

## UN VIAGGIO NELL'ANALISI MATEMATICA E NELL'OTTIMIZZAZIONE TRA LE DUE SICILIE: MEZZO SECOLO DI VOLTI E IDEE

ANTONINO MAUGERI \*

ABSTRACT. We present men and women, who with their ideas made half a century history in some branches of Mathematics in the south of Italy. The achieved results are evidenced by the ranking related to Mathematics that appears in the Ranking ARWU Mathematics 2019.

### 1. Introduzione

Innanzitutto ringrazio tutti gli intervenuti e i conferenzieri che hanno voluto partecipare a questo incontro dedicato al mio 75<sup>o</sup> compleanno. A tutti voglio esprimere i miei sentimenti di stima e sincera amicizia, grato della considerazione che hanno voluto avere per me e il mio lavoro. Cominciando questo viaggio ideale, voglio premettere che non potrò parlare di tutti i matematici che hanno onorato l'Analisi Matematica o l'Ottimizzazione con il loro lavoro e le loro idee, ma parlerò solo di quelli con i quali sono entrato in contatto e/o con i quali ho avuto rapporti di collaborazione e comunanza di idee. Perciò mi scuso di questo.

### 2. Inizio

Questo viaggio inizia con l'Anno Accademico 1962/63 quando varcai, assieme ad altre 150 matricole, la soglia del Seminario Matematico e iniziai, con molte difficoltà perché venivo dal Classico, gli studi di matematica. Cominciai a conoscere i colleghi Mario Marino, Giuseppe Paxia, Rosario Strano, Lorenzo Tuccari e altri ancora con i quali avevamo in comune la passione per lo studio e il desiderio di migliorare superando tutte le difficoltà. Ebbimo la sorte di avere eccezionali maestri Giovanni Dantoni e Francesco Guglielmino, tra i primi, ma anche Tullio Caponetto, Giuseppe Pulvirenti, Giuseppe Santagati e altri per i quali serbo riconoscenza e gratitudine.

Il 28 giugno del 1966 io, Mario Marino, Giuseppe Paxia e Rosario Strano ci laureammo in Matematica, io e Marino con tesi in Analisi, Paxia e Strano in Algebra-Geometria. Dopo qualche giorno, il prof. Guglielmino convocò me e Mario Marino e ci disse che avrebbe avuto piacere di averci come collaboratori ma che non aveva per il momento nulla da offrirci, se non qualche insicura borsa di studio. Accettammo con entusiasmo e perseverammo

come Assistenti Volontari fino agli anni '70, allorchè, andati in cattedra i Proff. Santagati e Pulvirenti, si liberarono due posti di assistenti di ruolo. Ma in quegli anni di precariato non siamo rimasti con le mani in mano. Il Prof. Guglielmino ci diede subito dei temi di ricerca, io ebbi i problemi non variazionali e Mario Marino le soluzioni deboli delle equazioni paraboliche: due mondi completamente diversi, in cui cominciammo a pubblicare i primi lavori e a fare esperienza.

### 3. Giorgio Talenti a Catania. Ipotesi di Cordes e $H^{1,n}$

Gli interessi di ricerca si allargarono allorchè venne a Catania Giorgio Talenti che riuscì a organizzare dei seminari periodici in cui si cimentavano giovani e maestri. In un seminario Talenti introdusse lo studio del problema di Dirichlet per equazioni ellittiche a coefficienti discontinui non variazionali. L'ipotesi usata da Talenti era quella di Cordes (vedi Cordes (1961)) la quale consiste fondamentalmente nel fatto che l'operatore ellittico sia "vicino" al laplaciano. Sotto tali ipotesi, utilizzando la disuguaglianza di Miranda-Talenti (vedi Miranda (1963)), si riusciva a dimostrare l'esistenza di un'unica soluzione non variazionale. La disuguaglianza di Miranda-Talenti esprime questo fatto: se  $u$  è una funzione di classe  $W^{2,2}(\Omega)$  con traccia nulla alla frontiera  $\partial\Omega$  e  $\Omega$  è convesso, allora la norma in  $W^{2,2}$  della  $u$  si migliora con "costante 1" con la norma in  $L^2$  di  $\Delta u$ . Essa deriva da uno straordinario calcolo vettoriale sulla frontiera di  $\Omega$  dovuto in generale a Carlo Miranda e in particolare a Giorgio Talenti. Per completezza bisogna dire che c'era un altro approccio alla ricerca di soluzioni non variazionali di equazioni ellittiche e paraboliche a coefficienti discontinui ed era quello considerato da Miranda e poi da Francesco Guglielmino (vedi Guglielmino (1964, 1965)), che consisteva nel supporre i coefficienti appartenenti allo spazio limite  $H^{1,n}(\Omega)$ . In  $H^{1,n-\varepsilon}(\Omega)$  il problema risulta mal posto, in  $H^{1,n+\varepsilon}(\Omega)$  il problema è risolto perché equivale a considerare coefficienti continui. Miranda era riuscito a dimostrare in ipotesi  $H^{1,n}(\Omega)$  l'esistenza di un'unica soluzione e a fornire teoremi di regolarizzazione. Lo stesso aveva fatto Guglielmino nel caso parabolico. Sorse una sorta di duello su quale delle due ipotesi fosse più produttiva ed interessante. Ad ognuna delle due ipotesi si potevano attribuire pregi e difetti, ma riporto questa problematica perché essa, in seguito, come vedremo, ebbe forte sviluppo. Proseguendo nella discussione ci si accorse che nel caso delle ipotesi di Cordes mancava lo studio del caso parabolico e la regolarizzazione, cosicché ad Orazio Arena, un assistente più anziano, fu assegnato il compito di studiare il caso parabolico (vedi Arena (1969)) e a me la regolarizzazione. Raggiunsi il risultato della regolarizzazione superando ostacoli che migliorarono la mia formazione (vedi Maugeri (1970b)). I nostri lavori si aggiungevano ai lavori di Sergio Campanato in ipotesi di Cordes (vedi Campanato (1967, 1968, 1977)) in cui si sviluppava la teoria  $L^p$  e si studiava il caso parabolico in ipotesi più restrittive. In me si destò un interesse straordinario per l'ipotesi di Cordes e cercai con determinazione che cos'altro si potesse dire. Mi chiesi se si poteva considerare anche il problema di derivata normale, ma occorreva, anche in questo caso, una formula tipo Miranda-Talenti. Riuscii a dimostrarla con mezzi elementari e facendo ricorso alla curvatura totale e sottoposi il lavoro al mio maestro. Egli rimase meravigliato perché si accorse subito che la disuguaglianza veniva fuori anche dai conti vettoriali di Carlo Miranda e il suo commento fu: "Come mai non ce ne siamo accorti noi?" (vedi Maugeri (1972)). Passai a studiare il problema di derivata obliqua per equazioni paraboliche in due variabili

spaziali e una variabile temporale, ma sembrava un'impresa disperata. Talenti aveva studiato esaurientemente il problema di derivata obliqua ellittica in due variabili (vedi Talenti (1967)) ma nel caso parabolico non si riusciva a trattare il contributo della variabile temporale. Quando studiavo questo problema facevo il servizio militare e la ricerca, nei periodi di libera uscita, era un aiuto e un conforto. Ebbi l'idea di diminuire abbastanza il contributo temporale anche se aumentava la costante che moltiplicava il termine noto riuscendo ad inventare la procedura per risolvere in questo modo il problema (vedi Maugeri (1970a) e Maugeri (1978) nel caso di più variabili).

