infine,

$$||\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}||^2 = tr((\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^2 = ||\mathbf{u}||^4.$$

■

Da (2.75) e (2.47) segue che $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}_{i,j=1,\ldots,n}$ è una base ortonormale di Lin,

$$(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k)(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_l) = \begin{cases} 1 & i = k, \; j = l, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dato $\mathbf{A} \in$Lin, per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, si ha

$$||\mathbf{Au}||^2 = \mathbf{Au} \cdot \mathbf{Au} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}^T\mathbf{Au} = \mathbf{A}^T\mathbf{A} \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \leq ||\mathbf{A}^T\mathbf{A}|| \; ||\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}||$$
$$\leq ||\mathbf{A}^T|| \; ||\mathbf{A}|| \; ||\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}|| \leq ||\mathbf{A}||^2 \; ||\mathbf{u}||^2,$$

quindi,

$$||\mathbf{Au}|| \leq ||\mathbf{A}|| \; ||\mathbf{u}||, \quad \text{per ogni } \mathbf{u} \in \mathcal{V}. \tag{2.77}$$

In particolare, in accordo con il fatto che $\mathbf{A}$ è lineare, $\mathbf{A}$ è limitato (proposizione 17)

Proposizione 50 *Siano* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in$*Lin. Valgono le seguenti proprietà,*

(1) Se $\mathbf{A}$ *è simmetrico si ha*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}^T = \mathbf{A} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{C} + \mathbf{C}^T), \quad \textit{per ogni } \mathbf{C} \in \textit{Lin}. \tag{2.78}$$

(2) Se $\mathbf{B}$ *è antisimmetrico si ha*

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^T = \mathbf{B} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{C}^T), \quad \textit{per ogni } \mathbf{C} \in \textit{Lin}. \tag{2.79}$$

(3) Se $\mathbf{A}$ *è simmetrico e* $\mathbf{B}$ *è antisimmetrico si ha* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$.

(4) Se $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = 0$ *per ogni tensore* $\mathbf{C}$ *simmetrico allora* $\mathbf{A}$ *è antisimmetrico.*

(5) Se $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = 0$ *per ogni tensore* $\mathbf{C}$ *antisimmetrico allora* $\mathbf{A}$ *è simmetrico.*

Dimostrazione. (1) Si osservi che se $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, allora

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = tr(\mathbf{A}^T\mathbf{C}) = tr(\mathbf{A}\mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}^T,$$

inoltre

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}^T) =$$
$$\mathbf{A} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{C} + \mathbf{C}^T).$$

(2) Se invece $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$, si ha

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = tr(\mathbf{A}^T\mathbf{C}) = -tr(\mathbf{A}\mathbf{C}) = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}^T,$$

e

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}^T) =$$
$$\mathbf{A} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{C}^T),$$

(3) Se $\mathbf{A}$ è simmetrico e $\mathbf{B}$ è antisimmetrico, allora

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = tr(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A} = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{A},$$

quindi $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$.

(4) Supponiamo che $\mathbf{A}$ non sia antisimmetrico, allora $\mathbf{A} = \mathbf{S} + \mathbf{W}$, con $\mathbf{S} \in$Sym, $\mathbf{W} \in$Skw; in vista di (3) si ha

$$0 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{W} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{C}, \quad \text{per ogni } \mathbf{C} \in \text{Sym};$$

in particolare, scelto $\mathbf{C} = \mathbf{S}$, si ha $\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = 0$ e quindi $\mathbf{S} = \mathbf{0}$.

(5) La dimostrazione è analoga a quella del punto (4). ■

Avevamo già provato che Lin=Sym⊕Skw, dalla proposizione precedente segue che Skw è il complemento ortogonale di Sym e Sym è il complemento ortogonale di Skw,

$$\text{Sym}^{\perp} = \text{Skw}, \quad \text{Skw}^{\perp} = \text{Sym} \tag{2.80}$$

e che $P_{\text{Sym}}(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{A}+\mathbf{A}^T}{2}$ e $P_{\text{Skw}}(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{A}-\mathbf{A}^T}{2}$ sono le proiezioni ortogonali di $\mathbf{A}$ sui sottospazi Sym e Skw rispettivamente.

2.6 Tensori invertibili

Un tensore $\mathbf{A}$ si dice *invertibile* se è iniettivo

(i) se $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{u}_2$ allora $\mathbf{A}\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{A}\mathbf{u}_2$,

e surgettivo,

(ii) per ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ esiste (almeno) $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ tale che $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Se $\mathbf{A}$ è invertibile si definisce nel modo seguente il tensore $\mathbf{A}^{-1}$, detto *inverso* di $\mathbf{A}$. Dato $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{V}$ esiste ed è unico (in vista di (i)) $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{V}$ tale che $\mathbf{A}\mathbf{u}_0 = \mathbf{v}_0$, si definisce allora $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_0$. $\mathbf{A}^{-1}$ è lineare, infatti, dati $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ con $\mathbf{A}\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1, \mathbf{A}\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2$, dalla linearità di $\mathbf{A}$ segue che $\mathbf{A}(\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2) = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2$, quindi

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{-1}(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2) = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 = \\ \alpha_1\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}_2.\end{aligned} \tag{2.81}$$

Dalla definizione discende che se $\mathbf{A}$ è invertibile allora

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}. \tag{2.82}$$

Queste relazioni caratterizzano $\mathbf{A}^{-1}$, infatti vale il seguente teorema.

Teorema 51 *Siano* $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in$ *Lin tali che*

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{C}\mathbf{A} = \mathbf{I}, \tag{2.83}$$

allora $\mathbf{A}$ *è invertibile e* $\mathbf{B} = \mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}$.

Dimostrazione. Se $\mathbf{A}\mathbf{u}_1 = \mathbf{A}\mathbf{u}_2$ allora $\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{u}_1 = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$, quindi $\mathbf{A}$ ha la proprietà (i). Per ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ poniamo $\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{v}$, allora $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{v}$ e $\mathbf{A}$ soddisfa (ii). Da $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{I}$, premoltiplicando per $\mathbf{A}^{-1}$ si ottiene $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, mentre da $\mathbf{C}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, moltiplicando a destra per $\mathbf{A}^{-1}$ si ha $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}$. ■

Teorema 52 $\mathbf{A} \in$ *Lin è invertibile se e solo se* $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ *implica* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ *o, alternativamente, se e solo se ogni* $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ *può essere scritto nella forma* $\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u}$.

Dimostrazione. Se $\mathbf{A}$ è invertibile, entrambe le condizioni sono verificate perché $\mathbf{A}$ è iniettivo e surgettivo. Viceversa, supponiamo che $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ implichi $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, allora la proprietà (i) è soddisfatta. Per dimostrare che vale anche (ii), sia $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ una base di $\mathcal{V}$, allora anche $\{\mathbf{A}\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{A}\mathbf{e}_n\}$ è una base di $\mathcal{V}$. Infatti, da

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{A}\mathbf{e}_i = \mathbf{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i\right) \tag{2.84}$$

si ottiene $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$ e quindi $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$. Pertanto ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ può essere scritto nella forma $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{A}\mathbf{e}_i = \mathbf{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i\right) = \mathbf{A}\mathbf{u}$.

Supponiamo ora che ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ possa essere scritto nella forma $\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u}$. Se $\{\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_n\}$ è base di $\mathcal{V}$, siano $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n \in \mathcal{V}$ tali che $\mathbf{f}_i = \mathbf{A}\mathbf{e}_i$, $i = 1, ..., n$, allora $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ è una base di $\mathcal{V}$, infatti $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$ implica $\mathbf{A}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{f}_i = \mathbf{0}$ e quindi $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$. Con ciò abbiamo anche dimostrato che se $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ allora $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, e quindi vale (i). ∎

Teorema 53 *(1) Siano $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in$ Lin invertibili, allora $\mathbf{A}\mathbf{B}$ è invertibile e*

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}. \tag{2.85}$$

(2) Sia $\mathbf{A} \in$ Lin invertibile e $\alpha \neq 0$, allora $\alpha\mathbf{A}$ è invertibile e

$$(\alpha\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{A}^{-1}.$$

(3) Sia $\mathbf{A} \in$ Lin invertibile, allora $\mathbf{A}^{-1}$ è invertibile e

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}. \tag{2.86}$$

(4) Sia $\mathbf{A} \in$ Lin invertibile, allora $\mathbf{A}^T$ è invertibile e

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T \tag{2.87}$$

(5) Sia Sia $\mathbf{A} \in$ Lin invertibile, allora $\mathbf{A}^k$ è invertibile per ogni $k \in \mathbb{N}$ e

$$(\mathbf{A}^k)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^k. \tag{2.88}$$

Si consideri il funzionale det :Lin$\rightarrow \mathbb{R}$ che ad ogni tensore $\mathbf{A}$ associa il determinante della matrice $[\mathbf{A}]$ delle componenti cartesiane di $\mathbf{A}$ rispetto alla base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ di $\mathcal{V}$

$$\det \mathbf{A} = \det[\mathbf{A}]. \tag{2.89}$$

$\det \mathbf{A}$ è detto *determinante* del tensore $\mathbf{A}$ e dimostreremo in seguito che la definizione non dipende dalla scelta della base $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ di $\mathcal{V}$.

Elenchiamo le seguenti proprietà del determinante di un tensore che discendono direttamente dalle analoghe proprietà del determinante di una matrice. Per ogni $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in$ Lin si ha

$$\det(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}, \tag{2.90}$$

$$\det(\mathbf{A}^T) = \det \mathbf{A}, \tag{2.91}$$

$$\det(\alpha\mathbf{A}) = \alpha^n \det \mathbf{A}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{2.92}$$

$$\det(\mathbf{I}) = 1. \tag{2.93}$$

Vale la seguente proposizione.

Proposizione 54 *Un tensore* $\mathbf{A}$ *è invertibile se e solo se* $\det \mathbf{A} \neq 0$, *in tal caso*

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det \mathbf{A})^{-1}. \tag{2.94}$$

Dimostrazione. Se $\mathbf{A}$ è invertibile, da (2.82), tenendo conto di (2.90) segue che

$$1 = \det \mathbf{A} \det(\mathbf{A}^{-1}),$$

da cui discendono $\det \mathbf{A} \neq 0$ e (2.94). Viceversa, supponiamo che $\det \mathbf{A}$ sia diverso da 0, allora $\mathbf{A}$ è iniettivo. Infatti, la relazione $\mathbf{Au} = \mathbf{0}$ è equivalente al sistema lineare $\sum_{j=1}^{n} A_{ij}u_j = 0$, $i = 1, ..., n$ la cui unica soluzione è $u_1 = ... = u_n = 0$. Quindi in virtù del teorema 52 si conclude che $\mathbf{A}$ è invertibile. ∎

Esempio 55 *Dato* $\mathbf{e} \in \mathcal{V}$ *con* $||\mathbf{e}|| = 1$, *il tensore* $\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}$ *che ad ogni* $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ *associa il vettore* $(\mathbf{e} \cdot \mathbf{v})\mathbf{e}$ *non è invertibile perché manda il sottospazio ortogonale ad* $\mathbf{e}$ *nel vettore* $\mathbf{0}$.

2.7 Tensori ortogonali

Un tensore $\mathbf{Q}$ è *ortogonale* se conserva il prodotto interno $\cdot$ di $\mathcal{V}$,

$$\mathbf{Qu} \cdot \mathbf{Qv} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad \text{per ogni } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \tag{2.95}$$

In particolare un tensore ortogonale è invertibile, infatti da (2.95) per $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ si ottiene

$$||\mathbf{Qu}|| = ||\mathbf{u}||, \tag{2.96}$$

quindi se $\mathbf{Qu} = \mathbf{0}$, allora $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Un tensore ortogonale è un'isometria (confronta (1.64)).

La condizione (2.96) esprime il fatto che $\mathbf{Q}$ conserva la norma di un vettore.

Proposizione 56 *Condizione necessaria e sufficiente affinchè* $\mathbf{Q} \in$ *Lin sia ortogonale è che*

$$\mathbf{QQ}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}. \tag{2.97}$$

Dimostrazione. Supponiamo che sia soddisfatta la condizione (2.97), allora

$$\mathbf{Qu} \cdot \mathbf{Qv} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}^T\mathbf{Qv} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad \text{per ogni } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V},$$

quindi $\mathbf{Q}$ è ortogonale. Viceversa, supponiamo che $\mathbf{Q}$ sia ortogonale,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{Qu} \cdot \mathbf{Qv} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}^T\mathbf{Qv}, \quad \text{per ogni } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V},$$

da cui discende che $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{Q}^T\mathbf{Qv}) = 0$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, quindi $\mathbf{v} - \mathbf{Q}^T\mathbf{Qv} = \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ e infine

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}. \tag{2.98}$$

Se moltiplichiamo (2.98) a destra per $\mathbf{Q}^T$ si ottiene

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T,$$

da cui, premoltiplicando per $\mathbf{Q}^{-T}$, si deduce finalmente che anche $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$. ■

Dalla proposizione precedente, si ricava che $\mathbf{Q}$ è ortogonale se e solo se $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$, inoltre se $\mathbf{Q}$ è ortogonale allora $\det \mathbf{Q} = \pm 1$.

Un tensore ortogonale $\mathbf{R}$ con $\det \mathbf{R} = 1$ è detto *rotazione*.

Abbiamo visto che se $\mathbf{A}$ è un tensore invertibile e $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ è una base di $\mathcal{V}$, allora $\{\mathbf{A}\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{A}\mathbf{e}_n\}$ è una base di $\mathcal{V}$. Nel caso in cui $\mathbf{A}$ sia un tensore ortogonale vale la seguente proposizione.

Proposizione 57 *Se $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ è una base ortonormale di $\mathcal{V}$ e $\mathbf{Q}$ è un tensore ortogonale, allora $\{\mathbf{Q}\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{Q}\mathbf{e}_n\}$ è una base ortonormale di $\mathcal{V}$. Viceversa, se $\mathbf{Q}$ è un tensore tale che se $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ è una base ortonormale allora $\{\mathbf{Q}\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{Q}\mathbf{e}_n\}$ è una base ortonormale, $\mathbf{Q}$ è ortogonale.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{Q}$ un tensore ortogonale, si ha

$$\mathbf{Q}\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{Q}\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij},$$

quindi $\{\mathbf{Q}\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{Q}\mathbf{e}_n\}$ è una base ortonormale di $\mathcal{V}$.

Supponiamo ora che $\{\mathbf{Q}\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{Q}\mathbf{e}_n\}$ sia una base ortonormale di $\mathcal{V}$. Poiché

$$\mathbf{Q}\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{Q}\mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j,$$

è facile verificare che

$$\mathbf{Q}\mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad \text{per ogni } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

■

Siano $E = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ e $F = \{\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_n\}$ due basi ortonormali di $\mathcal{V}$. Sia $\mathbf{Q}$ il tensore ortogonale tale che

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{Q}\mathbf{e}_i, \quad i = 1, ..., n, \tag{2.99}$$

Dato $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ si ha

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \mathbf{f}_i,$$

vogliamo determinare la relazione tra le componenti ξ_i di $\mathbf{u}$ rispetto ad E e le componenti η_i di $\mathbf{u}$ rispetto ad F.

$$\mathbf{Q}\mathbf{u} = \mathbf{Q}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \mathbf{f}_i. \tag{2.100}$$

Siano Q_{ij} le componenti di $\mathbf{Q}$ rispetto ad E,

$$\mathbf{f}_j = \mathbf{Q}\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{Q}\mathbf{e}_j)\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} Q_{ij}\mathbf{e}_i. \tag{2.101}$$

Si ha
$$\sum_{j=1}^{n}\eta_j\mathbf{f}_j=\sum_{j=1}^{n}\eta_j\mathbf{Q}\mathbf{e}_j=\sum_{j=1}^{n}\eta_j\sum_{i=1}^{n}Q_{ij}\mathbf{e}_i=$$
$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}Q_{ij}\eta_j\right)\mathbf{e}_i, \tag{2.102}$$
quindi
$$\xi_i=\sum_{j=1}^{n}Q_{ij}\eta_j. \tag{2.103}$$

Dato $(\xi_1,...,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$, i vettori $\mathbf{u}=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\mathbf{e}_i$ e $\mathbf{v}=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\mathbf{f}_i$, in vista di (2.100), sono legati dalla seguente relazione
$$\mathbf{v}=\mathbf{Q}\mathbf{u}. \tag{2.104}$$
In definitiva, il tensore $\mathbf{Q}$ (o più precisamente la matrice di componenti Q_{ij}) può essere considerato come una trasformazione di coordinate come in (2.103) o come una trasformazione di vettori, come in (2.104). In questo caso $\mathbf{Q}$ rappresenta un cambiamento di base, dalla base E alla base F.

Se $\mathbf{B}$ è un tensore, ci chiediamo qual è la relazione tra la sua matrice di componenti B_{ij} rispetto ad E e la sua matrice di componenti B'_{ij} rispetto a F.

Si ha
$$\mathbf{B}\mathbf{e}_j=\sum_{i=1}^{n}B_{ij}\mathbf{e}_i, \tag{2.105}$$
$$\mathbf{B}\mathbf{f}_j=\sum_{i=1}^{n}B'_{ij}\mathbf{f}_i. \tag{2.106}$$
Consideriamo il tensore $\mathbf{Q}$ definito in (2.99)
$$\mathbf{B}\mathbf{f}_j=\mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{e}_j=\mathbf{B}\left(\sum_{k=1}^{n}Q_{kj}\mathbf{e}_k\right)=$$
$$\sum_{k=1}^{n}Q_{kj}\mathbf{B}\mathbf{e}_k=\sum_{k=1}^{n}Q_{kj}\sum_{i=1}^{n}B_{ik}\mathbf{e}_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}B_{ik}Q_{kj}\right)\mathbf{e}_i \tag{2.107}$$
e in vista di (2.106),
$$\mathbf{B}\mathbf{f}_j=\sum_{k=1}^{n}B'_{kj}\mathbf{f}_k=\sum_{k=1}^{n}B'_{kj}\mathbf{Q}\mathbf{e}_k=\sum_{k=1}^{n}B'_{kj}\sum_{i=1}^{n}Q_{ik}\mathbf{e}_i=$$
$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}Q_{ik}B'_{kj}\right)\mathbf{e}_i. \tag{2.108}$$

Dal confronto di (2.107) e (2.108) si ottiene che

$$\sum_{k=1}^{n} B_{ik} Q_{kj} = \sum_{k=1}^{n} Q_{ik} B'_{kj}, \tag{2.109}$$

o equivalentemente

$$[\mathbf{B}][\mathbf{Q}] = [\mathbf{Q}][\mathbf{B}'], \tag{2.110}$$

dove $[\mathbf{Q}]$ e $[\mathbf{B}]$ sono le matrici delle componenti di $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{B}$ rispetto ad E e $[\mathbf{B}']$ è la matrice delle componenti di $\mathbf{B}$ rispetto a F. Da (2.110) si ricava che

$$[\mathbf{B}'] = [\mathbf{Q}]^T [\mathbf{B}][\mathbf{Q}]. \tag{2.111}$$

Infine, se B_{ij} sono le componenti di una matrice, vogliamo determinare la relazione tra i tensori $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ definiti rispettivamente da

$$\mathbf{B} = \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \tag{2.112}$$

e

$$\mathbf{C} = \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij} \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}_j. \tag{2.113}$$

Da (2.112), (2.113) e (2.99) si ottiene

$$\mathbf{C} = \mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{Q}^T. \tag{2.114}$$

La relazione (2.114) esprime il legame che deve esserci tra un tensore $\mathbf{B}$ e un tensore $\mathbf{C}$ tali che se $\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{v}$, allora $\mathbf{C}\mathbf{Q}\mathbf{u} = \mathbf{Q}\mathbf{v}$, per ogni $\mathbf{u} \in V$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{u} & \xrightarrow{\mathbf{B}} & \mathbf{v} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Q}\mathbf{u} & \xrightarrow[\mathbf{C}]{} & \mathbf{Q}\mathbf{v} \end{array} \tag{2.115}$$

Il tensore $\mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{Q}^T$ è detto *coniugato ortogonale* di $\mathbf{B}$ rispetto a $\mathbf{Q}$.

Esempio 58 *Sia* $n = 3$. *Consideriamo il cambiamento di base*

$$\mathbf{f}_1 = \cos\theta \mathbf{e}_1 + \sin\theta \mathbf{e}_2, \tag{2.116}$$

$$\mathbf{f}_2 = -\sin\theta \mathbf{e}_1 + \cos\theta \mathbf{e}_2, \tag{2.117}$$

$$\mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3, \tag{2.118}$$

corrispondente ad una rotazione positiva (antioraria) di un angolo θ *attorno a* $\mathbf{e}_3$. *La matrice delle componenti della rotazione*

$$\mathbf{R} = \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 + \sin\theta(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) + \cos\theta(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2)$$

tale che $\mathbf{R}\mathbf{e}_i = \mathbf{f}_i$ *rispetto ad* E *è*

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.119}$$

Il tensore ortogonale $\mathbf{Q} = -\mathbf{I}$ è detto *riflessione centrale* dello spazio dei vettori.

Per $n = 3$, il tensore ortogonale $\mathbf{Q}$ la cui matrice delle componenti è data da

$$[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{2.120}$$

è una *riflessione* rispetto al piano generato dai vettori $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$.

2.8 Alcuni sottoinsiemi di Lin

Un tensore $\mathbf{A}$ è *semidefinito positivo* se

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} \geq 0, \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \tag{2.121}$$

è *definito positivo* se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} > 0, \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Un tensore $\mathbf{A}$ è *semidefinito negativo* se

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} \leq 0, \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \tag{2.122}$$

è *definito negativo* se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} < 0, \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Consideriamo i seguenti sottoinsiemi di Lin,

$$\mathrm{Lin}^+ = \{\mathbf{A} \in \mathrm{Lin} \mid \det \mathbf{A} > 0\}, \tag{2.123}$$

$$\mathrm{Psym} = \{\mathbf{A} \in \mathrm{Sym} \mid \mathbf{A} \text{ è definito positivo}\}, \tag{2.124}$$

$$\mathrm{Sym}^+ = \{\mathbf{A} \in \mathrm{Sym} \mid \mathbf{A} \text{ è semidefinito positivo}\}, \tag{2.125}$$

$$\mathrm{Nsym} = \{\mathbf{A} \in \mathrm{Sym} \mid \mathbf{A} \text{ è definito negativo}\}, \tag{2.126}$$

$$\mathrm{Sym}^- = \{\mathbf{A} \in \mathrm{Sym} \mid \mathbf{A} \text{ è semidefinito negativo}\}, \tag{2.127}$$

$$\mathrm{Orth} = \left\{\mathbf{Q} \in \mathrm{Lin} \mid \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}\right\}, \tag{2.128}$$

$$\mathrm{Orth}^+ = \{\mathbf{R} \in \mathrm{Orth} \mid \det \mathbf{R} = 1\}. \tag{2.129}$$

Lin^+, Orth e Orth^+ sono gruppi[1] rispetto alla moltiplicazione tra tensori; Orth è detto *gruppo ortogonale*, Orth^+ è detto *gruppo delle rotazioni.* Psym, Nsym,

[1] Un *gruppo* $\mathcal{G}$ è un insieme di elementi su cui è definita un'operazione $*$ che soddisfa le seguenti proprietà:

1. Se $a, b \in \mathcal{G}$, allora $a * b \in \mathcal{G}$,
2. Per ogni $a, b, c \in \mathcal{G}$, si ha $(a * b) * c = a * (b * c)$,
3. Esiste un elemento identità 1 tale che $1 * a = a * 1 = a$, per ogni $a \in \mathcal{G}$,
4. Per ogni $a \in \mathcal{G}$, esiste un elemento $a^{-1} \in \mathcal{G}$, tale che $a^{-1} * a = a * a^{-1} = 1$.

Sym^+ e Sym^- sono coni[2] convessi. Gli insiemi Sym e Skw definiti in (2.24) e (2.25) sono spazi vettoriali di dimensione $\frac{n(n+1)}{2}$ e $\frac{n(n-1)}{2}$, rispettivamente. Per $n = 3$ gli insiemi di vettori

$$\Big\{ \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1), \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \Big\}, \tag{2.130}$$

e

$$\Big\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1), \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \Big\}, \tag{2.131}$$

costituiscono rispettivamente una base ortonormale di Sym e di Skw.

Un tensore si dice *sferico* se è della forma $\mathbf{A} = \alpha \mathbf{I}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Dato $\mathbf{A} \in$ Lin, il tensore

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A} - \frac{1}{n}(tr\mathbf{A})\mathbf{I}, \tag{2.132}$$

è detto *deviatore* di $\mathbf{A}$. Da (2.132) discende che $tr\mathbf{A}_0 = 0$. Siano

$$\mathrm{Dev} = \{\mathbf{A} \in \mathrm{Lin} \mid tr\mathbf{A} = 0\} \tag{2.133}$$

l'insieme dei deviatori di tutti i tensori e

$$\mathrm{Sph} = \{\alpha \mathbf{I} \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \tag{2.134}$$

l'insieme di tutti i tensori sferici. Si dimostra facilmente che Dev e Sph sono sottospazi vettoriali di Lin di dimensione rispettivamente $n^2 - 1$ e 1, che Dev è ortogonale a Sph e che

$$\mathrm{Lin} = \mathrm{Dev} + \mathrm{Sph}. \tag{2.135}$$

Pertanto risulta

$$\mathrm{Lin} = \mathrm{Dev} \oplus \mathrm{Sph}$$

e le proiezioni ortogonali P_{Dev} e P_{Sph} di Lin su Dev e Sph sono definite da

$$P_{\mathrm{Dev}}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}_0, \quad P_{\mathrm{Sph}}(\mathbf{A}) = \frac{1}{n}(tr\mathbf{A})\mathbf{I}, \quad \mathbf{A} \in \mathrm{Lin}. \tag{2.136}$$

Esercizio 59 *Dati $n = 3$ e $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in$ Lin, provare che*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{B}_0 + \frac{1}{3}(tr\mathbf{A})(tr\mathbf{B}), \tag{2.137}$$

$$\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - \frac{1}{3}(tr\mathbf{B})^2. \tag{2.138}$$

Nell'ipotesi che $\mathbf{B} = 2\mu\mathbf{A} + \lambda(tr\mathbf{A})\mathbf{I}$, calcolare $tr\mathbf{B}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$.

[2] Un sottoinsieme $\mathcal{C}$ di uno spazio vettoriale $\mathcal{S}$ è un *cono* se $\lambda \mathbf{u} \in \mathcal{C}$ per ogni $\lambda > 0$ e $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$.

Esercizio 60 *Siano* $\mathbf{D} \in$ *Psym,* $\mathbf{Q} \in$ *Orth, mostrare che* $\mathbf{QDQ}^T \in$ *Psym.*

Esercizio 61 *Dimostrare che per ogni* $\mathbf{A} \in$ *Lin si ha*

$$tr\mathbf{A} = tr\left(\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)\right), \tag{2.139}$$

e che in particolare se $\mathbf{A} \in$ *Skw, allora* $tr\mathbf{A} = 0$.