#### 4. Guido Stampacchia e le Disequazioni Variazionali. Una trasformazione epocale

Nello stesso periodo che studiavo questo problema avvennero due fatti molto importanti per lo sviluppo futuro della mia ricerca e di quella dei miei futuri allievi. Nel 1974 per la prima volta andai con Mario Marino ed altri ad Erice dove tra i conferenzieri c'era Guido Stampacchia. Ascoltando la sua conferenza (ed altre successive) entrai nel mondo delle Disequazioni Variazionali. Fu un ingresso faticoso perché mi mancavano concetti e teoremi fondamentali: la proiezione su un convesso chiuso, gli insiemi chiusi e convessi sono debolmente chiusi, gli insiemi chiusi, convessi e limitati sono debolmente compatti, l'esistenza del minimo, sottodifferenziali, etc. Un aiuto straordinario lo ricevetti dal lavoro di Guido Stampacchia (vedi Stampacchia (1968)) e ovviamente dal fondamentale lavoro: Lions and Stampacchia (1967). Debbo premettere che nel 1964 Gaetano Fichera (vedi Fichera (1964)) aveva pubblicato una memoria lincea dal titolo innovativo: "Problemi elastostatici con vincoli unilateri: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno". La novità stava nel fatto che le condizioni alla frontiera erano: la soluzione maggiore o uguale a zero, la derivata normale maggiore o uguale a zero e il prodotto della soluzione per la derivata normale zero (un problema di complementarità). Fichera, in un modo abbastanza avvincente, racconta come risolse questo problema pochi giorni prima della scomparsa di Antonio Signorini. Guido Stampacchia nei lavori: Stampacchia (1968) and Lions and Stampacchia (1967) aveva introdotto la nozione di Disuguaglianza Variazionale su un chiuso e convesso e dimostrato dei teoremi di esistenza. Nel caso finito dimensionale per l'esistenza, ottenuta utilizzando la proiezione su un convesso e un teorema di punto fisso, basta supporre l'operatore continuo e il convesso chiuso e limitato (oppure se il convesso non è limitato, basta considerare un operatore coercivo). Nel caso infinito-dimensionale Guido Stampacchia considera una forma bilineare continua su uno spazio di Hilbert non necessariamente simmetrica  $a(u, v)$  e un convesso chiuso  $K$  e, assumendo la forma coerciva

$$a(v, v) \geq \gamma \|v\|^2, \quad \forall v \in K,$$

dimostra un teorema di esistenza e unicità. Se invece si assume

$$a(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in K,$$

l'insieme delle soluzioni (eventualmente vuoto) è chiuso e convesso. Se invece l'operatore è non lineare, occorre supporlo monotono ed emicontinuo. Guido Stampacchia afferma poi che in questo caso si riottiene il problema di Signorini studiato da Gaetano Fichera. Essendo  $K$  un convesso chiuso generico in questo quadro rientrano, oltre il problema di Signorini, il problema dell'ostacolo, della torsione elastoplastica e, come vedremo, moltissimi altri

problemi. Fichera ritenne che nei lavori di Stampacchia non fosse stato sufficientemente messo in luce (non so se volontariamente o meno) che lui era stato il primo a studiare, seppure in un caso particolare e con metodi diretti, le Disequazioni Variazionali. Ciò scatenò una dura polemica (Fichera non era tipo da porgere l'altra guancia) contro Stampacchia accusato di scorrettezza.

Ho voluto riferire tutti questi particolari perché cominciai anche a pubblicare lavori sulle Disequazioni Variazionali Paraboliche, ma soprattutto perché le Disequazioni Variazionali hanno avuto uno sviluppo straordinario nel lavoro dei miei collaboratori, sia teorico che applicativo. Non posso tacere il valore veramente profetico dell'affermazione fatta da Guido Stampacchia secondo cui "Le disuguaglianze variazionali hanno molto da dire nel campo della Ricerca Operativa". Con Stampacchia appare anche evidente una trasformazione epocale nella Matematica italiana avvenuta in quegli anni. Allora la maggioranza dei matematici italiani scriveva in italiano, collaborava con matematici italiani e pubblicava su riviste italiane. Adesso i lavori di Stampacchia erano scritti in inglese, con coautori stranieri (francesi e americani) e venivano pubblicati su riviste straniere. L'esempio di Stampacchia fu universalmente seguito e ciò portò alla decadenza di molte riviste matematiche italiane e a grandi difficoltà per coloro che pubblicavano su riviste italiane.

## 5. Sergio Campanato a Catania

Un altro grande evento fu costituito dalla venuta a Catania nel 1973 di Sergio Campanato ed Ennio De Giorgi. Poiché ho già scritto su questo argomento (vedi Campanato (2019)) riporto qualcosa di quanto scritto a pagina XIX della Prefazione. Campanato parlò di equazioni differenziali astratte del primo ordine e di equazioni di Schrödinger. Al termine della conferenza ci fu uno scambio di idee, dopo il quale Campanato disse: "A Catania c'è qualcuno che capisce di Matematica!" e poi ci propose di studiare in sinergia invece di studiare ognuno per i fatti propri. In quegli anni Campanato affrontava la teoria della regolarità delle soluzioni dei sistemi ellittici e parabolici non lineari a coefficienti discontinui. Campanato era un grande ammiratore ed amico di De Giorgi e trovava straordinario il suo risultato sulla regolarità hölderiana delle soluzioni deboli delle equazioni ellittiche a coefficienti discontinui. Però egli cercava una maggiore perfezione, cioè cercava una teoria generale da cui la regolarità seguisse nei casi particolari come semplice applicazione. Cercò di delineare i capisaldi di tale teoria che, a grandi linee, funziona così. Il primo punto consiste nello studiare come il rapporto tra le norme in  $L^p$  su sfere concentriche di diverso raggio della soluzione di un sistema ellittico (o parabolico) dipende dal rapporto dei raggi. A seconda della regolarità dei coefficienti si ottiene una differente potenza di tale rapporto, ottenendo così quelle che Campanato chiamava "Maggiorazioni Fondamentali". Da tali maggiorazioni, usando appropriate disuguaglianze di Poincaré, una buona teoria  $L^p$  e le proprietà dei cosiddetti spazi di Campanato  $\mathcal{L}^{p,\lambda}$  si ottiene:

- a) la continuità hölderiana per bassi valori della dimensione del problema;
- b) in generale, la parziale continuità hölderiana della soluzione, cioè la hölderianità in  $\Omega \setminus \Omega_0$ , dove  $\Omega_0$  è un sottoinsieme di misura nulla dell'insieme  $\Omega$  dove si considera il problema.

Questa distribuzione dei risultati dipende dal fatto che per i sistemi il risultato di regolarità provato da De Giorgi per le equazioni è falso, nel senso che c'è quasi sempre un insieme

singolare, come lo stesso De Giorgi provò con un famoso controesempio. Le difficoltà erano diverse a seconda dei cosiddetti andamenti del secondo membro, che potevano essere “lineari”, “controllati” o “naturali”. Nel caso di andamenti naturali, cioè nel caso di andamenti del tipo:  $|f(x, p)| \leq a|p|^2 + b$  per ottenere la regolarità hölderiana bisognava partire da soluzioni limitate e supporre che valesse la cosiddetta “condizione di piccolezza” cioè  $2a \sup |u| < \nu$  dove  $\nu$  è la costante di ellitticità. Mentre Campanato portava avanti la teoria ellittica, io e Mario Marino con i nostri collaboratori portavamo avanti la teoria parabolica. Lo sviluppo della teoria richiedeva il superamento di difficoltà non comuni, legate all’acquisizione della differenziabilità all’interno e alla frontiera, alla teoria  $L^p$ , al principio di massimo, alla disuguaglianza tipo Caccioppoli, alle formule generalizzate di Poincarè, a raffinate formule di interpolazione. La metodologia esposta funzionava anche per i sistemi ellittici non variazionali. Infatti, Campanato introdusse un’ipotesi di Cordes nonlineare che chiamò *Ipotesi (A)* che esprime la vicinanza di un operatore non lineare al delta e che permette di risolvere il problema di Dirichlet. Estese poi tale concetto introducendo la teoria degli operatori vicini. Anche in questo caso noi e i nostri collaboratori ci occupavamo della parte parabolica.

## 6. Io e Mario Marino professori ordinari a Messina. I primi collaboratori

Io e Marino nel 1975 vincemmo il concorso a professore di ruolo di Analisi Matematica e fummo chiamati a ricoprire due cattedre presso l’Università di Messina. La Matematica a Messina era fiorente per quanto riguarda la Fisica Matematica e la Geometria, ma per quanto riguarda l’Analisi Matematica languiva. Aveva avuto buoni cultori, ma in quel momento non c’era a Messina alcun ordinario di Analisi Matematica. Negli anni precedenti erano stati chiamati a Messina come ordinari di Analisi De Giorgi, Cecconi e Chiffi. De Giorgi aveva lasciato un allievo, Dionisio Triscari, che era divenuto libero docente, ma poi era andato alla Normale a Pisa. De Giorgi mi confidò che sarebbe rimasto volentieri a Messina qualche altro anno, ma le pressioni di Sandro Faedo lo avevano indotto ad andare a Pisa. Cecconi e Chiffi non avevano lasciato traccia. Si era ripetuto a Messina quello che era successo a Catania e in tante altre sedi del Sud. I professori chiamati arrivavano, svolgevano il loro lavoro didattico e alla prima occasione partivano. La situazione si può stabilizzare quando un ricercatore locale diventa ordinario e comincia a lavorare sistematicamente nella sede. Questo era successo a Catania col Prof. Guglielmino. Io e Marino oltre a svolgere la didattica cominciammo ad organizzare la ricerca scientifica. A me fu presentata l’allora Dott.ssa Giovanna Idone da Reggio Calabria che pendolava tra Reggio Calabria a Messina, svolgeva attività didattica e cercava da sola di orizzontarsi nella ricerca nel campo dell’Analisi Matematica. Iniziò a collaborare con me e cominciò ad affrontare tematiche nel campo dell’ipotesi di Cordes e poi della parziale regolarità dei sistemi ellittici con andamenti controllati con una marcia di avvicinamento progressiva e perseverante. Da allora fino al momento del pensionamento Giovanna Idone non smise di lavorare ottenendo via via risultati sempre migliori (vedi Donato and Idone (1980), Fattorusso and Idone (1992), Fattorusso and Idone (2000), Giuffrè and Idone (2005), Giuffrè and Idone (2011), Giuffrè *et al.* (2012), Idone (2004)). A Mario Marino fu presentata l’allora dottoressa Luisa Fattorusso che collaborò lungamente con il Prof. Marino.

Scendendo dal bus della Sais che conduceva da Catania a Messina e facendo il breve tratto di strada che dalla stazione di arrivo mi portava al Seminario Matematico, al centro di Messina, incontravo ogni mattina un collega con i capelli bianchi che faceva la stessa strada, dato che abitava vicino alla stazione. Egli un giorno mi disse: “Prenderesti come allievo uno con i capelli bianchi come me?” Risposi di sì e cominciammo subito a lavorare sul problema di derivata obliqua cui si dedicò con forte passione e perseveranza (vedi Donato (1979, 1983, 1987)). Egli era un professore incaricato stabilizzato. Per questi docenti era da tempo attesa una “*ope legis*” che li avrebbe trasformati in professori di ruolo. La grande maggioranza dei professori stabilizzati, assunti per le pressanti esigenze didattiche, non aveva potuto occuparsi di ricerca e quindi era priva di lavori scientifici. Invece dell’“*ope legis*” venne fuori una prova di idoneità a Professore Associato basata sulla didattica e sulle pubblicazioni scientifiche che molti professori stabilizzati, nella prima tornata non avevano e quindi non superarono. La conseguì, invece, per il suo impegno nella ricerca, il Prof. Santi Donato che d’allora divenne per me grande collaboratore e aiuto, oltre che un carissimo amico. Con lui seguivamo anche un allora giovane Roberto Amato che lavorò per tanti anni.

## **7. Aumentano i collaboratori**

A Messina c’era anche tra i giovani borsisti Carmen Vitanza, che però era affidata ad un altro docente, ma che nel seguito degli anni dovette lasciare l’università. Ritornato a Catania, venni a sapere di una legge che consentiva la partecipazione a dei concorsi per ricercatore, riservati a giovani che erano stati borsisti. Feci sapere a Carmen Vitanza che se voleva partecipare al concorso io l’avrei seguita scientificamente e così fu recuperata all’università, che ne aveva bisogno, una persona molto valida. Anche Carmen Vitanza ha lavorato fino al pensionamento con perseveranza affrontando tutti i temi di ricerca che man mano abbiamo incontrato (vedi Termini and Vitanza (1990), Vitanza (1981, 1984, 1988), Vitanza and Zamboni (2005, 2007)). Qualche anno dopo vennero banditi concorsi a professore associato sia riservati che liberi ed entrambe, Giovanna Idone e Carmen Vitanza, risultarono vincitrici. Nella biblioteca del Seminario Matematico dell’Università di Catania incontrai un ricercatore della Facoltà di Architettura di Reggio Calabria, Marino De Luca, che consultava dei libri. Ormai erano quasi terminati i concorsi, riservati o liberi, a professore associato e Marino De Luca, ricercatore molto brillante, non era riuscito a vincerne alcuno. Egli era un autodidatta, ma gli mancava una guida esperta. Anche egli mi chiese se potevamo lavorare insieme. A questo punto conviene dare conto del terzo importante incontro della mia vita scientifica.

## **8. Franco Giannessi e la Ricerca Operativa. Il problema dell’equilibrio del traffico**

Al mio ritorno a Catania mi fu affidato oltre all’insegnamento di titolarità l’incarico dell’insegnamento di Ricerca Operativa. Infatti il Prof. Giovanni Dantoni, dando prova di una lungimiranza ed apertura mentale non comune, aveva iniziato un programma di potenziamento dell’attività didattica e di ricerca dell’allora Seminario Matematico che, in maniera molto restrittiva, era centrata sulle attività dei gruppi di Analisi Matematica, Fisica Matematica, Algebra e Geometria. Aveva quindi fatto chiamare cattedre di Analisi Numerica, Calcolo delle Probabilità e, appunto, Ricerca Operativa. Andato via, more solito, il professore di Ricerca Operativa, tale insegnamento fu dato per incarico a me.

Un collega mi chiese perentoriamente di non fare una Analisi Matematica camuffata da Ricerca operativa. Richiesta perfettamente inutile perché la mia intenzione non era solo quella di insegnare effettivamente Ricerca Operativa, ma di fare anche ricerca in tale settore. Per documentarmi scrissi al prof. Franco Giannessi a Pisa chiedendogli consigli e testi. Giannessi mi rispose molto gentilmente e così cominciai a preparare il corso. Cominciai con la Programmazione Lineare e il metodo del Simplex. All'inizio fu dura, ma piano piano rimasi affascinato dal metodo del simplex. I problemi di programmazione lineare, pur essendo problemi di minimo o di massimo, non si possono affrontare con i metodi dell'Analisi Matematica perché la soluzione sta sulla frontiera. Ecco allora che la Ricerca Operativa comincia laddove l'Analisi Matematica si arrende. Non solo col metodo del Simplex si individuava il vertice dove sta una soluzione, ma tale metodo è implementabile sul computer. Assieme alla didattica cercai anche di fare ricerca e ringrazio ancora oggi Franco Giannessi che mi inviò nel 1979 il lavoro di Smith (vedi Smith 1979) che fu per me un colpo di fulmine. In tale lavoro si dimostra (sommariamente) che il principio secondo cui in una rete di traffico la distribuzione di equilibrio si ottiene scartando i percorsi più costosi si esprimeva equivalentemente mediante una Disequazione Variazionale in  $R^n$ . Mi appassionai a tale lavoro e più in là riuscii a dimostrare un metodo diretto che abbassava la dimensione del problema giocando sul fatto che la soluzione o annullava l'operatore o si trovava sulla frontiera e iterando tale procedimento (vedi Maugeri (1982), Maugeri (1987)). Ebbene Marino De Luca stava studiando un problema di equilibrio del traffico in un caso che non conoscevo, il caso continuo in cui la legge di conservazione del traffico è espressa dall'annullarsi della divergenza. Cominciammo una serrata collaborazione, che si concretizzò in diversi lavori (vedi De Luca (1984, 1990, 1997) e De Luca and Maugeri (1989, 1992)), al termine della quale Marino De Luca riuscì a prendere l'ultimo treno, cioè riuscì a vincere l'ultimo concorso libero per professore associato. Marino fu per me un carissimo amico e la sua prematura e improvvisa scomparsa ha lasciato un segno profondo.