Esercizio 62 *Provare che* $\mathbf{Q} \in$ *Orth se e solo se il tensore* $\mathbf{H} = \mathbf{Q} - \mathbf{I}$ *soddisfa entrambe le relazioni*

$$\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{HH}^T = \mathbf{0}, \tag{2.140}$$

$$\mathbf{HH}^T = \mathbf{H}^T\mathbf{H}. \tag{2.141}$$

Soluzione. Supponiamo che $\mathbf{Q} \in$ Orth; in particolare $\mathbf{QQ}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ e posto $\mathbf{Q} = \mathbf{I} + \mathbf{H}$ si ha

$$(\mathbf{I} + \mathbf{H})(\mathbf{I} + \mathbf{H})^T = (\mathbf{I} + \mathbf{H})^T(\mathbf{I} + \mathbf{H}) = \mathbf{I},$$

da cui si ottengono direttamente (2.140) e (2.141). Viceversa, se $\mathbf{H} = \mathbf{Q} - \mathbf{I}$ soddisfa (2.140) e (2.141) si ha

$$\mathbf{Q} - \mathbf{I} + \mathbf{Q}^T - \mathbf{I} + (\mathbf{Q} - \mathbf{I})(\mathbf{Q}^T - \mathbf{I}) = \mathbf{0},$$

da cui discende $\mathbf{QQ}^T = \mathbf{I}$, inoltre

$$(\mathbf{Q} - \mathbf{I})(\mathbf{Q}^T - \mathbf{I}) = (\mathbf{Q}^T - \mathbf{I})(\mathbf{Q} - \mathbf{I}),$$

e finalmente $\mathbf{QQ}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q}$.

2.9 Prodotto vettoriale

In questo paragrafo considereremo il caso $n = 3$. Dati $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ indichiamo con $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ il *prodotto vettoriale* di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ è una base ortonormale destra, le componenti di $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ rispetto a questa base sono

$$u_2v_3 - u_3v_2, \quad u_3v_1 - u_1v_3, \quad u_1v_2 - u_2v_1. \tag{2.142}$$

Il prodotto vettoriale $\wedge$ ha le seguenti proprietà,

$$(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} \wedge \mathbf{w} + \beta\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}, \quad \text{(bilinearità)} \tag{2.143}$$

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}, \quad \text{(antisimmetria)} \tag{2.144}$$

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{0}, \tag{2.145}$$

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})=\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})=\mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\wedge\mathbf{u}) \tag{2.146}$$

per ogni $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathcal{V}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Inoltre, se $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$, allora $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}=\mathbf{0}$ se e solo se $\mathbf{v}=\alpha\mathbf{u}$ con $\alpha\in\mathbb{R}$. Infatti da (2.142) discendono le seguenti relazioni

$$u_2v_3=u_3v_2,\ u_3v_1=u_1v_3,\ u_1v_2=u_2v_1. \tag{2.147}$$

Da (2.147) supponendo che ad esempio sia $u_1\neq 0$, si ricava

$$v_2=\frac{u_2}{u_1}v_1,\quad v_3=\frac{u_3}{u_1}v_1, \tag{2.148}$$

e quindi $\mathbf{v}=\frac{v_1}{u_1}\mathbf{u}$.

Il vettore $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ è ortogonale al sottospazio generato da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e si può dimostrare che

$$||\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}||=||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}||\ \sin\theta, \tag{2.149}$$

dove $\theta\in[0,\pi]$ è l'angolo formato dai vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Si ha inoltre che il prodotto misto $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})$ è nullo se e solo se $\mathbf{u},\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti; infatti se $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w})=0$ allora o $\mathbf{u}=\mathbf{0}$, o $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}=0$, cioè $\mathbf{w}=\alpha\mathbf{v}$ per qualche $\alpha\in\mathbb{R}$, oppure $\mathbf{u}$ è ortogonale a $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$ e quindi appartiene al piano generato da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

Valgono le ulteriori proprietà,

$$||\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}||^2=||\mathbf{u}||^2||\mathbf{v}||^2-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2,\quad \text{per ogni } \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathcal{V}, \tag{2.150}$$

$$||\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}||^2+(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2=1,\quad \text{per ogni } \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathcal{V} \text{ con } ||\mathbf{u}||=||\mathbf{v}||=1. \tag{2.151}$$

Esercizio 63 *Dimostrare la seguente identità*

$$(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\wedge\mathbf{w}=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{u},\quad \textit{per ogni } \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathcal{V}. \tag{2.152}$$

Soluzione. Se $\mathbf{u}=\alpha\mathbf{v}$ la tesi è ovvia, supponiamo allora che sia $\mathbf{u}\neq\alpha\mathbf{v}$. Il vettore $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ è ortogonale al piano di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, quindi $(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\wedge\mathbf{w}$ che è ortogonale a $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ deve appartenere al piano di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$,

$$(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\wedge\mathbf{w}=\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}, \tag{2.153}$$

dove α e β sono degli scalari che devono essere determinati in funzione di $\mathbf{u},\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Poiché $\mathbf{w}$ è ortogonale a $(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\wedge\mathbf{w}$ si deve avere

$$\alpha\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}+\beta\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=0, \tag{2.154}$$

che implica

$$\alpha=-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\gamma,\quad \beta=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\gamma, \tag{2.155}$$

dove γ è una funzione scalare incognita di $\mathbf{u},\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Si ha allora,

$$(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\wedge\mathbf{w}=\gamma(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})[-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{u}+(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}]; \tag{2.156}$$

per $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ la (2.156) diventa

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{u} = \gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u})[||\mathbf{u}||^2 \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}]. \tag{2.157}$$

Moltiplicando scalarmente per $\mathbf{v}$ la (2.157) si ottiene

$$||\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2 ||\mathbf{v}||^2 \sin^2 \theta = ||\mathbf{u}||^2 ||\mathbf{v}||^2 (1 - \cos^2 \theta) =$$

$$||\mathbf{u}||^2 ||\mathbf{v}||^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})^2 = \gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u})[||\mathbf{u}||^2 ||\mathbf{v}||^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})^2], \tag{2.158}$$

quindi da (2.150) si ottiene $\gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) = 1$. Moltiplicando scalarmente la (2.156) per $\mathbf{u}$, tenendo conto di (2.146) si ricava

$$[\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})] \cdot \mathbf{w} = \gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})[(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})||\mathbf{u}||^2]; \tag{2.159}$$

da (2.157) moltiplicata scalarmente per $\mathbf{w}$ e da $\gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) = 1$ segue

$$[\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})] \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})||\mathbf{u}||^2, \tag{2.160}$$

e tenendo conto di (2.153) si ottiene finalmente $\gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 1$.

Esercizio 64 *Dimostrare che per ogni* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{V}$ *si ha*

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{c}. \tag{2.161}$$

Soluzione. In virtù delle esercizio 63 si ha

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} = (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{c}.$$

Esercizio 65 *Siano* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}$*, mostrare che l'unica soluzione dell'equazione lineare*

$$\mathbf{x} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2.162}$$

è

$$\mathbf{x} = \frac{1}{1 + ||\mathbf{a}||^2}[\mathbf{b} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{a}]. \tag{2.163}$$

Soluzione. Supponiamo che $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ siano linearmente indipendenti. Sia $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$, con α, β, γ scalari incogniti. Sostituendo questa espressione di $\mathbf{x}$ nell'equazione (2.162) si ricava

$$[\alpha + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\gamma]\mathbf{a} + [\beta - ||\mathbf{a}||^2\gamma - 1]\mathbf{b} + [\beta + \gamma]\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

che, tenendo conto della indipendenza lineare di $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \alpha + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\gamma = 0 \\ \beta - ||\mathbf{a}||^2\gamma = 1 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è data da

$$\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{1 + ||\mathbf{a}||^2}, \quad \beta = \frac{1}{1 + ||\mathbf{a}||^2}, \quad \gamma = -\frac{1}{1 + ||\mathbf{a}||^2}.$$

Se invece $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono linearmente dipendenti, $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, allora è facile verificare che una soluzione di (2.162) è data da $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{a}$. Per quanto riguarda l'unicità, siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ due soluzioni di (2.162), la loro differenza deve soddisfare l'equazione $(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \mathbf{a} \wedge (\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, che moltiplicata scalarmente per $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ consente di concludere che $(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathbf{0}$.

A questo punto siamo in grado di provare che per $n = 3$ esiste una applicazione lineare biunivoca tra gli spazi vettoriali Skw e $\mathcal{V}$, che quindi risultano isomorfi. Dato un vettore $\mathbf{w}$ di componenti w_1, w_2, w_3, si consideri il tensore antisimmetrico

$$\begin{aligned}\mathbf{W} = -w_3(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + w_2(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1)\\ -w_1(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3).\end{aligned} \tag{2.164}$$

È facile verificare che

$$\mathbf{W}\mathbf{a} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{a}, \quad \text{per ogni } \mathbf{a} \in \mathcal{V}. \tag{2.165}$$

$\mathbf{w}$ è detto *vettore assiale* di $\mathbf{W}$.

Viceversa sia $\mathbf{W}$ un tensore antisimmetrico

$$\mathbf{W} = \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3} W_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i). \tag{2.166}$$

Per ogni $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ si ha

$$(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i)\mathbf{a} = (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{a})\mathbf{e}_i - (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a})\mathbf{e}_j = (\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_i) \wedge \mathbf{a}, \tag{2.167}$$

quindi

$$\mathbf{W}\mathbf{a} = \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3} W_{ij}(\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_i) \wedge \mathbf{a}, \tag{2.168}$$

e

$$\mathbf{w} = \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3} W_{ij}(\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_i) \tag{2.169}$$

è il vettore assiale di $\mathbf{W}$.

Da (2.165) segue che (per $\mathbf{W} \neq \mathbf{0}$) il sottospazio vettoriale di $\mathcal{V}$

$$Ker\mathbf{W} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} \mid \mathbf{W}\mathbf{v} = \mathbf{0}\} \tag{2.170}$$

ha dimensione 1 ed e generato da $\mathbf{w}$, $Ker\mathbf{W}$ è detto *asse* di $\mathbf{W}$.

Dati $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ vettori unitari ortogonali, il vettore $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ è il vettore assiale del tensore antisimmetrico

$$\mathbf{W} = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2. \tag{2.171}$$

Proposizione 66 *Sia* $\mathbf{Q} \in$*Orth, se* $\det \mathbf{Q} = 1$*, allora esiste* $\mathbf{e} \in \mathcal{V}$ *tale che* $\mathbf{Qe} = \mathbf{e}$*; se invece* $\det \mathbf{Q} = -1$*, allora esiste* $\mathbf{e} \in \mathcal{V}$ *tale che* $\mathbf{Qe} = -\mathbf{e}$.

Dimostrazione. Si ha

$$\det(\mathbf{Q} - \mathbf{I}) = \det[\mathbf{Q}(\mathbf{I} - \mathbf{Q}^T) = \det \mathbf{Q} \det(\mathbf{I} - \mathbf{Q}^T) =$$

$$-\det \mathbf{Q} \det(\mathbf{Q} - \mathbf{I}) = -\det(\mathbf{Q} - \mathbf{I}),$$

quindi $\det(\mathbf{Q} - \mathbf{I}) = 0$ e in virtù del teorema 52, esiste $\mathbf{e} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{e} \neq 0$ tale che $(\mathbf{Q} - \mathbf{I})\mathbf{e} = \mathbf{0}$. Se $\det \mathbf{Q} = -1$, la dimostrazione è analoga. ■

Esercizio 67 *Siano* $\mathbf{Q} \in$*Orth e* $\mathbf{e} \in \mathcal{V}$ *tali che* $\mathbf{Qe} = \mathbf{e}$.

1. *Dimostrare che* $\mathbf{Q}^T\mathbf{e} = \mathbf{e}$.

2. *Sia* $\mathbf{w}$ *il vettore assiale della parte antisimmetrica di* $\mathbf{Q}$*, dimostrare che* $\mathbf{e} \in$*Span(*$\mathbf{w}$*).*

Soluzione. 1. $\mathbf{Qe} = \mathbf{e} \Longrightarrow \mathbf{Q}^T\mathbf{Qe} = \mathbf{Q}^T\mathbf{e} \Longrightarrow \mathbf{Q}^T\mathbf{e} = \mathbf{e}$.
2. Sia $\mathbf{W} = (\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T)/2$ la parte antisimmetrica di $\mathbf{Q}$, si ha

$$\mathbf{Wv} = \frac{1}{2}(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T)\mathbf{v} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \tag{2.172}$$

in particolare

$$\mathbf{w} \wedge \mathbf{e} = \mathbf{We} = \mathbf{0}, \tag{2.173}$$

quindi $\mathbf{e} \in$Span$(\mathbf{w})$.

Dalla proposizione 66 si ricava che il sottospazio $\mathcal{A}(\mathbf{Q}) = \{\mathbf{e} \in \mathcal{V} \mid \mathbf{Qe} = \mathbf{e}\}$ contiene elementi non nulli. $\mathcal{A}(\mathbf{Q})$ è detto *asse* di $\mathbf{Q}$ e, in vista dell'esercizio 67, ha dimensione 1.

Esercizio 68 *Siano* $\mathbf{W}, \mathbf{Z} \in$*Skw e* $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathcal{V}$ *i rispettivi vettori assiali. Provare che*

$$\mathbf{WZ} = \mathbf{z} \otimes \mathbf{w} - (\mathbf{z} \cdot \mathbf{w})\mathbf{I}; \tag{2.174}$$

così in particolare

$$\mathbf{WZ} - \mathbf{ZW} = \mathbf{z} \otimes \mathbf{w} - \mathbf{w} \otimes \mathbf{z}, \tag{2.175}$$

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{W} = 2(\mathbf{z} \cdot \mathbf{w}),$$

e

$$||\mathbf{w}|| = \frac{1}{\sqrt{2}}||\mathbf{W}||. \tag{2.176}$$

Soluzione. In vista di (2.165) e (2.152) si ha

$$\mathbf{WZv} = \mathbf{w} \wedge (\mathbf{z} \wedge \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{z} - (\mathbf{z} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v}$$

$$= [\mathbf{z} \otimes \mathbf{w} - (\mathbf{z} \cdot \mathbf{w})\mathbf{I}]\mathbf{v}, \quad \text{per ogni } \mathbf{z} \in \mathcal{V}.$$

Se i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ sono linearmente indipendenti, allora lo scalare $|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})|$ è il volume del parallelepipedo $\mathcal{P}$ individuato dai vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.

Proposizione 69 *Dati i vettori* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ *linearmente indipendenti e* $\mathbf{A} \in Lin$ *si ha*

$$\det \mathbf{A} = \frac{\mathbf{Au} \cdot (\mathbf{Av} \wedge \mathbf{Aw})}{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})}. \tag{2.177}$$

In particolare da (2.177) si ricava la relazione

$$|\det \mathbf{A}| = \frac{Vol(\mathbf{A}(\mathcal{P}))}{Vol(\mathcal{P})}, \tag{2.178}$$

che fornisce un'interpretazione geometrica del determinante di un tensore. In (2.178) $\mathbf{A}(\mathcal{P})$ è l'immagine di $\mathcal{P}$ tramite $\mathbf{A}$ e Vol indica il volume.

La relazione (2.177) discende dalle due proposizioni seguenti.

Proposizione 70 *Dato* $\mathbf{A} \in Lin$*, siano* $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ *e* $\{\mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}'\}$ *due insiemi di vettori linearmente indipendenti di* $\mathcal{V}$*. Si ha*

$$\frac{\mathbf{Au} \cdot (\mathbf{Av} \wedge \mathbf{Aw})}{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})} = \frac{\mathbf{Au}' \cdot (\mathbf{Av}' \wedge \mathbf{Aw}')}{\mathbf{u}' \cdot (\mathbf{v}' \wedge \mathbf{w}')}. \tag{2.179}$$

Dimostrazione. Dato che $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti, si ha che $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \neq 0$. Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}$, con $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$. Per dimostrare (2.179) basta provare che per ogni insieme di vettori $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ linearmente indipendenti si ha

$$\mathbf{Au} \cdot (\mathbf{Av} \wedge \mathbf{Aw}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})[\mathbf{Ae}_1 \cdot (\mathbf{Ae}_2 \wedge \mathbf{Ae}_3)]. \tag{2.180}$$

Valgono le seguenti relazioni

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3, \tag{2.181}$$

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3, \tag{2.182}$$

$$\mathbf{w} = w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2 + w_3\mathbf{e}_3, \tag{2.183}$$

da cui si ricava

$$\begin{gathered}
\mathbf{Au} \cdot (\mathbf{Av} \wedge \mathbf{Aw}) = (u_1\mathbf{Ae}_1 + u_2\mathbf{Ae}_2 + u_3\mathbf{Ae}_3) \cdot [(v_1\mathbf{Ae}_1 + v_2\mathbf{Ae}_2 + \\
v_3\mathbf{Ae}_3) \wedge (w_1\mathbf{Ae}_1 + w_2\mathbf{Ae}_2 + w_3\mathbf{Ae}_3)] = \\
(u_1\mathbf{Ae}_1 + u_2\mathbf{Ae}_2 + u_3\mathbf{Ae}_3) \cdot [v_1w_2\mathbf{Ae}_1 \wedge \mathbf{Ae}_2 + v_1w_3\mathbf{Ae}_1 \wedge \mathbf{Ae}_3 + \\
v_2w_1\mathbf{Ae_2} \wedge \mathbf{Ae}_1 + v_2w_3\mathbf{Ae_2} \wedge \mathbf{Ae}_3 + v_3w_1\mathbf{Ae_3} \wedge \mathbf{Ae}_1 + v_3w_2\mathbf{Ae_3} \wedge \mathbf{Ae}_2] = \\
u_1v_2w_3\mathbf{Ae}_1 \cdot (\mathbf{Ae_2} \wedge \mathbf{Ae}_3) + u_1v_3w_2\mathbf{Ae}_1 \cdot (\mathbf{Ae_3} \wedge \mathbf{Ae}_2) + \\
u_2v_1w_3\mathbf{Ae}_2 \cdot (\mathbf{Ae_1} \wedge \mathbf{Ae}_3) + u_2v_3w_1\mathbf{Ae}_2 \cdot (\mathbf{Ae_3} \wedge \mathbf{Ae}_1) + \\
u_3v_1w_2\mathbf{Ae}_3 \cdot (\mathbf{Ae_1} \wedge \mathbf{Ae}_2) + u_3v_2w_1\mathbf{Ae}_3 \cdot (\mathbf{Ae_2} \wedge \mathbf{Ae}_1) = \\
\mathbf{Ae}_1 \cdot (\mathbf{Ae_2} \wedge \mathbf{Ae}_3)[u_1v_2w_3 - u_1v_3w_2 - u_2v_1w_3 + u_2v_3w_1 + \\
u_3v_1w_2 - u_3v_2w_1] = [\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})]\mathbf{Ae}_1 \cdot (\mathbf{Ae_2} \wedge \mathbf{Ae}_3).
\end{gathered}$$

■

Proposizione 71 *Sia* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ *una base ortonormale di* $\mathcal{V}$*, con* $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$*; per ogni tensore* $\mathbf{A}$ *si ha*

$$\det \mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{A}\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{A}\mathbf{e}_3). \tag{2.184}$$

Dimostrazione. Si ha

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^{3} A_{ik}\mathbf{e}_i, \quad k = 1, 2, 3. \tag{2.185}$$

quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{A}\mathbf{e}_3 = A_{12}A_{23}\mathbf{e}_3 - A_{12}A_{33}\mathbf{e}_2 - A_{13}A_{22}\mathbf{e}_3 + \\ A_{22}A_{33}\mathbf{e}_1 - A_{13}A_{32}\mathbf{e}_2 - A_{32}A_{23}\mathbf{e}_1, \end{aligned} \tag{2.186}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{A}\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{A}\mathbf{e}_3) = A_{11}(A_{22}A_{33} - A_{32}A_{32}) + A_{21}(A_{13}A_{32} - A_{12}A_{33}) + \\ A_{31}(A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22}). \end{aligned} \tag{2.187}$$

D'altra parte

$$\det \mathbf{A} = A_{11}(A_{22}A_{33} - A_{32}A_{32}) + A_{21}(A_{13}A_{32} - A_{12}A_{33}) +$$
$$A_{31}(A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22}),$$

da cui la tesi. ■

Esercizio 72 *Sia* $\varphi : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ *un funzionale trilineare e antisimmetrico, cioè lineare nei tre argomenti e tale che per ogni* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$,

$$\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = -\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = -\varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u}). \tag{2.188}$$

Siano $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ *una base ortonormale di* $\mathcal{V}$ *e* $\mathbf{A} \in Lin$*, dimostrare che*

$$\varphi(\mathbf{A}\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{A}\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{A}\mathbf{e}_3) = (tr\mathbf{A})\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3). \tag{2.189}$$

Soluzione.

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{A}\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \varphi(\sum_{i=1}^{3} A_{i1}\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \\ \varphi(A_{11}\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + \varphi(A_{21}\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + \varphi(A_{31}\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3). \end{aligned} \tag{2.190}$$

D'altra parte si ha

$$\varphi(A_{21}\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = A_{21}\varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = -A_{21}\varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3), \tag{2.191}$$

quindi $\varphi(A_{21}\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0$. Analogamente si dimostra che $\varphi(A_{31}\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0$ e da (2.190) si ricava

$$\varphi(\mathbf{A}\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \varphi(A_{11}\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3). \tag{2.192}$$

Ripetendo le stesse considerazioni per $\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{A}\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ e $\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{A}\mathbf{e}_3)$ si ha la tesi.

2.10 Cofattore di un tensore del secondo ordine

Sia $n = 3$. Dato $\mathbf{A} \in$ Lin, il *cofattore* $\mathbf{A}^*$ di $\mathbf{A}$ è l'unico elemento di Lin tale che per ogni $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{W} \in$Skw legati dalla relazione

$$\mathbf{Wv} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}, \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \tag{2.193}$$

il vettore $\mathbf{A}^*\mathbf{w}$ e il tensore $\mathbf{AWA}^T$ soddisfano a loro volta la relazione

$$\mathbf{AWA}^T\mathbf{v} = (\mathbf{A}^*\mathbf{w}) \wedge \mathbf{v}, \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \tag{2.194}$$

Proposizione 73 *Siano* $\mathbf{A} \in$ *Lin,* $\mathbf{A}^*$ *il suo cofattore,* $\mathbf{c} \in \mathcal{V}$*. Valgono le seguenti proprietà.*

(1) Per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}$*, si ha*

$$\mathbf{A}^*(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (\mathbf{Aa}) \wedge (\mathbf{Ab}). \tag{2.195}$$

(2) Se $\mathbf{A}$ *è invertibile anche* $\mathbf{A}^*$ *lo è e*

$$\mathbf{A}^* = (\det \mathbf{A})\mathbf{A}^{-T}. \tag{2.196}$$

(3) Il gruppo delle rotazioni Orth$^+$ *coincide con l'insieme*

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{R} \in \mathit{Lin} - \{0\} \ \ | \ \ \mathbf{R} = \mathbf{R}^*\}. \tag{2.197}$$

(4) La diade $\mathbf{c} \otimes \mathbf{c}$ *soddisfa la relazione*

$$(\mathbf{I} - \mathbf{c} \otimes \mathbf{c})^* = (1 - \mathbf{c} \cdot \mathbf{c})\mathbf{I} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{c}. \tag{2.198}$$

(5) Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ *una base ortonormale di* $\mathcal{V}$*, si ha*

$$\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{I} - \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i)^* = \mathbf{I}. \tag{2.199}$$

Dimostrazione. (1) Siano $\mathbf{w} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ e $\mathbf{W} = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ il tensore antisimmetrico associato a $\mathbf{w}$, in vista di (2.194) si ha

$$(\mathbf{A}^*\mathbf{w}) \wedge \mathbf{v} = \mathbf{A}(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{A}^T\mathbf{v}$$

$$= (\mathbf{Ab} \otimes \mathbf{Aa} - \mathbf{Aa} \otimes \mathbf{Ab})\mathbf{v} = (\mathbf{Aa} \wedge \mathbf{Ab}) \wedge \mathbf{v} \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \tag{2.200}$$

da cui si deduce (2.195).

(2) Sia $\mathbf{A}$ invertibile e supponiamo che esista $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tale che $\mathbf{A}^*\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Siano $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}$, entrambi non nulli tali che $\mathbf{v} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. In vista di (2.195) si ha

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}^*(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{Aa} \wedge \mathbf{Ab}, \tag{2.201}$$

da cui, tenendo conto delle proprietà del prodotto vettoriale, si deduce che $\mathbf{Aa} = \alpha\mathbf{Ab}$, quindi $\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b} = \mathbf{0}$ e finalmente $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Sia ora $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}$ con $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$. Si ha

$$\mathbf{A}^*\mathbf{e}_1 = \mathbf{Ae}_2 \wedge \mathbf{Ae}_3, \tag{2.202}$$

$$\mathbf{A}^*\mathbf{e}_2 = \mathbf{Ae}_3 \wedge \mathbf{Ae}_1, \tag{2.203}$$

$$\mathbf{A}^*\mathbf{e}_3 = \mathbf{Ae}_1 \wedge \mathbf{Ae}_2, \tag{2.204}$$

e, in vista della proposizione 71, valgono le relazioni

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}^*\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{A}^*\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{Ae}_1 = \det \mathbf{A}, \tag{2.205}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}^*\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{A}^*\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{Ae}_2 = \det \mathbf{A}, \tag{2.206}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}^*\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{A}^*\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{Ae}_3 = \det \mathbf{A}, \tag{2.207}$$

e

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}^*\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{A}^*\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{Ae}_j = 0 \quad \text{se } i \neq j, \tag{2.208}$$

si può così concludere che

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}^* = (\det \mathbf{A})\mathbf{I}, \tag{2.209}$$

da cui discende (2.196).

(3) Sia $\mathbf{R} \in$Orth$^+$, da (2.196) tenuto conto che $\det \mathbf{R} = 1$ e $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$, si ricava che $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}$ e quindi $\mathbf{R} \in \mathcal{C}$. Viceversa, supponiamo che $\mathbf{R} \in \mathcal{C}$, allora

$$\mathbf{R}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{R}^*(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (\mathbf{Ra}) \wedge (\mathbf{Rb}), \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}. \tag{2.210}$$

Sia ancora $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}$ con $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$, in vista di (2.210) si ha

$$\mathbf{Re}_3 = \mathbf{Re}_1 \wedge \mathbf{Re}_2, \tag{2.211}$$

$$\mathbf{Re}_2 = \mathbf{Re}_3 \wedge \mathbf{Re}_1, \tag{2.212}$$

$$\mathbf{Re}_1 = \mathbf{Re}_2 \wedge \mathbf{Re}_3, \tag{2.213}$$

quindi

$$\mathbf{Re}_i \cdot \mathbf{Re}_j = \begin{cases} \det \mathbf{R} & i = j, \\ 0 & i \neq j, \end{cases} \tag{2.214}$$

ed infine

$$\mathbf{R}^T\mathbf{R} = (\det \mathbf{R})\mathbf{I}. \tag{2.215}$$

Da (2.215) discende che

$$(\det \mathbf{R})^2 = \det \mathbf{R}, \tag{2.216}$$

da cui si ricava che $\det \mathbf{R} = 0$ oppure $\det \mathbf{R} = 1$. Se fosse $\det \mathbf{R} = 0$, da (2.215) si ricaverebbe che $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{0}$ e quindi $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ che è escluso dal fatto che $\mathbf{R} \in \mathcal{C}$. Si ha quindi che $\det \mathbf{R} = 1$, che unita a (2.215) consente finalmente di concludere che $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$.

(4) Per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$, si ha

$$(\mathbf{I} - \mathbf{c} \otimes \mathbf{c})^*(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (\mathbf{I} - \mathbf{c} \otimes \mathbf{c})\mathbf{u} \wedge (\mathbf{I} - \mathbf{c} \otimes \mathbf{c})\mathbf{v}$$

$$= \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{u})\mathbf{c} \wedge \mathbf{v} + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{v})\mathbf{c} \wedge \mathbf{u}, \tag{2.217}$$

e

$$[(1 - \mathbf{c} \cdot \mathbf{c})\mathbf{I} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{c}](\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{c})\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + [\mathbf{c} \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})]\mathbf{c}$$

$$= \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{c} \wedge [\mathbf{c} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})], \tag{2.218}$$

dove l'ultima uguaglianza discende da (2.152). D'altra parte

$$\mathbf{c} \wedge [\mathbf{c} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})] = -\mathbf{c} \wedge [(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{c}]$$

$$= -\mathbf{c} \wedge [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{c})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{c})\mathbf{u}] = -(\mathbf{u} \cdot \mathbf{c})\mathbf{c} \wedge \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{c})\mathbf{c} \wedge \mathbf{u}, \tag{2.219}$$

sostituendo (2.219) in (2.218) e confrontando l'espressione così ottenuta con (2.218), si ricava (2.198).

(5) Per dimostrare (2.199) basta osservare che in vista di (2.198) si ha

$$\sum_{i=1}^{3} (\mathbf{I} - \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i)^* = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i = \mathbf{I}. \tag{2.220}$$

■

2.11 Invarianti principali

Per ogni $\mathbf{A} \in$ Lin, introduciamo le seguenti quantità scalari,

$$I_1(\mathbf{A}) = tr\mathbf{A}, \tag{2.221}$$

$$I_2(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}[(tr\mathbf{A})^2 - tr(\mathbf{A}^2)] \tag{2.222}$$

$$I_3(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A}. \tag{2.223}$$

$I_1(\mathbf{A}), I_2(\mathbf{A}), I_3(\mathbf{A})$ sono detti *invarianti principali* di $\mathbf{A}$. Per $i = 1, 2, 3$ si ha

$$I_i(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T) = I_i(\mathbf{A}), \quad \text{per ogni } \mathbf{Q} \in \text{Orth}. \tag{2.224}$$

Infatti, per $\mathbf{Q}$ $\in$Orth si ha

$$I_1(\mathbf{A}) = tr\mathbf{A} = tr(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{A}) = tr(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T) = I_1(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T). \tag{2.225}$$

Osserviamo inoltre che

$$tr(\mathbf{A}^2) = tr(\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{A}) = tr(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T) = tr[(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T)^2],$$

e quindi, in vista di (2.225)

$$I_2(\mathbf{A}) = I_2(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T).$$

Infine, in vista di (2.90) si ha

$$I_3(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A} = (\det \mathbf{Q})(\det \mathbf{A})(\det \mathbf{Q}^T)$$
$$= \det(\mathbf{QAQ}^T) = I_3(\mathbf{QAQ}^T). \qquad (2.226)$$

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente risultato.

Proposizione 74 *La definizione di determinante data in (2.89) non dipende dalla scelta della base di $\mathcal{V}$.*

Dimostrazione. Cominciamo con l'osservare che se $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ e $\{\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_n\}$ sono due basi ortonormali di $\mathcal{V}$, esiste un tensore ortogonale $\mathbf{Q}$ tale che

$$\mathbf{Q}\mathbf{e}_i = \mathbf{f}_i, \quad i = 1, ..., n. \qquad (2.227)$$

Infatti il tensore

$$\mathbf{Q} = \mathbf{f}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{f}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + ... + \mathbf{f}_n \otimes \mathbf{e}_n \qquad (2.228)$$

soddisfa (2.227) ed è ortogonale in virtù della proposizione 57. Dalla definizione (2.89) segue che $\det \mathbf{A} = \det[\mathbf{A}]$, dove la matrice $[\mathbf{A}]$ ha componenti $A_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_j$, $i, j = 1, ..., n$. Indicata con $[\mathbf{A}']$ la matrice delle componenti di $\mathbf{A}$ rispetto alla base $\{\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_n\}$,

$$A'_{ij} = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{A}\mathbf{f}_j, \quad i, j = 1, ..., n \qquad (2.229)$$

e con $[\mathbf{Q}^T\mathbf{AQ}]$ la matrice delle componenti del tensore $\mathbf{Q}^T\mathbf{AQ}$ rispetto alla base $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$,

$$A''_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{Q}^T\mathbf{AQ}\mathbf{e}_j, \quad i, j = 1, ..., n, \qquad (2.230)$$

in vista di (2.227) si ha

$$A'_{ij} = \mathbf{Q}\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{AQ}\mathbf{e}_j = A''_{ij}, \quad i, j = 1, ..., n. \qquad (2.231)$$

Ancora dalla definizione (2.89) si ha

$$\det \mathbf{Q}^T\mathbf{AQ} = \det[\mathbf{Q}^T\mathbf{AQ}] = \det[\mathbf{A}'], \qquad (2.232)$$

dalla relazione (2.226) si ottiene finalmente che

$$\det[\mathbf{A}] = \det[\mathbf{A}']. \qquad (2.233)$$

■

È facile verificare che se $n = 3$ e A_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$ sono le componenti di $\mathbf{A}$ rispetto ad una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ di $\mathcal{V}$, si ha

$$I_1(\mathbf{A}) = A_{11} + A_{22} + A_{33}, \qquad (2.234)$$

$$I_2(\mathbf{A}) = A_{11}A_{22} + A_{22}A_{33} + A_{11}A_{33} - A_{12}A_{21} - A_{13}A_{31} - A_{23}A_{32}, \qquad (2.235)$$

$$I_3(\mathbf{A}) = A_{11}(A_{22}A_{33} - A_{32}A_{32}) + A_{21}(A_{13}A_{32} - A_{12}A_{33}) +$$
$$A_{31}(A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22}). \qquad (2.236)$$

Indichiamo con $\eta(\mathbf{A}) = \{I_1(\mathbf{A}), I_2(\mathbf{A}), I_3(\mathbf{A})\}$ la lista degli invarianti principali di $\mathbf{A}$.

2.12 Autovalori e autovettori

Un numero (reale) a è un *autovalore* di $\mathbf{A} \in \mathrm{Lin}$ se esiste un vettore $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, $||\mathbf{u}|| = 1$, tale che

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = a\mathbf{u}, \tag{2.237}$$

$\mathbf{u}$ è detto *autovettore* di $\mathbf{A}$ relativo all'autovalore a. Dato a autovalore di $\mathbf{A}$,

$$\mathcal{M}(a) = \{\mathbf{u} \in \mathcal{V} \mid \mathbf{A}\mathbf{u} = a\mathbf{u}\} \tag{2.238}$$

è un sottospazio di $\mathcal{V}$ detto *spazio caratteristico* di $\mathbf{A}$ corrispondente all'autovalore a. Se $\mathcal{M}(a)$ ha dimensione m, allora si dice che l'autovalore a ha *molteplicità* m. L'insieme $\sigma(\mathbf{A})$ degli autovalori di $\mathbf{A}$ ciascuno ripetuto un numero di volte uguale alla sua molteplicità è detto *spettro* di $\mathbf{A}$.

a è un autovalore di $\mathbf{A}$ se e solo se il tensore $\mathbf{A} - a\mathbf{I}$ è non invertibile e quindi a è una radice reale del *polinomio caratteristico* di $\mathbf{A}$,

$$p(a) = \det(\mathbf{A} - a\mathbf{I}). \tag{2.239}$$

Gli autovalori di un tensore sono chiamati anche *componenti principali* (del tensore), corrispondentemente, l'autovettore è chiamato *vettore principale.*

Proposizione 75 *Se $n = 3$ il polinomio caratteristico (2.239) di $\mathbf{A} \in$ Lin ha la seguente espressione*

$$p(a) = -a^3 + I_1(\mathbf{A})a^2 - I_2(\mathbf{A})a + I_3(\mathbf{A}). \tag{2.240}$$

Dimostrazione. Per dimostrare (2.240) si tenga conto del fatto che se $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ è una base ortonormale di $\mathcal{V}$, in virtù della proposizione 71 si ha,

$$\det(\mathbf{A} - a\mathbf{I}) = (\mathbf{A} - a\mathbf{I})\mathbf{e}_1 \cdot [(\mathbf{A} - a\mathbf{I})\mathbf{e}_2 \wedge (\mathbf{A} - a\mathbf{I})\mathbf{e}_3].$$

■

Il polinomio di terzo grado a coefficienti reali (2.240) ha sempre almeno una radice reale.

2.13 Teorema spettrale

Proposizione 76 *Valgono le seguenti proprietà:*

(a) *Gli spazi caratteristici di un tensore $\mathbf{S} \in$ Sym sono mutuamente ortogonali.*

(b) *Gli autovalori di un tensore $\mathbf{P} \in$ Psym sono positivi, gli autovalori di un tensore $\mathbf{S} \in$ Sym$^+$ sono non negativi.*

(c) *Gli autovalori di un tensore $\mathbf{N} \in$ Nsym sono negativi, gli autovalori di un tensore $\mathbf{S} \in$ Sym$^-$ sono non positivi.*

Dimostrazione. (a) Siano a e b gli autovalori di $\mathbf{S} \in \mathrm{Sym}$ e $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ i relativi autovettori,

$$\mathbf{S}\mathbf{u} = a\mathbf{u}, \quad \mathbf{S}\mathbf{v} = b\mathbf{v}.$$

Si ha

$$a\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{S}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}\mathbf{v} = b\mathbf{u} \cdot \mathbf{v},$$

quindi

$$(a - b)\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0,$$

evidentemente se $a \neq b$ allora $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

(b) Dato $\mathbf{P} \in \mathrm{Psym}$ siano a un autovalore e $\mathbf{v}$ il relativo autovettore di $\mathbf{P}$, si ha

$$a = a\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{P}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0.$$

■

Teorema 77 *(Teorema spettrale). Sia* $\mathbf{S}$ *un tensore simmetrico. Esistono una base ortonormale di* $\mathcal{V}$ *costituita da autovettori* $\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_n$ *di* $\mathbf{S}$*, e* n *autovalori* $s_1, ..., s_n$ *di* $\mathbf{S}$*,*

$$\mathbf{S}\mathbf{g}_i = s_i \ \mathbf{g}_i, \quad i = 1, ..., n, \tag{2.241}$$

tali che

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{n} s_i \ \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_i. \tag{2.242}$$

In particolare per $n = 3$, si possono distinguere i seguenti casi:

1. $\mathbf{S}$ ha tre autovalori distinti, allora gli spazi caratteristici di $\mathbf{S}$ sono $\mathrm{Span}(\mathbf{g}_1)$, $\mathrm{Span}(\mathbf{g}_2)$ e $\mathrm{Span}(\mathbf{g}_3)$.

2. $\mathbf{S}$ ha due autovalori distinti $s_1 \neq s_2$, $s_2 = s_3$, allora (2.242) si riduce a

$$\mathbf{S} = s_1\mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 + s_2(\mathbf{I} - \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1). \tag{2.243}$$

$\mathrm{Span}(\mathbf{g}_1)$ è lo spazio caratteristico corrispondente a s_1 e $\mathrm{Span}(\mathbf{g}_1)^{\perp}$ è lo spazio caratteristico corrispondente a s_2.

3. $\mathbf{S}$ ha un solo autovalore $s_1 = s_2 = s_3 = s$,

$$\mathbf{S} = s\mathbf{I}, \tag{2.244}$$

in questo caso $\mathcal{V}$ è il solo spazio caratteristico di $\mathbf{S}$.

La relazione (2.242) è la *rappresentazione spettrale* di $\mathbf{S}$.

Se $\mathcal{M}_i$ $(i = 1, ..., k \leq n)$ sono gli spazi caratteristici di $\mathcal{S}$, allora ogni vettore $\mathbf{v}$ può essere scritto nella forma

$$\mathbf{v} = \sum_i \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{v}_i \in \mathcal{M}_i. \tag{2.245}$$

La matrice $[\mathbf{S}]$ delle componenti di $\mathbf{S}$ rispetto alla base $\{\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_n\}$ di autovettori ha la forma

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & . & 0 \\ 0 & s_2 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & s_n \end{bmatrix}. \tag{2.246}$$

Se $\mathbf{S} \in \mathrm{Sym}$, gli elementi dello spettro $\sigma(\mathbf{S})$ di $\mathbf{S}$ possono essere ordinati, $\sigma(\mathbf{S}) = \{s_1, ..., s_n\}$ con $s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_n$. Sia $\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n\}$. Si può provare che la funzione $\sigma : \mathrm{Sym} \to \mathcal{C}$, $\mathbf{S} \longmapsto \sigma(\mathbf{S})$, che ad ogni tensore $\mathbf{S}$ associa il suo spettro è continua.

Per $n = 3$, dal teorema spettrale segue che se $\mathbf{S} \in \mathrm{Sym}$, $\eta(\mathbf{S})$ è caratterizzato completamente dallo spettro $\sigma(\mathbf{S})$, è facile provare che

$$I_1(\mathbf{S}) = s_1 + s_2 + s_3, \tag{2.247}$$

$$I_2(\mathbf{S}) = s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3, \tag{2.248}$$

$$I_2(\mathbf{S}) = s_1 s_2 s_3. \tag{2.249}$$

Se $\mathbf{S} \in \mathrm{Sym}$, la molteplicità di un autovalore s è uguale alla molteplicità di s come radice dell'equazione caratteristica $\det(\mathbf{S} - s\mathbf{I}) = 0$. Da questa osservazione segue la seguente proposizione.

Proposizione 78 *Siano $n = 3$ e $\mathbf{S}, \mathbf{T} \in Sym$ tali che $\eta(\mathbf{S}) = \eta(\mathbf{T})$, allora $\mathbf{S}$ e $\mathbf{T}$ hanno lo stesso spettro, $\sigma(\mathbf{S}) = \sigma(\mathbf{T})$.*

Si osservi che questo risultato è vero solo se $\mathbf{S}$ e $\mathbf{T}$ sono simmetrici. Consideriamo i tensori

$$\mathbf{S} = \mathbf{I} + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{T} = \mathbf{I} + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2,$$

si ha $I_1(\mathbf{S}) = I_1(\mathbf{T}) = 4$, $I_2(\mathbf{S}) = I_2(\mathbf{T}) = 5$, $I_3(\mathbf{S}) = I_3(\mathbf{T}) = 2$, tuttavia $\sigma(\mathbf{S}) = \{1, 1, 2\}$ e $\sigma(\mathbf{T}) = \{1, 2\}$.

Nel caso di un tensore non simmetrico autovettori corrispondenti ad autovalori distinti non sono necessariamente ortogonali. Ad esempio lo spettro del tensore $\mathbf{A} \in \mathrm{Lin}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2, \tag{2.250}$$

è $\sigma(\mathbf{A}) = \{1, 2, 3\}$ ed i corrispondenti autovettori sono $\mathbf{e}_1$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$ e $\mathbf{e}_3$, e si ha $\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = 1$.

Se $n = 3$ è possibile esprimere gli autovalori s_1, s_2, s_3 di un tensore simmetrico $\mathbf{S}$ in funzione dei suoi invarianti principali I_1, I_2, I_3. Si può infatti dimostrare che [11]

$$s_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \chi \cos\theta + \frac{1}{3} I_1, \tag{2.251}$$

$$s_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \chi \cos(\theta + \frac{\pi}{3}) + \frac{1}{3} I_1, \tag{2.252}$$

$$s_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} \chi \cos(\theta - \frac{\pi}{3}) + \frac{1}{3} I_1, \tag{2.253}$$

dove

$$\cos 3\theta = -\frac{3\sqrt{3}\gamma}{2\chi^3}, \tag{2.254}$$

$$\gamma = I_3 - \frac{1}{2} I_1 I_2 + \frac{2}{27} I_1^3, \tag{2.255}$$

$$\chi = \sqrt{\frac{I_1^2 - 3I_2}{3}}. \tag{2.256}$$

È facile verificare che $\chi = 0$ se e solo se gli autovalori di $\mathbf{S}$ sono coincidenti ($s_1 = s_2 = s_3 = I_1/3$). L'angolo θ appartiene all'intervallo $[0, \pi/3]$; se $\theta = 0$, allora $s_2 = s_3$, se invece $\theta = \pi/3$, allora $s_1 = s_2$.

Se $n = 3$ e $\mathbf{S}$ è un tensore simmetrico del tipo

$$\mathbf{S} = \sum_{i,j=1}^{2} S_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) + s\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3,$$

indicando con $[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 \\ s_{12} & s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}$ la matrice delle componenti di $\mathbf{S}$ rispetto alla base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, gli autovalori di $\mathbf{S}$ risultano $s_1 = s$,

$$s_2 = \frac{J_1(\mathbf{S}) - \sqrt{(J_1(\mathbf{S}))^2 - 4J_2(\mathbf{S})}}{2}, \tag{2.257}$$

$$s_3 = \frac{J_1(\mathbf{S}) + \sqrt{(J_1(\mathbf{S}))^2 - 4J_2(\mathbf{S})}}{2}, \tag{2.258}$$

con $J_1(\mathbf{S}) = s_{11} + s_{22}$ e $J_2(\mathbf{S}) = s_{11}s_{22} - s_{12}^2$. In particolare $s_2 \leq s_3$.

Esercizio 79 *Siano $n = 3$, $\mathbf{D} \in Sym$, $\mathbf{Q} \in Orth$. Mostrare che $\sigma(\mathbf{D}) = \sigma(\mathbf{QDQ}^T)$.*

Soluzione. Basta osservare che $\mathbf{QDQ}^T$ è simmetrico e che $\eta(\mathbf{D}) = \eta(\mathbf{QDQ}^T)$, la tesi discende quindi dalla proposizione 78.

Sia ancora $n = 3$. Un tensore antisimmetrico $\mathbf{W} \neq 0$ ha un solo autovalore uguale a 0, le altre due radici del polinomio caratteristico sono due numeri immaginari coniugati. Gli invarianti principali di $\mathbf{W}$ sono

$$I_1(\mathbf{W}) = 0, \quad I_2(\mathbf{W}) = W_{23}^2 + W_{12}^2 + W_{13}^2, \quad I_3(\mathbf{W}) = 0, \tag{2.259}$$

dove W_{ij} sono le componenti di $\mathbf{W}$ rispetto alla base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. L'equazione caratteristica di $\mathbf{W}$ è pertanto

$$a^3 + I_2(\mathbf{W})a = 0, \tag{2.260}$$

dato che $I_2(\mathbf{W}) > 0$, $\mathbf{W}$ ha il solo autovalore $a = 0$. L'autovettore relativo all'autovalore nullo è il vettore assiale $\mathbf{w}$ di $\mathbf{W}$. Infatti, dalla relazione $\mathbf{Wa} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$, si ha che $\mathbf{w}$ è l'unico auovettore di $\mathbf{W}$ e $\mathbf{Ww} = \mathbf{0}$.

Una diade $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ con $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}$ ha un autovalore nullo con molteplicità $n-1$ e lo spazio caratteristico corrispondente è il sottospazio ortogonale a $\mathbf{b}$. $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ ha anche l'autovalore $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ il cui spazio caratteristico è Span$(\mathbf{a})$. In generale questi spazi caratteristici non sono ortogonali, lo sono se e solo se $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{b}$.

Esercizio 80 *Sia $n = 3$. Determinare spettro, spazi caratteristici e rappresentazione spettrale dei seguenti tensori simmetrici*

$$\mathbf{A} = \alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}, \tag{2.261}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$, $||\mathbf{m}|| = ||\mathbf{n}|| = 1$.

Soluzione. Posto $\mathbf{q} = \mathbf{m} \wedge \mathbf{n}$ si ha

$$\mathbf{An} = \alpha \mathbf{n},\ \mathbf{Am} = (\alpha + \beta)\mathbf{m},\ \mathbf{Aq} = \alpha \mathbf{q}, \tag{2.262}$$

quindi $\sigma(\mathbf{A}) = \{\alpha, \alpha, \alpha + \beta\}$, gli spazi caratteristici sono Span$(\mathbf{n}, \mathbf{q})$ e Span$(\mathbf{m})$ e la rappresentazione spettrale di $\mathbf{A}$ è

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \alpha(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}) + (\alpha + \beta)\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \\ &= (\alpha + \beta)\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \alpha(\mathbf{I} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}). \end{aligned} \tag{2.263}$$

Inoltre si ha

$$\mathbf{Bq} = \mathbf{0},\ \mathbf{B}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) = \mathbf{m} + \mathbf{n},\ \mathbf{B}(\mathbf{m} - \mathbf{n}) = \mathbf{n} - \mathbf{m}, \tag{2.264}$$

quindi $\sigma(\mathbf{B}) = \{-1, 0, 1\}$, gli spazi caratteristici sono Span$(\mathbf{m} - \mathbf{n})$, Span$(\mathbf{q})$ e Span$(\mathbf{m} + \mathbf{n})$ e la rappresentazione spettrale di $\mathbf{B}$ è

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{m} + \mathbf{n}) \otimes (\mathbf{m} + \mathbf{n}) - \frac{1}{2}(\mathbf{m} - \mathbf{n}) \otimes (\mathbf{m} - \mathbf{n}).$$

Esercizio 81 *Sia $n = 3$. Un tensore $\mathbf{P}$ è detto proiezione ortogonale se $\mathbf{P} \in$ Sym e $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$.*

(a) *Sia $\mathbf{n} \in \mathcal{V}$, $||\mathbf{n}|| = 1$, mostrare che i seguenti tensori sono proiezioni ortogonali,*

$$\mathbf{0},\ \mathbf{I},\ \mathbf{n} \otimes \mathbf{n},\ \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \tag{2.265}$$

(b) *Mostrare che se $\mathbf{P}$ è una proiezione ortogonale, allora $\mathbf{P}$ è uno dei quattro tensori in (2.265).*

Soluzione. (a) si verifica direttamente che i tensori in (2.265) sono proiezioni ortogonali.

(b) Data $\mathbf{P}$ proiezione ortogonale, calcoliamone gli autovalori. Sia λ un autovalore e $\mathbf{v}$ il relativo autovettore,

$$\lambda\mathbf{v} = \mathbf{P}\mathbf{v} = \mathbf{P}^2\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v},$$

da cui $\lambda = 0$ oppure $\lambda = 1$. Ci sono allora quattro possibilità,

- $\sigma(\mathbf{P}) = \{0,0,0\}$, $\mathbf{P} = \mathbf{0}$,
- $\sigma(\mathbf{P}) = \{1,1,1\}$, $\mathbf{P} = \mathbf{I}$,
- $\sigma(\mathbf{P}) = \{0,1,1\}$, $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}$, con $\mathbf{n}$ autovettore relativo all'autovalore 0.
- $\sigma(\mathbf{P}) = \{0,0,1\}$, $\mathbf{P} = \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}$, con $\mathbf{n}$ autovettore relativo all'autovalore 1.

Esercizio 82 *Sia $n = 3$. Dato $\mathbf{R} \in Orth^+$ sia $\mathbf{e} \in \mathcal{V}$ non nullo tale che $\mathbf{R}\mathbf{e} = \mathbf{e}$. Indicato con $\mathbf{W}$ il tensore antisimmetrico associato ad $\mathbf{e}$, dimostrare che $\mathbf{R}$ ha la seguente rappresentazione*

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin\theta\mathbf{W} + (1-\cos\theta)\mathbf{W}^2, \tag{2.266}$$

con $\theta \in (-\pi, \pi)$.

Soluzione. Dalla proposizione 66 si ricava che 1 è un autovalore di $\mathbf{R}$. Indicato con $\mathbf{e} \in \mathcal{V}$ l'autovettore corrispondente $\mathbf{R}\mathbf{e} = \mathbf{e}$, sia $\mathbf{W}$ il tensore antisimmetrico tale che $\mathbf{W}\mathbf{v} = \mathbf{e}\wedge\mathbf{v}$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Supponiamo che $\mathbf{R} = \mathbf{I} + \alpha\mathbf{W} + \beta\mathbf{W}^2$,con α e β da determinare in modo tale che $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$. Per ogni vettore $\mathbf{v}$ si ha

$$\mathbf{v} = \xi\mathbf{e} + \mathbf{v}_0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{v}_0 \in \mathrm{Span}(\mathbf{e})^\perp,$$

tenuto conto del fatto che $\mathbf{R}\mathbf{e} = \mathbf{e}$, si devono determinare α e β in modo tale che

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0 \quad \text{per ogni} \quad \mathbf{v}_0 \in \mathrm{Span}(\mathbf{e})^\perp. \tag{2.267}$$

Tenendo conto del fatto che $\mathbf{W}\mathbf{v}_0 = \mathbf{e}\wedge\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{W}^2\mathbf{v}_0 = -\mathbf{v}_0$, si ha

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T\mathbf{v}_0 = (1 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\beta)\mathbf{v}_0$$

e da (2.267) si ricava che α e β devono soddisfare

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\beta = 0 \tag{2.268}$$

da cui si ricava

$$\alpha = \sin\theta, \quad \beta = 1 - \cos\theta. \tag{2.269}$$

Se si conosce l'azione di $\mathbf{R}$ su un vettore $\overline{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}$, $\overline{\mathbf{w}} = \mathbf{R}\overline{\mathbf{v}}$, è facile provare che

$$\theta = arc\cos(v_1w_1 + v_2w_2), \tag{2.270}$$

dove v_1, v_2 e w_1, w_2 sono le componenti di $\overline{\mathbf{v}}$ e $\overline{\mathbf{w}}$ rispetto alla base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}\}$ con $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}$.

La formula di rappresentazione (2.266) prova che ogni rotazione è completamente caratterizzata da un asse e da un angolo.

Esercizio 83 *Sia $n = 3$. Provare che $\mathbf{A} \in$ Lin commuta con ogni tensore $\mathbf{W} \in$ Skw se e solo se $\mathbf{A} = \omega\mathbf{I}$.*

Soluzione. Supponiamo che

$$\mathbf{AW} = \mathbf{WA} \quad \text{per ogni } \mathbf{W} \in \text{Skw}. \tag{2.271}$$

Fissato $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$, sia $\mathbf{W}$ il tensore antisimmetrico associato a $\mathbf{w}$, si ha

$$\mathbf{W}(\mathbf{Aw}) = \mathbf{A}(\mathbf{Ww}) = \mathbf{A}(\mathbf{w} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{0},$$

quindi $\mathbf{Aw}$ appartiene allo spazio caratteristico dell'autovalore nullo di $\mathbf{W}$,

$$\mathbf{Aw} = \lambda\mathbf{w}, \quad \text{con } \lambda = \widetilde{\lambda}(\mathbf{w}) \in \mathbb{R}. \tag{2.272}$$

Siano $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ due vettori linearmente indipendenti di $\mathcal{V}$, in vista della linearità di $\mathbf{A}$ si ha

$$\begin{aligned}&\widetilde{\lambda}(\mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + \widetilde{\lambda}(\mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 = \mathbf{A}\mathbf{w}_1 + \mathbf{A}\mathbf{w}_2 = \\ &\mathbf{A}(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \widetilde{\lambda}(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2),\end{aligned} \tag{2.273}$$

da cui si ricava

$$[\widetilde{\lambda}(\mathbf{w}_1) - \widetilde{\lambda}(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)]\mathbf{w}_1 + [\widetilde{\lambda}(\mathbf{w}_2) - \widetilde{\lambda}(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)]\mathbf{w}_2 = \mathbf{0}, \tag{2.274}$$

e quindi $\widetilde{\lambda}(\mathbf{w}_1) = \widetilde{\lambda}(\mathbf{w}_2) = \omega$.