## 9. Incontro con Joachim Naumann e Dian K. Palagachev

Incontrando periodicamente Campanato a Pisa, durante una conferenza, io e Marino facemmo conoscenza con Joachim Naumann, professore associato presso la Humboldt University dell'allora Berlino Est, fortemente interessato anche lui alla regolarizzazione dei sistemi ellittici e parabolici, con il quale iniziammo una profonda collaborazione e uno scambio di visite tra Catania e Berlino (vedi Marino *et al.* (1999), Naumann (1990), Naumann and Wolf (2000), Naumann *et al.* (1998)). Con la riunificazione delle due Germanie, Naumann, come gli altri docenti della Repubblica Democratica Tedesca, fu, in modo molto traumatico, licenziato dalla posizione di professore associato e sottoposto ad un concorso per riottenere la qualifica di professore associato. Naumann riuscì a vincere il concorso per la ottima produzione scientifica che aveva nel frattempo svolto. In quegli anni venni nominato membro di una commissione del CNR che doveva assegnare delle borse di studio in Italia a ricercatori esteri. Stilata la graduatoria dei vincitori, ci accorgemmo che un ricercatore bulgaro, Dian K. Palagachev, non aveva una sede che lo accogliesse e un professore che gli facesse da tutor. Piuttosto che lasciarlo decadere, accettai di essere il tutor al Dipartimento di Matematica dell'Università di Catania. Dian Palagachev era un giovane matematico già con un'ottima esperienza di ricerca, con una conoscenza approfondita del

problema di derivata obliqua, regolare e non in ipotesi classiche, e capacità non comuni. A Catania lo indirizzai a studiare due argomenti: gli operatori non variazionali non lineari introdotti da Campanato e i problemi al contorno per equazioni a derivate parziali sotto una nuova importante ipotesi, l'ipotesi VMO, su cui val la pena spendere due parole.

## 10. L'ipotesi VMO

Mentre l'ipotesi A) di Campanato generalizza l'ipotesi di Cordes, l'ipotesi VMO generalizza l'ipotesi  $H^{r, \frac{n}{r}}(\Omega)$ ,  $0 < r < 1$ . Il fatto straordinario è che l'ipotesi VMO consente di risolvere il problema di Dirichlet nello spazio  $W^{2,p}(\Omega)$  per ogni  $1 < p < \infty$ . Quindi la tecnica che si usa è totalmente diversa da quella usata nel caso  $H^{1,n}$  e, in un certo senso, costituisce un ritorno all'antico perché si utilizzano rappresentazioni delle soluzioni. Questo grande risultato si deve a Filippo Chiarenza e ai suoi collaboratori Michele Frasca e Placido Longo (vedi Chiarenza *et al.* (1993)). Invitai Dian Palagachev a studiare il problema di derivata obliqua in ipotesi VMO ed egli risolse completamente tale problema nello spazio VMO. Lavorò poi con un'intensità non comune tanto da vincere un concorso a professore associato con conseguente chiamata a Bari (vedi Di Fazio and Palagachev (1996), Di Fazio *et al.* (1999), Palagachev (1993), Palagachev (1995), Palagachev *et al.* (1999)). Collaborò con noi anche Lubomira Softova, moglie di Dian, che rapidamente si impadronì di tutte le tematiche e divenne anch'essa professore associato.

## 11. Due eventi decisivi

Avvennero in quegli anni, fine anni settanta - inizio anni ottanta, alcuni eventi decisivi per lo sviluppo delle attività di promozione della ricerca. Il primo di questi fatti fu la fondazione del dottorato di ricerca in Matematica Applicata e Informatica consorzio inizialmente con le sedi di Palermo, Salerno, Messina, Catania e Napoli. Aveva sede a Napoli e coordinatore era il Prof. Luigi Maria Ricciardi, un'eccezionale figura di docente, ricercatore e manager. Tra i promotori c'era Carlo Ciliberto e altri insigni matematici animati da uno straordinario desiderio di promozione della ricerca. Il dottorato ha dato una chance a tanti giovani del centro sud, ha prodotto una circolazione di idee, teorie e metodi matematici larghissima e tante decine di professori ordinari e associati devono a questo dottorato l'inizio della loro carriera. L'altro evento fu la partecipazione ai convegni organizzati ad Erice prima e poi la possibilità per me, datami da Franco Giannessi, di essere coordinatore sul tema "Variational Analysis and Applications". Tali convegni divennero via via sempre più apprezzati sia perché Erice, a detta dei partecipanti, era uno degli ultimi paradisi esistenti sulla terra, sia per l'atmosfera entusiasmante che si viveva, sia anche perché c'era la possibilità di interagire con tanti matematici che avevano il carisma di una attraente comunicazione e di seminare nuove idee, nuovi metodi, nuove teorie. Si arrivò al punto che si faceva a gara da tutto il mondo per essere invitati. Franco Giannessi ebbe pure l'idea di bandire, in concomitanza con i convegni, un premio in onore di Guido Stampacchia, la Gold Medal "G. Stampacchia", vinta nelle varie edizioni da giovani matematici straordinariamente promettenti.

## 12. Ricerca Operativa e nuovi allievi

Insegnando Ricerca Operativa e facendo ricerca in tale settore, mi si pose il problema di formare dei giovani collaboratori che garantissero nel futuro la didattica e la ricerca. Una giovane studentessa fece uno splendido esame di Ricerca Operativa e anche di Istituzioni di Analisi Superiore e poi mi chiese la tesi. Era Patrizia Daniele con la quale la didattica e la ricerca ebbero un nuovo impulso e un nuovo slancio e che vinse anche un premio Linco. Organizzammo dei convegni a Taormina, Capomulini (Acireale), Scilla (Reggio Calabria), Randazzo, eccezionalmente vivaci ed interessanti. A Capomulini partecipava anche Werner Oëtti, acuto matematico, col quale iniziammo una collaborazione che sfociò in un seminal paper in cui introducemmo il problema dell'equilibrio del traffico dipendente dal tempo (vedi Daniele *et al.* (1998, 1999)). In tali lavori considerammo l'esistenza, la caratterizzazione e il calcolo della soluzione di equilibrio in una rete di trasporto quando le capacità dei percorsi e le richieste di traffico dipendevano dal tempo. Patrizia Daniele, in collaborazione specialmente con Anna Nagurney, ha studiato anche, sempre col metodo delle disequazioni variazionali e quasi-variazionali e sia nel caso statico che di evoluzione, il problema dell'equilibrio dei mercati economici, il problema dell'equilibrio finanziario in presenza di rischio e incertezza, il problema dell'equilibrio su Internet e il problema dell'equilibrio per una catena di offerte di reti elettriche (vedi Daniele (2005a), Nagurney *et al.* (2007a), Nagurney *et al.* (2007b)) ed ha affrontato il problema dell'esistenza delle soluzioni delle disequazioni quasi-variazionali (vedi Ciarcia and Daniele (2016)). In molti articoli si è pure dedicata allo studio delle reti finanziarie (vedi Barbagallo *et al.* (2013, 2014), Daniele (2003, 2005b) and Daniele *et al.* (2005, 2016)), ottenendo risultati innovativi.