Proposizione 84 *Un tensore $\mathbf{S} \in$ Sym commuta con ogni tensore $\mathbf{Q} \in$ Orth$^+$ se e solo se $\mathbf{S} = \omega\mathbf{I}$.*

Dimostrazione. Supponiamo che

$$\mathbf{SQ} = \mathbf{QS} \quad \text{per ogni } \mathbf{Q} \in \text{Orth}^+$$

e che $\mathbf{S}$ abbia due autovalori distinti ω e λ e siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ i relativi autovettori ortogonali di norma 1. Sia $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{f}_3, ..., \mathbf{f}_n\}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}$, poniamo

$$\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} + \sum_{i=3}^{n} \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}_i,$$

si ha che $\overline{\mathbf{Q}}\mathbf{u} = \mathbf{v}$ e $\overline{\mathbf{Q}}$ $\in$Orth$^+$ in quanto trasforma la base ortonormale $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{f}_3, ..., \mathbf{f}_n\}$ nella base ortonormale $\{\mathbf{v}, -\mathbf{u}, \mathbf{f}_3, ..., \mathbf{f}_n\}$ e $\det \overline{\mathbf{Q}} = 1$. Si ha allora

$$\overline{\mathbf{Q}}\mathbf{Su} = \omega\overline{\mathbf{Q}}\mathbf{u} = \omega\mathbf{v}, \quad \overline{\mathbf{Q}}\mathbf{Su} = \mathbf{S}\overline{\mathbf{Q}}\mathbf{u} = \mathbf{Sv} = \lambda\mathbf{v},$$

da cui si ottiene $(\omega - \lambda)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e quindi $\omega = \lambda$. ■

Teorema 85 *(Teorema di commutazione). Siano $\mathbf{S}$, $\mathbf{A} \in$ Lin tali che $\mathbf{SA} = \mathbf{AS}$. Allora se $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ appartiene ad uno spazio caratteristico di $\mathbf{S}$, $\mathbf{Av}$ appartiene allo stesso spazio caratteristico. Viceversa se $\mathbf{A}$ lascia invariati gli spazi caratteristici di un tensore $\mathbf{S} \in$ Sym, allora $\mathbf{S}$ e $\mathbf{A}$ commutano.*

Dimostrazione. Se $\mathbf{S}$ e $\mathbf{A}$ commutano, sia $\mathbf{v}$ un autovettore di $\mathbf{S}$ relativo all'autovalore ω, $\mathbf{Sv} = \omega\mathbf{v}$, allora

$$\mathbf{S}(\mathbf{Av}) = \mathbf{ASv} = \omega\mathbf{Av},$$

cioè $\mathbf{Av}$ appartiene allo spazio caratteristico di $\mathbf{S}$ corrispondente a ω.

Viceversa siano $\mathcal{M}_i$, $i = 1, ..., k$ gli spazi caratteristici di $\mathbf{S}$. Ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ ha la rappresentazione (2.245) e per ipotesi $\mathbf{Av}_i \in \mathcal{M}_i$ per ogni i, quindi

$$\mathbf{SAv}_i = \omega_i\mathbf{Av}_i = \mathbf{A}(\omega_i\mathbf{v}_i) = \mathbf{ASv}_i,$$

da cui discende che $\mathbf{SAv} = \mathbf{ASv}$. ■

I tensori $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B} \in \mathrm{Sym}$ si dicono *coassiali* se hanno gli stessi autovettori.

Proposizione 86 *I tensori* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in$ *Sym commutano se e solo se sono coassiali.*

Dimostrazione. Assumiamo per semplicità $n = 3$. Supponiamo che $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ siano coassiali, sia $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ una base comune di autovettori

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} a_i \ \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_i, \quad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^{3} b_i \ \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_i. \tag{2.275}$$

Allora, in vista di (2.32) si ha $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Viceversa, assumiamo che $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, possiamo distinguere i seguenti casi.

(i) Se $\mathbf{A} = a\mathbf{I}$, la coassialià è evidente.

(ii) Se $\mathbf{A}$ ha tre autovalori distinti a_1, a_2, a_3, consideriamo la sua rappresentazione spettrale

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} a_i \ \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_i, \tag{2.276}$$

e poniamo

$$\mathbf{B} = \sum_{i,j=1}^{3} B_{ij} \ \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j. \tag{2.277}$$

Allora, si ha

$$\mathbf{0} = \mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{3} a_i B_{ij} \ (\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j - \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_i); \tag{2.278}$$

poiché i tensori antismmetrici $\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j - \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_i$ sono linearmente indipendenti, da (2.278) si ottiene

$$(a_1 - a_2)B_{12} = 0, \tag{2.279}$$

$$(a_1 - a_3)B_{13} = 0, \tag{2.280}$$

$$(a_2 - a_3)B_{23} = 0, \tag{2.281}$$

da cui segue che $B_{12} = B_{13} = B_{23} = 0$, così $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ sono anche autovettori di $\mathbf{B}$.

(iii) Consideriamo ora il caso in cui $\mathbf{A}$ ha due autovalori distinti $a_1 \neq a_2 = a_3$,

$$\mathbf{A} = a_1 \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 + a_2(\mathbf{I} - \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1), \quad \mathbf{B} = \sum_{i,j=1}^{3} B_{ij}\ \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j, \tag{2.282}$$

con $\mathbf{g}_2$ e $\mathbf{g}_3$ appartenenti a $\mathrm{Span}(\mathbf{g}_1)^{\perp}$, il sottospazio di $\mathcal{V}$ ortogonale al sottospazio generato da $\mathbf{g}_1$. Considerando ancora una volta la relazione $\mathbf{0} = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ si ottiene che $B_{12} = B_{13} = 0$, quindi $\mathbf{B}\mathbf{g}_1 = b_1 \mathbf{g}_1$. Siano $\mathbf{f}_2$ e $\mathbf{f}_3$ gli altri due autovettori di $\mathbf{B}$ tali che $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ sia una base ortonormale di $\mathcal{V}$, si conclude che $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ è una base di autovettori per entrambi i tensori $\mathbf{B}$ ed $\mathbf{A}$. ■

Si osserva che Sym^+ (Sym^-) è chiuso in Sym perché è l'immagine inversa del sottoinsieme chiuso $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3\}$ ($\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 0\}$) di $\mathbb{R}^3$ tramite la funzione continua che ad ogni tensore associa il suo spettro.

Nella seguente semplice proposizione sono raccolti alcuni risultati che saranno utili in seguito.

Proposizione 87 *(1) Sia* $\mathbf{A} \in$ *Sym*$^-$ *(Sym*$^+$*), se esiste* $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ *tale che* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}\mathbf{u} = 0$, *allora* $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(2) Siano $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in$ *Sym. Se* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \geq 0$ *per ogni* $\mathbf{B} \in$ *Sym*$^+$ *(Sym*$^-$*) allora* $\mathbf{A} \in$ *Sym*$^+$ *(Sym*$^-$*).*

(3) Sia $\mathbf{A} \in$ *Sym*$^+$*. Per ogni* $\mathbf{B} \in$ *Sym*$^+$ *(Sym*$^-$*) si ha* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \geq 0$ *(*≤ 0*).*

(4) Siano $\mathbf{A} \in$ *Sym*$^+$, $\mathbf{B} \in$ *Sym*$^+$ *(Sym*$^-$*). Se* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ *allora* $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{0}$.

Dimostrazione. (1) Sia $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{q}_i \otimes \mathbf{q}_i$ con $a_i \leq 0$ ($a_i \geq 0$) la rappresentazione spettrale di $\mathbf{A}$. Si ha

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i (\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{u}) \mathbf{q}_i,$$

pertanto

$$0 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i (\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{u})^2$$

se e solo se

$$a_i (\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{u})^2 = 0, \quad i = 1, ..., n \tag{2.283}$$

in quanto gli a_i sono non positivi (non negativi). (2.283) è verificata se e solo se

$$a_i (\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{u}) = 0, \quad i = 1, ..., n,$$

che è equivalente alla condizione $\mathbf{Au} = \mathbf{0}$.

(2) Supponiamo che $\mathbf{A}$ non appartenga a Sym^+ (Sym^-), allora $\mathbf{A}$ ha un autovalore $\lambda < 0$ ($\lambda > 0$), $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$. Il tensore $\overline{\mathbf{B}} = -\lambda\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}$ appartiene a Sym^+ (Sym^-) e

$$0 \leq \mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{B}} = -\lambda tr(\mathbf{Av}\otimes\mathbf{v}) = -\lambda^2 < 0.$$

(3) Sia

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{q}_i \otimes \mathbf{q}_i \quad \text{con } a_i \geq 0 \tag{2.284}$$

la rappresentazione spettrale di $\mathbf{A}$. Sia inoltre

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{n} b_i \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_i \quad \text{con } b_i \geq 0 \ \ (b_i \leq 0) \tag{2.285}$$

la rappresentazione spettrale di $\mathbf{B}$. Si ha

$$\mathbf{AB} = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j (\mathbf{q}_i \otimes \mathbf{q}_i)(\mathbf{p}_j \otimes \mathbf{p}_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j (\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{p}_j)(\mathbf{q}_i \otimes \mathbf{p}_j), \tag{2.286}$$

e

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j (\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{p}_j)^2 \geq 0 \ \ (\leq 0). \tag{2.287}$$

(4) Siano (2.284) e (2.285) le rappresentazioni spettrali di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, rispettivamente. In vista di (2.287) la condizione $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$ è equivalente alle condizioni

$$a_i b_j (\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{p}_j) = 0, \quad i,j = 1,...,n,$$

quindi da (2.286) si ricava che $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, analogamente si dimostra che $\mathbf{BA} = \mathbf{0}$.
■

Esercizio 88 *Sia $n = 3$. Per ogni $\mathbf{E}$ ∈Sym, determinare la proiezione $P_{Sym^-}(\mathbf{E})$ di $\mathbf{E}$ su Sym$^-$.*

Soluzione. In vista del teorema di minima norma si deve determinare $\mathbf{T} = P_{\mathrm{Sym}^-}(\mathbf{E})$ $\in\mathrm{Sym}^-$ che soddisfa la diseguaglianza variazionale

$$(\mathbf{E}-\mathbf{T})\cdot(\mathbf{T}^* - \mathbf{T}) \leq 0, \quad \text{per ogni } \mathbf{T}^* \in \mathrm{Sym}^-. \tag{2.288}$$

Cominciamo col dimostrare che $\mathbf{T} \in\mathrm{Sym}^-$ soddisfa (2.288) se e solo se

$$(\mathbf{E}-\mathbf{T})\cdot\mathbf{T} = 0, \quad \mathbf{E}-\mathbf{T} \in \mathrm{Sym}^+. \tag{2.289}$$

Se le condizioni (2.289) sono soddisfatte, allora dal punto (3) della proposizione 87, discende (2.288). Viceversa supponiamo che valga la diseguaglianza (2.288), allora per $\mathbf{T}^* = \mathbf{0}$ e $\mathbf{T}^* = 2\mathbf{T}$ si ottengono rispettivamente le diseguaglianze $(\mathbf{E}-\mathbf{T})\cdot\mathbf{T} \geq 0$ e $(\mathbf{E}-\mathbf{T})\cdot\mathbf{T} \leq 0$, da cui discende $(2.289)_1$. Per ogni $\mathbf{T}^{**} \in\mathrm{Sym}^-$ il tensore $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}^{**} + \mathbf{T} \in\mathrm{Sym}^-$ e (2.289) è equivalente alla diseguaglianza

$(\mathbf{E} - \mathbf{T}) \cdot \mathbf{T}^{**} \leq 0, \quad$ per ogni $\mathbf{T}^{**} \in$Sym$^-$, da cui, in vista del punto (2) della proposizione 87 si ricava $(2.289)_2$. In definitiva risolvere la diseguaglianza (2.288) è equivalente a determinare $\mathbf{T} \in$Sym tale che

$$\begin{cases} \mathbf{T} \in \text{Sym}^-, \\ \mathbf{E} - \mathbf{T} \in \text{Sym}^+, \\ (\mathbf{E} - \mathbf{T}) \cdot \mathbf{T} = 0. \end{cases} \tag{2.290}$$

In virtù del punto (4) della proposizione 87 $\mathbf{T}$ e $\mathbf{E} - \mathbf{T}$ commutano, $(\mathbf{E} - \mathbf{T})\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{E} - \mathbf{T}) = \mathbf{0}$, quindi sono coassiali. Allora se $\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{3} e_i \mathbf{q}_i \otimes \mathbf{q}_i$ con $e_1 \leq e_2 \leq e_3$ è la rappresentazione spettrale di $\mathbf{E}$, risolvere il sistema (2.290) è equivalente a risolvere il seguente sistema di complementarità lineare,

Dati $e_1 \leq e_2 \leq e_3$ trovare t_1, t_2, t_3 tali che

$$\begin{cases} t_1 \leq 0, \\ t_2 \leq 0, \\ t_3 \leq 0, \\ e_1 - t_1 \geq 0, \\ e_2 - t_2 \geq 0, \\ e_3 - t_3 \geq 0, \\ t_1(e_1 - t_1) = 0, \\ t_2(e_2 - t_2) = 0, \\ t_3(e_3 - t_3) = 0. \end{cases} \tag{2.291}$$

Definiti i seguenti sottoinsiemi di Sym,

$$\mathfrak{R}_1 = \{\mathbf{E} \in \text{Sym} \mid e_1 \leq e_2 \leq e_3 \leq 0\}, \tag{2.292}$$

$$\mathfrak{R}_2 = \{\mathbf{E} \in \text{Sym} \mid 0 \leq e_1 \leq e_2 \leq e_3\}, \tag{2.293}$$

$$\mathfrak{R}_3 = \{\mathbf{E} \in \text{Sym} \mid e_1 \leq 0 \leq e_2 \leq e_3\}, \tag{2.294}$$

$$\mathfrak{R}_4 = \{\mathbf{E} \in \text{Sym} \mid e_1 \leq e_2 \leq 0 \leq e_3\}, \tag{2.295}$$

la soluzione di (2.291) è data dal seguente schema,

$$\mathbf{E} \in \mathfrak{R}_1 \Longrightarrow t_1 = e_1, t_2 = e_2, t_3 = e_3, \tag{2.296}$$

$$\mathbf{E} \in \mathfrak{R}_2 \Longrightarrow t_1 = t_2 = t_3 = 0, \tag{2.297}$$

$$\mathbf{E} \in \mathfrak{R}_3 \Longrightarrow t_1 = e_1, t_2 = 0, t_3 = 0, \tag{2.298}$$

$$\mathbf{E} \in \mathfrak{R}_4 \Longrightarrow t_1 = e_1, t_2 = e_2, t_3 = 0. \tag{2.299}$$

Pertanto la soluzione della diseguaglianza variazionale (2.288) è data da

$$\mathbf{E} \in \mathfrak{R}_1 \Longrightarrow \mathbf{T} = \mathbf{E}, \tag{2.300}$$

$$\mathbf{E} \in \mathfrak{R}_2 \Longrightarrow \mathbf{T} = \mathbf{0}, \tag{2.301}$$

$$\mathbf{E} \in \mathfrak{R}_3 \Longrightarrow \mathbf{T} = e_1 \mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_1, \tag{2.302}$$

$$\mathbf{E} \in \mathfrak{R}_4 \Longrightarrow \mathbf{T} = e_1 \mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_1 + e_2 \mathbf{q}_2 \otimes \mathbf{q}_2. \tag{2.303}$$

2.14 Teorema della radice quadrata, teorema di decomposizione polare

Teorema 89 *(Teorema della radice quadrata) Sia* $\mathbf{C} \in$ *Psym, allora esiste un unico tensore* $\mathbf{U} \in$ *Psym tale che*

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{C}. \tag{2.304}$$

$\mathbf{U}$ *è indicato con* $\sqrt{\mathbf{C}}$.

Dimostrazione. Sia

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_i \tag{2.305}$$

la rappresentazione spettrale di $\mathbf{C}$, con $c_i > 0$. Definiamo $\mathbf{U} \in$ Psym nel modo seguente

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{c_i} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_i, \tag{2.306}$$

evidentemente vale (2.304). Per dimostrare l'unicità di $\mathbf{U}$ supponiamo che esistano $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2 \in$ Psym tali che $\mathbf{U}_1^2 = \mathbf{U}_2^2 = \mathbf{C}$. Per ogni $i = 1, ..., n$ si ha

$$\mathbf{0} = (\mathbf{U}_1^2 - c_i \mathbf{I})\mathbf{g}_i = (\mathbf{U}_1 + \sqrt{c_i}\mathbf{I})(\mathbf{U}_1 - \sqrt{c_i}\mathbf{I})\mathbf{g}_i, \tag{2.307}$$

detto $\mathbf{v}_i = (\mathbf{U}_1 - \sqrt{c_i}\mathbf{I})\mathbf{g}_i$, da (2.307) si ha che $\mathbf{U}_1\mathbf{v}_i = -\sqrt{c_i}\mathbf{v}_i$, quindi $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ perché gli autovalori di $\mathbf{U}_1$ sono positivi. Si ottiene quindi che $\mathbf{U}_1\mathbf{g}_i = \sqrt{c_i}\mathbf{g}_i$; analogamente si dimostra che $\mathbf{U}_2\mathbf{g}_i = \sqrt{c_i}\mathbf{g}_i$, quindi $\mathbf{U}_1\mathbf{g}_i = \mathbf{U}_2\mathbf{g}_i$ per ogni $i = 1, ..., n$ da cui la tesi. ∎

Teorema 90 *(Teorema di decomposizione polare). Sia* $\mathbf{F} \in Lin^+$, *esistono* $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in$ *Psym e* $\mathbf{R} \in Orth^+$ *tali che*

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}. \tag{2.308}$$

Inoltre tale decomposizione è unica, infatti

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T\mathbf{F}}, \quad \mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{F}\mathbf{F}^T}. \tag{2.309}$$

$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ *si chiama decomposizione polare destra di* $\mathbf{F}$, $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$ *si chiama decomposizione polare sinistra di* $\mathbf{F}$.

Dimostrazione. Innanzi tutto dimostriamo che $\mathbf{F}^T\mathbf{F}$ e $\mathbf{F}\mathbf{F}^T$ appartengono a Psym; evidentemente $\mathbf{F}^T\mathbf{F}$,$\mathbf{F}\mathbf{F}^T \in$ Sym, inoltre

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{v} = \mathbf{F}\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}\mathbf{v} \geq 0 \;\; \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{V},$$

e $\mathbf{F}\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}\mathbf{v} = 0$ se e solo se $\mathbf{F}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ossia se e solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ in quanto $\mathbf{F}$ è invertibile. Analogamente si dimostra che $\mathbf{F}\mathbf{F}^T \in$ Psym. Quindi $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ in (2.309) sono ben definiti. Dimostriamo quindi l'esistenza della decomposizione polare. Definiamo $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T\mathbf{F}} \in \mathrm{Psym}$ e poniamo $\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}$, dobbiamo dimostrare che $\mathbf{R} \in \mathrm{Orth}^+$. Dato che $\det \mathbf{F} > 0$ e $\det \mathbf{U} > 0$ si ha anche che $\det \mathbf{R} > 0$, inoltre

$$\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{I}, \tag{2.310}$$

e

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{F}^T = \mathbf{F}(\mathbf{U}^2)^{-1}\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^T = \mathbf{I}. \tag{2.311}$$

Finalmente definiamo $\mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T$, $\mathbf{V} \in \mathrm{Psym}$; allora

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T)\mathbf{v} = \mathbf{R}^T\mathbf{v} \cdot \mathbf{U}\mathbf{R}^{\mathbf{T}}\mathbf{v} > 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \neq \mathbf{0},$$

in quanto $\mathbf{U} \in \mathrm{Psym}$. Si ha inoltre

$$\mathbf{V}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{F}. \tag{2.312}$$

Resta ora da dimostrare l'unicità della decomposizione polare. Sia $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ la decomposizione polare destra di $\mathbf{F}$, dato che $\mathbf{R} \in \mathrm{Orth}^+$ si ha

$$\mathbf{F}^T\mathbf{F} = \mathbf{U}^2. \tag{2.313}$$

In virtù del teorema della radice quadrata, esiste un unico $\mathbf{U} \in \mathrm{Psym}$ che soddisfa (2.313), per cui $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T\mathbf{F}}$ e $\mathbf{U}$ è unico. Dato che $\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}$, anche $\mathbf{R}$ è unico. Analogamente si dimostra l'unicità della decomposizione $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$.e questo conclude la dimostrazione. ■

Si osservi che in generale $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ non coincidono, se però $\mathbf{F} \in \mathrm{Lin}^+ \cap \mathrm{Sym}$, allora dalle relazioni $\mathbf{F}^2 = \mathbf{U}^2 = \mathbf{V}^2$ segue che $\mathbf{U} = \mathbf{V}$ e quindi $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{R}$.

Per $n = 3$ gli elementi $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ della decomposizione polare di $\mathbf{F} \in \mathrm{Lin}^+$, essendo legati dalla relazione $\mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T$, in virtù dell'esercizio 79 hanno lo stesso spettro.

Esercizio 91 *Sia $n = 3$. Dati $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ vettori unitari ortogonali, posto $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ sia $\mathbf{W} = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2$ il tensore antisimmetrico avente $\mathbf{e}_3$ come vettore assiale. Calcolare la decomposizione polare destra del tensore $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{W}$.*

Soluzione. Cominciamo con osservare che

$$\mathbf{F}\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{F}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1,$$

$$\mathbf{F}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3,$$

e che

$$\det \mathbf{F} = \mathbf{F}\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{F}\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{F}\mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \cdot (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = 2,$$

pertanto $\mathbf{F} \in \mathrm{Lin}^+$. Calcoliamo adesso la rappresentazione spettrale di $\mathbf{F}^T\mathbf{F} = \mathbf{I} - \mathbf{W}^2$. Dalle relazioni

$$\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{e}_1 = 2\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{e}_2 = 2\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3,$$

si ricava che

$$\mathbf{F}^T\mathbf{F} = \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 + 2(\mathbf{I} - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3),$$

da cui si ottiene l'espressione di $\mathbf{U}$,

$$\mathbf{U} = \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 + \sqrt{2}(\mathbf{I} - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3),$$

e infine

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{I} - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{W}.$$

Esercizio 92 *Siano $n = 3$ e $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}$. Dato il tensore $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \gamma\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1$, $\gamma \in \mathbb{R}$, se ne calcoli la decomposizione polare $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$.*

Soluzione. Se $\gamma = 0$, allora $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{V} = \mathbf{R} = \mathbf{I}$. Sia allora $\gamma \neq 0$. Gli autovalori del tensore $\mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{I} + \gamma(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + \gamma^2\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$ sono

$$\varphi_1 = \frac{2 + \gamma^2 - \sqrt{2\gamma^2 + \gamma^4}}{2}, \tag{2.314}$$

$$\varphi_2 = \frac{2 + \gamma^2 + \sqrt{2\gamma^2 + \gamma^4}}{2}, \tag{2.315}$$

$$\varphi_3 = 1, \tag{2.316}$$

ed i relativi autovettori sono

$$\mathbf{q}_1 = \frac{1}{n_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\varphi_1 - 1}{\gamma n_1}\mathbf{e}_2, \tag{2.317}$$

$$\mathbf{q}_2 = \frac{1}{n_2}\mathbf{e}_1 + \frac{\varphi_2 - 1}{\gamma n_2}\mathbf{e}_2, \tag{2.318}$$

e

$$\mathbf{q}_3 = \mathbf{e}_3 \tag{2.319}$$

con

$$n_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\varphi_i - 1}{\gamma}\right)^2}, \quad i = 1, 2. \tag{2.320}$$

Si ha allora

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= \sqrt{\varphi_1}\mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_1 + \sqrt{\varphi_2}\mathbf{q}_2 \otimes \mathbf{q}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \\ &= \frac{2}{\sqrt{4 + \gamma^2}}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \frac{\gamma}{\sqrt{4 + \gamma^2}}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) \\ &\quad + \frac{2 + \gamma^2}{\sqrt{4 + \gamma^2}}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3,\end{aligned} \tag{2.321}$$

e

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{F} = [(\varphi_1)^{-2}\mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_1 + (\varphi_2)^{-2}\mathbf{q}_2 \otimes \mathbf{q}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3]\,[\mathbf{I} + \gamma\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4+\gamma^2}}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{4+\gamma^2}}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$$
$$+\frac{\gamma}{\sqrt{4+\gamma^2}}(-\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3. \tag{2.322}$$

Esercizio 93 *Siano $n = 3$ e $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}$. Calcolare la decomposizione polare $\mathbf{F} = \mathbf{VR}$ del tensore*

$$\mathbf{F} = \delta\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \alpha(\mathbf{I} - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) + \alpha\gamma\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, \tag{2.323}$$

con $\alpha, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \alpha > 0, \delta > 0$.

Esercizio 94 *Sia $n = 3$. Data $\mathbf{F} \in Lin^+$, siano $\mathbf{F} = \mathbf{RU} = \mathbf{VR}$, $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in Psym$ e $\mathbf{R} \in Orth^+$ le decomposizioni polari di $\mathbf{F}$. Dimostrare che $\mathbf{R}$ è la rotazione più vicina a $\mathbf{F}$, nel senso che*

$$||\mathbf{F} - \mathbf{R}|| < ||\mathbf{F} - \mathbf{Q}||, \quad \textit{per ogni } \mathbf{Q} \in Orth^+, \ \mathbf{Q} \neq \mathbf{R}. \tag{2.324}$$

Soluzione. Per ogni $\mathbf{Q} \in$Orth$^+$, $\mathbf{Q} \neq \mathbf{R}$, si ha

$$||\mathbf{F} - \mathbf{Q}||^2 = tr(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{Q}^T\mathbf{F} - \mathbf{F}^T\mathbf{Q} + \mathbf{I}) = ||\mathbf{F}||^2 + 3 - 2\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}, \tag{2.325}$$

$$||\mathbf{F} - \mathbf{R}||^2 = ||\mathbf{F}||^2 + 3 - 2\mathbf{U} \cdot \mathbf{I}, \tag{2.326}$$

da cui si ottiene

$$||\mathbf{F} - \mathbf{Q}||^2 - ||\mathbf{F} - \mathbf{R}||^2 = 2(\mathbf{U} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}). \tag{2.327}$$

Dato che

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} = tr(\mathbf{F}^T\mathbf{Q}) = tr(\mathbf{U}\mathbf{R}^T\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{U}, \tag{2.328}$$

con $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{R}^T\mathbf{Q} \in$Orth$^+, \mathbf{Q}_0 \neq \mathbf{I}$, si ha

$$||\mathbf{F} - \mathbf{Q}||^2 - ||\mathbf{F} - \mathbf{R}||^2 = 2\mathbf{U} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_0), \tag{2.329}$$

inoltre

$$tr[(\mathbf{Q}_0 - \mathbf{I})^T\mathbf{U}(\mathbf{Q}_0 - \mathbf{I})] = \mathbf{U} \cdot [(\mathbf{Q}_0 - \mathbf{I})(\mathbf{Q}_0 - \mathbf{I})^T] =$$
$$\mathbf{U} \cdot (2\mathbf{I} - \mathbf{Q}_0 - \mathbf{Q}_0^T) = 2\mathbf{U} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_0). \tag{2.330}$$

Dato che $(\mathbf{Q}_0 - \mathbf{I})^T\mathbf{U}(\mathbf{Q}_0 - \mathbf{I}) \in$ Psym, da (2.330) segue che $2\mathbf{U} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_0) > 0$, da cui la tesi.

2.15 Teorema di Cayley-Hamilton

Teorema 95 *(Teorema di Cayley-Hamilton). Sia $n = 3$. Dato $\mathbf{A} \in Lin$ si ha*

$$\mathbf{A}^3 - I_1(\mathbf{A})\mathbf{A}^2 + I_2(\mathbf{A})\mathbf{A} - I_3(\mathbf{A})\mathbf{I} = \mathbf{0}. \tag{2.331}$$

Dimostrazione. Dimostreremo questo teorema nel caso in cui $\mathbf{A}$ abbia tre autovettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ linearmente indipendenti

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = a_i \mathbf{v}_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.332}$$

Poiché da (2.332) discende che

$$\mathbf{A}^j \mathbf{v}_i = a_i^j \mathbf{v}_i, \quad i = 1, 2, 3, \; j = 1, 2, 3, \tag{2.333}$$

in vista di (2.240) si ha

$$\begin{gathered}
[\mathbf{A}^3 - I_1(\mathbf{A})\mathbf{A}^2 + I_2(\mathbf{A})\mathbf{A} - I_3(\mathbf{A})\mathbf{I}]\mathbf{v}_i = \\
a_i^3 \mathbf{v}_i - I_1(\mathbf{A}) a_i^2 \mathbf{v}_i + I_2(\mathbf{A}) a_i \mathbf{v}_i - I_3(\mathbf{A})\mathbf{v}_i = \\
[a_i^3 - I_1(\mathbf{A}) a_i^2 + I_2(\mathbf{A}) a_i - I_3(\mathbf{A})]\mathbf{v}_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.
\end{gathered} \tag{2.334}$$

Dato che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti, da (2.334) discende (2.331).
■

Tutti i tensori soddisfano l'equazione di terzo grado (2.331), ma non è detto che questa sia l'unica equazione che un tensore può soddisfare. Può accadere infatti che un tensore soddisfi un'equazione di grado più basso, ad esempio se $\mathbf{P}$ è una proiezione ortogonale, allora $\mathbf{P}^2 - \mathbf{P} = \mathbf{0}$.

Esercizio 96 *Sia $n = 3$. Dato $\mathbf{A} \in Lin$, dimostrare che*

$$\det \mathbf{A} = \frac{1}{6}[(tr\mathbf{A})^3 - 3(tr\mathbf{A})tr(\mathbf{A}^2) + 2tr(\mathbf{A}^3)]. \tag{2.335}$$

Soluzione. Si tenga conto del fatto che dal teorema di Cayley-Hamilton discende che

$$tr(\mathbf{A}^3) = I_1(\mathbf{A})tr(\mathbf{A}^2) - I_2(\mathbf{A})I_1(\mathbf{A}) + 3I_3(\mathbf{A}).$$

Esercizio 97 *Sia $n = 3$. Mostrare che se $\mathbf{A} \in Lin$ è invertibile, allora*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{I_3(\mathbf{A})}[\mathbf{A}^2 - I_1(\mathbf{A})\mathbf{A} + I_2(\mathbf{A})\mathbf{I}], \tag{2.336}$$

e dedurre che per ogni intero r, $\mathbf{A}^r$ è esprimibile come combinazione di $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2$ con coefficienti che dipendono dagli invarianti principali di $\mathbf{A}$.

Soluzione. Per il teorema di Cayley-Hamilton si ha

$$\mathbf{A}^3 - I_1(\mathbf{A})\mathbf{A}^2 + I_2(\mathbf{A})\mathbf{A} = I_3(\mathbf{A})\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1},$$

premoltiplicando per $\mathbf{A}^{-1}$ si ha la tesi.

Esercizio 98 *Sia $n = 3$. Mostrare che se $\mathbf{A} \in Lin$ è invertibile, allora*

$$I_2(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A} \; I_1(\mathbf{A}^{-1}). \tag{2.337}$$

Soluzione. Calcolando la traccia di entrambi i membri di (2.336) si ha la tesi.

Esercizio 99 *Sia* $n = 3$*. Sia* $\mathbf{A} \in Lin$*, invertibile. Dall'equazione* $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ *dedurre l'equazione* $\det(\mathbf{A}^{-1} - \lambda^{-1}\mathbf{I}) = 0$ *e quindi*

$$\lambda^{-3} - I_1(\mathbf{A}^{-1})\lambda^{-2} + I_2(\mathbf{A}^{-1})\lambda^{-1} - I_3(\mathbf{A}^{-1}) = 0. \tag{2.338}$$

Mostrare inoltre che

(a) $I_1(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{I_2(\mathbf{A})}{I_3(\mathbf{A})}$,

(b) $I_2(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{I_1(\mathbf{A})}{I_3(\mathbf{A})}$,

(c) $I_3(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{I_3(\mathbf{A})}$.

Soluzione. Si ha

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det[\mathbf{A}(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{A}^{-1})] = \det\mathbf{A}\ \det[-\lambda(\mathbf{A}^{-1} - \lambda^{-1}\mathbf{I})] =$$
$$-\lambda^3 \det\mathbf{A}\ \det(\mathbf{A}^{-1} - \lambda^{-1}\mathbf{I}), \tag{2.339}$$

poiché $\mathbf{A}$ è invertibile, $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ implica $\det(\mathbf{A}^{-1} - \lambda^{-1}\mathbf{I}) = 0$. Il punto (a) è stato dimostrato nell'esercizio precedente. Per quanto riguarda il punto (b), moltiplicando per $\mathbf{A}^{-1}$ entrambi i membri della relazione (2.336) si ottiene

$$\mathbf{A}^{-2} = \frac{1}{I_3(\mathbf{A})}[\mathbf{A} - I_1(\mathbf{A})\mathbf{I} + I_2(\mathbf{A})\mathbf{A}^{-1}],$$

l'espressione di $I_2(\mathbf{A}^{-1})$ si ottiene calcolando $[(tr\mathbf{A}^{-1})^2 - tr(\mathbf{A}^{-2})]/2$ e tenendo conto di (a). Finalmente da (a), scambiando $\mathbf{A}$ con $\mathbf{A}^{-1}$ e tenendo conto della (b), si ottiene

$$I_3(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{I_2(\mathbf{A}^{-1})}{I_1(\mathbf{A})} = \frac{1}{I_3(\mathbf{A})}.$$

Esercizio 100 *Sia* $n = 3$*. Dato* $\mathbf{F} \in Lin^+$ *sia* $\mathbf{F} = \mathbf{RU}$ *la decomposizione polare destra di* $\mathbf{F}$*. Posto* $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$*, usare il teorema di Cayley-Hamilton applicato ad* $\mathbf{U}$ *e la relazione* $\mathbf{U}^2 = \mathbf{C}$ *per trovare una espressione di* $\mathbf{U}$ *in termini di* $\mathbf{C}$ *e degli invarianti principali di* $\mathbf{C}$*.*

Soluzione. Per il teorema di Cayley-Hamilton applicato ad $\mathbf{U}$ e per l'esercizio 98 si ha

$$\mathbf{U}^3 - (tr\mathbf{U})\mathbf{U}^2 + (\det\mathbf{U})(tr\mathbf{U}^{-1})\mathbf{U} - (\det\mathbf{U})\mathbf{I} = \mathbf{0},$$

e

$$\mathbf{U}^4 - (tr\mathbf{U})[(tr\mathbf{U})\mathbf{U}^2 - (\det\mathbf{U})(tr\mathbf{U}^{-1})\mathbf{U} + (\det\mathbf{U})\mathbf{I}] +$$
$$(\det\mathbf{U})(tr\mathbf{U}^{-1})\mathbf{U}^2 - (\det\mathbf{U})\mathbf{U} = \mathbf{0},$$

da cui

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{C}^2 + \mathbf{C}[(\det\mathbf{U})(tr\mathbf{U}^{-1}) - (tr\mathbf{U})^2] - (\det\mathbf{U})(tr\mathbf{U})\mathbf{I}}{(\det\mathbf{U})[1 - (tr\mathbf{U})(tr\mathbf{U}^{-1})]}.$$

2.16 Problema agli autovalori generalizzato

Dati i tensori $\mathbf{A} \in$ Sym, $\mathbf{B} \in$ Psym, si dice che un numero (reale) a è un *autovalore generalizzato* di $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ se esiste $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, tale che

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = a\mathbf{B}\mathbf{u}; \tag{2.340}$$

$\mathbf{u}$ è detto *autovettore generalizzato* e il problema (2.340) è detto *problema agli autovalori generalizzato.*

I vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ sono $\mathbf{B}$-*ortonormali* se

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{B}\mathbf{u}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \tag{2.341}$$

Proposizione 101 *Siano* $\mathbf{A} \in$ *Sym,* $\mathbf{B} \in$ *Psym. Esiste una base di* $\mathcal{V}$ *costituita da autovettori generalizzati* $\mathbf{B}$*-ortonormali* $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n$ *corrispondenti agli autovalori generalizzati* $a_1, ..., a_n$ *di* $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$,

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_i = a_i \mathbf{B}\mathbf{u}_i, \quad i = 1, ..., n. \tag{2.342}$$

Dimostrazione. In vista del teorema della radice quadrata esiste $\mathbf{U} \in$Psym tale che $\mathbf{U}^2 = \mathbf{B}$. Il problema (2.340) può essere così riscritto

$$\widehat{\mathbf{A}}\mathbf{v} = a\mathbf{v}, \tag{2.343}$$

dove si è posto

$$\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{U}\mathbf{u}. \tag{2.344}$$

Dal teorema spettrale discende che esistono una base ortonormale di $\mathcal{V}$ costitutita da autovettori $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ di (2.343) e n numeri reali $a_1, ..., a_n$ tali che

$$\widehat{\mathbf{A}}\mathbf{v}_i = a_i \mathbf{v}_i, \ i = 1, ..., n. \tag{2.345}$$

È facile verificare che i vettori $\mathbf{u}_i = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{v}_i$, $i = 1, ..., n$ sono gli autovettori del problema generalizzato (2.340) relativi agli autovalori $a_1, ..., a_n$ e soddisfano (2.343). Inoltre le relazioni

$$\delta_{ij} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \mathbf{U}\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{U}\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{U}^2\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{B}\mathbf{u}_j, \tag{2.346}$$

consentono di concludere che i vettori $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n$ sono $\mathbf{B}-$ortonormali. ∎

Per $n = 3$, a è un autovalore generalizzato se e solo se $\mathbf{A} - a\mathbf{B}$ è non invertibile e quindi a è una radice reale del polinomio caratteristico,

$$p(a) = \det(\mathbf{A} - a\mathbf{B}). \tag{2.347}$$

Per ogni vettore $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, il rapporto

$$q(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}\mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}\mathbf{u}}, \tag{2.348}$$

è il *quoziente di Rayleigh* relativo al problema generalizzato (2.340).

Proposizione 102 *Siano*

$$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \tag{2.349}$$

gli autovalori generalizzati del problema (2.340). Il quoziente di Rayleigh (2.348) soddisfa le diseguaguaglianze

$$a_1 \leq q(\mathbf{u}) \leq a_n, \quad \textit{per ogni } \mathbf{u} \in \mathcal{V} \quad \mathbf{u} \neq \mathbf{0}. \tag{2.350}$$

Dimostrazione. Siano $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n$ gli autovettori $\mathbf{B}-$ortonormali di (2.340). Per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ si ha

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + ... + \alpha_n \mathbf{u}_n, \tag{2.351}$$

e

$$\begin{aligned} q(\mathbf{u}) &= \frac{(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + ... + \alpha_n \mathbf{u}_n) \cdot (\alpha_1 a_1 \mathbf{B}\mathbf{u}_1 + ... + \alpha_n a_n \mathbf{B}\mathbf{u}_n)}{(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + ... + \alpha_n \mathbf{u}_n) \cdot (\alpha_1 \mathbf{B}\mathbf{u}_1 + ... + \alpha_n \mathbf{B}\mathbf{u}_n)} \\ &= \frac{\alpha_1^2 a_1 + ... + \alpha_n^2 a_n}{\alpha_1^2 + ... + \alpha_n^2}. \end{aligned} \tag{2.352}$$

Da (2.352), tenendo conto di (2.349), si ricava

$$a_1 = \frac{(\alpha_1^2 + ... + \alpha_.^2) a_1}{\alpha_1^2 + ... + \alpha_.^2} \leq q(\mathbf{u}) \leq \frac{(\alpha_1^2 + ... + \alpha_.^2) a_n}{\alpha_1^2 + ... + \alpha_.^2} = a_n. \tag{2.353}$$

■

2.17 Tensori del terzo e del quarto ordine

Un *tensore del terzo ordine* $\boldsymbol{F}$ può essere considerato una applicazione lineare da Lin in $\mathcal{V}$ o una applicazione lineare da $\mathcal{V}$ in Lin. In particolare, dati $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ indica il tensore del terzo ordine definito da

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}[\mathbf{H}] = (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \cdot \mathbf{H})\mathbf{u}, \quad \mathbf{H} \in \mathrm{Lin}, \tag{2.354}$$

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}[\mathbf{h}] = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{h})\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}, \quad \mathbf{h} \in \mathcal{V}. \tag{2.355}$$

Sia $n = 3$. L'applicazione $\boldsymbol{E}$ da $\mathcal{V}$ in Skw che ad ogni vettore $\mathbf{w}$ associa il tensore antisimmetrico $\mathbf{W}$ che ha $\mathbf{w}$ come tensore assiale

$$\boldsymbol{E}(\mathbf{w}) = \mathbf{W} \;\; \text{con} \;\; \mathbf{W}\mathbf{v} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}, \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \tag{2.356}$$

è un tensore del terzo ordine.

Poniamo

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } ijk \text{ è una permutazione pari di } 1,2,3, \\ -1 & \text{se } ijk \text{ è una permutazione dispari di } 1,2,3, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \; i,j,k = 1,2,3. \tag{2.357}$$

Fissata una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ di $\mathcal{V}$ e indicate con w_1, w_2, w_3 le componenti di $\mathbf{w}$, in vista di (2.164) le componenti di $\mathbf{W}$ sono

$$W_{ij} = -\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} w_k, \tag{2.358}$$

pertanto

$$\begin{aligned}\mathbf{W} = \sum_{i,j=1}^{3} W_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j &= -\sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ &= -\sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k)\mathbf{w}\end{aligned} \tag{2.359}$$

e finalmente

$$\boldsymbol{E} = -\sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k). \tag{2.360}$$

Analogamente, l'applicazione $\boldsymbol{F}$ da Skw in $\mathcal{V}$ che ad ogni tensore antisimmetrico $\mathbf{W}$ associa il relativo vettore assiale $\mathbf{w}$,

$$\boldsymbol{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{w} \quad \text{con} \quad \mathbf{W}\mathbf{v} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}, \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \tag{2.361}$$

è un tensore del terzo ordine. Date le componenti di $\mathbf{W}$, le componenti di $\mathbf{w}$ sono

$$w_i = -\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} W_{jk}, \tag{2.362}$$

pertanto

$$\begin{aligned}\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{3} w_i\mathbf{e}_i = -\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} W_{jk}\mathbf{e}_i = -\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{W}\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_i \\ = -\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}[(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k)\cdot \mathbf{W}]\mathbf{e}_i = -\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k)\mathbf{W},\end{aligned} \tag{2.363}$$

ed infine

$$\boldsymbol{F} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k). \tag{2.364}$$

Anche l'applicazione $\boldsymbol{E}_2$ da Lin in $\mathcal{V}$ che ad ogni tensore $\mathbf{A}$ associa il vettore assiale della parte antisimmetrica $(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T)/2$ di $\mathbf{A}$ è un tensore del terzo ordine.

Un *tensore del quarto ordine* $\mathbb{A}$ è una applicazione lineare da Lin in Lin. Denotiamo con $\mathbb{I}$ l'identità del quarto ordine definita da $\mathbb{I}[\mathbf{H}] = \mathbf{H}$ per ogni $\mathbf{H} \in$

Lin. Il prodotto tensore $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ di due tensori del secondo ordine $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ è un tensore del quarto ordine definito da

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}[\mathbf{H}] = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})\mathbf{A}, \quad \mathbf{H} \in \text{Lin}. \tag{2.365}$$

A partire dai tensori $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ si può definire il tensore del quarto ordine $\mathbf{A} \boxtimes \mathbf{B}$,

$$\mathbf{A} \boxtimes \mathbf{B}[\mathbf{H}] = \mathbf{A}\mathbf{H}\mathbf{B}^T, \quad \mathbf{H} \in \text{Lin}.$$

Denotiamo con $\mathbb{L}\text{in}$ lo spazio vettoriale costituito da tutti i tensori dei quarto ordine. Si consideri la base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ di $\mathcal{V}$, le *componenti* del tensore del quarto ordine $\mathbb{A}$ sono

$$\mathbb{A}_{ijkl} = (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot \mathbb{A}[\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l], \quad i, j, k, l = 1, ..., n. \tag{2.366}$$

Posto $\mathbf{K} = \mathbb{A}[\mathbf{H}]$, da (2.47) si ricava che

$$K_{ij} = \sum_{k,l=}^{n} \mathbb{A}_{ijkl} H_{kl}.$$

Dalla lineare indipendenza dei vettori $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ di $\mathcal{V}$ discende la lineare indipendenza degli elementi $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \otimes (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)$, $i, j, k, l = 1, ..., n$ di $\mathbb{L}\text{in}$, inoltre per ogni $\mathbb{A} \in \mathbb{L}\text{in}$ vale la seguente rappresentazione,

$$\mathbb{A} = \sum_{i,j,k,k=1}^{n} \mathbb{A}_{ijkl} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \otimes (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l). \tag{2.367}$$

Quindi i tensori del quarto ordine $\{(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \otimes (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)\}_{i,j,k,l=1,...,n}$ sono una base dello spazio vettoriale $\mathbb{L}\text{in}$, di dimensione n^4 .

Il *trasposto* di $\mathbb{A}$ è il tensore del quarto ordine $\mathbb{A}^T$ che soddisfa

$$\mathbb{A}^T[\mathbf{H}] \cdot \mathbf{K} = \mathbb{A}[\mathbf{K}] \cdot \mathbf{H}, \quad \text{per ogni } \mathbf{H}, \mathbf{K} \in \text{Lin}. \tag{2.368}$$

Esercizio 103 *Calcolare il trasposto dei tensori del quarto ordine* $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ *e* $\mathbf{A} \boxtimes \mathbf{B}$.

Soluzione. Dati $\mathbf{H}, \in \mathbf{K} \in$Lin, si ha

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}[\mathbf{K}] = \mathbf{H} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{K})\mathbf{A} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{K})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{H}) =$$

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}[\mathbf{H}],$$

quindi $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}$. Si ha inoltre

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{A} \boxtimes \mathbf{B}[\mathbf{K}] = \mathbf{H} \cdot \mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{B}^T = tr(\mathbf{B}\mathbf{K}^T\mathbf{A}^T\mathbf{H}) =$$

$$tr(\mathbf{K}^T\mathbf{A}^T\mathbf{H}\mathbf{B}) = \mathbf{K} \cdot \mathbf{A}^T \boxtimes \mathbf{B}^T[\mathbf{H}],$$

quindi $(\mathbf{A} \boxtimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \boxtimes \mathbf{B}^T$.

Si dice che $\mathbb{A}$ ha la *simmetria maggiore* (o è simmetrico) se $\mathbb{A}^T = \mathbb{A}$. In indici ciò significa che $\mathbb{A}_{ijkl} = \mathbb{A}_{klij}$.

La simmetria nella prima coppia di indici ($\mathbb{A}_{ijkl} = \mathbb{A}_{jikl}$) significa che $\mathbb{A}$ è a valori in Sym

$$\mathbb{A}[\mathbf{H}]^T = \mathbb{A}[\mathbf{H}], \quad \mathbf{H} \in \text{Lin}, \tag{2.369}$$

mentre la simmetria nella seconda coppia di indici ($\mathbb{A}_{ijkl} = \mathbb{A}_{ijlk}$) significa che

$$\mathbb{A}[\mathbf{H}^T] = \mathbb{A}[\mathbf{H}], \quad \mathbf{H} \in \text{Lin}, \tag{2.370}$$

o equivalentemente che $\mathbb{A}$ si annulla su Skw,

$$\mathbb{A}[\mathbf{W}] = \mathbf{0}, \quad \mathbf{W} \in \text{Skw}.$$

Si dice che $\mathbb{A}$ ha la *simmetria minore* se ha le simmetrie nella prima e nella seconda coppia di indici.

Esercizio 104 *Dimostrare che le componenti del tensore identità $\mathbb{I}$, definito da $\mathbb{I}[\mathbf{A}] = \mathbf{A}$, per ogni $\mathbf{A} \in$Lin, sono*

$$\mathbb{I}_{ijhk} = \begin{cases} 1 & \textit{se } i = h \textit{ e } j = k, \\ 0 & \textit{altrimenti,} \end{cases} \tag{2.371}$$

e che $\mathbf{I} \boxtimes \mathbf{I} = \mathbb{I}$, dove $\mathbf{I}$ è l'identità di Lin.

L'applicazione $\mathbb{T}$: Lin$\rightarrow$ Lin tale che $\mathbb{T}[\mathbf{A}] = \mathbf{A}^T$, per ogni $\mathbf{A} \in$Lin è un tensore del quarto ordine ed i tensori del quarto ordine $\mathbb{S}$ e $\mathbb{W}$ definiti da

$$\mathbb{S}[\mathbf{A}] = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^T}{2}, \quad \mathbb{W}[\mathbf{A}] = \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^T}{2}, \text{ per ogni } \mathbf{A} \in \text{Lin}, \tag{2.372}$$

sono detti rispettivamente *simmetrizzatore* e *antisimmetrizzatore.*

Esercizio 105 *Calcolare le componenti dei tensori del quarto ordine $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \boxtimes \mathbf{B}$, $\mathbb{T}$, $\mathbb{S}$ e $\mathbb{W}$.*

Esercizio 106 *Dimostrare che $\mathbf{A} \boxtimes \mathbf{B}$ è simmetrico se e solo se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono simmetrici e che $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ è simmetrico se e solo se $\mathbf{A} = \alpha\mathbf{B}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Esercizio 107 *Dati $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \in$Lin e $\mathbb{A} \in \mathbb{L}$in, provare le seguenti regole di composizione*

$$(\mathbf{A} \boxtimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \boxtimes \mathbf{D}) = \mathbf{AC} \boxtimes \mathbf{BD}, \tag{2.373}$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})\mathbb{A} = \mathbf{A} \otimes \mathbb{A}^T[\mathbf{B}], \tag{2.374}$$

$$\mathbb{A}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \mathbb{A}[\mathbf{A}] \otimes \mathbf{B}. \tag{2.375}$$

Dato $\mathbf{Q}$ $\in$Orth, si consideri il tensore del quarto ordine $\mathbb{Q}=\mathbf{Q}\boxtimes\mathbf{Q}$, si ha

$$\mathbb{Q}[\mathbf{A}]\cdot\mathbb{Q}[\mathbf{B}]=\mathbf{QAQ}^T\cdot\mathbf{QBQ}^T$$

$$=tr(\mathbf{QA}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{QBQ}^T)=tr(\mathbf{A}^T\mathbf{B})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B},\quad \text{per ogni } \mathbf{A},\mathbf{B}\in \text{Lin}, \tag{2.376}$$

quindi $\mathbb{Q}\in\mathbb{L}$in è una isometria (cfr. (1.64)).

Indichiamo con $\mathbb{S}$ym lo spazio vettoriale dei tensori del quarto ordine definiti su Sym con valori in Sym e denotiamo con $\mathbb{I}_{Sym}$ la restrizione di $\mathbb{I}$ a Sym. Da ora in avanti ci limiteremo a considerare tensori $\mathbb{A}\in\mathbb{S}$ym

Un tensore simmetrico $\mathbb{A}\in\mathbb{S}$ym si dice dice *definito positivo* se

$$\mathbf{A}\cdot\mathbb{A}[\mathbf{A}]>0,\quad \text{per ogni } \mathbf{A}\in \text{Sym},\ \mathbf{A}\neq\mathbf{0}. \tag{2.377}$$

$\mathbb{A}$ si dice *invertibile* se è iniettivo e surgettivo. Il tensore $\mathbb{A}^{-1}$ tale che $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A}=\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}=\mathbb{I}_{Sym}$ è l'*inverso* di $\mathbb{A}$.

Sia $\mathbb{C}\in\mathbb{S}$ym un tensore del quarto ordine simmetrico. Il *problema spettrale* relativo a $\mathbb{C}$ consiste nel determinare le coppie $(\gamma,\mathbf{C})$ con $\gamma\in\mathbb{R}$, $\mathbf{C}$ $\in$Sym, $||\mathbf{C}||=1$ e $\mathbb{C}[\mathbf{C}]=\gamma\mathbf{C}$; γ è un *autovalore* di $\mathbb{C}$ e $\mathbf{C}$ il relativo *autotensore*. Come nel caso dei tensori del secondo ordine simmetrici, per i tensori del quarto ordine simmetrici vale il seguente teorema spettrale [9].

Teorema 108 *Sia $\mathbb{C}$:Sym→Sym un tensore del quarto ordine simmetrico. Esistono $\gamma_i\in\mathbb{R}$ e $\mathbf{C}_i$ $\in$Sym $i=1,...,\frac{n(n+1)}{2}$ tali che $\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{C}_j=\delta_{ij}$,*

$$\mathbb{C}=\sum_{i=1}^{\frac{n(n+1)}{2}}\gamma_i\mathbf{C}_i\otimes\mathbf{C}_i, \tag{2.378}$$

e

$$\sum_{i=1}^{\frac{n(n+1)}{2}}\mathbf{C}_i\otimes\mathbf{C}_i=\mathbb{I}_{Sym}. \tag{2.379}$$

Esercizio 109 *Sia $n=3$. Sia $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}$, consideriamo i tensori simmetrici*

$$\mathbf{O}_1=\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1,\quad \mathbf{O}_2=\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2,\quad \mathbf{O}_3=\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_3, \tag{2.380}$$

$$\mathbf{O}_4=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1),\ \mathbf{O}_5=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_1), \tag{2.381}$$

$$\mathbf{O}_6=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_1). \tag{2.382}$$

Calcolare autovalori e autotensori del tensore $\mathbb{A}\in\mathbb{S}ym$

$$\mathbb{A}=\mathbf{O}_1\otimes\mathbf{O}_1+\mathbf{O}_2\otimes\mathbf{O}_2+\mathbf{O}_1\otimes\mathbf{O}_2+\mathbf{O}_2\otimes\mathbf{O}_1. \tag{2.383}$$

Soluzione. Si ha

$$\mathbb{A}[\mathbf{O}_1] = \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2,\ \mathbb{A}[\mathbf{O}_2] = \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2,\ \mathbb{A}[\mathbf{O}_i] = \mathbf{0},\ i = 3, ..., 6, \tag{2.384}$$

quindi gli autovalori di $\mathbb{A}$ sono $\gamma_1 = 2$ con autensore $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2)$ e $\gamma_2 = 0$ con autensori $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{O}_1 - \mathbf{O}_2)$, $\mathbf{O}_3, \mathbf{O}_4, \mathbf{O}_5$ e $\mathbf{O}_6$ e la rappresentazione spettrale di $\mathbb{A}$ è

$$\mathbb{A} = (\mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2) \otimes (\mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2). \tag{2.385}$$

Esercizio 110 *Sia $n = 3$. Data Calcolare autovalori e autotensori del tensore del quarto ordine*

$$\mathbb{C} = 2\mu\mathbb{I}_{Sym} + \lambda\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \tag{2.386}$$

Soluzione. Si ha $\mathbb{C}[\mathbf{I}] = (2\mu + 3\lambda)\mathbf{I}$ e $\mathbb{C}[\mathbf{A}] = 2\mu\mathbf{A}$ per ogni $A \in$Dev, quindi gli autovalori di $\mathbb{C}$ sono $\gamma_1 = 2\mu + 3\lambda$ con autotensore $\mathbf{C}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{I}$ e $\gamma_2 = 2\mu$ con autotensori $\mathbf{C}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)$, $\mathbf{C}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1)$, $\mathbf{C}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2)$, $\mathbf{C}_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2)$, $\mathbf{C}_6 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)$.