## 13. Entra in scena Reggio Calabria

Trovandomi a Reggio Calabria per una conferenza, Giovanna Idone mi presentò una giovane tutor, Sofia Giuffrè, alla quale chiesi qualche informazione e se stesse lavorando a qualche tema di ricerca. Mi disse che non si occupava affatto di ricerca ed io le risposi che se si stava all'università, a qualunque titolo, si doveva fare ricerca. La invitai, quindi, a fare domanda di ammissione al dottorato di ricerca e, una volta ammessa, la invitai a studiare il problema di derivata obliqua a coefficienti discontinui a due variabili, la regolarità hölderiana anche al bordo delle soluzioni di equazioni ellittiche lineari e nonlineari in due variabili a coefficienti discontinui, un problema di contatto per equazioni ellittiche lineari in cui si doveva stimare l'hessiano e la mandai a fare conferenze in tutto il mondo (vedi Giuffrè (2000, 2003, 2004, 2005), Giuffrè and Idone (2011)). Sofia Giuffrè se la cavò benissimo e, quindi, la invitai a studiare il problema della torsione elasto-plastica. Prima di parlare di questo grossissimo problema debbo dire che aumentò moltissimo il numero delle persone che avviavo alla ricerca.

## 14. Altri collaboratori a Catania e Messina

A Catania incontrai Laura Scrimali, Fabio Raciti, Annamaria Barbagallo e più tardi Daniele Puglisi che con determinazione e impegno svolsero un'intensa attività di ricerca. A Messina Carmen Vitanza mi presentò due giovani dottorande, Maria Bernadette Donato e Monica Milasi, che avviammo insieme alla ricerca. Non mi mancavano i temi di ricerca,

sempre più impegnativi debbo dire, perché c'erano due grosse questioni aperte. La prima riguardava i lavori di Stampacchia e Brezis sulle disequazioni variazionali su un convesso con un vincolo sul modulo del gradiente. Su tale problema i due avevano dato importanti teoremi di regolarizzazione e, salvo un lavoro particolare di Brezis in cui l'operatore era il delta, non si riusciva a capire se fossero o meno equivalenti al famoso problema dell'elastoplastica posto da Von Mises ai primi del '900. Cercammo in tutti i modi di sciogliere questo nodo e iniziammo a intravedere qualcosa quando capimmo che, se volevamo fare progressi, bisognava dimostrare l'esistenza del moltiplicatore di Lagrange associato al vincolo sul gradiente. Iniziammo, quindi, a studiare la dualità e la teoria lagrangiana per i problemi di minimo e le disequazioni variazionali in un ambiente infinito dimensionale.

### 15. L'ipotesi $S$ necessaria e sufficiente

Qui ci trovammo di fronte ad un grave problema. Tutti i teoremi sulla dualità richiedevano che l'interno del cono ordinante fosse non vuoto e questo nel caso di cono ordinante di spazi  $L^p$  o di Sobolev è falso. Bisognava costruire una teoria nuova, anche se, ad onor del vero, c'era già una condizione sufficiente di Kurcyusz-Zowe-Robinson molto impegnativa e che richiedeva molte ipotesi di regolarità che non avevamo. Ci vollero anni di tentativi e impegno tenace prima che P. Daniele, S. Giuffrè, G. Idone ed io trovassimo la strada che ci condusse alla scoperta di una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza della forte dualità basata sulla nozione di cono tangente, la cosiddetta *Ipotesi  $S$*  (vedi Daniele and Giuffrè (2007), Daniele *et al.* (2007), Daniele *et al.* (2009), Maugeri and Raciti (2010)).

Questa teoria si applicava perfettamente ai problemi di equilibrio economico, ma nel caso della torsione elastoplastica la questione non era così semplice. Il problema della torsione elastoplastica fu risolto da Sofia Giuffrè che con una serie impressionante di lavori (vedi Giuffrè and Maugeri (2012, 2013, 2014), Giuffrè *et al.* (2015), Giuffrè *et al.* (2018), Idone and Maugeri (2009)) fece luce completa sul problema. Laura Scrimali applicò poi la teoria a dei problemi estremamente importanti come il problema della cooperazione per il controllo dell'inquinamento, il problema delle strategie di investimento per realizzare il protocollo di Kyoto, il problema del controllo degli investimenti nella politica ambientale, il problema del bilivello applicato alle emissioni inquinanti, nonché nuovi problemi di esistenza per disequazioni quasi-variazionali assieme allo studio della Lipschitzianità e differenziabilità della soluzione (vedi Scrimali (2008), Maugeri and Scrimali (2009), Donato *et al.* (2011), Scrimali (2012a,b,c, 2014), Maugeri and Scrimali (2016), and Mirabella and Scrimali (2018)).

### 16. Entra in scena Walras

La seconda questione ci fu presentata da R.T. Rockafellar che in una conferenza ad Erice illustrò il problema dell'equilibrio economico generale secondo Walras. Leon Walras studiò tale equilibrio ed enunciò un principio fondamentale secondo cui nei mercati non cooperativi se un agente economico soddisfa il vincolo di bilancio cosicché il valore dei beni che compra è comunque uguale al valore dei beni che offre, allora il valore totale delle vendite uguaglia il valore totale degli acquisti. Conseguenza è che, se esistono eccessi di domanda o offerta nei singoli mercati, la somma di questi nel complesso deve essere

nulla. Naturalmente bisogna supporre che tutti abbiano una dotazione di beni. Corollario importante è che, dati  $n - 1$  mercati in equilibrio, anche l' $n$ -esimo lo deve essere. Alcuni economisti hanno utilizzato la legge di Walras per escludere la possibilità degli squilibri nel mercato dell'occupazione in caso di mercato di beni in equilibrio. In questo modo essi confutano l'economia keynesiana per cui l'equilibrio dei beni non garantisce l'assenza di disoccupazione involontaria. Arrow e Debreu con un fondamentale lavoro per primi avevano studiato tale problema (vedi Arrow and Debreu (1954)). Ebbene, Maria Bernadette Donato, Monica Milasi e Carmen Vitanza sono riuscite a dimostrare che queste enunciazioni teoriche si esprimono mediante una disequazione quasi-variazionale anche nel caso di presenza di una funzione utilità da massimizzare. Poiché i teoremi esistenti non riuscivano a garantire l'esistenza della soluzione di tale disequazione, esse sono state capaci di dimostrare un teorema che servisse allo scopo (vedi Donato *et al.* (2008a,b,c), Anello *et al.* (2010), Donato *et al.* (2010), and Donato and Milasi (2011)).

## 17. Altri risultati

Contemporaneamente a questi risultati non posso trascurare di citare i lavori di Annamaria Barbagallo che riuscì a dimostrare la continuità rispetto al tempo della soluzione di una disequazione variazionale di evoluzione (vedi Barbagallo (2007)), di Fabio Raciti che ha pubblicato un lavoro molto generale sull'esistenza di soluzioni di disequazioni variazionali che il referee giudicò una sorta di Bibbia (vedi Maugeri and Raciti (2009)), di Daniele Puglisi che trovò altre condizioni necessarie e sufficienti per garantire la forte dualità (vedi Maugeri and Puglisi (2017)).

## 18. Il viaggio continua

Termina qui questo lungo ricordo, scusandomi di involontarie mancanze e inesattezze. Debbo ringraziare, invece, tutte le meravigliose persone che ho incontrato senza il cui aiuto nulla sarebbe stato possibile fare.

Non posso tacere che, se ho fatto qualcosa, lo debbo anche alla persona che mi sta accanto, già da 47 anni, più 5 di fidanzamento e che mi ha sopportato con tanta pazienza. E come tacere la gioia che mi danno i miei nipotini che mi dimostrano un attaccamento e un affetto straordinari!

Ma consentitemi anche di ringraziare profondamente quella persona che dall'alto dello Stretto di Messina ci benedice ora come nel passato, la Madonna della Lettera, alla cui benevolenza si deve tutto.