Esercizio 111 *Provare che un tensore del quarto ordine simmetrico $\mathbb{C}$ è definito positivo se e solo se i suoi autovalori sono positivi.*

Esercizio 112 *Provare che il tensore $\mathbb{C}$ definito in (2.386) è definito positivo se e solo se*

$$\mu > 0, \quad 2\mu + 3\lambda > 0. \tag{2.387}$$

Esercizio 113 *Sia $n = 3$. Indicata con $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}$, calcolare autovalori e autotensori del tensore del quarto ordine*

$$\mathbb{A} = \alpha\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \beta\mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2 + \gamma(\mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_2 + \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_1), \tag{2.388}$$

con $\mathbf{O}_1 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{O}_2 = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Esercizio 114 *Calcolare l'inverso del tensore $\mathbb{C}$ definito in (2.386) con μ e λ che soddisfano (2.387).*

2.18 Funzioni isotrope

In questa sezione ci limiteremo a considerare il caso $n = 3$. Sia $\mathfrak{I} \subset$Orth, un insieme $\mathcal{A} \subset$Lin è *invariante* rispetto a $\mathfrak{I}$ se $\mathbf{QAQ}^T \in \mathcal{A}$ per ogni $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$, $\mathbf{Q} \in \mathfrak{I}$. $\mathbf{QAQ}^T$ è detto *coniugato ortogonale* di $\mathbf{A}$ rispetto a $\mathbf{Q}$.

Gli insiemi Lin, Lin$^+$, Orth, Orth$^+$, Sym, Skw, Sym$^-$, Sym$^+$, Psym e Nsym sono invarianti rispetto a Orth. Infatti, limitandoci al caso di Lin$^+$ si ha

$$\det(\mathbf{QAQ}^T) = \det\mathbf{A}(\det\mathbf{Q})^2 = \det\mathbf{A}.$$

Sia $\mathcal{A}$ $\subset$Lin, un funzionale $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ è *invariante* rispetto a $\mathfrak{I}$ se $\mathcal{A}$ è invariante rispetto a $\mathfrak{I}$ e se

$$\varphi(\mathbf{A}) = \varphi(\mathbf{QAQ}^T), \quad \text{per ogni } \mathbf{A} \in \mathcal{A}, \mathbf{Q} \in \mathfrak{I}. \tag{2.389}$$

Un'applicazione $G : \mathcal{A} \to$Lin è *invariante* rispetto a $\mathfrak{I}$ se $\mathcal{A}$ è invariante rispetto a $\mathfrak{I}$ e se

$$\mathbf{Q}G(\mathbf{A})\mathbf{Q}^T = G(\mathbf{QAQ}^T), \quad \text{per ogni } \mathbf{A} \in \mathcal{A}, \mathbf{Q} \in \mathfrak{I}. \tag{2.390}$$

Un funzionale (un'applicazione) si dice *isotropo* se è invariante rispetto a Orth.

Proposizione 115 *Sia ϕ una funzione su Lin a valori scalari o tensoriali, allora ϕ è isotropa se e solo se ϕ è invariante rispetto a Orth$^+$.*

Teorema 116 *I funzionali I_1, I_2 e I_3 definiti su Lin sono isotropi. In particolare*

$$\eta(\mathbf{A}) = \eta(\mathbf{QAQ}^T), \quad \textit{per ogni } \mathbf{Q} \in \textit{Orth}. \tag{2.391}$$

Indichiamo con $\mathfrak{P}(\mathcal{A}) = \{\eta(\mathbf{A}) \mid \mathbf{A} \in \mathcal{A}\}$ l'insieme di tutte le possibili liste $\eta(\mathbf{A})$ di invarianti principali, con $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$.

Dimostreremo alcuni importanti teoremi di rappresentazione per funzioni su $\mathcal{A}$ $\subset$Sym. Supporremo da ora in avanti che $\mathcal{A}$ sia invariante rispetto a Orth.

Teorema 117 *(Teorema di rappresentazione per funzionali isotropi). Un funzionale $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ è isotropo se e solo se esiste una funzione $\widetilde{\varphi} : \mathfrak{P}(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ tale che*

$$\varphi(\mathbf{A}) = \widetilde{\varphi}(\eta(\mathbf{A})), \quad \textit{per ogni } \mathbf{A} \in \mathcal{A}. \tag{2.392}$$

Dimostrazione. Supponiamo che φ sia isotropo, per dimostrare (2.392) è sufficiente mostrare che

$$\varphi(\mathbf{A}) = \varphi(\mathbf{B}) \tag{2.393}$$

ogniqualvolta

$$\eta(\mathbf{A}) = \eta(\mathbf{B}). \tag{2.394}$$

Siano $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{A}$ che soddisfano (2.394), allora $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ hanno lo stesso spettro e per il teorema spettrale esistono due basi ortonormali $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ tali che

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}_i. \tag{2.395}$$

Sia $\mathbf{Q}$ il tensore ortogonale tale che

$$\mathbf{Qf}_i = \mathbf{e}_i; \tag{2.396}$$

dato che $\mathbf{Q}(\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}_i)\mathbf{Q}^T = (\mathbf{Qf}_i) \otimes (\mathbf{Qf}_i)$, si ha che $\mathbf{QBQ}^T = \mathbf{A}$. Ma poiché φ è isotropa si ha , $\varphi(\mathbf{A}) = \varphi(\mathbf{QBQ}^T) = \varphi(\mathbf{B})$. L'implicazione inversa è una banale conseguenza del fatto che $\eta(\mathbf{A}) = \eta(\mathbf{QAQ}^T)$ per ogni $\mathbf{Q}$ $\in$Orth. ■

Teorema 118 *Sia $G : \mathcal{A} \rightarrow$Lin un'applicazione isotropa. Allora ogni autovettore di $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$ è un autovettore di $G(\mathbf{A})$.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{e}$ un autovettore di $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$ e sia $\mathbf{Q} \in$Orth la riflessione rispetto al piano ortogonale a $\mathbf{e}$,

$$\mathbf{Qe} = -\mathbf{e}, \quad \mathbf{Qf} = \mathbf{f}, \quad \text{per ogni } \mathbf{f} \in \text{Span}(\mathbf{e})^{\perp}, \tag{2.397}$$

È facile provare che $\mathbf{QAQ}^T = \mathbf{A}$. Ora poiché G è isotropa

$$\mathbf{Q}G(\mathbf{A})\mathbf{Q}^T = G(\mathbf{QAQ}^T) = G(\mathbf{A}), \tag{2.398}$$

quindi $\mathbf{Q}$ commuta con $G(\mathbf{A})$. Inoltre

$$\mathbf{Q}G(\mathbf{A})\mathbf{e} = G(\mathbf{A})\mathbf{Qe} = -G(\mathbf{A})\mathbf{e} \tag{2.399}$$

che unita a (2.397) implica che $G(\mathbf{A})\mathbf{e} \in$Span$(\mathbf{e})$,

$$G(\mathbf{A})\mathbf{e} = \omega\mathbf{e}, \tag{2.400}$$

quindi $\mathbf{e}$ è un autovettore di $G(\mathbf{A})$. ■

Proposizione 119 *(Lemma di Wang). Sia $\mathbf{A} \in$Sym.*

(a) *Se gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono distinti,*

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i, \tag{2.401}$$

allora $\mathbf{I}$, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^2$ sono linearmente indipendenti e

$$\mathit{Span}(\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2) = \mathit{Span}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3). \tag{2.402}$$

(b) *Se $\mathbf{A}$ ha due autovalori distinti,*

$$\mathbf{A} = \omega_1 \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \omega_2(\mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}), \quad ||\mathbf{e}|| = 1, \tag{2.403}$$

allora $\mathbf{I}$ e $\mathbf{A}$ sono linearmente indipendenti e

$$\mathit{Span}(\mathbf{I}, \mathbf{A}) = \mathit{Span}(\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}, \mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}). \tag{2.404}$$

Dimostrazione. Per quanto riguarda il punto (a), per provare che $\mathbf{I}$, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^2$ sono linearmente indipendenti dobbiamo dimostrare che se

$$\alpha\mathbf{A}^2 + \beta\mathbf{A} + \gamma\mathbf{I} = \mathbf{0}, \tag{2.405}$$

allora

$$\alpha = \beta = \gamma = 0. \tag{2.406}$$

Da (2.401)si ricava

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha\omega_1^2+\beta\omega_1+\gamma=0,\\ \alpha\omega_2^2+\beta\omega_2+\gamma=0,\\ \alpha\omega_3^2+\beta\omega_3+\gamma=0.\end{array}\right. \tag{2.407}$$

La matrice del sistema (2.407) è la matrice di Vandermonde, il cui determinante è dato da $\prod_{1\le i<j\le 3}(\omega_i-\omega_j)$. Poiché gli ω_i sono distinti la soluzione del sistema (2.407) è data da (2.406). Il sottospazio $\mathcal{H}$ =Span($\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_3$) ha dimensione 3, ed essendo $\mathbf{A}^2=\sum_{i=1}^3\omega_i^2\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_i$, si ha che $\mathbf{I},\mathbf{A},\mathbf{A}^2$ appartengono ad $\mathcal{H}$, quindi $\mathcal{H}$ =Span($\mathbf{I},\mathbf{A},\mathbf{A}^2$). Il punto (b) si dimostra analogamente. ■

Teorema 120 *(Primo teorema di rappresentazione di applicazioni isotrope) Un'applicazione $G:\mathcal{A}\to$Sym ($\mathcal{A}\subset$Sym) è isotropa se e solo se esistono dei funzionali $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2:\mathfrak{P}(\mathcal{A})\to\mathbb{R}$ tali che*

$$G(\mathbf{A})=\varphi_0(\eta(\mathbf{A}))\mathbf{I}+\varphi_1(\eta(\mathbf{A}))\mathbf{A}+\varphi_2(\eta(\mathbf{A}))\mathbf{A}^2 \quad \textit{per ogni } \mathbf{A}\in\mathcal{A}. \tag{2.408}$$

Dimostrazione. Supponiamo che G ammetta la rappresentazione (2.408). Siano $\mathbf{A}\in\mathcal{A}$ e $\mathbf{Q}\in$Orth, in vista di (2.391) si ha

$$\begin{aligned}G(\mathbf{QAQ}^T)=\varphi_0(\eta(\mathbf{QAQ}^T))\mathbf{I}+\varphi_1(\eta(\mathbf{QAQ}^T))\mathbf{QAQ}^T+\\ \varphi_2(\eta(\mathbf{QAQ}^T))\mathbf{QAQ}^T\mathbf{QAQ}^T=\\ \varphi_0(\eta(\mathbf{A}))\mathbf{QQ}^T+\varphi_1(\eta(\mathbf{A}))\mathbf{QAQ}^T+\\ \varphi_2(\eta(\mathbf{A}))\mathbf{QA}^2\mathbf{Q}^T=\mathbf{Q}G(\mathbf{A})\mathbf{Q}^T,\end{aligned} \tag{2.409}$$

quindi G è isotropa. Viceversa supponiamo che G sia isotropa e prendiamo $\mathbf{A}\in\mathcal{A}$. Si distinguono i seguenti tre casi.

Caso 1. $\mathbf{A}$ ha tre autovalori distinti. Sia (2.401) la rappresentazione spettrale di $\mathbf{A}$, per il teorema 118

$$G(\mathbf{A})=\sum_{i=1}^3\beta_i\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_i, \tag{2.410}$$

da (2.402) si conclude che esistono tre funzioni scalari $\alpha_0(\mathbf{A}),\alpha_1(\mathbf{A}),\alpha_2(\mathbf{A})$ tali che

$$G(\mathbf{A})=\alpha_0(\mathbf{A})\mathbf{I}+\alpha_1(\mathbf{A})\mathbf{A}+\alpha_2(\mathbf{A})\mathbf{A}^2. \tag{2.411}$$

Caso 2. $\mathbf{A}$ ha due autovalori distinti. Allora $\mathbf{A}$ ha la rappresentazione (2.403) e gli spazi caratteristici di $\mathbf{A}$ sono Span($\mathbf{e}$) e Span$(\mathbf{e})^\perp$. Per il teorema 118 ognuno di questi sottospazi deve essere contenuto in uno spazio caratteristico di $G(\mathbf{A})$. Infatti sia $\{\mathbf{e},\mathbf{f},\mathbf{g}\}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}$ e sia $\mathbf{Q}$ un tensore ortogonale tale che

$$\mathbf{Qe}=\mathbf{e},\quad \mathbf{Qf}=\mathbf{g},\quad \mathbf{Qg}=-\mathbf{f}. \tag{2.412}$$

$\mathbf{Q}$ mantiene gli spazi caratteristici di $\mathbf{A}$, quindi $\mathbf{QAQ}^T = \mathbf{A}$, pertanto $\mathbf{QG}(\mathbf{A})\mathbf{Q}^T = \mathbf{G}(\mathbf{QAQ}^T) = \mathbf{G}(\mathbf{A})$, cioè $\mathbf{QG}(\mathbf{A}) = \mathbf{G}(\mathbf{A})\mathbf{Q}$. Dato che $\mathbf{QG}(\mathbf{A})\mathbf{e} = \mathbf{G}(\mathbf{A})\mathbf{e}$, si ha che $\mathbf{G}(\mathbf{A})\mathbf{e} = \beta_1\mathbf{e}$. Inoltre

$$\mathbf{QG}(\mathbf{A})\mathbf{f} = \mathbf{G}(\mathbf{A})\mathbf{Qf} = \mathbf{G}(\mathbf{A})\mathbf{g}, \tag{2.413}$$

$$\mathbf{QG}(\mathbf{A})\mathbf{g} = \mathbf{G}(\mathbf{A})\mathbf{Qg} = -\mathbf{G}(\mathbf{A})\mathbf{f}; \tag{2.414}$$

quindi indicati con β_2 e β_3 gli autovalori di $\mathbf{G}(\mathbf{A})$ relativi agli autovettori $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$, da (2.413) e (2.414) si ottiene la relazione

$$\mathbf{Q}\beta_2\mathbf{f} = \beta_3\mathbf{g} \tag{2.415}$$

da cui, tenendo conto di (2.412), discende

$$\beta_2 = \beta_3. \tag{2.416}$$

Quindi ci sono due possibilità: (i) gli spazi caratteristici di $\mathbf{G}(\mathbf{A})$ sono $\mathrm{Span}(\mathbf{e})$ e $\mathrm{Span}(\mathbf{e})^\perp$ oppure (ii) $\mathcal{V}$ è il solo spazio caratteristico di $\mathbf{G}(\mathbf{A})$. In virtù del teorema spettrale si ha

$$G(\mathbf{A}) = \beta_1\mathbf{e}\otimes\mathbf{e} + \beta_2(\mathbf{I} - \mathbf{e}\otimes\mathbf{e}), \tag{2.417}$$

sia nel caso (i) in cui $\beta_1 \neq \beta_2$, sia nel caso (ii) in cui $\beta_1 = \beta_2$. Tenendo conto del lemma di Wang (vedi (2.404)), (2.417) può essere scritta nella forma (2.411) con

$$\alpha_2(\mathbf{A}) = 0. \tag{2.418}$$

Caso 3. $\mathbf{A}$ ha un solo autovalore distinto, $\mathbf{A} = \omega\mathbf{I}$. In particolare $\mathbf{QAQ}^T = \mathbf{A}$ per ogni $\mathbf{Q}\in$Orth, quindi dall'isotropia di $G(\mathbf{A})$ discende che $\mathbf{QG}(\mathbf{A})\mathbf{Q}^T = G(\mathbf{A})$ per ogni $\mathbf{Q}\in$Orth, quindi per la proposizione 84 $G(\mathbf{A}) = \beta\mathbf{I}$ e $G(\mathbf{A})$ ammette la rappresentazione (2.411) con $\alpha_0(\mathbf{A}) = \beta$ e $\alpha_1(\mathbf{A}) = \alpha_2(\mathbf{A}) = 0$.

Con ciò abbiamo dimostrato che se G è isotropa allora ammette la rappresentazione (2.411). In virtù del teorema di rappresentazione dei funzionali isotropi, per completare la dimostrazione dobbiamo provare che $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ sono funzionali isotropi

$$\alpha_k(\mathbf{QAQ}^T) = \alpha_k(\mathbf{A}), \quad k = 1, 2, 3 \tag{2.419}$$

per ogni $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$, $\mathbf{Q}\in$Orth. Siano allora $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$, $\mathbf{Q}\in$Orth, dalla isotropia di G discende che

$$G(\mathbf{A}) - \mathbf{Q}^T\mathbf{G}(\mathbf{QAQ^T})\mathbf{Q} = \mathbf{0},$$

da cui tenendo conto di (2.411) e dell'uguaglianza

$$\mathbf{Q}^T(\mathbf{QAQ^T})^2\mathbf{Q} = \mathbf{A}^2, \tag{2.420}$$

si ricava

$$[\alpha_0(\mathbf{A}) - \alpha_0(\mathbf{QAQ^T})]\mathbf{I} + [\alpha_1(\mathbf{A}) - \alpha_1(\mathbf{QAQ^T})]\mathbf{A} +$$

$$[\alpha_2(\mathbf{A}) - \alpha_2(\mathbf{QAQ^T})]\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}. \tag{2.421}$$

A questo punto si deve tenere conto di nuovo dei tre casi analizzati precedentemente.

Caso 1. Per il lemma di Wang $\mathbf{I}$, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^2$ sono linearmente indipendenti e (2.421) implica (2.419).

Caso 2. In vista di (2.391) e della proposizione 78 $\mathbf{A}$ e $\mathbf{QAQ^T}$ hanno lo stesso spettro, allora $\mathbf{QAQ^T}$ come $\mathbf{A}$ ha due autovalori distinti e da (2.418) si ricava $\alpha_2(\mathbf{A}) = \alpha_2(\mathbf{QAQ^T}) = 0$. Inoltre per il lemma di Wang $\mathbf{I}$ e $\mathbf{A}$ sono linearmente indipendenti e di nuovo da (2.421) si ottiene (2.419).

Caso 3. In questo caso $\mathbf{A} = \omega\mathbf{I}$ e $\mathbf{QAQ^T} = \mathbf{A}$, quindi (2.419) è banalmente verificata.

■

Quando $\mathbf{A}$ è invertibile, dal teorema di Cayley-Hamilton segue che

$$\mathbf{A}^2 = I_1(\mathbf{A})\mathbf{A} - I_2(\mathbf{A})\mathbf{I} + I_3(\mathbf{A})\mathbf{A}^{-1}, \tag{2.422}$$

quindi il teorema 120 ha il seguente corollario.

Teorema 121 *(Secondo teorema di rappresentazione di applicazioni isotrope) Sia $\mathcal{A}$ l'insieme di tutti i tensori simmetrici e invertibili. Un'applicazione G : $\mathcal{A} \to$Sym è isotropa se e solo se esistono dei funzionali $\psi_0, \psi_1, \psi_2 : \mathfrak{P}(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ tali che*

$$G(\mathbf{A}) = \psi_0(\eta(\mathbf{A}))\mathbf{I} + \psi_1(\eta(\mathbf{A}))\mathbf{A} + \psi_2(\eta(\mathbf{A}))\mathbf{A}^{-1} \quad \textit{per ogni } \mathbf{A} \in \mathcal{A}. \tag{2.423}$$

Per le applicazioni lineari (tensori del quarto ordine) vale il seguente risultato.

Teorema 122 *(Teorema di rappresentazione per i tensori del quarto ordine) Un tensore del quarto ordine $\mathbb{A}$:Sym→Sym è isotropo se e solo se esistono due scalari μ e λ tali che*

$$\mathbb{A}[\mathbf{A}] = 2\mu\mathbf{A} + \lambda\, tr(\mathbf{A})\mathbf{I}, \quad \textit{per ogni } \mathbf{A} \in \textit{ Sym}. \tag{2.424}$$

Dimostrazione. Evidentemente (2.424) definisce una funzione isotropa. Sia $\mathcal{N}$ l'insieme di tutti i vettori unitari. Per ogni $\mathbf{e} \in \mathcal{N}$, il tensore $\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}$ ha spettro $\{0, 0, 1\}$ e spazi caratteristici $\mathrm{Span}(\mathbf{e})^\perp$ e $\mathrm{Span}(\mathbf{e})$. Allora gli stessi argomenti usati per dimostrare (2.417) conducono all'esistenza di due funzionali μ, λ : $\mathcal{N} \to \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbb{A}[\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}] = 2\mu(\mathbf{e})\mathbf{e}\otimes\mathbf{e} + \lambda(\mathbf{e})\mathbf{I}, \quad \text{per ogni } \mathbf{e} \in \mathcal{N}. \tag{2.425}$$

Siano adesso $\mathbf{e}, \mathbf{f} \in \mathcal{N}$ e sia $\mathbf{Q}$ un tensore ortogonale tale che $\mathbf{Qe} = \mathbf{f}$. Poiché

$$\mathbf{Qe}\otimes\mathbf{eQ}^T = \mathbf{f}\otimes\mathbf{f}, \tag{2.426}$$

e $\mathbb{A}$ è isotropo, si ha

$$\mathbf{0} = \mathbf{Q}\mathbb{A}[\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}]\mathbf{Q}^T - \mathbb{A}[\mathbf{f}\otimes\mathbf{f}] =$$

$$2[\mu(\mathbf{e}) - \mu(\mathbf{f})]\mathbf{f}\otimes\mathbf{f} + [\lambda(\mathbf{e}) - \lambda(\mathbf{f})]\mathbf{I}. \tag{2.427}$$

Essendo $\mathbf{f}\otimes\mathbf{f}$ e $\mathbf{I}$ linearmente indipendenti, da (2.427) si ricava

$$\mu(\mathbf{e}) = \mu(\mathbf{f}), \quad \lambda(\mathbf{e}) = \lambda(\mathbf{f}), \tag{2.428}$$

quindi μ e λ sono delle quantità scalari costanti e da (2.425) si conclude che

$$\mathbb{A}[\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}] = 2\mu\mathbf{e}\otimes\mathbf{e} + \lambda\mathbf{I}, \quad \text{per ogni } \mathbf{e}\in\mathcal{N}. \tag{2.429}$$

Sia ora $\mathbf{A}$ $\in$Sym, per il teorema spettrale $\mathbf{A}$ ha la rappresentazione (2.401), e in virtù di (2.429) e della linearità di $\mathbb{A}$ si ha

$$\mathbb{A}[\mathbf{A}] = 2\mu\mathbf{A} + \lambda(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)\mathbf{I}. \tag{2.430}$$

■

Corollario 123 *Sia $\mathbb{A}$:Sym_0 →Sym un tensore del quarto ordine, con $Sym_0 = \{\mathbf{A}\in Sym \mid tr\mathbf{A} = 0\}$. $\mathbb{A}$ è isotropo se e solo se esiste uno scalare μ tale che*

$$\mathbb{A}[\mathbf{A}] = 2\mu\mathbf{A}, \quad \textit{per ogni } \mathbf{A}\in Sym_0. \tag{2.431}$$

Dimostrazione. Chiaramente (2.431) definisce una funzione isotropa. Viceversa supponiamo che $\mathbb{A}$ sia isotropa. Per ogni $\mathbf{A}$ $\in$Sym, $\mathbf{A} - \frac{1}{3}tr(\mathbf{A})\mathbf{I}$ $\in$Sym$_0$, allora si può estendere $\mathbb{A}$ da Sym$_0$ a Sym, definendo

$$\widetilde{\mathbb{A}}[\mathbf{A}] = \mathbb{A}[\mathbf{A} - \frac{1}{3}tr(\mathbf{A})\mathbf{I}], \quad \text{per ogni } \mathbf{A}\in \text{Sym}. \tag{2.432}$$

Dalla isotropia di $\mathbb{A}$ e del funzionale *tr* discende l'isotropia di $\widetilde{\mathbb{A}}$, quindi da (2.424) considerando che $\mathbb{A}$ e $\widetilde{\mathbb{A}}$ coincidono su Sym$_0$ si conclude che

$$\mathbb{A}[\mathbf{A}] = \widetilde{\mathbb{A}}[\mathbf{A}] = 2\mu\mathbf{A} + \lambda\ tr(\mathbf{A})\mathbf{I} = 2\mu\mathbf{A} \ \text{ per ogni } \mathbf{A}\in \text{ Sym}_0. \tag{2.433}$$

■

In particolare, se $\mathbb{A}$ è isotropo, allora $\mathbf{A}$ e $\mathbb{A}[\mathbf{A}]$ commutano, $\mathbf{A}\mathbb{A}[\mathbf{A}] = \mathbb{A}[\mathbf{A}]\mathbf{A}$.

Esercizio 124 *Dimostrare che l'applicazione R :Psym→Psym che ad ogni tensore $\mathbf{C}$ associa $\sqrt{\mathbf{C}}$ è isotropa.*

Soluzione. Per ogni $\mathbf{C}$ $\in$Psym, $\mathbf{Q}$ $\in$Orth, si ha

$$(\mathbf{Q}\sqrt{\mathbf{C}}\mathbf{Q}^T)^2 = \mathbf{Q}\sqrt{\mathbf{C}}\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\sqrt{\mathbf{C}}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T. \tag{2.434}$$

Esercizio 125 *Sia G :Sym→Sym un'applicazione invertibile e isotropa, dimostrare che G^{-1} è isotropa.*

Soluzione. Per ogni $\mathbf{A}$ ∈Sym, $\mathbf{Q}$ ∈Orth, si ha

$$G(\mathbf{Q}G^{-1}(\mathbf{A})\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T, \tag{2.435}$$

applicando G^{-1} si ottiene

$$\mathbf{Q}G^{-1}(\mathbf{A})\mathbf{Q}^T = G^{-1}(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T). \tag{2.436}$$

Esercizio 126 *L'applicazione G :Lin→Lin definita da $G(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^k$, $k \in \mathbb{N}$ è isotropa.*

Esercizio 127 *L'applicazione G :Lin$^+$ →Lin$^+$ definita da $G(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-1}$, è isotropa.*

Dagli esercizi 124 e 127 segue che l'applicazione S :Psym→Psym definita da $S(\mathbf{C}) = (R(\mathbf{C}))^{-1} = (\sqrt{\mathbf{C}})^{-1}$ è isotropa. Inoltre l'applicazione che ad ogni $\mathbf{F}$ ∈Lin$^+$ associa il tensore $\mathbf{F}\mathbf{F}^T$ ∈Psym è isotropa; tenendo conto del fatto che la composizione di due applicazioni isotrope è isotropa, le applicazioni definite da Lin$^+$ a valori in Psym che ad ogni tensore $\mathbf{F}$ associano il tensore $\mathbf{U}$ della decomposizione polare destra di $\mathbf{F}$ e $\mathbf{U}^{-1}$ sono isotrope. Anche l'applicazione definita da Lin$^+$ a valori in Orth$^+$ che ad ogni tensore $\mathbf{F}$ associa il tensore $\mathbf{R}$ della decomposizione polare destra di $\mathbf{F}$ è isotropa.

Esercizio 128 *Un funzionale $\phi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ è isotropo se*

$$\phi(\mathbf{v}) = \phi(\mathbf{Q}\mathbf{v}), \text{ per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \mathbf{Q} \in Orth. \tag{2.437}$$

Mostrare che ϕ è isotropo se e solo se esiste una funzione $\widetilde{\phi} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tale che

$$\phi(\mathbf{v}) = \widetilde{\phi}(||\mathbf{v}||), \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \tag{2.438}$$

Soluzione. Supponiamo che ϕ sia isotropo, basta dimostrare che per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ tali che $||\mathbf{v}|| = ||\mathbf{w}||$, allora $\phi(\mathbf{v}) = \phi(\mathbf{w})$. Dato che $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ hanno lo stesso modulo, esiste un tensore ortogonale $\mathbf{Q}$ tale che $\mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{w}$, dato che ϕ è isotropo si ha $\phi(\mathbf{v}) = \phi(\mathbf{Q}\mathbf{v}) = \phi(\mathbf{w})$.

Esercizio 129 *Un'applicazione $\mathbf{q} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ è isotropa se*

$$\mathbf{Q}\mathbf{q}(\mathbf{v}) = \mathbf{q}(\mathbf{Q}\mathbf{v}), \text{ per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \mathbf{Q} \in Orth. \tag{2.439}$$

Mostrare che $\mathbf{q}$ è isotropa se e solo se esiste una funzione $\xi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tale che

$$\mathbf{q}(\mathbf{v}) = \xi(||\mathbf{v}||)\mathbf{v}, \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \tag{2.440}$$

Soluzione. Dato $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, sia $\mathbf{R}$ una rotazione tale che $\mathbf{Rv} = \mathbf{v}$, si ha allora $\mathbf{Rq}(\mathbf{v}) = \mathbf{q}(\mathbf{Rv}) = \mathbf{q}(\mathbf{v})$, quindi $\mathbf{q}(\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{v})\mathbf{v}$. Per completare la dimostrazione basta provare che α è un funzionale isotropo: tenendo conto del fatto che $\mathbf{q}$ è isotropo, per ogni tensore $\mathbf{Q}$ ∈Orth si ha

$$\alpha(\mathbf{Qv})\mathbf{Qv} = \mathbf{q}(\mathbf{Qv}) = \mathbf{Qq}(\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{v})\mathbf{Qv}, \tag{2.441}$$

quindi $\alpha(\mathbf{Qv}) = \alpha(\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$.

Esercizio 130 *Sia* $n = 3$. *Siano* $\mathbf{C} \in$ *Psym,* $\mathbf{C} \neq \mathbf{I}$ *e* $c > 0$. *Supponiamo che* $\mathbf{C}$ *abbia autovalori distinti, calcolare* $(\mathbf{C} + c\mathbf{I})^{-1}$.

Soluzione. Cominciamo con l'osservare che poiché gli autovalori di $\mathbf{C}$ sono distinti, per il lemma di Wang, i tensori $\mathbf{I}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{C}^2$ sono linearmente indipendenti. Cerchiamo $(\mathbf{C} + c\mathbf{I})^{-1}$ della forma $\alpha\mathbf{C}^2 + \beta\mathbf{C} + \gamma\mathbf{I}$, con α, β, γ da determinare. Dall'equazione

$$(\mathbf{C} + c\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{C} + c\mathbf{I}) = (\alpha\mathbf{C}^2 + \beta\mathbf{C} + \gamma\mathbf{I})(\mathbf{C} + c\mathbf{I}) = \mathbf{I},$$

applicando il teorema di Cayley-Hamilton per ricavare $\mathbf{C}^3$ si ottiene

$$\mathbf{C}^2[\alpha I_1(\mathbf{C}) + \alpha c + \beta] + \mathbf{C}[-\alpha I_2(\mathbf{C}) + \beta c + \gamma] + \mathbf{I}[\alpha I_3(\mathbf{C}) + \gamma c - 1] = 0.$$

Imponendo che i coefficienti di $\mathbf{C}^2, \mathbf{C}$ e $\mathbf{I}$ siano nulli si ottiene il sistema lineare in tre equazioni nelle tre incognite α, β, γ,

$$\begin{cases} [c + I_1(\mathbf{C})]\alpha + \beta = 0 \\ -I_2(\mathbf{C})\alpha + c\beta + \gamma = 0 \\ I_3(\mathbf{C})\alpha + c\gamma = 1 \end{cases}$$

la cui soluzione conduce all'espressione

$$\begin{aligned}(\mathbf{C} + c\mathbf{I})^{-1} = \{I_3(\mathbf{C}) + c[I_2(\mathbf{C}) + c(c + I_1(\mathbf{C}))]\}^{-1}\{\mathbf{C}^2 - \\ (c + I_1(\mathbf{C}))\mathbf{C} + [I_2(\mathbf{C}) + c(c + I_1(\mathbf{C}))]\mathbf{I}\}.\end{aligned} \tag{2.442}$$

Si osservi che nel caso generale, in cui si rimuova l'ipotesi che $\mathbf{C}$ ha tre autovalori distinti e $\mathbf{C} \neq \mathbf{I}$, dalla rappresentazione spettrale di $\mathbf{C}$, $\mathbf{C} = \sum_{i=1}^{3} c_i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_i$, si ricava

$$\mathbf{C} + c\mathbf{I} = \sum_{i=1}^{3}(c_i + c)\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_i,$$

da cui

$$(\mathbf{C} + c\mathbf{I})^{-1} = \sum_{i=1}^{3}(c_i + c)^{-1}\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_i. \tag{2.443}$$

2.19 Convergenza di tensori

Sia $n = 3$. Dato $\mathbf{A} \in$Lin, da (2.77) discende che

$$||\mathbf{A}|| \geq \sup_{\mathbf{u}\neq\mathbf{0}} \frac{||\mathbf{Au}||}{||\mathbf{u}||} \tag{2.444}$$

dove $||\mathbf{A}||$ è data in (2.68). La quantità

$$||\mathbf{A}||_N = \sup_{\mathbf{u}\neq\mathbf{0}} \frac{||\mathbf{Au}||}{||\mathbf{u}||} \tag{2.445}$$

è una norma su Lin (confronta (1.88)), detta *norma naturale*. In particolare si ha

$$||\mathbf{A}||^2 = tr(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \tag{2.446}$$

dove $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ sono gli autovalori del tensore $\mathbf{A}^T\mathbf{A} \in$Sym$^+$ e

$$\frac{||\mathbf{Au}||^2}{||\mathbf{u}||^2} = \frac{\mathbf{A}^T\mathbf{Au}\cdot\mathbf{u}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}} \tag{2.447}$$

è il quoziente di Rayleigh del tensore $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ che soddisfa le diseguaglianze

$$\lambda_1 \leq \frac{\mathbf{A}^T\mathbf{Au}\cdot\mathbf{u}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}} \leq \lambda_3, \tag{2.448}$$

da cui discende che

$$||\mathbf{A}||_N^2 = \lambda_3. \tag{2.449}$$

In particolare

$$||\mathbf{A}||_N^2 \leq ||\mathbf{A}||^2 \leq 3||\mathbf{A}||_N^2. \tag{2.450}$$

Vogliamo ora definire la convergenza di una successione di tensori $\{\mathbf{A}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ad un tensore $\mathbf{A} \in$Lin.

(i) $||\mathbf{A}_k - \mathbf{A}|| \to 0 \quad$ quando $k \to \infty$.

(ii) $||\mathbf{A}_k\mathbf{u} - \mathbf{Au}|| \to 0 \quad$ quando $k \to \infty$, per ogni fissato $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$.

(iii) $|\mathbf{A}_k\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{Au}\cdot\mathbf{v}| \to 0 \quad$ quando $k \to \infty$, per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$.

Proposizione 131 *Le condizioni (i), (ii) e (iii) sono equivalenti.*

Dimostrazione. Se vale (i), allora per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ si ha

$$||\mathbf{A}_k\mathbf{u} - \mathbf{Au}|| = ||(\mathbf{A}_k - \mathbf{A})\mathbf{u}|| \leq ||\mathbf{A}_k - \mathbf{A}||\ ||\mathbf{u}|| \to 0, \tag{2.451}$$

quindi (i)⇒(ii). Nella Sezione 1.9 abbiamo provato che (ii)⇒(iii) e che in spazi vettoriali di dimensione finita (iii)⇒(ii). Resta da dimostrare che in uno spazio di dimensione finita (ii)⇒(i). Sia $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}$, se vale (ii), allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $k_0 = k(\varepsilon)$ tale che $||\mathbf{A}_k\mathbf{u}_i - \mathbf{A}\mathbf{u}_i|| < \varepsilon$ per $k \geq k_0$ e per $i = 1, 2, 3$. Dato $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, si ha $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{3}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i$ e quindi

$$||(\mathbf{A}_k - \mathbf{A})\mathbf{u}|| = ||\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_i)(\mathbf{A}_k - \mathbf{A})\mathbf{u}_i|| \leq$$

$$\sum_{i=1}^{3} ||\mathbf{u}|| \, ||(\mathbf{A}_k - \mathbf{A})\mathbf{u}_i|| \leq 3\varepsilon||\mathbf{u}||, \tag{2.452}$$

quindi $||\mathbf{A}_k - \mathbf{A}||_N \to 0$ che unita a (2.450) dà (i). ■

Si osservi che il prodotto interno su $\mathcal{V}$ e il prodotto vettoriale in quanto applicazioni bilineari, sono continue. Infatti, siano $\mathbf{u}_k \to \mathbf{u}$, $\mathbf{v}_k \to \mathbf{v}$, si ha

$$|\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_k - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_k - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_k| + |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_k - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|,$$

$$||\mathbf{u}_k \wedge \mathbf{v}_k - \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|| \leq ||\mathbf{u}_k \wedge \mathbf{v}_k - \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}_k|| + ||\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}_k - \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|| \leq$$
$$||(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}) \wedge \mathbf{v}_k|| + ||\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v}_k - \mathbf{v})|| \leq$$
$$||\mathbf{u}_k - \mathbf{u}|| \, ||\mathbf{v}_k|| + ||\mathbf{v}_k - \mathbf{v}|| \, ||\mathbf{u}||.$$

Esercizio 132 *Provare che*

(a) $\varphi_1 : Lin \to \mathbb{R}$, $\varphi_1(\mathbf{A}) = ||\mathbf{A}||$,

(b) $T_1 : Lin \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, $T_1(\mathbf{A}, \mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$,

(c) $\varphi_3 : Lin \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, $\varphi_3(\mathbf{A}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$,

(d) $\varphi_2 : Lin \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, $\varphi_2(\mathbf{A}, \mathbf{u}) = ||\mathbf{A}\mathbf{u}||$,

(e) $T_2 : Lin \times Lin \to Lin$, $T_2(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{A} + \mathbf{B}$,

(f) $T_3 : Lin \times \mathbb{R} \to Lin$, $T_3(\mathbf{A}, \alpha) = \alpha\mathbf{A}$,

(g) $T_4 : Lin \times Lin \to Lin$, $T_4(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{A}\mathbf{B}$,

(h) $T_5 : Lin \to Lin$, $T_5(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T$,

(i) $\varphi_4 : Lin \to \mathbb{R}$, $\varphi_4(\mathbf{A}) = tr\mathbf{A}$,

(j) $\varphi_5 : Lin \to \mathbb{R}$, $\varphi_5(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A}$,

(l) $T_6 : Inv \to Inv$, $T_5(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-1}$,

sono applicazioni continue.

Soluzione.

(a) Sia $\mathbf{A}_k \to \mathbf{A}$, dalla seconda diseguaglianza triangolare (1.27) discende che $||| \mathbf{A}_k || - || \mathbf{A} ||| \leq || \mathbf{A}_k - \mathbf{A} ||$.

(b) Siano $\mathbf{A}_k \to \mathbf{A}$ e $\mathbf{u}_k \to \mathbf{u}$,

$$||\mathbf{A}_k \mathbf{u}_k - \mathbf{A}\mathbf{u}|| \leq ||\mathbf{A}_k \mathbf{u}_k - \mathbf{A}_k \mathbf{u}|| + ||\mathbf{A}_k \mathbf{u} - \mathbf{A}\mathbf{u}|| \leq$$

$$||\mathbf{A}_k|| \; ||\mathbf{u}_k - \mathbf{u}|| + ||\mathbf{A}_k \mathbf{u} - \mathbf{A}\mathbf{u}||.$$

(c) Siano $\mathbf{A}_k \to \mathbf{A}$, $\mathbf{u}_k \to \mathbf{u}$, $\mathbf{v}_k \to \mathbf{v}$, si ha

$$|\mathbf{A}_k \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_k - \mathbf{A}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{A}_k \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_k - \mathbf{A}\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_k| +$$

$$|\mathbf{A}\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_k - \mathbf{A}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_k| + |\mathbf{A}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_k - \mathbf{A}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|.$$

(j) Siano $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}$ con $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{A}_k \to \mathbf{A}$, in vista di (2.184) si ha

$$|\det \mathbf{A}_k - \det \mathbf{A}| = |\mathbf{A}_k \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{A}_k \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{A}_k \mathbf{e}_3) - \mathbf{A}\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{A}\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{A}\mathbf{e}_3)|.$$

La tesi discende da (d) e dalla continuità del prodotto vettoriale e del prodotto interno su $\mathcal{V}$.

(l) Per il teorema di Cayley-Hamilton, $T_6(\mathbf{A}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}[\mathbf{A}^2 - I_1(\mathbf{A})\mathbf{A} + I_2(\mathbf{A})\mathbf{I}]$, quindi T_6 è continua in quanto somma, prodotto e quoziente di applicazioni continue.

2.20 Derivate di funzionali e di applicazioni a valori vettoriali e tensoriali.

Sia $n = 3$.

Esercizio 133 *Calcolare la derivata delle seguenti applicazioni.*

(a) $\varphi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$\varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

(b) F :*Lin*$\to$*Lin definita da*

$$G(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2, \quad \mathbf{A} \in Lin. \tag{2.453}$$

(c) F :*Lin*$\to$*Lin definita da*

$$F(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^3, \quad \mathbf{A} \in Lin. \tag{2.454}$$

Soluzione.

(a) Fissato $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ si ha

$$\varphi(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = (\mathbf{v} + \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{u}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} =$$

$$\varphi(\mathbf{v}) + 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} + o(\mathbf{u}) \quad \mathbf{u}\to\mathbf{0}, \tag{2.455}$$

da cui

$$D\varphi(\mathbf{v})[\mathbf{u}] = 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}\in\mathcal{V}.$$

(b) Fissato $\mathbf{A}$ ∈Lin si ha

$$G(\mathbf{A}+\mathbf{U}) = (\mathbf{A}+\mathbf{U})(\mathbf{A}+\mathbf{U}) =$$

$$\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}\mathbf{U} + \mathbf{U}\mathbf{A} + \mathbf{U}^2 = G(\mathbf{A}) + \mathbf{A}\mathbf{U} + \mathbf{U}\mathbf{A} + o(\mathbf{U}), \quad \mathbf{U}\to\mathbf{0}, \tag{2.456}$$

dove l'ultima uguaglianza discende dalla submoltiplicatività della norma,

$$||\mathbf{U}^2|| \leq ||\mathbf{U}||^2.$$

Da (2.456) si ricava che

$$DG(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = \mathbf{A}\mathbf{U} + \mathbf{U}\mathbf{A}, \quad \mathbf{U}\in \text{Lin}, \tag{2.457}$$

e quindi $DG(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\boxtimes\mathbf{I} + \mathbf{I}\boxtimes\mathbf{A}^T$.

L'applicazione DG :Lin→ $\mathcal{L}$(Lin,Lin) che ad ogni $\mathbf{A}$ ∈Lin associa il tensore del quarto ordine $DG(\mathbf{A})$ è continua. Per dimostrare la continuità, dato $\mathbf{A}_k \to \mathbf{A}$, dobbiamo provare che $DG(\mathbf{A}_k)$ converge a $DG(\mathbf{A})$. In vista di (2.457) si ha

$$||DG(\mathbf{A}_k) - DG(\mathbf{A})|| = \sup_{\substack{\mathbf{H}\in\text{Lin}\\ \mathbf{H}\neq\mathbf{0}}} \frac{||DG(\mathbf{A}_k)[\mathbf{H}] - DG(\mathbf{A})[\mathbf{H}]||}{||\mathbf{H}||} =$$

$$\sup_{\substack{\mathbf{H}\in\text{Lin}\\ \mathbf{H}\neq\mathbf{0}}} \frac{||\mathbf{A}_k\mathbf{H} + \mathbf{H}\mathbf{A}_k - \mathbf{A}\mathbf{H} - \mathbf{H}\mathbf{A}||}{||\mathbf{H}||} \leq \sup_{\substack{\mathbf{H}\in\text{Lin}\\ \mathbf{H}\neq\mathbf{0}}} \frac{||\mathbf{A}_k\mathbf{H} - \mathbf{A}\mathbf{H}|| + ||\mathbf{H}\mathbf{A}_k - \mathbf{H}\mathbf{A}||}{||\mathbf{H}||} \leq$$

$$\sup_{\substack{\mathbf{H}\in\text{Lin}\\ \mathbf{H}\neq\mathbf{0}}} \frac{||\mathbf{A}_k\mathbf{H} - \mathbf{A}\mathbf{H}||}{||\mathbf{H}||} + \sup_{\substack{\mathbf{H}\in\text{Lin}\\ \mathbf{H}\neq\mathbf{0}}} \frac{||\mathbf{H}\mathbf{A}_k - \mathbf{H}\mathbf{A}||}{||\mathbf{H}||} \leq 2||\mathbf{A}_k - \mathbf{A}||. \tag{2.458}$$

Ciò consente di concludere che G è di classe C^1.

(c) Fissato $\mathbf{A}$ ∈Lin si ha

$$F(\mathbf{A}+\mathbf{U}) = \mathbf{A}^3 + \mathbf{A}^2\mathbf{U} + \mathbf{U}\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{A} +$$

$$\mathbf{A}\mathbf{U}^2 + \mathbf{U}^2\mathbf{A} + \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U} + \mathbf{U}^3 =$$

$$F(\mathbf{A}) + \mathbf{A}^2\mathbf{U} + \mathbf{U}\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{A} + o(\mathbf{U}), \quad \mathbf{U}\to\mathbf{0}, \tag{2.459}$$

dove si è tenuto conto del fatto che

$$||\mathbf{A}\mathbf{U}^2 + \mathbf{U}^2\mathbf{A} + \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U} + \mathbf{U}^3|| \leq 3||\mathbf{A}||\ ||\mathbf{U}||^2 + ||\mathbf{U}||^3,$$

e quindi $\mathbf{A}\mathbf{U}^2 + \mathbf{U}^2\mathbf{A} + \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U} + \mathbf{U}^3 = o(\mathbf{U}), \quad \mathbf{U}\to\mathbf{0}$.

Da (2.459) discende che $DF(\mathbf{A})$ è il tensore del quarto ordine definito da

$$DF(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = \mathbf{A}^2\mathbf{U} + \mathbf{U}\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{A}, \quad \mathbf{U}\in \text{Lin}, \tag{2.460}$$

con $DF(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2\boxtimes\mathbf{I} + \mathbf{I}\boxtimes(\mathbf{A}^2)^T + \mathbf{A}\boxtimes\mathbf{A}^T$.

Esercizio 134 *Calcolare le derivate delle seguenti applicazioni da Lin in Lin:*

(a) $G(\mathbf{A}) = (tr\mathbf{A})\mathbf{A}$, *per ogni* $\mathbf{A} \in$*Lin.*

(b) $G(\mathbf{A}) = \mathbf{ABA}$, *per ogni* $\mathbf{A} \in$*Lin,* $\mathbf{B} \in$*Lin fissato.*

(c) $G(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$, *per ogni* $\mathbf{A} \in$*Lin.*

(d) $G(\mathbf{A}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{Au})\mathbf{A}$, *per ogni* $\mathbf{A} \in$*Lin,* $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ *fissato.*

Soluzione.

(a) Per ogni $\mathbf{U} \in$Lin si ha

$$G(\mathbf{A}+\mathbf{U}) = tr(\mathbf{A}+\mathbf{U})(\mathbf{A}+\mathbf{U}) =$$

$$tr(\mathbf{A})\mathbf{A} + tr(\mathbf{U})\mathbf{A} + tr(\mathbf{A})\mathbf{U} + tr(\mathbf{U})\mathbf{U},$$

poiché $||tr(\mathbf{U})\mathbf{U}|| = |\mathbf{I}\cdot\mathbf{U}|\ ||\mathbf{U}|| \leq \sqrt{3}||\mathbf{U}||^2$, si ha che $tr(\mathbf{U})\mathbf{U} = o(\mathbf{U})$ per $\mathbf{U} \to \mathbf{0}$, quindi

$$DG(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = tr(\mathbf{U})\mathbf{A} + tr(\mathbf{A})\mathbf{U}, \quad \text{per ogni } \mathbf{U} \in \text{Lin}$$

e

$$DG(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{I} + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{I})\mathbb{I}.$$

(b) Per ogni $\mathbf{U} \in$Lin si ha

$$G(\mathbf{A}+\mathbf{U}) = (\mathbf{A}+\mathbf{U})\mathbf{B}(\mathbf{A}+\mathbf{U}) =$$

$$G(\mathbf{A}) + \mathbf{UBA} + \mathbf{ABU} + \mathbf{UBU},$$

Dato che $\mathbf{UBU} = o(\mathbf{U})$, $\mathbf{U} \to \mathbf{0}$, si ha

$$DG(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = \mathbf{UBA} + \mathbf{ABU}, \quad \text{per ogni } \mathbf{U} \in \text{Lin},$$

e

$$DG(\mathbf{A}) = \mathbf{AB} \boxtimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \boxtimes (\mathbf{BA})^T.$$

(c) Per ogni $\mathbf{U} \in$Lin si ha

$$G(\mathbf{A}+\mathbf{U}) = (\mathbf{A}^T + \mathbf{U}^T)(\mathbf{A}+\mathbf{U}) =$$

$$G(\mathbf{A}) + \mathbf{A}^T\mathbf{U} + \mathbf{U}^T\mathbf{A} + \mathbf{U}^T\mathbf{U}.$$

Dato che $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = o(\mathbf{U})$, $\mathbf{U} \to \mathbf{0}$, si ha

$$DG(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = \mathbf{A}^T\mathbf{U} + \mathbf{U}^T\mathbf{A}, \quad \text{per ogni } \mathbf{U} \in \text{Lin}.$$

Teorema 135 *Sia φ il funzionale definito sul sottoinsieme Inv di Lin costituito dai tensori invertibili*

$$\varphi(\mathbf{A}) = \det\mathbf{A}. \tag{2.461}$$

φ è di classe C^1 e

$$D\varphi(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = (\det\mathbf{A})tr(\mathbf{U}\mathbf{A}^{-1}), \quad \textit{per ogni } \mathbf{U} \in \textit{Lin}. \tag{2.462}$$

Dimostrazione. Innanzi tutto osserviamo che l'insieme Inv$= \{\mathbf{A} \in$Lin $\mid \det \mathbf{A} \neq 0\}$ è un aperto di Lin in quanto complementare dell'insieme Ninv$= \{\mathbf{A} \in$Lin $\mid \det \mathbf{A} = 0\}$ che risulta chiuso in quanto immagine inversa del chiuso $\{0\}$ di $\mathbb{R}$ mediante la funzione continua det. Dato $\mathbf{B} \in$Lin, da (2.239) e (2.240) con $a = -1$ si ricava

$$\det(\mathbf{B} + \mathbf{I}) = 1 + I_1(\mathbf{B}) + I_2(\mathbf{B}) + I_3(\mathbf{B}). \tag{2.463}$$

Dalla relazione $\det \mathbf{B} = \frac{1}{6}[(tr\mathbf{B})^3 - 3(tr\mathbf{B})tr(\mathbf{B}^2) + 2tr(\mathbf{B}^3)]$, discende che

$$|\det \mathbf{B}| \leq \frac{1}{6}[|tr\mathbf{B}|^3 + 3|tr\mathbf{B}|\ |tr(\mathbf{B}^2)| + 2|tr(\mathbf{B}^3)|] \leq$$

$$\frac{\sqrt{3}}{6}[3||\mathbf{B}||^3 + 9|\mathbf{B}||^2 + 2||\mathbf{B}||^3], \tag{2.464}$$

quindi $\det \mathbf{B} = o(\mathbf{B})$, $\mathbf{B} \to \mathbf{0}$ e

$$\det(\mathbf{B} + \mathbf{I}) = 1 + I_1(\mathbf{B}) + o(\mathbf{B}), \quad \mathbf{B} \to \mathbf{0}. \tag{2.465}$$

Allora fissato $\mathbf{A} \in$Inv, per ogni $\mathbf{U} \in$Lin, si ha

$$\det(\mathbf{A} + \mathbf{U}) = \det[(\mathbf{I} + \mathbf{U}\mathbf{A}^{-1})\mathbf{A}] =$$

$$(\det \mathbf{A}) \det(\mathbf{I} + \mathbf{U}\mathbf{A}^{-1}) = (\det \mathbf{A})[1 + tr(\mathbf{U}\mathbf{A}^{-1}) + o(\mathbf{U})], \quad \mathbf{U} \to \mathbf{0}. \tag{2.466}$$

Dato che l'applicazione $\mathbf{U} \mapsto tr(\mathbf{U}\mathbf{A}^{-1})$ è lineare, da (2.466) discende (2.462). Inoltre la continuità dell'applicazione $D\varphi$ definita da Inv a valori in $\mathcal{L}(\text{Lin}, \mathbb{R})$, discende dalla continuità del determinante e dell'operazione di inversione. In particolare, dobbiamo dimostrare che se $\mathbf{A}_k \to \mathbf{A}$, in Inv, allora $D\varphi(\mathbf{A}_k) \to D\varphi(\mathbf{A})$ in $\mathcal{L}(\text{Lin}, \mathbb{R})$,

$$||D\varphi(\mathbf{A}_k) - D\varphi(\mathbf{A})|| = \sup_{\substack{\mathbf{H} \in \text{Lin} \\ \mathbf{H} \neq \mathbf{0}}} \frac{|D\varphi(\mathbf{A}_k)[\mathbf{H}] - D\varphi(\mathbf{A})[\mathbf{H}]|}{||\mathbf{H}||} =$$

$$\sup_{\substack{\mathbf{H} \in \text{Lin} \\ \mathbf{H} \neq \mathbf{0}}} \frac{|(\det \mathbf{A}_k)tr(\mathbf{H}\mathbf{A}_k^{-1}) - (\det \mathbf{A})tr(\mathbf{H}\mathbf{A}^{-1})|}{||\mathbf{H}||} =$$

$$\sup_{\substack{\mathbf{H} \in \text{Lin} \\ \mathbf{H} \neq \mathbf{0}}} \frac{|(\det \mathbf{A}_k)\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{A}_k^{-1} - (\det \mathbf{A})\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{A}^{-1}|}{||\mathbf{H}||} \leq$$

$$\sup_{\substack{\mathbf{H} \in \text{Lin} \\ \mathbf{H} \neq \mathbf{0}}} \frac{|\mathbf{H}^T \cdot [(\det \mathbf{A}_k)\mathbf{A}_k^{-1} - (\det \mathbf{A})\mathbf{A}^{-1}]|}{||\mathbf{H}||} \leq$$

$$||(\det \mathbf{A}_k)\mathbf{A}_k^{-1} - (\det \mathbf{A}_k)\mathbf{A}^{-1}|| +$$

$$||(\det \mathbf{A}_k)\mathbf{A}^{-1} - (\det \mathbf{A})\mathbf{A}^{-1}|| \leq$$

$$|\det \mathbf{A}_k|\ ||\mathbf{A}_k^{-1} - \mathbf{A}^{-1}|| + ||\mathbf{A}^{-1}||\ |\det \mathbf{A}_k - \det \mathbf{A}|,$$

e la tesi discende dalla continuità del determinante (esercizio 132 (j)) e della applicazione T_6 (esercizio 132 (l)). ■

Da (2.462) e (2.196) discende che la derivata del determinante di un tensore $\mathbf{A}$ ∈Inv coincide con il suo cofattore $\mathbf{A}^*$.