## References

- Anello, G., Donato, M. B., and Milasi, M. (2010). "A quasi-variational approach to a competitive economic equilibrium problem without strong monotonicity assumption". *Journal of Global Optimization* **48**(2), 279–287. DOI: [10.1007/s10898-009-9492-1](https://doi.org/10.1007/s10898-009-9492-1).
- Arena, O. (1969). "Sopra una classe di equazioni paraboliche". *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana* **2**, 9–24.
- Arrow, K. J. and Debreu, G. (1954). "Existence of an equilibrium for a competitive economy". *Econometrica* **22**, 265–290.

- Barbagallo, A. (2007). “Regularity results for time dependent variational and quasi-variational inequalities and applications to the calculation of dynamic traffic networks”. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* **17**(2), 277–304. DOI: [10.1142/S0218202507001917](https://doi.org/10.1142/S0218202507001917).
- Barbagallo, A., Daniele, P., Lorino, M., Maugeri, A., and Mirabella, C. (2013). “Further results for general financial equilibrium problems via variational inequalities”. *Journal of Mathematical Finance* **3**(1), 1–20. DOI: [10.4236/jmf.2013.31003](https://doi.org/10.4236/jmf.2013.31003).
- Barbagallo, A., Daniele, P., Lorino, M., Maugeri, A., and Mirabella, C. (2014). “A variational approach to the evolutionary financial equilibrium problem with memory terms and adaptive constraints”. In: *Network Models in Economics and Finance*. Ed. by V. K. et al. Eds. Vol. 100. Switzerland: Springer Optimization and Its Applications, pp. 13–23.
- Campanato, S. (1967). “Un risultato relativo ad equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo non variazionale”. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze, Serie 3* **21**(4), 701–707.
- Campanato, S. (1968). “Sul problema di Cauchy-Dirichlet per equazioni paraboliche del secondo ordine, non variazionali, a coefficienti discontinui”. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova* **41**, 153–163.
- Campanato, S. (1977). “Sistemi parabolici del secondo ordine, non variazionali, a coefficienti discontinui”. *Annali dell’Università di Ferrara* **23**, 169–187.
- Campanato, S. (2019). *Opere scelte*. Ed. by P. Cannarsa, G. Moscarillo, and C. Sbordone. Liguori Editore.
- Chiarenza, F., Frasca, M., and Longo, P. (1993). “ $W^{2,p}$ -solvability of the Dirichlet problem for nondivergence elliptic equations with VMO coefficients”. *Transactions of the American Mathematical Society* **336**(2), 841–853. DOI: [10.1090/S0002-9947-1993-1088476-1](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1993-1088476-1).
- Ciarcià, C. and Daniele, P. (2016). “New existence theorems for quasi-variational inequalities and applications to financial models”. *European Journal of Operational Research* **251**(1), 288–299. DOI: [10.1016/j.ejor.2015.11.013](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.11.013).
- Cordes, H. O. (1961). “0 order a priori estimates for solutions of elliptic differential equations”. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* **4**(3), 157–162.
- Daniele, P. (2003). “Variational inequalities for evolutionary financial equilibrium”. In: *Innovations in Financial and Economic Networks*. Ed. by A. Nagurney. Cheltenham, England: Edward Elgar Publishing, pp. 84–108.
- Daniele, P. (2005a). “Evolutionary variational inequalities applied to financial equilibrium problems in an environment of risk and uncertainty”. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications* **63**(5-7), 1645–1653. DOI: [10.1016/j.na.2004.12.006](https://doi.org/10.1016/j.na.2004.12.006).
- Daniele, P. (2005b). “Variational inequalities for general evolutionary financial equilibrium”. In: *Variational Analysis and Applications*. Ed. by F. Giannessi and A. Maugeri. Springer Verlag, pp. 279–299.
- Daniele, P. and Giuffrè, S. (2007). “General infinite dimensional duality and applications to evolutionary network equilibrium problems”. *Optimization Letters* **1**(3), 227–243. DOI: [10.1007/s11590-006-0028-z](https://doi.org/10.1007/s11590-006-0028-z).
- Daniele, P., Giuffrè, S., Idone, G., and Maugeri, A. (2007). “Infinite dimensional duality and applications”. *Mathematische Annalen* **339**(1), 221–239. DOI: [10.1007/s00208-007-0118-y](https://doi.org/10.1007/s00208-007-0118-y).
- Daniele, P., Giuffrè, S., and Lorino, M. (2016). “Functional inequalities, regularity and computation of the deficit and surplus variables in the financial equilibrium problem”. *Journal of Global Optimization* **65**(3), 575–596. DOI: [10.1007/s10898-015-0382-4](https://doi.org/10.1007/s10898-015-0382-4).
- Daniele, P., Giuffrè, S., and Maugeri, A. (2009). “Remarks on General Infinite Dimensional Duality with Cone and Equality Constraints”. *Communications in Applied Analysis* **13**(4), 567–578.

- Daniele, P., Giuffrè, S., and Pia, S. (2005). “Competitive financial equilibrium problems with policy interventions”. *Journal of Industrial and Management Optimization* **1**(1), 39–52. DOI: [10.3934/jimo.2005.1.39](https://doi.org/10.3934/jimo.2005.1.39).
- Daniele, P., Maugeri, A., and Oettli, W. (1998). “Variational inequalities and time dependent traffic equilibria”. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences - Series I: Mathematics* **326**(9), 1059–1062. DOI: [10.1016/S0764-4442\(98\)80062-1](https://doi.org/10.1016/S0764-4442(98)80062-1).
- Daniele, P., Maugeri, A., and Oettli, W. (1999). “Time dependent traffic equilibria”. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences - Series I: Mathematics* **103**(3), 543–555. DOI: [10.1023/A:1021779823196](https://doi.org/10.1023/A:1021779823196).
- De Luca, M. (1984). “A convex optimization problem for a continuous model of traffic flow”. *Annali di Matematica Pura e Applicata* **35**, 31–36.
- De Luca, M. (1990). “The nonlinear continuum traffic equilibrium problem and a related Dirichlet problem for quasilinear elliptic equations”. *Le Matematiche* **41**, 1–11.
- De Luca, M. (1997). “Existence of solutions for a time-dependent quasi-variational inequality”. In: *Equilibrium problems with side constraints. Lagrangean theory and duality*. Vol. 48, pp. 101–106.
- De Luca, M. and Maugeri, A. (1989). “Quasi-variational inequalities and applications to the traffic equilibrium problem; discussion of a paradox”. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **28**(C), 163–171. DOI: [10.1016/0377-0427\(89\)90328-2](https://doi.org/10.1016/0377-0427(89)90328-2).
- De Luca, M. and Maugeri, A. (1992). “Variational inequalities applied to the study of paradoxes in equilibrium problems”. *Optimization* **25**, 249–259.
- Di Fazio, G. and Palagachev, D. K. (1996). “Oblique derivative problem for quasilinear elliptic equations with VMO coefficients”. *Bulletin of the Australian Mathematical Society* **53**(3), 501–513. DOI: [10.1017/S0004972700017275](https://doi.org/10.1017/S0004972700017275).
- Di Fazio, G., Palagachev, D. K., and Ragusa, M. A. (1999). “Global Morrey regularity of strong solutions to the Dirichlet problem for elliptic equations with discontinuous coefficients”. *Journal of Functional Analysis* **166**(2), 179–196. DOI: [10.1006/jfan.1999.3425](https://doi.org/10.1006/jfan.1999.3425).
- Donato, M. B. and Milasi, M. (2011). “Lagrangean variables in infinite dimensional spaces for a dynamic economic equilibrium problems”. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications* **74**(15), 5048–5056. DOI: [10.1016/j.na.2011.04.070](https://doi.org/10.1016/j.na.2011.04.070).
- Donato, M. B., Milasi, M., and Scrimali, L. (2011). “Walrasian Equilibrium Problem with Memory Term”. *Journal of Optimization Theory and Applications* **151**(1), 64–80. DOI: [10.1007/s10957-011-9862-y](https://doi.org/10.1007/s10957-011-9862-y).
- Donato, M. B., Milasi, M., and Vitanza, C. (2008a). “An existence result of a quasi-variational inequality associated to an equilibrium problem”. *Journal of Global Optimization* **40**(1-3), 87–97. DOI: [10.1007/s10898-007-9199-0](https://doi.org/10.1007/s10898-007-9199-0).
- Donato, M. B., Milasi, M., and Vitanza, C. (2008b). “Dynamic Walrasian price equilibrium problem: evolutionary variational approach with sensitivity analysis”. *Optimization Letters* **2**(1), 113–126. DOI: [10.1007/s11590-007-0047-4](https://doi.org/10.1007/s11590-007-0047-4).
- Donato, M. B., Milasi, M., and Vitanza, C. (2008c). “Quasi-variational approach of a competitive economic equilibrium problem with utility function: existence of equilibrium”. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* **18**(3), 351–367. DOI: [10.1142/S0218202508002711](https://doi.org/10.1142/S0218202508002711).
- Donato, M. B., Milasi, M., and Vitanza, C. (2010). “A new contribution to a dynamic competitive equilibrium problem”. *Applied Mathematics Letters* **23**(2), 148–151. DOI: [10.1016/j.aml.2009.09.002](https://doi.org/10.1016/j.aml.2009.09.002).
- Donato, S. (1979). “The oblique derivative problem for a class of parabolic equations in three variables with measurable coefficients”. *Le Matematiche* **34**, 133–142.
- Donato, S. (1983). “A nonhomogeneous problem for a class of singular parabolic equations”. *Le Matematiche* **38**(1), 83–94.

- Donato, S. (1987). “A normal derivative problem for a class of parabolic equations in several variables with discontinuous coefficients”. *Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni* **7**, 255–272.
- Donato, S. and Idone, G. (1980). “The Cauchy-Dirichlet problem for a class of parabolic systems with measurable coefficients”. *Annali dell’ Università di Ferrara* **26**(1), 15–28.
- Fattorusso, L. and Idone, G. (1992). “ $\mathcal{L}^{2,\lambda+1}$ -regularity of the solutions to nonhomogeneous parabolic systems in divergence form”. *Le Matematiche*, 117–139.
- Fattorusso, L. and Idone, G. (2000). “Partial Hölder continuity results for solutions of non linear non variational elliptic systems with strictly controlled growth”. *Rendiconti del Seminario Matematico dell’ Università di Padova* **103**, 23–29.
- Fichera, G. (1964). “Problemi elastostatici con vincoli unilateri: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno”. *Accademia Nazionale dei Lincei* **7**, 91–140.
- Giuffrè, S. (2000). “Well posedness of the tangential oblique derivative problem in the plane”. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences - Series I: Mathematics* **331**(3), 207–212. DOI: [10.1016/S0764-4442\(00\)01605-0](https://doi.org/10.1016/S0764-4442(00)01605-0).
- Giuffrè, S. (2003). “On an oblique derivative problem of finite index for nonlinear elliptic discontinuous equations in the plane”. *Publicationes Mathematicae* **63**(4), 611–621.
- Giuffrè, S. (2004). “Global hölder regularity for discontinuous elliptic equations in the plane”. *Proceedings of the American Mathematical Society* **132**(5), 1333–1344. DOI: [10.1090/S0002-9939-03-07348-9](https://doi.org/10.1090/S0002-9939-03-07348-9).
- Giuffrè, S. (2005). “Strong Solvability of Boundary Value Contact Problems”. *Applied Mathematics and Optimization* **51**(3), 361–372. DOI: [10.1007/s00245-004-0817-7](https://doi.org/10.1007/s00245-004-0817-7).
- Giuffrè, S. and Idone, G. (2005). “Global regularity for solutions to dirichlet problem for discontinuous elliptic systems with nonlinearity  $q > 1$  and with natural growth”. *Bollettino della Unione Matematica Italiana B* **8**(2), 519–524.
- Giuffrè, S. and Idone, G. (2011). “On linear and nonlinear elliptic boundary value problems in the plane with discontinuous coefficients”. *Discrete Continuous Dynamical Systems* **31**(4), 1347–1363. DOI: [10.3934/dcds.2011.31.1347](https://doi.org/10.3934/dcds.2011.31.1347).
- Giuffrè, S., Idone, G., and Maugeri, A. (2012). “Regularity theory of the gradient for general nonlinear parabolic systems”. *Applicable Analysis* **91**(10), 1847–1866. DOI: [10.1080/00036811.2011.641174](https://doi.org/10.1080/00036811.2011.641174).
- Giuffrè, S. and Maugeri, A. (2012). “New results on infinite dimensional duality in elastic-plastic torsion”. *Filomat* **26**(5), 1029–1036. DOI: [10.2298/FIL1205029G](https://doi.org/10.2298/FIL1205029G).
- Giuffrè, S. and Maugeri, A. (2013). “Lagrange multipliers in elastic-plastic torsion”. In: *AIP Conference Proceedings*. Vol. 1558. Rhodes, Greece, pp. 1801–1804. DOI: [10.1063/1.4825875](https://doi.org/10.1063/1.4825875).
- Giuffrè, S. and Maugeri, A. (2014). “A measure-type Lagrange multiplier for the elastic-plastic torsion”. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications* **102**, 23–29. DOI: [10.1016/j.na.2014.01.023](https://doi.org/10.1016/j.na.2014.01.023).
- Giuffrè, S., Maugeri, A., and Puglisi, D. (2015). “Lagrange multipliers in elastic-plastic torsion problem for nonlinear monotone operators”. *Journal of Differential Equations* **259**(3), 817–837. DOI: [10.1016/j.jde.2015.02.019](https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.02.019).
- Giuffrè, S., Pratelli, A., and Puglisi, D. (2018). “Radial solutions and free boundary of the elastic-plastic torsion problem”. *Journal of Convex Analysis* **25**(2), 529–543.
- Guglielmino, F. (1964). “Sulle equazioni paraboliche del secondo ordine di tipo non variazionale”. *Annali di Matematica Pura e Applicata* **65**, 127–151.
- Guglielmino, F. (1965). “Nuovi contributi allo studio delle equazioni paraboliche del secondo ordine di tipo non variazionale”. *Ricerche di Matematica* **14**, 124–144.
- Idone, G. (2004). “Elliptic systems with nonlinearity  $q$  greater or equal than two with controlled growth. Global Hölder continuity of solutions to the Dirichlet problem”. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **290**(1), 147–170. DOI: [10.1016/j.jmaa.2003.09.038](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2003.09.038).