Esercizio 136 *Sia G :Inv→Lin tale che $G(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-1}$. Dopo avere assunto che G è differenziabile, mostrare che*

$$DG(\mathbf{A})[\mathbf{H}] = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{A}^{-1}, \quad \mathbf{A} \in \mathit{Lin}. \tag{2.467}$$

Soluzione. Consideriamo l'applicazione lineare F :Inv→Inv tale che $F(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$. Si consideri l'applicazione prodotto

$$(FG)(\mathbf{A}) = F(\mathbf{A})G(\mathbf{A}) = \mathbf{I}, \quad \mathbf{A} \in \mathrm{Inv}. \tag{2.468}$$

Dalla regola di derivazione del prodotto segue che

$$DF(\mathbf{A})[\mathbf{H}]G(\mathbf{A}) + F(\mathbf{A})DG(\mathbf{A})[\mathbf{H}] = \mathbf{0}, \quad \mathbf{H} \in \mathrm{Lin}, \tag{2.469}$$

da cui

$$\mathbf{H}\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}DG(\mathbf{A})[\mathbf{H}] = \mathbf{0}, \tag{2.470}$$

e quindi (2.467) è soddisfatta.

Esercizio 137 *Sia ψ :Inv→ $\mathbb{R}$ tale che $\psi(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^2)$. Calcolare $D\psi(\mathbf{A})$ per ogni $\mathbf{A}$ ∈Inv.*

Soluzione. Siano φ :Inv→ $\mathbb{R}$ tale che $\varphi(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$ e G :Inv→Inv tale che $G(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2$. Tenuto conto che $\psi = \varphi \circ G$, per ogni $\mathbf{H}$ ∈Lin si ha

$$\begin{gathered} D\psi(\mathbf{A})[\mathbf{H}] = D\varphi(G(\mathbf{A}))[DG(\mathbf{A})[\mathbf{H}]] = \\ \det(\mathbf{A}^2)tr(DG(\mathbf{A})[\mathbf{H}]\mathbf{A}^{-2}) = \\ \det(\mathbf{A}^2)tr((\mathbf{A}\mathbf{H} + \mathbf{H}\mathbf{A})\mathbf{A}^{-2}) = 2\det(\mathbf{A}^2)tr(\mathbf{H}\mathbf{A}^{-1}). \end{gathered} \tag{2.471}$$

Esercizio 138 *Sia ψ :Inv→ $\mathbb{R}$ tale che $\psi(\mathbf{A}) = (\det \mathbf{A})tr(\mathbf{A}^{-1})$, $\mathbf{A}$ ∈Inv. Calcolare $D\psi(\mathbf{A})$.*

Soluzione. Siano φ :Inv→ $\mathbb{R}$ tale che $\varphi(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$ e G :Inv→Inv tale che $G(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-1}$, si ha allora $\psi(\mathbf{A}) = \varphi(\mathbf{A})tr(G(\mathbf{A}))$. Pertanto

$$\begin{gathered} D\psi(\mathbf{A})[\mathbf{H}] = D\varphi(\mathbf{A})[\mathbf{H}]tr(G(\mathbf{A})) + \varphi(\mathbf{A})Dtr(G(\mathbf{A}))[DG(\mathbf{A})[\mathbf{H}]] = \\ (\det \mathbf{A})tr(\mathbf{H}\mathbf{A}^{-1})tr(\mathbf{A}^{-1}) + \\ (\det \mathbf{A})tr(-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{A}^{-1}) = \\ (\det \mathbf{A})\{tr(\mathbf{A}^{-1})tr(\mathbf{H}\mathbf{A}^{-1}) - tr(\mathbf{H}\mathbf{A}^{-2})\} = \\ (\det \mathbf{A})\{tr(\mathbf{A}^{-1})\mathbf{A}^{-T} - \mathbf{A}^{-2T}\} \cdot \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} \in \mathrm{Lin}. \end{gathered} \tag{2.472}$$

Esercizio 139 *Sia* I_2 *:Lin*$\rightarrow \mathbb{R}$ *il funzionale definito da* $I_2(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}[(tr\mathbf{A})^2 - tr(\mathbf{A}^2)]$. *Calcolare* $DI_2(\mathbf{A})$.

Soluzione.

$$I_2(\mathbf{A}+\mathbf{H}) = \frac{1}{2}[(tr(\mathbf{A}+\mathbf{H}))^2 - tr((\mathbf{A}+\mathbf{H})^2)] =$$

$$I_2(\mathbf{A}) + tr(\mathbf{A})tr(\mathbf{H}) - tr(\mathbf{A}\mathbf{H}) + o(\mathbf{H}), \quad \mathbf{H} \rightarrow 0,$$

quindi

$$DI_2(\mathbf{A})[\mathbf{H}] = \{tr(\mathbf{A})\mathbf{I} - \mathbf{A}^T\} \cdot \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} \in \mathrm{Lin}$$

e

$$DI_2(\mathbf{A}) = tr(\mathbf{A})\mathbf{I} - \mathbf{A}^T.$$

Esercizio 140 *Sia* f *:Lin*$\rightarrow \mathbb{R}$ *definita da*

$$f(\mathbf{K}) = ||\mathbf{K}_0||^2 - \rho^2(tr\mathbf{K}), \tag{2.473}$$

con $\mathbf{K}_0 = \mathbf{K} - (tr\mathbf{K})\mathbf{I}/3$ *il deviatore di* $\mathbf{K}$ *e* $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *una funzione continua e differenziabile. Calcolare* $Df(\mathbf{K})$.

Soluzione. Cominciamo con l'osservare che $D\mathbf{K}_0(\mathbf{K})[\mathbf{U}] = \mathbf{U}_0$; avendo in mente che $||\mathbf{K}_0||^2 = \mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{K}_0$, sfruttando il teorema di derivazione della composizione di funzioni, si ricava

$$Df(\mathbf{K})[\mathbf{U}] = 2(\mathbf{K}_0 - 2\rho(tr\mathbf{K})\rho'(tr\mathbf{K})\mathbf{I}) \cdot \mathbf{U}, \quad \text{per ogni } \mathbf{U} \in \mathrm{Lin}, \tag{2.474}$$

dove ρ' indica la derivata di ρ rispetto alla variabile indipendente.

Esercizio 141 *Per ogni intero* $k \geq 1$ *si consideri il funzionale* τ_k *:Lin*$\rightarrow \mathbb{R}$ *definito da* $\tau_k(\mathbf{A}) = tr(\mathbf{A}^k)$, *con* $\mathbf{A}^k$ *definita in (2.9). Dimostrare che*

$$D\tau_k(\mathbf{A}) = k(\mathbf{A}^{k-1})^T. \tag{2.475}$$

Soluzione. Cominciamo innanzi tutto con l'osservare che per induzione si può dimostrare la seguente relazione

$$(\mathbf{A}+\mathbf{H})^k = \mathbf{A}^k + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^i\mathbf{H}\mathbf{A}^{k-1-i} + o(\mathbf{H}), \quad \mathbf{H} \rightarrow 0. \tag{2.476}$$

Calcolando la traccia di entrambi i membri di (2.476) si ricava che

$$D\tau_k(\mathbf{A})[\mathbf{H}] = k\ tr(\mathbf{H}\mathbf{A}^{k-1}), \quad \mathbf{H} \in \mathrm{Lin}, \tag{2.477}$$

da cui la tesi.

Esercizio 142 *Sia* $\mathbf{L}$ *un tensore del secondo ordine fissato, per ogni intero* $k \geq 1$ *si consideri il funzionale* ψ_k *:Lin*$\rightarrow \mathbb{R}$ *definito da* $\psi_k(\mathbf{A}) = tr(\mathbf{A}^k\mathbf{L})$. *Si calcoli* $D\psi_k(\mathbf{A})$.

Soluzione. In vista di (2.476) si ha

$$\psi_k(\mathbf{A}+\mathbf{H}) = \psi_k(\mathbf{A}) + tr(\sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^i\mathbf{H}\mathbf{A}^{k-1-i}\mathbf{L}) + o(\mathbf{H}), \quad \mathbf{H} \to 0, \tag{2.478}$$

da cui discende che

$$D\psi_k(\mathbf{A})[\mathbf{H}] = \sum_{i=0}^{k-1} (\mathbf{A}^i\mathbf{L}\mathbf{A}^{k-1-i})^T \cdot \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} \in \text{Lin}. \tag{2.479}$$

Dimostriamo adesso la seguente proposizione che esprime l'invarianza della derivata di una funzione invariante rispetto ad un insieme $\mathfrak{I} \subset$Orth.

Proposizione 143 *Siano $\mathfrak{I}$ un sottoinsieme di Orth, $\mathcal{A}$ un aperto contenuto in un sottospazio vettoriale $\mathcal{U}$ di Lin, con $\mathcal{A}$ invariante rispetto a $\mathfrak{I}$. Sia G : $\mathcal{A} \to$Lin invariante rispetto a $\mathfrak{I}$ e di classe C^1. Allora*

$$\mathbf{Q}DG(\mathbf{A})[\mathbf{U}]\mathbf{Q}^T = DG(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T)[\mathbf{Q}\mathbf{U}\mathbf{Q}^T], \tag{2.480}$$

per ogni $\mathbf{A} \in \mathcal{A}, \mathbf{U} \in \mathcal{U}, \mathbf{Q} \in \mathfrak{I}$.

Dimostrazione. Cominciamo col dimostrare che $\mathcal{U}$ invariante rispetto a $\mathfrak{I}$. Siano $\mathbf{U} \in \mathcal{U}, \mathbf{A} \in \mathcal{A}, \mathbf{Q} \in \mathfrak{I}$, poiché $\mathcal{A}$ è aperto esiste $\alpha > 0$ tale che $\mathbf{A}+\alpha\mathbf{U} \in \mathcal{A}$. Da

$$\mathbf{Q}(\mathbf{A}+\alpha\mathbf{U})\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T + \alpha\mathbf{Q}\mathbf{U}\mathbf{Q}^T \in \mathcal{A} \subset \mathcal{U} \tag{2.481}$$

tenendo conto che $\mathcal{U}$ è un sottospazio, si ricava che $\mathbf{Q}\mathbf{U}\mathbf{Q}^T \in \mathcal{U}$.

Siano ancora $\mathbf{A} \in \mathcal{A}, \mathbf{U} \in \mathcal{U}, \mathbf{Q} \in \mathfrak{I}$, si ha

$$\begin{aligned} G(\mathbf{Q}(\mathbf{A}+\mathbf{U})\mathbf{Q}^T) &= G(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{U}\mathbf{Q}^T) \\ &= G(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T) + DG(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T)[\mathbf{Q}\mathbf{U}\mathbf{Q}^T] + o(\mathbf{U}), \quad \mathbf{U} \to \mathbf{0}; \end{aligned} \tag{2.482}$$

d'altra parte, dato che G è invariante rispetto a $\mathfrak{I}$ si ha

$$G(\mathbf{Q}(\mathbf{A}+\mathbf{U})\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}G(\mathbf{A}+\mathbf{U})\mathbf{Q}^T, \tag{2.483}$$

e

$$\mathbf{Q}G(\mathbf{A}+\mathbf{U})\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}G(\mathbf{A})\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{D}G(\mathbf{A})[\mathbf{U}]\mathbf{Q}^T + o(\mathbf{U}), \quad \mathbf{U} \to \mathbf{0}. \tag{2.484}$$

Confrontando le relazioni (2.482) e (2.484) si ottiene finalmente (2.480). ■

Esercizio 144 *Sia T :Inv→Inv l' applicazione definita da*

$$T(\mathbf{V}) = \mu(\mathbf{V}\mathbf{V}^T - \mathbf{I}) + \lambda[(\det \mathbf{V})^2 - 1]\mathbf{I}, \quad \textit{con } \mu, \lambda \in \mathbb{R}; \tag{2.485}$$

calcolare $DT(\mathbf{V})$.

Soluzione. Si ha

$$DT(\mathbf{V})[\mathbf{H}] = \mu(\mathbf{V}\mathbf{H}^T + \mathbf{H}\mathbf{V}^T) + 2\lambda(\det \mathbf{V})^2\mathbf{I} \otimes \mathbf{V}^{-T}[\mathbf{H}], \quad \mathbf{H} \in \text{Lin}. \tag{2.486}$$

2.21 Derivate di funzioni definite su un aperto di $\mathbb{R}$

Sia $n = 3$. La proposizione seguente è una diretta conseguenza di (1.150).

Proposizione 145 *Dato un aperto $\mathcal{D}$ di $\mathbb{R}$ siano*

$$\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{R},$$

$$\mathbf{v}, \mathbf{w} : \mathcal{D} \to \mathcal{V},$$

$$\mathbf{A}, \mathbf{B} : \mathcal{D} \to Lin,$$

applicazioni di classe C^1. Valgono le seguenti relazioni

$$(\varphi \mathbf{v})^{\cdot} = \varphi \dot{\mathbf{v}} + \dot{\varphi} \mathbf{v}, \tag{2.487}$$

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^{\cdot} = \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{w}} + \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{w}, \tag{2.488}$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^{\cdot} = \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{B}} + \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B}, \tag{2.489}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{\cdot} = \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{B}} + \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B}, \tag{2.490}$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{v})^{\cdot} = \mathbf{A}\dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{A}}\mathbf{v}, \tag{2.491}$$

$$(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})^{\cdot} = \mathbf{v} \wedge \dot{\mathbf{w}} + \dot{\mathbf{v}} \wedge \mathbf{w}, \tag{2.492}$$

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})^{\cdot} = \mathbf{v} \otimes \dot{\mathbf{w}} + \dot{\mathbf{v}} \otimes \mathbf{w}, \tag{2.493}$$

$$(\varphi \mathbf{A})^{\cdot} = \varphi \dot{\mathbf{A}} + \dot{\varphi} \mathbf{A}. \tag{2.494}$$

Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}$, date la funzione vettoriale $\mathbf{v}(t)$ e la funzione tensoriale $\mathbf{A}(t)$, si ha

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \sum_{i=1}^{3} \dot{v}_i(t) \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{A}(t) = \sum_{i,j=1}^{3} \dot{A}_{ij}(t) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \tag{2.495}$$

Se $\mathbf{A}(t)$ è una funzione tensoriale non nulla, posto $\varphi(t) = ||\mathbf{A}(t)||$, si ha

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{\mathbf{A}(t)}{||\mathbf{A}(t)||} \cdot \dot{\mathbf{A}}(t), \tag{2.496}$$

da cui si ricava l'identità

$$(||\mathbf{A}(t)||)^{\cdot} = \frac{\mathbf{A}(t)}{||\mathbf{A}(t)||} \cdot \dot{\mathbf{A}}(t). \tag{2.497}$$

Proposizione 146 *Siano $\mathcal{D}$ un aperto di $\mathbb{R}$ e $\mathbf{B} : \mathcal{D} \to$Lin una applicazione di classe C^1. Si ha*

$$(\mathbf{B}^T)^{\cdot} = (\dot{\mathbf{B}})^T. \tag{2.498}$$

Inoltre, se $\mathbf{B}(t)$ è invertibile per ogni $t \in \mathcal{D}$, si ha

$$(\det \mathbf{B})^{\cdot} = (\det \mathbf{B}) tr(\dot{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}), \tag{2.499}$$

e

$$(\mathbf{B}^{-1})^{\cdot} = -\mathbf{B}^{-1}\dot{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}. \tag{2.500}$$

Dimostrazione. Sia L :Lin$\to$Lin l'applicazione lineare definita da $L(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T$, $\mathbf{A} \in$Lin. Poiché $DL(\mathbf{A}) = L$, dalla regola di derivazione della composizione delle applicazioni discende che

$$(\mathbf{B}^T)^{\cdot} = (L(\mathbf{B}))^{\cdot} = L(\dot{\mathbf{B}}) = (\dot{\mathbf{B}})^T.$$

Dalle relazioni (1.152) e (2.462), per $\varphi(\mathbf{B}) = \det \mathbf{B}$ si ha

$$(\varphi(\mathbf{B}(t)))^{\cdot} = D\varphi(\mathbf{B}(t))[\dot{\mathbf{B}}(t)] = (\det \mathbf{B}(t)) tr\left(\dot{\mathbf{B}}(t)\mathbf{B}(t)^{-1}\right).$$

■

Esercizio 147 *Sia $\mathbf{Q} : \mathbb{R} \to$Orth differenziabile. Mostrare che*

$$\mathbf{Q}(t)\dot{\mathbf{Q}}(t)^T \in \ Skw \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}. \tag{2.501}$$

Soluzione. Sia L :Lin$\to$Lin tale che $L(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T$, poiché $\mathbf{Q}(t)\mathbf{Q}(t)^T = \mathbf{I}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, derivando rispetto a t si ottiene

$$\mathbf{0} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}DL(\mathbf{Q})[\dot{\mathbf{Q}}] = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T, \tag{2.502}$$

da cui la tesi.

2.22 Derivate degli autovalori ed autovettori di tensori simmetrici

Per $n = 3$ sia Sym* il sottoinsieme di Sym costituito da tutti i tensori simmetrici aventi autovalori distinti. Dato $\mathbf{A} \in$ Sym*, siano $a_1 < a_2 < a_3$ e $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ rispettivamente i suoi autovalori ed i corrispondenti autovettori normalizzati.

Poniamo,

$$\mathbf{G}_{11} = \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1, \quad \mathbf{G}_{22} = \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_2, \quad \mathbf{G}_{33} = \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_3, \tag{2.503}$$

$$\mathbf{G}_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_1), \quad \mathbf{G}_{13} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_3 + \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_1), \tag{2.504}$$

$$\mathbf{G}_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_3 + \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_2). \tag{2.505}$$

Per $i = 1, 2, 3$, la funzione a_i : Sym*→ $\mathbb{R}$, che associa ad ogni $\mathbf{A}$ l'autovalore $a_i(\mathbf{A})$ e $\mathbf{G}_{ii}$: Sym*→Sym date in (2.503), sono unicamente determinate in virtù del fatto che gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono distinti. Inoltre i tensori $\mathbf{G}_{ij}$, $i \neq j$, sono determinati ad eccezione del loro segno e i tensori del quarto ordine $\mathbf{G}_{ij} \otimes \mathbf{G}_{ij}$ sono univocamente determinati. Denotiamo con $D_A a_i$ e $D_A \mathbf{G}_{ii}$ rispettivamente la derivata rispetto ad $\mathbf{A}$ di a_i e $\mathbf{G}_{ii}$.

Proposizione 148 *Nelle ipotesi precedenti, valgono le seguenti relazioni*

$$D_A a_1 = \mathbf{G}_{11}, \tag{2.506}$$

$$D_A a_2 = \mathbf{G}_{22}, \tag{2.507}$$

$$D_A a_3 = \mathbf{G}_{33}, \tag{2.508}$$

$$D_A \mathbf{G}_{11} = \frac{1}{a_1 - a_2}\mathbf{G}_{12} \otimes \mathbf{G}_{12} + \frac{1}{a_1 - a_3}\mathbf{G}_{13} \otimes \mathbf{G}_{13}, \tag{2.509}$$

$$D_A \mathbf{G}_{22} = \frac{1}{a_2 - a_1}\mathbf{G}_{12} \otimes \mathbf{G}_{12} + \frac{1}{a_2 - a_3}\mathbf{G}_{23} \otimes \mathbf{G}_{23}, \tag{2.510}$$

$$D_A \mathbf{G}_{33} = \frac{1}{a_3 - a_1}\mathbf{G}_{13} \otimes \mathbf{G}_{13} + \frac{1}{a_3 - a_2}\mathbf{G}_{23} \otimes \mathbf{G}_{23}. \tag{2.511}$$

Dimostrazione. Ci limitiamo a dimostrare le relazioni (2.506) e (2.509), poiché le altre relazioni possono essere dimostrate in modo analogo. Per $\mathbf{A} \in$ Sym* e $\mathbf{H} \in$ Sym fissati, consideriamo $\epsilon \in \mathbb{R}$; siano $a_1(\epsilon)$ e $\mathbf{g}_1(\epsilon)$ il più piccolo autovalore ed il corrispondente autovettore normalizzato del tensore $\mathbf{A}+\epsilon\mathbf{H}$, tale che $\mathbf{g}_1(\epsilon)\cdot \mathbf{g}_1 > 0$,

$$(\mathbf{A} + \epsilon\mathbf{H})\mathbf{g}_1(\epsilon) = a_1(\epsilon)\mathbf{g}_1(\epsilon) \tag{2.512}$$

A meno di un errore di ordine $o(\epsilon)$, si ha

$$a_1(\epsilon) = a_1 + \epsilon\dot{a}_1(0) \quad \text{e} \quad \mathbf{g}_1(\epsilon) = \mathbf{g}_1 + \epsilon\dot{\mathbf{g}}_1(0), \tag{2.513}$$

dove $a_1 = a_1(0)$, $\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_1(0)$ ed il punto indica la derivata rispetto a ϵ. Sostituendo (2.513) in (2.512) si ottiene

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{g}}_1(0) + \mathbf{H}\mathbf{g}_1 = \dot{a}_1(0)\mathbf{g}_1 + a_1\dot{\mathbf{g}}_1(0). \tag{2.514}$$

Poiché $\mathbf{g}_1(\epsilon)\cdot\mathbf{g}_1(\epsilon) = 1$, allora $\dot{\mathbf{g}}_1(0)\cdot\mathbf{g}_1 = 0$; così, se moltiplichiamo (2.514) per $\mathbf{g}_1$ si ottiene

$$\dot{a}_1(0) = \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{H}\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{H}. \tag{2.515}$$

Poiché, per ogni $\mathbf{H} \in$ Sym in vista di (1.124) si può scrivere

$$\dot{a}_1(0) = \frac{d}{d\epsilon}a_1(\mathbf{A} + \epsilon\mathbf{H})|_{\epsilon=0} = D_A a_1(\mathbf{A})\cdot\mathbf{H}, \tag{2.516}$$

in virtù di (2.515) si ottiene (2.506). Per calcolare la derivata di $\mathbf{G}_1$, si deve calcolare la derivata di $\mathbf{g}_1$. A questo scopo, sostituendo (2.515) in (2.514), si ottiene

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{g}}_1(0) + \mathbf{H}\mathbf{g}_1 = (\mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{H})\mathbf{g}_1 + a_1\dot{\mathbf{g}}_1(0). \tag{2.517}$$

Poiché $\mathbf{g}_1$ e $\dot{\mathbf{g}}_1(0)$ sono ortogonali, si può scrivere

$$\dot{\mathbf{g}}_1(0) = \chi\mathbf{g}_2 + \xi\mathbf{g}_3, \tag{2.518}$$

dove χ e ξ sono scalari che dipendono da $\mathbf{A}$. Sostituendo (2.518) in (2.517), segue la relazione

$$\chi(a_2 - a_1)\mathbf{g}_2 + \xi(a_3 - a_1)\mathbf{g}_3 = (\mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{H})\mathbf{g}_1 - \mathbf{H}\mathbf{g}_1. \tag{2.519}$$

Moltiplicando (2.519) per $\mathbf{g}_2$ e $\mathbf{g}_3$, si ottiene rispettivamente

$$\chi = \frac{1}{a_1 - a_2}\mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{H}, \tag{2.520}$$

$$\xi = \frac{1}{a_1 - a_3}\mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{H}. \tag{2.521}$$

Così, da (2.518), (2.520) e (2.521), in virtù della simmetria di $\mathbf{H}$, si ha

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{g}}_1(0) = \frac{d}{d\epsilon}\mathbf{g}_1(\mathbf{A} + \epsilon\mathbf{H})|_{\epsilon=0} = D_A\mathbf{g}_1(\mathbf{A})[\mathbf{H}]& \\ = \frac{1}{2(a_1 - a_2)}(\mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_1)[\mathbf{H}]& \\ + \frac{1}{2(a_1 - a_3)}(\mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_3 + \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_1)[\mathbf{H}].&\end{aligned} \tag{2.522}$$

Il risultato desiderato segue dalla regola di derivazione del prodotto,

$$D_A\mathbf{G}_{11}[\mathbf{H}] = D_A\mathbf{g}_1[\mathbf{H}] \otimes \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_1 \otimes D_A\mathbf{g}_1[\mathbf{H}]. \tag{2.523}$$

■

Esercizio 149 *Data l'applicazione $R(\mathbf{C}) = \sqrt{\mathbf{C}}$ definito nell'esercizio 124, si calcoli $DR(\mathbf{C})$.*

Bibliografia

[1] R. M. Bowen, C. C. Wang, I*ntroduction to Vectors and Tensors*, Volumes 1 and 2. Plenum Press, New York 1976.

[2] V. Checcucci, A. Tognoli, E. Vesentini. *Lezioni di Topologia Generale*. Feltrinelli, 1977.

[3] C. L. DeVito, *Functional Analysis and Linear Operator Theory*. Addison-Wesley Publishing Company, 1990.

[4] J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*. Academic Press, New York and London, 1969.

[5] E. Giusti, *Analisi Matematica 2*. Bollati Boringhieri 1989.

[6] M. E. Gurtin, *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press, 1981.

[7] M. E. Gurtin, *The Linear Theory of Elasticity*. Encyclopedia of Physics, vol. VIa/2 Mechanics of Solids II, Springer-Verlag, 1972.

[8] M. E. Gurtin, E. Fried, L. Anand, *The Mechanics and Thermodynamics of Continua*. Cambridge University Press, 2010.

[9] P. R. Halmos, *Finite-Dimensional Vector Spaces*. Springer-Verlag, 1987.

[10] M. Itskov, *Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers*. Springer-Verlag, 2007.

[11] L. M. Kachanov, *Fundamentals of the Theory of Plasticity*. Mir Publishers Moscow, 1974.

[12] P. Podio-Guidugli, A primer in elasticity. *Journal of Elasticity* **58**(1), 2000.

[13] M. Silhavy, *The Mechanics and Thermodynamics of Continuous Media*. Text and Monographs in Physics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1997.