- Idone, G. and Maugeri, A. (2009). “Generalized constraints qualification and infinite dimensional duality”. *Taiwanese Journal of Mathematics* **13**(6A), 1711–1722. DOI: [10.11650/twjm/1500405610](https://doi.org/10.11650/twjm/1500405610).
- Lions, J. J. and Stampacchia, G. (1967). “Variational Inequalities”. *Communications on Pure and Applied Mathematics* **20**, 493–519.
- Marino, M., Maugeri, A., and Naumann, J. (1999). “New results of Hölder continuity for nonvariational basic parabolic systems”. *Ricerche di Matematica* **48**, 259–276.
- Maugeri, A. (1970a). “Il problema di derivata obliqua per equazioni paraboliche in tre variabili a coefficienti discontinui”. *Le Matematiche* **29**, 298–312.
- Maugeri, A. (1970b). “Regolarizzazione delle soluzioni del primo problema al contorno per le equazioni paraboliche”. *Le Matematiche* **25**, 298–312.
- Maugeri, A. (1972). “Il problema di derivata normale per equazioni paraboliche lineari”. *Le Matematiche* **27**, 87–93.
- Maugeri, A. (1978). “Sul terzo problema al contorno per le equazioni lineari di tipo parabolico a coefficienti discontinui”. *Ricerche di Matematica* **27**, 223–233.
- Maugeri, A. (1982). “Applications des inéquations variationales au problème de l'équilibre du trafic”. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris* **295**, 3–23.
- Maugeri, A. (1987). “Convex programming, variational inequalities and applications to the traffic equilibrium problem”. *Applied Mathematics and Optimization* **16**(1), 169–185. DOI: [10.1007/BF01442190](https://doi.org/10.1007/BF01442190).
- Maugeri, A. and Puglisi, D. (2017). “Convex programming, variational inequalities and applications to the traffic equilibrium problem”. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis* **18**(3), 369–378.
- Maugeri, A. and Raciti, F. (2009). “On existence theorems for monotone and nonmonotone variational inequalities”. *Journal of Convex Analysis* **16**(3-4), 899–911.
- Maugeri, A. and Raciti, F. (2010). “Remarks on Infinite Dimensional Duality”. *Journal of Global Optimization* **46**(4), 581–588. DOI: [10.1007/s10898-009-9442-y](https://doi.org/10.1007/s10898-009-9442-y).
- Maugeri, A. and Scrimali, L. (2009). “Global Lipschitz continuity of solutions to parameterized variational inequalities”. *Bollettino Unione Matematica Italiana* **2**(1), 45–69.
- Maugeri, A. and Scrimali, L. (2016). “A new approach to solve convex infinite-dimensional bilevel problems: application to the pollution emission price problem”. *Journal of Optimization Theory and Applications* **169**(2), 370–387. DOI: [10.1007/s10957-016-0894-1](https://doi.org/10.1007/s10957-016-0894-1).
- Mirabella, C. and Scrimali, L. (2018). “Cooperation in pollution control problems via evolutionary variational inequalities”. *Journal of Global Optimization* **70**(2), 455–476. DOI: [10.1007/s10898-017-0580-3](https://doi.org/10.1007/s10898-017-0580-3).
- Miranda, C. (1963). “Sulle equazioni ellittiche del secondo ordine di tipo non variazionale, a coefficienti discontinui”. *Annali di Matematica Pura ed Applicata* **63**(4), 353–386.
- Nagurney, A., Liu, Z., Cojocaru, M. G., and Daniele, P. (2007a). “Dynamic electric power supply chains and transportation networks: an evolutionary variational inequality formulation”. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review* **43**(5), 624–646. DOI: [10.1016/j.tre.2006.03.002](https://doi.org/10.1016/j.tre.2006.03.002).
- Nagurney, A., Parkes, D., and Daniele, P. (2007b). “The Internet, evolutionary variational inequalities, and the time dependent Braess Paradox”. *Computational Management Science* **4**(4), 355–375. DOI: [10.1007/s10287-006-0027-7](https://doi.org/10.1007/s10287-006-0027-7).
- Naumann, J. (1990). “Interior integral estimate on weak solutions of certain degenerate elliptic systems”. *Annali di Matematica Pura ed Applicata* **156**(1), 113–125. DOI: [10.1007/BF01766975](https://doi.org/10.1007/BF01766975).
- Naumann, J. and Wolf, J. (2000). “Hölder continuity of weak solutions to parabolic systems with controlled growth non-linearities (two spatial dimensions)”. *Le Matematiche* **55**, 125–144.

- Naumann, J., Wolf, J., and Wolf, M. (1998). “On the Hölder continuity of weak solutions to nonlinear parabolic systems in two space dimensions”. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* **39**, 237–255.
- Palagachev, D. K. (1993). “Global strong solvability of Dirichlet problem for a class of nonlinear elliptic equations in the plane”. *Le Matematiche* **48**, 311–321.
- Palagachev, D. K. (1995). “Quasilinear elliptic equations with VMO coefficients”. *Transactions of the American Mathematical Society* **347**(7), 2481–2493. DOI: [10.1090/S0002-9947-1995-1308019-6](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1995-1308019-6).
- Palagachev, D., Popivanov, P., and Taira, K. (1999). “A degenerate Neumann problem for quasilinear elliptic integro-differential operators”. *Mathematische Zeitschrift* **230**(4), 679–694. DOI: [10.1007/PL00004712](https://doi.org/10.1007/PL00004712).
- Scrimali, L. (2008). “A solution differentiability result for evolutionary quasi-variational inequalities”. *Journal of Global Optimization* **40**(1-3), 417–425. DOI: [10.1007/s10898-007-9189-2](https://doi.org/10.1007/s10898-007-9189-2).
- Scrimali, L. (2012a). “An inverse variational inequality approach to the evolutionary spatial price equilibrium problem”. *Optimization and Engineering* **13**(3), 375–387. DOI: [10.1007/s11081-011-9152-4](https://doi.org/10.1007/s11081-011-9152-4).
- Scrimali, L. (2012b). “Infinite Dimensional Duality Theory Applied to Investment Strategies in Environmental Policy”. *Journal of Optimization Theory and Applications* **154**(1), 258–277. DOI: [10.1007/s10957-012-9995-7](https://doi.org/10.1007/s10957-012-9995-7).
- Scrimali, L. (2012c). “Pollution control quasi-equilibrium problems with joint implementation of environmental projects”. *Applied Mathematics Letters* **25**(3), 385–392. DOI: [10.1016/j.aml.2011.09.019](https://doi.org/10.1016/j.aml.2011.09.019).
- Scrimali, L. (2014). “Evolutionary quasi-variational inequalities and the dynamic multiclass network equilibrium problem”. *Numerical Functional Analysis and Optimization* **35**(7-9), 1225–1244. DOI: [10.1080/01630563.2014.895764](https://doi.org/10.1080/01630563.2014.895764).
- Smith, M. J. (1979). “The existence, uniqueness and stability of traffic equilibrium”. *Transportation Research Part B: Methodological* **13**(4), 295–304.
- Stampacchia, G. (1968). “Variational Inequalities. Theory and Applications of Monotone Operators”. *Proceedings of a Nato Advances Study Inst. Venice*.
- Talenti, G. (1967). “Problemi di derivata obliqua per equazioni ellittiche in due variabili”. *Bollettino dell’Unione Matematica Italiana* **22**(3), 505–526.
- Termini, D. and Vitanza, C. (1990). “Weighted estimates for the Hardy-Littlewood maximal operator and Dirac deltas”. *Bulletin of the London Mathematical Society* **22**(4), 367–374. DOI: [10.1112/blms/22.4.367](https://doi.org/10.1112/blms/22.4.367).
- Vitanza, C. (1981). “On the Cauchy-Neumann problem for the singular parabolic equations with discontinuous coefficients in two variables”. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova* **65**, 191–204.
- Vitanza, C. (1984). “Higher order degenerate parabolic systems with measurable coefficients and variational form”. *Bollettino dell’Unione Matematica Italiana C* **6**, 343–369.
- Vitanza, C. (1988). “ $L^p$  and Hölder continuity regularity for the degenerate Cauchy problem”. *Bollettino dell’Unione Matematica Italiana B* **7**, 67–88.
- Vitanza, C. and Zamboni, P. (2005). “Regularity and existence results for degenerate elliptic equations”. In: *Variational Analysis and Applications*. Ed. by F. Giannessi and A. Maugeri. Vol. 79. New York: Springer, pp. 1129–1140.
- Vitanza, C. and Zamboni, P. (2007). “A variational inequality for a degenerate elliptic operator under minimal assumptions on the coefficients”. *Bollettino dell’Unione Matematica Italiana B* **10**(2), 341–356.

---

\* Università degli Studi di Catania  
Dipartimento di Matematica e Informatica,  
Viale Andrea Doria, 6, Catania, Italy  
Email: maugeri@dmf.unict.it

Paper contributed to the meeting on "Variational Analysis, PDEs and Mathematical Economics",  
held in Messina, Italy (19–20 September 2019), on the occasion of Prof. Antonino Maugeri's 75th birthday,  
under the patronage of the *Accademia Peloritana dei Pericolanti*

Manuscript received 2 May 2020; published online 13 December 2020



© 2020 by the author(s); licensee *Accademia Peloritana dei Pericolanti* (Messina, Italy). This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).